

ISSN 0005-2310

А
ВТОМАТИКА
И ЭЛЕМЕХАНИКА

• Наука •

2
2010

Российская академия наук

А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год



2

ФЕВРАЛЬ

Наука·Москва

2010

Журнал издается под руководством Отделения энергетики машиностроения,
механики и процессов управления РАН

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор
академик РАН **С.Н. Васильев**,

академики РАН **С.В. Емельянов, С.К. Коровин,**
А.Б. Куржанский, В.Г. Пешехонов, Е.А. Федосов,
член-корр. РАН **А.П. Кулешов** (зам. главного редактора),

П.П. Пархоменко (зам. главного редактора),

Д.А. Новиков (ответственный секретарь),

Г.А. Леонов, Ю.С. Попков,

д-ра техн. наук **Ф. Т. Алескеров, Б. Г. Волик, В.И. Гурман, О.П. Кузнецов,**
В.В. Кульба, А.П. Курдюков, В.А. Лотоцкий, А.И. Ляхов, Л.А. Мироновский,
В.Н. Новосельцев, Б.Т. Поляк (зам. главного редактора), **Е.Я. Рубинович,**

В.Ю. Рутковский, О.А. Степанов, А.Л. Фрадков,

д-ра физ.-мат. наук **А.В. Бернштейн, А.И. Кибзун, А.М. Красносельский,**
А.П. Крищенко, А.А. Лазарев, А.В. Лакеев, А.И. Маликов, А.В. Назин,

Л.Б. Рапопорт, В.Л. Харитонов, П.Ю. Чеботарев, П.С. Щербаков, С.Ф. Яшков,

канд. техн. наук **Б. В. Лункин**, канд. физ.-мат. наук **И.В. Рублев**

Адрес редакции: 117997, ГСП-7, Москва, В-342, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (095) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.rssi.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартелкина*

© Российская академия наук, 2010 г.

© Редколлегия журнала “Автоматика и телемеханика” (составитель), 2010 г.

© 2010 г. С.И. КУМКОВ, канд. техн. наук,
А.А. ФЕДОТОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург)

ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА В УСЛОВИЯХ СИЛЬНОГО ИСКАЖЕНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ¹

Рассматривается применение информационных множеств и методов интервального анализа для оценивания текущего множества фазовых координат объекта, движение которого описывается стандартной системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Оценивание производится в условиях статистической неопределенности информации как об обычных измерительных ошибках, ограниченных по модулю, так и о хаотических возмущениях, не известных по знаку и величине. Результатом внешнего оценивания текущего состояния объекта является совокупность интервальных оценок по фазовым координатам.

1. Введение

В настоящее время для оценивания движения динамических систем широко распространены подходы, основанные на получении выборки замеров достаточно большой длины и последующем применении статистической обработки. При этом необходимо знать вероятностные характеристики (законы распределения, коэффициенты корреляции и т.д.) ошибок измерений и возможных искажений. Существуют также подходы к оцениванию в условиях статистически неопределенных, но ограниченных по модулю ошибок измерения.

Активно развиваются методы оценивания при наличии хаотических искажений с неизвестными характеристиками. Именно такие случаи распространены на практике, например, в системах управления воздушным движением (УВД) [1], где превалируют ситуации с неопределенностью, когда требуемые статистические характеристики неизвестны, а имеются лишь приближенные геометрические ограничения на ошибки замеров, обрабатываемая выборка короткая (порядка 5–6 последовательных замеров) и, что наиболее важно, замеры подвержены не только измерительным ошибкам, но и хаотическим искажениям с неизвестными характеристиками. Возможно пропадание замеров.

В данной работе рассматривается применение методов интервального анализа [2, 3] и информационных множеств [4–7] к оцениванию текущего состояния самолета (как геометрических координат его положения, так и компонент скорости) в указанных условиях. Траекторное движение наблюдаемого самолета в трехмерном пространстве описывается стандартной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с геометрическими ограничениями на управления, т.е. на управляющие продольное, вертикальное и боковое ускорения [8]. Используемое описание

¹ Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 07-01-96-085, 09-01-00436).

