

© 2010 г. А. Г. ИВАНОВ,
Б. В. СЕМЕНОВ, канд. техн. наук,
Н. И. ЧЕРНЫХ, д-р физ.-мат. наук
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

РАСЧЕТ ФОРМЫ АНТЕННОГО ОТРАЖАТЕЛЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО ГЛАВНЫЙ ЛУЧ С ЗАДАННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИЕЙ¹

Предложен метод расчета параметров, определяющих геометрию отражателя антенны, с целью получения в дальней зоне диаграммы направленности заданной конфигурации. Использована параллельная программа конечномерной минимизации. Приведены результаты моделирования.

1. Введение

Задача построения отражателя антенны с одиночным облучателем для формирования заданной диаграммы направленности (ДН) имеет важное значение при оптимальном синтезе антенных систем различных назначений.

В Институте математики и механики УрО РАН накоплен большой опыт [1, 2] применения результатов и алгоритмов теории приближения функций в задачах амплитудно-фазового и чисто фазового синтеза диаграмм направленности гибридных зеркальных антенн, что позволяет в случае небольших антенных решеток (20–50 облучателей в решетке) рассчитывать управляющие параметры антенны для реконфигурации и перемещения контурного луча в реальном масштабе времени, например, для антенной системы, установленной на спутнике с низкой орбитой. Метод итерационного фазового синтеза [3] в работе [4] модифицирован для расчета поверхности зеркала, формирующей заданную контурную ДН. Другой метод синтеза поверхности отражателя предложен в [5].

Особенностью и целью данной работы является не создание быстрых алгоритмов управления формой контурного луча в реальном масштабе времени, а развитие более точных методов оптимального синтеза ДН за счет выбора подходящей формы отражателя в стационарных условиях с использованием высокопроизводительной ЭВМ.

2. Постановка задачи

Антенна [6] состоит из облучателя и отражателя (зеркала), см. рис. 1,а. Облучатель обеспечивает формирование распределения амплитуды и начальное распределение фазы электромагнитного поля по апертуре антенной системы и, в конечном счете, по поверхности отражателя. Распределение, обеспечиваемое облучателем, задано как параметр задачи. В качестве апертуры антенны удобно брать ближайшую к краю отражателя плоскость, перпендикулярную оси, направленной на середину зоны обслуживания. Отражатель формирует некоторое распределение амплитуды в дальней зоне, которое определяется геометрией отражателя и параметрами облучателя – его положением относительно отражателя и ДН его излучения. При

¹ Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Математическая теория управления» и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 09-01-00436, 09-01-00014).

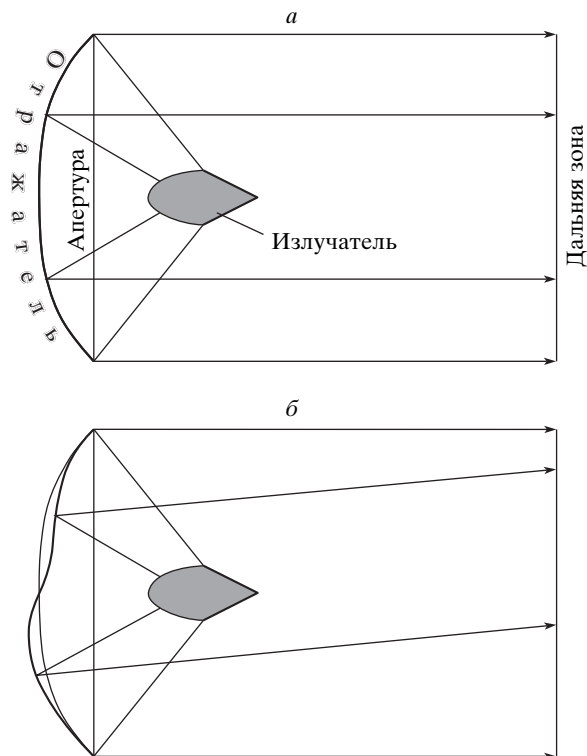


Рис. 1. Условная схема антенной системы, сверху *a* – схема с параболическим зеркалом, *б* – изменение распределения в дальней зоне при изменении геометрии зеркала.

выбранной начальной геометрии системы (размер и форма отражателя, положение и ДН облучателя) за счет изменения геометрии поверхности зеркала происходит корректировка фазового распределения отраженного сигнала в апертуре, которое и определяет ДН в дальней зоне (рис. 1, *б*). Даже для существенного изменения фазового распределения отраженного от зеркала поля в апертуре достаточно варьировать поверхность зеркала по его глубине лишь в пределах нескольких длин волн. Поэтому в первом приближении можно пренебречь влиянием этих вариаций на амплитудное распределение поля.

Требуется построить геометрию антенны, которая при данных параметрах облучателя обеспечивала бы в дальней зоне заданное распределение амплитуды формируемого антенной электрического поля, а значит, и распределение мощности излучения антенны.