динамики является стандартным при навигационных расчетах в системах управления воздушным движением [1]. Текущие управления самолета не известны наблюдателю. Измеряются, например, три компоненты скорости и три геометрических координаты положения самолета или модуль скорости, скоростной и путевой углы и три координаты положения.

Замер каждой координаты содержит как обычную измерительную ошибку (с известным ограничением на ее максимальную величину), так и возможное хаотическое искажение неизвестной величины и знака. Вероятностные характеристики ошибок измерений и хаотических искажений неизвестны. Временная структура ошибок и искажений может быть произвольной.

Из-за действия хаотических искажений исходная выборка замеров может стать несовместной в целом и распасться на несколько подвыборок. В указанных условиях неопределенности главной задачей системы обработки информации является формирование подвыборок, составленных из последовательных замеров, совместных с динамикой движения самолета. В практических системах это достигается одновременным ведением нескольких “подозрительных” подвыборок (треков). По-сути, повышается уровень ложных тревог, и задача в целом решается за счет дополнительных вычислительных затрат. Исследуется случай, когда длина имеющейся выборки замеров мала, и оценивание производится в “скользящем окне” по последовательным замерам, приходящим из некоторой информационно-измерительной системы, например АЗН-В/GPS или АЗН-В/GLONASS [1].

На основе процедур последовательного интервального анализа строится внешняя бокс-оценка шестимерного множества текущих фазовых координат самолета, совместная с заданной динамикой его движения и накопленной выборкой замеров. Оценка составлена из интервальных оценок каждой фазовой координаты.

Адаптация общих процедур интервального анализа [2, 3] применительно к конкретной динамической системе позволила построить простые однотипные алгоритмы последовательного анализа и оценивания по всем фазовым координатам. По сравнению с эллипсоидальным типом аппроксимации [4, 5] или попыткой точного построения многомерных множеств достижимости [6, 7] разработанный подход дает более простую (и, при небольшом времени прогноза, более точную) их внешнюю оценку (сверху) и более простые вычислительные процедуры.

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 описывается принятая стандартная динамика движения воздушного судна; постановка задачи излагается в разделе 3; в разделе 4 вводятся необходимые понятия и определения и кратко характеризуются основные процедуры анализа и оценивания информации; раздел 5 посвящен детальному описанию работы процедур анализа и оценивания на примере канала продольной скорости и скоростного угла; в разделе 6 рассматриваются особенности построения процедур анализа и оценивания информации по геометрическим координатам положения самолета; в разделе 7 приводятся результаты численного моделирования разработанных алгоритмов на примерах совместных выборок по каналам продольной скорости и скоростного угла, а также на двух примерах совместной и несовместной выборки в канале вертикальной координаты y .

2. Динамика движения и входная информация

Для описания траекторного движения наблюдаемого самолета используется следующая стандартная система обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 8]:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= a, & \dot{\theta} &= \alpha/V, & \dot{\psi} &= \beta/V, \\
 (1) \quad \dot{x} &= V \cos \theta \cos \psi, & \dot{y} &= V \sin \theta, & \dot{z} &= V \cos \theta \sin \psi, \\
 a_{\min} &\leq a(t) \leq a_{\max}, & \alpha_{\min} &\leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}, & |\beta(t)| &\leq \beta_{\max}, & V &\geq V_{\min} > 0,
 \end{aligned}$$

где x , z и y – геометрические координаты положения самолета в горизонтальной плоскости XOZ и по высоте; V – продольная скорость самолета; θ – скоростной угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью; ψ – путевой угол, угол между проекцией вектора скорости на горизонтальной плоскости и осью X ; $a(t)$ – продольное ускорение (управление) самолета; $\alpha(t)$ – ускорение (управление) по вертикальной координате; β – ускорение (управление) по боковому каналу. Текущие управления самолетом полагаются программными функциями времени, их значения и характер их изменения по времени неизвестны, задаются только указанные геометрические ограничения на их величины $a_{\min} < 0$, $a_{\max} > 0$, $\alpha_{\min} < 0$, $\alpha_{\max} > 0$ и $\beta_{\max} > 0$ (данные ограничения задаются диспетчером системы УВД с запасом в зависимости от типа наблюдаемого самолета); V_{\min} – практическое ограничение снизу на скорость полета, заведомо выполняющееся для любых воздушных судов.

В качестве основного (удобного для вычислений) рассматривается случай, когда исходная измерительная информация состоит из последовательно (по времени) поступающих замеров со строго упорядоченными моментами $t_n < t_{n+1}$:

$$(2) \quad \{t_n, V_n, \theta_n, \psi_n, x_n, y_n, z_n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Модель зашумления исходной информации (на примере замеров скорости движения) имеет вид

$$(3) \quad V_n = V_n^* + \varepsilon_n^V + \chi_n^V, \quad |\varepsilon_n^V| \leq \varepsilon_{\max}^V,$$

где V_n – замер; V_n^* – неизвестное измеряемое истинное значение; ε_n^V – ошибка измерения, ограниченная по модулю величиной ε_{\max}^V ; χ_n^V – хаотическое возмущение неизвестной величины и знака.

3. Постановка задачи

Для заданной динамики (1) требуется найти множество фазовых координат, совместных с заданной выборкой замеров (2) и моделью их зашумления (3).

Поскольку точное построение такого множества в шестимерном пространстве практически затруднено, то требуется построить приближенную внешнюю (извне) бок-оценку – параллелепипед с ребрами, ориентированными по соответствующим осям фазовых координат. Такой параллелепипед составляется из минимальных интервальных оценок каждой фазовой координаты.

Оценивание и построение текущего множества допустимых значений координат выполняется в присутствии возможных хаотических искажений замеров. Как результат исходная выборка замеров может быть несовместной в целом и может распадаться на несколько совместных подвыборок. При этом выходная оценка может быть набором нескольких бок-оценок.

4. Алгоритмы решения задачи

Основные понятия и определения (на примере канала скорости V).

Определение 1. Назовем интервалом неопределенности замера (ИНЗ) совокупность значений фазовой координаты, отстоящих от замера не более чем на заданную величину геометрического ограничения на ошибку.

ИНЗ для замера V_n скорости в момент t_n имеет вид

$$(4) \quad H_n^V = [\underline{h}_n^V, \overline{h}_n^V], \quad \text{где} \quad \underline{h}_n^V = V_n - \varepsilon_{\max}^V, \quad \overline{h}_n^V = V_n + \varepsilon_{\max}^V.$$

При этом заданной выборке замеров ставится в соответствие набор ИНЗ.

Пусть имеем ИНЗ H_n^V на момент t_n и динамика по фазовой координате V описывается соответствующим уравнением из (1). Будем рассматривать H_n^V как множество начальных значений этой координаты при прогнозировании в прямом времени от момента t_n (и ИНЗ H_{n+1}^V при прогнозировании в обратном времени от момента t_{n+1}).

Определение 2. Назовем минимальным прогнозируемым интервалом $\mathbf{G}_{n,n+1}^V$ на момент $t_{n+1} > t_n$ совокупность таких точек фазовой координаты V , в которые (в соответствии с динамикой системы и допустимыми управлениями) можно прийти из **любой** начальной позиции в H_n^V (т.е. из **любой** точки множества H_n^V можно попасть **во все** точки множества $\mathbf{G}_{n,n+1}^V$).

Имеем

$$(5) \quad \mathbf{G}_{n,n+1}^V = [\underline{\mathbf{g}}_{n+1}^V, \overline{\mathbf{g}}_{n+1}^V], \quad \text{где}$$

$$\underline{\mathbf{g}}_{n+1}^V = \overline{h}_n^V + a_{\min} \delta T_n, \quad \overline{\mathbf{g}}_{n+1}^V = \underline{h}_n^V + a_{\max} \delta T_n, \quad \delta T_n = t_{n+1} - t_n.$$

Отметим специфику построения множества $\mathbf{G}_{n,n+1}^V$: ее нижняя прогнозируемая точка строится от верхней границы ИНЗ замера, а верхняя прогнозируемая точка строится от нижней границы ИНЗ.