Рассматриваемую задачу синтеза поверхности отражателя целесообразно решать, когда требуется надежно (во времени) формировать контурный луч (контурную ДН поля) сложной формы, например, для устойчивого обслуживания со стационарной орбиты территории определенного государства с соблюдением требований по электромагнитной совместимости.

3. Математическая модель

В плоскости апертуры задаем сетку с координатами ξ, η (в длинах волн), в дальней зоне – сетку с координатами u, v . Параметрами облучателя являются его амплитудно-фазовая диаграмма и набег фазы, образовавшийся из-за длины пути

луча от облучателя до точки ξ, η после отражения от начального зеркала и рассчитываемый в приближении геометрической оптики. Эти параметры задаются при помощи комплекснозначной функции $F = F(\xi, \eta)$. Вклад от изменения геометрии отражателя, связанный с изменением длины оптического пути до точек апертуры, учитывается при помощи действительной функции $s = s(\xi, \eta)$, определенной на апертуре.

Для вычисления амплитуды $I(u, v)$ электрического поля в точках дальней зоны свободного пространства в направлении (u, v) используется формула Кирхгофа [7, (1.74)]:

$$(1) \quad I(u, v) = \left| \iint_A \left[F(\xi, \eta) e^{2\pi i(u\xi + v\eta)} e^{-2\pi i s(\xi, \eta)} \right] d\xi d\eta \right|.$$

Здесь A – апертура зеркала, $u = \cos \varphi \sin \theta$, $v = \sin \varphi \sin \theta$ – безразмерные величины, обобщенные координаты направления в сферической системе координат с полюсами на выбранной оси отражателя.

Можно заметить, что параметр s в формуле Кирхгофа является поправкой к фазе комплексной величины F , деленной на -2π :

$$\begin{aligned} F e^{-2\pi i s} &= (|F| \cos \varphi_F + i|F| \sin \varphi_F) (\cos(-2\pi s) + i|F| \sin(-2\pi s)) = \\ &= |F| \cos(\varphi_F - 2\pi s) + i|F| \sin(\varphi_F - 2\pi s) = |F| e^{i(\varphi_F - 2\pi s)}, \end{aligned}$$

где φ_F – фаза F , $|F|$ – амплитуда F .

Задача состоит в построении функции $s(\xi, \eta)$, обеспечивающей заданное распределение амплитуды в дальней зоне. Траектуя найденное решение $s(\xi, \eta)$ как корректировку длины оптического пути от облучателя через отражатель до точки $(\xi, \eta) \in A$ можно рассчитать [2] соответствующее изменение формы поверхности начального зеркала.

3.1. Форма луча в дальней зоне

С точки зрения потребителей дальнюю зону можно разделить на три области: рабочую область главного лепестка ДН антенны, которая должна совпадать с зоной обслуживания антенны (сокращенно – область главного луча), область боковых лепестков и промежуточную область – область скатов главного лепестка ДН.

В точках, соответствующих главному лучу, желательно обеспечить максимальное, по возможности равномерное, значение мощности. Обычно максимальное значение реализовавшейся амплитуды принимается за уровень $1 (= 0 \text{ dB})^2$. В таком случае считается допустимым, чтобы в точках главного луча уровень амплитуды был не меньше $0,707 (-3 \text{ dB})$, а флуктуация амплитуды в вершинной части главного луча, которую нужно сделать по возможности максимально большой, должна быть в пределах $0,891 (-1 \text{ dB})$. В точках боковых лепестков (все, что вне главного лепестка ДН) значение мощности должно быть как можно меньшим. В идеале мощность боковых лепестков должна стремиться к нулю. На практике обычно выбирают конкретный уровень амплитуды (например, -25 dB), который не должен превышать.

В качестве целевой ДН (модельного луча) с нужным распределением берется функция $D(u, v)$, имеющая постоянный уровень в вершинной части главного луча и низкий уровень в области бокового излучения. Между этими областями функция имеет скат, максимально достижимая крутизна которого зависит от геометрических размеров зеркала.

² dB – децибел, здесь принимаем $20 \lg(I)$.

В антенной технике принято описывать узконаправленные диаграммы направленности с низким уровнем боковых лепестков (синтезируемые и модельные (целевые)) в децибелах.

4. Функции невязок

Ранее в Институте математики и механики УрО РАН был разработан оригинальный итерационный метод [3, 4] решения задачи расчета антенного отражателя. Он позволяет построить очень эффективные специальные алгоритмы. Метод неявно использует квадратичную невязку между заданным и получающимся распределением:

$$(2) \quad J_0[s(\cdot, \cdot)] = \iint_{u,v} (D(u, v) - I(u, v))^2 dudv.$$

Здесь $I(u, v)$ вычисляется по формуле (1) и зависит от $s(\xi, \eta)$.

Эта невязка имеет некоторые недостатки. Во-первых, ее малость не гарантирует поточечной близости I к D .

Во-вторых, штрафуются любое отклонение от образца. Например, если в области боковых лепестков в какой-то точке реализовалась амплитуда меньшая, чем допустимый уровень, такое отклонение будет оштрафовано, хотя по смыслу задачи этого быть не должно.

В-третьих, выраженный в абсолютных единицах уровень сигнала в дальней зоне оказывается очень мал в области боковых лепестков. Поэтому превышение уровня поля в области боковых лепестков штрафуются слабо по сравнению со штрафами в области главного луча.

При практической реализации итерационного метода второй недостаток частично компенсировался коррекцией модельной ДН $D(u, v)$, а третий – введением весовой функции с большей величиной в районе боковых лепестков.

В работе предлагается более кардинальное совершенствование математической модели (2) задачи синтеза ДН.

Введем некоторые вспомогательные переменные:

E^* – уровень амплитуды, соответствующий главному лучу;

E_* – уровень амплитуды, соответствующий допустимому уровню боковых лепестков;

$\text{dB}(x) = 20 \lg(x)$ – функция перевода амплитуды x в децибелы.

Рассмотрим несколько альтернативных невязок.

Первая невязка отличается от квадратичной лишь тем, что штрафует только отклонения в «неправильную» сторону:

$$J_1[s(\cdot, \cdot)] = \sum_u \sum_v G_1(D(u, v), I(u, v)),$$

где

$$G_1(D, I) = \begin{cases} (D - I)^2, & D > E^*, I < D; \\ 0, & D > E^*, I \geq D; \\ (D - I)^2, & D \leq E^*, I \geq D; \\ 0, & D \leq E^*, I < D. \end{cases}$$

Вторая невязка аналогична первой, но в ней сравниваются уровни амплитуды, выраженные в децибелах:

$$(3) \quad J_2[s(\cdot, \cdot)] = \sum_u \sum_v G_2(\text{dB}(D(u, v)), \text{dB}(I(u, v))),$$

где

$$G_2(D, I) = \begin{cases} (D - I)^2, & D > \text{dB}(E^*), I < D; \\ 0, & D > \text{dB}(E^*), I \geq D; \\ (D - I)^2, & D \leq \text{dB}(E^*), I \geq D; \\ 0, & D \leq \text{dB}(E^*), I < D. \end{cases}$$

При этом требования к уровню сигнала в области боковых лепестков возрастают.

Третья невязка штрафует только максимальное отклонение от заданного уровня, выраженное в децибелах:

$$J_3[s(\cdot, \cdot)] = \max_{u, v} G_2(D(u, v), I(u, v)).$$

Здесь G_2 имеет тот же смысл, что и в (3).

Четвертое семейство невязок сконструировано на базе функции $D(u, v)$, но берет из $D(u, v)$ только информацию о геометрии двух областей – области главного луча ($M^* = \{(u, v) : D(u, v) \geq E^*\}$) и области боковых лепестков ($M_* = \{(u, v) : D(u, v) \leq E_*\}$). Значение мощности $I(u, v)$ в точках области скатов главного лепестка ДН функции $D(u, v)$ никак не учитывается (не штрафуются).

В семействе используются две вспомогательные функции:

$$g_4(x) = \begin{cases} 0, & x \leq d_1; \\ \left(\frac{x - d_1}{d_3}\right)^{n_4}, & x > d_1 \end{cases}$$

и

$$G_4(u, v) = \begin{cases} g_4(\text{dB}(I(u, v)) - \text{dB}(E_*)), & D(u, v) \leq E_*; \\ g_4(-\text{dB}(I(u, v))), & D(u, v) \geq E^*; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Невязка получается суммированием значений функции G_4 на всей сетке:

$$J_4[s(\cdot, \cdot)] = \sum_u \sum_v G_4(u, v).$$

Параметры $d_1 \geq 0$, $d_3 > 0$ и $n_4 = 1, 2, 3, \dots$ выбираются эмпирически. Например, когда вычисляем начальное приближение на редкой сетке аппроксимации (см. ниже), имеет смысл взять $d_1 = 3$, $d_3 = 2$, $n_4 = 2$; если же происходит поиск окончательного решения на частой сетке аппроксимации, то берем $d_1 = 0,5$, $d_3 = 1$, $n_4 = 4$.

5. Применение параллельной программы конечномерной минимизации. Вычислительная сетка и сетка аппроксимации

Сетка ξ, η , на которой заданы функции $F(\xi, \eta)$, $s(\xi, \eta)$ и на которой происходит численное интегрирование двойного интеграла (1), имеет размер $41 \times 41 = 1681$ точек. Такая сетка обеспечивает достаточную точность аппроксимации функций и интегрирования. Будем называть эту сетку вычислительной сеткой.