Множество $\mathbf{G}_{n,n+1}^V$ существует (т.е. непусто), если $\underline{\mathbf{g}}_{n+1}^V \leq \overline{\mathbf{g}}_{n+1}^V$.

Минимальный прогноз $\mathbf{G}_{n+1,n}^V$ в обратном времени определяется аналогично, но в обратном времени, на момент t_n от момента t_{n+1} с множеством начальных позиций H_{n+1}^V .

Определение 3. Назовем максимальным прогнозируемым интервалом $G_{n,n+1}^V$ на момент $t_{n+1} > t_n$ совокупность таких точек фазовой координаты V , в которые (в соответствии с динамикой системы и допустимыми управлениями) можно прийти **хотя бы** из одной начальной позиции в H_n^V .

Имеем

$$(6) \quad G_{n,n+1}^V = [\underline{g}_{n+1}^V, \overline{g}_{n+1}^V], \quad \text{где}$$

$$\underline{g}_{n+1}^V = \underline{h}_n^V + a_{\min} \delta T_n, \quad \overline{g}_{n+1}^V = \overline{h}_n^V + a_{\max} \delta T_n, \quad \delta T_n = t_{n+1} - t_n.$$

(Здесь всегда по построению $\underline{g}_{n+1}^V < \overline{g}_{n+1}^V$.)

Максимальный прогноз $G_{n+1,n}^V$ определяется аналогично, но в обратном времени на момент t_n от момента t_{n+1} с множеством начальных позиций H_{n+1}^V .

Из (5) и (6) видно, что граничные точки минимальных и максимальных прогнозируемых интервалов строятся на экстремальных допустимых величинах a_{\min} и a_{\max} управления $a(t)$ и, кроме того, $\mathbf{G}_{n,n+1}^V \subset G_{n,n+1}^V$ (аналогично для интервалов, прогнозируемых в обратном времени). (В ряде случаев далее по тексту и на рисунках с целью упрощения обозначений этих интервалов при очевидности выполняемых операций вместо двойных индексов $\dots n, n+1$ пишется только одинарный индекс $\dots n+1$.)

В литературе интервалы типа (5) и (6) называются также интервалами (или множествами) достижимости [5, 7]. По другим фазовым координатам прогнозируемые интервалы определяются аналогично в соответствии с их динамикой.

Определение 4. Назовем парю замеров с ИНЗ H_n^V и H_{n+1}^V

а) *сильно совместными*, если множество $\mathbf{G}_{n,n+1}^V$ существует и $H_{n+1}^V \subset \mathbf{G}_{n,n+1}^V$; при этом при обратном прогнозе автоматически имеет место $H_n^V \subset \mathbf{G}_{n+1,n}^V$;

б) *просто совместными*, если эти замеры не являются сильно совместными, но $H_{n+1}^V \subset G_{n,n+1}^V$ и одновременно при обратном прогнозе $H_n^V \subset G_{n+1,n}^V$;

в) слабо совместными, если эти замеры не являются просто совместными, но множества $H_{n+1}^V \cap G_{n,n+1}^V$ и (при обратном прогнозе) $H_n^V \cap G_{n+1,n}^V$ одновременно непусты.

Определение 5. Назовем пару замеров с ИНЗ H_n^V и H_{n+1}^V несовместными, если множество $H_{n+1}^V \cap G_{n,n+1}^V$ пусто; при этом при обратном прогнозе автоматически имеет место пустота пересечения $H_n^V \cap G_{n+1,n}^V$.

Заметим, что

– сильная совместность означает, что из **любой** начальной точки в ИНЗ H_n^V можно достичь **все** точки ИНЗ H_{n+1}^V , т.е. прогнозируемый интервал $G_{n,n+1}^V$ **целиком** содержит ИНЗ H_{n+1}^V (и наоборот);

– простая совместность означает, что только из **некоторой части** интервала H_n^V можно достичь только **некоторую часть** интервала H_{n+1}^V , но в целом интервал ИНЗ H_{n+1}^V полностью содержится в множестве $G_{n+1,n}^V$ (и наоборот);

– слабая совместность означает, что только из части начальных точек в ИНЗ H_n^V можно достичь только часть точек ИНЗ H_{n+1}^V и наоборот даже на экстремальных допустимых управлениях, т.е. прогнозируемый интервал $G_{n,n+1}^V$ только **частично** пересекается с ИНЗ H_{n+1}^V .