Для нахождения функции $s(\xi, \eta)$ применяем разработанную ранее параллельную программу поиска минимума функции многих переменных [8, 9], основанную на идеологии метода Хука-Дживса [10]. К сожалению, эта программа не может обеспечить (за разумное время счета) минимизацию функции большого (41×41)

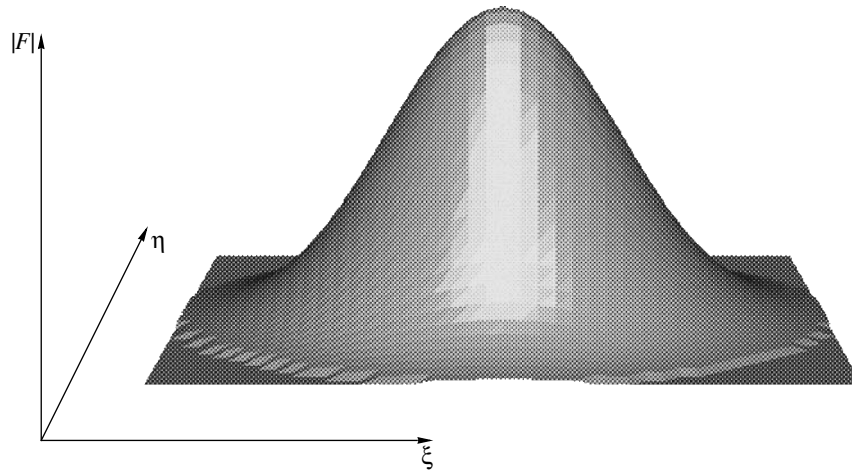


Рис. 2. Распределение амплитуды $|F(\xi, \eta)|$ поля на апертуре.

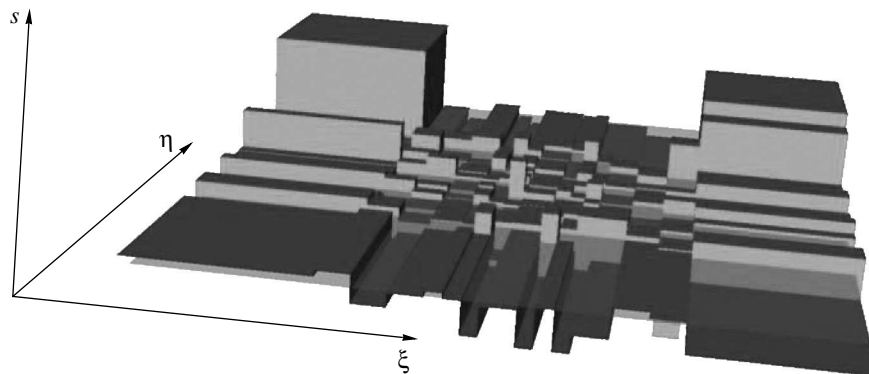


Рис. 3. Кусочно-постоянная аппроксимация функции $s(\xi, \eta)$ на неравномерной сетке.

числа переменных. Максимальная разумная размерность аргумента функции соответствует двумстам переменным. В связи с этим возникает вопрос аппроксимации функции $s(\xi, \eta)$ при помощи сравнительно небольшого числа параметров.

Подход, связанный с применением степенных многочленов, себя не оправдал и здесь не рассматривается.

Применен подход, основанный на использовании двух сеток – частой вычислительной сетки 41×41 и редкой сетки аппроксимации. Число узлов редкой сетки соответствует числу варьируемых параметров, которые являются аргументами минимизируемой функции. Во всех случаях берется квадратная редкая сетка, т.е. число варьируемых переменных может быть 4, 9, 16, ..., 196.

Были рассмотрены кусочно-постоянная аппроксимация на равномерной сетке, кусочно-линейная аппроксимация на равномерной сетке, кусочно-постоянная аппроксимация на неравномерной сетке. Последняя имеет смысл при обычной для облучателя «колоколообразной» форме распределения мощности (рис. 2, график распределения мощности в долях от максимального ее значения). Сетка сгущается в области большей мощности облучателя.

В частности, в одном из вариантов неравномерная сетка аппроксимации строилась из условия обеспечения равной энергии по ячейкам сетки:

$$\iint_{\text{ячейка сетки}} |F(\xi, \eta)| d\xi d\eta \approx \text{const.}$$

На рис. 3 изображен пример графика функции $s(\xi, \eta)$ (в длинах волн) для этой сетки.

6. Результаты счета

В численных экспериментах проводились расчеты для разных модельных лучей.

Один вариант модельного луча являлся аппроксимацией формы Свердловской области (рис. 4). Здесь, а также на рис. 5, 6 горизонтальная плоскость в верхней части соответствует уровню ДН, равной -3 дБ.

Второй вариант – попытка создать распределение с двумя главными лучами (рис. 5).

Для оценки качества получившегося распределения используем те же невязки, что и для вычислений по параллельной программе.

В таблицах приведены значения невязок $J_0 - J_4$ для различных случаев прогона программы минимизации на параллельной ЭВМ. Внутри одной таблицы случаи отличаются друг от друга размером и типом сетки (в таблицах приводится только размер), а также минимизируемой невязкой (случаи с разными минимизируемыми невязками отделяются друг от друга горизонтальными линиями). Во всех таблицах значение невязки, минимизируемой в процессе счета, выделено жирным шрифтом. Ввиду того, что структура невязок сильно отличается, имеет смысл сравнение значений только для одной и той же невязки (сравниваем числа в одноименных столбцах). Во всех случаях невязки в дальней зоне вычислялись на сетке 85×85 точек.

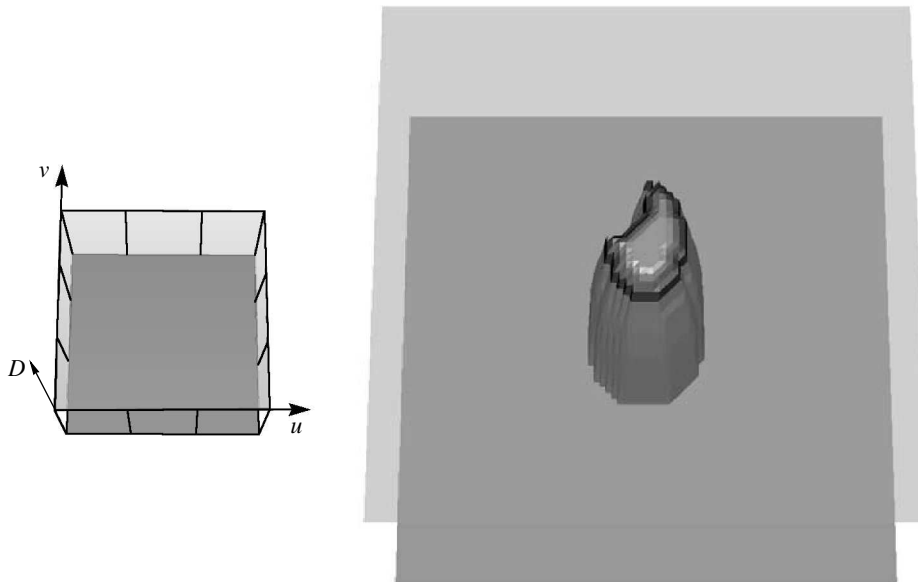


Рис. 4. График функции $D(u, v)$, аппроксимация контура Свердловской области. Слева – схема системы координат.

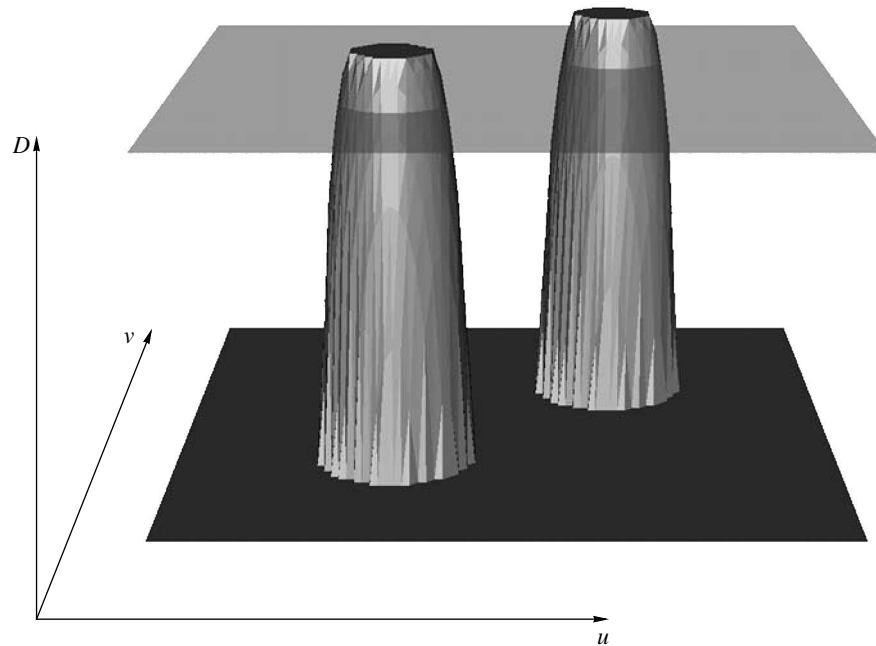


Рис. 5. График функции $D(u, v)$, случай двух главных лучей.