Анализ степени совместности пары ИНЗ реализуется прямой проверкой условий а)–в) определения 4.

Определение 6. Назовем информационным интервалом I_{n+1}^V множество, определяемое следующим образом:

– для случаев сильной и простой совместности $I_{n+1}^V = H_{n+1}^V$, так как здесь либо $H_{n+1}^V \subset G_{n,n+1}^V$, либо $H_{n+1}^V \subset G_{n,n+1}^V$ и наоборот;

– для случая слабой совместности $I_{n+1}^V = H_{n+1}^V \cap G_{n,n+1}^V$ и $I_n^V = H_n^V \cap G_{n+1,n}^V$. Для случая несовместности информационный интервал не существует.

Определение 7. Назовем выборку последовательных замеров

- сильно совместной, если ИНЗ всех ее замеров сильно совместны;
- просто совместной, если ИНЗ всех ее замеров просто совместны;
- слабо совместной, если хотя бы одна пара ИНЗ слабо совместна;
- несовместной, если хотя бы одна пара ее ИНЗ несовместна.

Определение 8. Назовем трубкой допустимых траекторий фазовой координаты V в (1) для пары информационных интервалов I_n^V и I_{n+1}^V объединение всех траекторий, начинающихся в интервале I_n^V , заканчивающихся в интервале I_{n+1}^V и реализующихся на допустимых управлениях.

Замечание 4.1. Отметим особенность (для реализации численных процедур) случаев сильной и простой совместности. В этих случаях информационный интервал I_{n+1}^V совпадает с ИНЗ H_{n+1}^V очередного анализируемого замера, т.е. операции обратного прогноза и пересечения делать не надо. В отличие от этого в случае слабой совместности необходимо:

– вычислить пересечение $I_{n+1}^V = H_{n+1}^V \cap G_{n,n+1}^V$ в “прямом времени” для выделения части ИНЗ H_{n+1}^V , куда могут прийти допустимые траектории;

– от полученного интервала I_{n+1}^V в “обратном времени” выполнить прогноз и пересечение $I_n^V = H_n^V \cap G_{n+1,n}^V(I_{n+1}^V)$ для выделения той части ИНЗ H_n^V , из которой допустимые траектории могут прийти на информационный интервал I_{n+1}^V (т.е. здесь вычисление “обратного” прогнозируемого интервала $G_{n+1,n}^V(I_{n+1}^V)$ выполняется с использованием интервала I_{n+1}^V в качестве начального, это условно отражается в обозначении аргумента интервала, прогнозируемого в обратном времени).

Замечание 4.2. Из определений 4, 7 и замечания 4.1 вытекают следующие важные моменты построения процедур проверки совместности очередного замера с накопленной выборкой предыдущих замеров:

– в случаях сильной и простой совместности накопленной выборки достаточно проверить совместность (сильную или простую) ИНЗ очередного замера с информационным интервалом последнего замера накопленной выборки;

– в случае слабой совместности накопленной выборки необходимо проверять совместность всех ее ИНЗ с ИНЗ очередного замера.

Общая организация анализа совместности и последовательного интервального оценивания. Приводимые ниже этапы и процедуры оценивания обусловлены спецификой системы (1).

Сначала анализируется совместность выборки ИНЗ скорости, выделяются ее совместные подвыборки и для каждой подвыборки строится набор информационных интервалов и трубок допустимых траекторий скорости.

Далее, на основе информационных интервалов совместной выборки по скорости и ее допустимых трубок анализируется совместность выборок ИНЗ по скоростному (и путевому) углу, и строятся соответствующие информационные интервалы и трубки допустимых траекторий по этим фазовым координатам.