В табл. 1 помещены значения невязок, рассчитанные для распределения, полученного итерационным методом [3,4]. Как было отмечено, итерационный метод неявно предполагает минимизацию по невязке J_0 .

В табл. 2 приведены значения невязок для распределений, рассчитанных предложенным в данной работе методом. В качестве начального приближения для функции $s(\xi, \eta)$ использовалась функция, тождественно равная нулю. Фаза поля облучателя в апертуре нулевая ($\varphi_F \equiv 0$).

Из анализа табл. 1 и 2 можно сделать вывод о сравнительной результативности двух методов – итерационного [3, 4] и рассматриваемого. Из сопоставления по невязке J_0 видно, что результат итерационного метода оказывается хуже (значение $J_0 = 7,3$), чем минимизация при сетке аппроксимации 14×14 для рассматриваемого метода (значение $J_0 = 6,6$). При сравнении по невязке J_3 (максимум отклонения от заданного уровня, выраженный в дБ) предлагаемый метод при редкой сетке 9×9 оказывается равносильен итерационному методу и лучше его при более мелкой сетке.

Таблица 1

Размер сетки аппроксимации	Значения невязок				
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
41×41	7,3	1,50	4627	8,1	2238

Таблица 2

Размер сетки аппроксимации	Значения невязок				
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
9×9	24,9	10,57	2018	8,1	
10×10	10,5	4,57	3623	5,0	530
14×14	6,6	2,58	3041	3,4	121

Таблица 3

Размер сетки аппроксимации	Значения невязок				
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
12 × 12	5,4	1,14	5210	8,6	2089
12 × 12	4,8	1,08	4958	7,3	1175
13 × 13	5,0	1,03	4404	6,6	915
11 × 11	12,2	4,39	745	5,5	571
13 × 13	9,9	3,23	504	4,6	
9 × 9	10,1	3,3	5678	3,7	
12 × 12	6,7	1,66	1970	2,7	124
13 × 13	8,6	2,9	5808	3,7	
10 × 10	10,5	4,57	3623	5,0	530
14 × 14	6,6	2,58	3041	3,4	121

Таблица 4

Размер сетки аппроксимации	Значения невязок				
	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4
10 × 10	8,76	6,61	48660	9,55	36239
14 × 14	6,79	4,69	37603	9,10	22368
17 × 17	5,86	3,66	27684	9,49	15039
18 × 18	5,17	2,93	21585	9,41	9685
14 × 14	38,4	28,9	6164	5,72	4289
15 × 15	33,9	24,7	4566	5,94	3243
14 × 14	28,1	21,3	10967	4,14	2477
14 × 14	47,0	38,3	27455	7,93	11496
17 × 17	27,0	20,5	9607	5,39	2036

В табл. 3 даны значения невязок для случая, когда рассматриваемый метод использовался для улучшения результата, полученного итерационным методом. Здесь функция $s_0(\xi, \eta)$, построенная итерационным методом, включалась в функцию $F(\xi, \eta)$ в формуле (1) в качестве поправки к фазе, а вычисления уточняющей к $s_0(\xi, \eta)$ поправки велись начиная с нулевой функции $s(\xi, \eta)$. Такой способ соответствует случаю, когда в качестве начального зеркала берется зеркало с поверхностью, рассчитанной итерационным методом минимизации невязки J_0 .

Из сравнения табл. 2 и 3 видно, что использование в качестве начального приближения результатов работы итерационного алгоритма позволяет значительно улучшить значения получаемых невязок.

Поскольку задача имеет многоэкстремальный характер, а в параллельный алгоритм минимизации введены элементы случайного поиска [11], то минимизация по одной и той же невязке при одинаковых сетках и прочих одинаковых расчетных условиях может давать разные результаты, что видно из табл. 3.

На рис. 6 показан пример сечений графиков функций $I(u, v)$ (черная линия) и $D(u, v)$ (серая линия) вертикальной плоскостью, параллельной оси u .

Задача с двумя главными лучами оказалась более сложной для минимизации. В случае использования невязки J_1 получаем хорошее приближение в области больших значений модельного луча (в области M^*), но не очень сильное подавление боковых лепестков в области M_* . При минимизации по невязкам J_2, J_3, J_4 имеем удовлетворительное подавление боковых лепестков при плохой форме луча в области M^* . Значения полученных невязок приведены в табл. 4.

На рис. 7 приведены сечения графиков функций $I(u, v)$ и $D(u, v)$ вертикальной плоскостью, параллельной оси u . На левом рисунке изображены результаты мини-

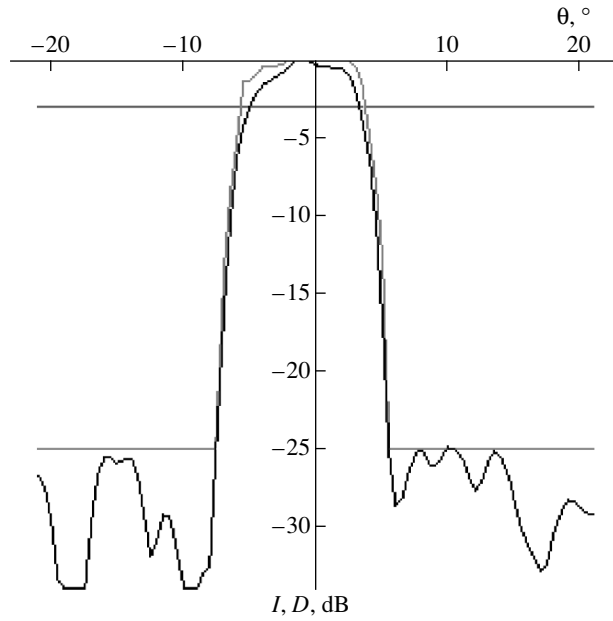


Рис. 6. Сечения графиков функций $I(u, v)$ и $D(u, v)$ при $v = 0$ ($\varphi = 0$) относительно полярного угла θ сферической системы координат ($u = \cos \varphi \sin \theta$).

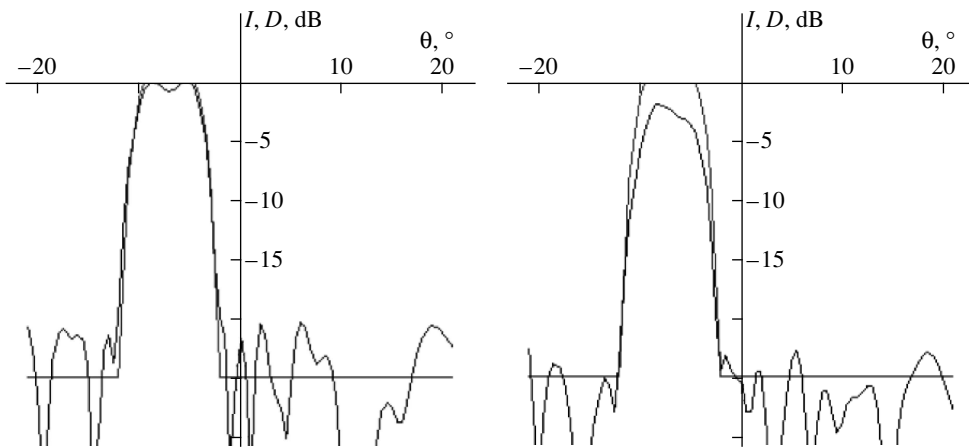


Рис. 7. Сечения графиков функций $I(u, v)$ и $D(u, v)$ для случаев минимизации по невязкам J_1 (слева) и J_2 (справа). Здесь значение v (φ) соответствует прохождению сечения через один из максимумов модельного луча $D(u, v)$ ($\varphi^* = 7, 5^\circ$). В качестве независимой переменной взят полярный угол θ сферической системы координат ($u = \cos \varphi^* \sin \theta$).

мизации невязки J_1 . Видно, что в области главного луча модельный луч $D(u, v)$ приближается хорошо, но в области боковых лепестков имеет место значительное превышение над допустимым уровнем -25 dB. На правом рисунке показаны результаты минимизации невязки J_2 . Здесь в области боковых лепестков имеем удовлетворительный уровень сигнала, но в области главного луча полученное распределение мощности $I(u, v)$ явно неудовлетворительно.

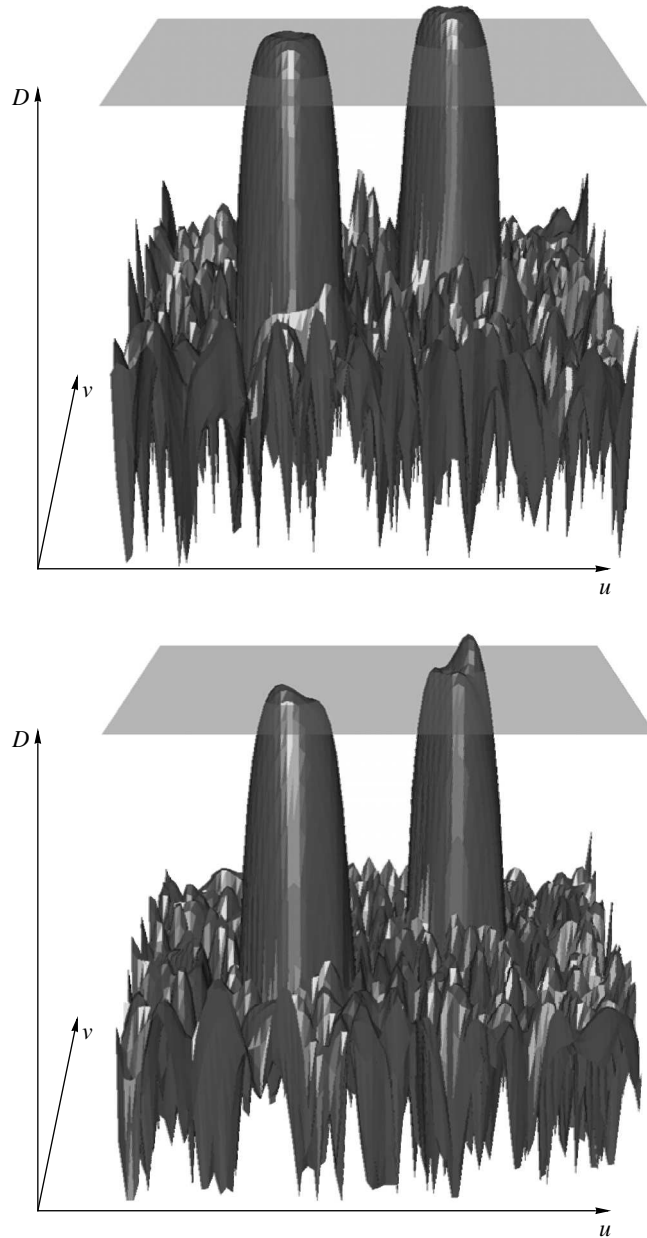


Рис. 8. Графики функции $I(u, v)$ при минимизации по невязкам J_1 (сверху) и J_2 (снизу).

На рис. 8 показаны трехмерные изображения графиков функции $I(u, v)$ при минимизации по невязкам J_1 и J_2 .

7. Заключение

Для зеркальной антенны с одиночным облучателем предложен оптимизационный метод синтеза поверхности отражателя для формирования диаграммы направленности в дальней зоне, которая имеет заданную конфигурацию в области главного

лепестка. Компьютерная реализация метода использует параллельную программу конечномерной минимизации. В процессе экспериментов удалось получить тестовые диаграммы направленности со сложным контуром главного луча.

Результаты изложенного метода можно использовать в качестве начального приближения для итерационного способа [4] расчета геометрии отражателей больших электрических размеров, с последующей организацией циклического использования обоих методов для дальнейшего улучшения решения.

Кроме того, развитие данной работы предусматривает конструирование других невязок, более «физично» учитывающих требования к форме луча в дальней зоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Век радио: Перспективные пути развития антенных систем космической связи, теории управления и распознавания образов. Сб. науч. тр. Под ред. Н.И. Черных. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
2. *Semenov B.V., Sobolev B.S., Chernykh N.I.* Optimal synthesis of space based antenna systems (know-how) // 37 Int. Exhibit. Invent., New Techniques Products of Geneva, 1–5 April 2009. Patronne par la confederation Suisse, l'etat et la ville de Geneve, 2009. P. 67.
3. *Балаганский В.С., Гусевский В.И., Плещев В.М. и др.* Фазовый синтез диаграмм направленности гибридных зеркальных антенн // Антенны. 1998. Вып. 2. С. 14–22.
4. *Плещев В.М., Семенов Б.В., Соболев Б.С. и др.* Фазовый синтез в задаче выбора поверхности зеркальной антенны // Сб. докл. 4-й Междунар. конф. «Спутниковая связь – ICSC-2000» (26–29 сентября, 2000). М.: МЦНТИ, 2000. Т. 2. С. 97–102.
5. *Реутов А.С., Шишилов А.В.* Конструктивный синтез и оценки эффективности гибридных зеркальных антенн с профилированными рефлекторами // Антенны. 2005. Вып. 1(92). С. 63–67.
6. *Марков Г.Т., Сазонов Д.М.* Антенны. М.: Энергия, 1975.
7. *Драбкин А.Л., Зузенко В.Л., Кислов А.Г.* Антенно-фидерные устройства, 2 изд. М.: Сов. радио, 1974.
8. *Иванов А.Г.* Параллельный алгоритм прямого поиска минимума функции многих переменных / Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. науч. тр. Вып. 2. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. С. 110–122. Статья доступна на сайте: http://home.imm.uran.ru/iagsoft/trasbo2_1_.html
9. *Иванов А.Г.* Применение параллельной программы поиска минимума функции многих переменных к задаче о брахистохроне в центральном поле тяготения // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: Сб. науч. тр. Вып. 3. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 81–94. Статья доступна на сайте: <http://home.imm.uran.ru/iagsoft/trasbo99.html>
10. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.
11. *Иванов А.Г.* Метод Монте-Карло в параллельной программе минимизации // Тр. 31-й Регионал. молодеж. конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики». Екатеринбург: УрО РАН, 2000. С. 127–128. Статья доступна на сайте: <http://home.imm.uran.ru/iagsoft/kung2000.html>

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2009