Наконец, на основе информационных интервалов совместных выборок по скорости, скоростному и путевому углам и допустимым трубкам их траекторий анализируется совместность наборов ИНЗ по трем геометрическим координатам – вертикальной y и двум горизонтальным x и z .

По информационным интервалам совместных выборок по всем фазовым координатам на последний момент наблюдения определяется искомая внешняя box-оценка текущего множества допустимых состояний наблюдаемого объекта. Из-за действия хаотических искажений выходной результат может представляться набором нескольких box-оценок.

Общие процедуры анализа и оценивания. Разработанные алгоритмы построения оценки текущего множества допустимых состояний самолета включают следующие типовые процедуры.

1. Исключение замеров, недостоверных по недопустимо “раннему” приходу по относительно такта работы информационной системы (формализация и учет дополнительного инженерного критерия).

2. Исключение из дальнейшего анализа ложных и непродолжимых подвыборок (формализация и учет дополнительных инженерных критериев исключения по временному допуску или по числу пропущенных подряд замеров).

3. Анализ совместности каждого очередного пришедшего замера с каждой из накопленных подвыборок по данной фазовой координате и построение информационных интервалов каждого совместного замера. В случае несовместности очередного замера ни с одной из накопленных подвыборок он образует начало новой подвыборки.

4. “Расщепление” текущей несовместной в целом выборки на несколько параллельных (по времени) совместных внутри себя подвыборок.

5. “Слияние” параллельных подвыборок – уменьшение числа отслеживаемых подвыборок. Процедура включается при совпадении текущих информационных интервалов хотя бы у одной пары подвыборок. Формализуются и применяются следующие инженерные критерии: первой удалению подлежит подвыборка с минимальным числом замеров; при равенстве числа замеров удаляется подвыборка с наибольшим расходом управления (см. раздел 5, п. 5); при равенстве этих двух показателей удаляется подвыборка с меньшей степенью совместности; при равенстве всех этих показателей произвольно удаляется одна из подвыборок.

6. Сдвиг “скользящего окна” в каждой из подвыборок.
7. Формирование выходной интервальной оценки (или нескольких интервальных оценок) текущего множества допустимых состояний и трубок допустимых траекторий по каждой фазовой координате.

5. Иллюстрация работы процедур анализа и оценивания на примере канала скорости

1. Исключение замеров, недостоверных по критерию недопустимо “раннего” прихода, по допуску τ_{\min} : если очередной замер приходит в момент t_{next} с интервалом $\Delta T_n < \tau_{\min}$ от момента t_n последнего замера, то он полностью исключается из дальнейшего анализа.

2. Ложные подвыборки, порожденные сильными хаотическими искажениями, оказываются непродолжимыми и удаляются из дальнейшего анализа. В соответствии с формализованными инженерными критериями [1] рассматривались следующие варианты удаления непродолжимых подвыборок:

- по временному критерию в соответствии с заданным допуском τ_{\max} задержки прихода очередного замера; если очередной замер приходит в момент t_{next} с интервалом $\Delta T_n > \tau_{\max}$ относительно момента t_n последнего замера анализируемой подвыборки Rg_k , то такая подвыборка считается непродолжимой и удаляется, а этот замер засылается в качестве начального с начальным моментом $t_{\text{нач}}$ в подвыборку с тем же номером Rg_k ;

- по критерию пропуска (невключения в данную подвыборку), например, трех последовательных замеров; в этом случае выборка Rg_k удаляется полностью.

3. Анализ совместности очередного замера с предыдущим замером (рис. 1). По прогнозируемым множествам $G_{n,n+1}^V$ и $G_{n,n+1}^V$ выявляются случаи сильной 1, простой 2, слабой 3 совместности или случай несовместности 4 очередного замера (момент t_{next} , ИНЗ H_{next}^V) с предыдущим замером (ИНЗ H_n^V). Тонкими наклонными стрелками от ИНЗ H_n^V с указанием используемых ускорений a_{\min} и a_{\max} отмечены направления прогнозирования соответствующих интервалов $G_{n,n+1}^V$ и $G_{n,n+1}^V$.

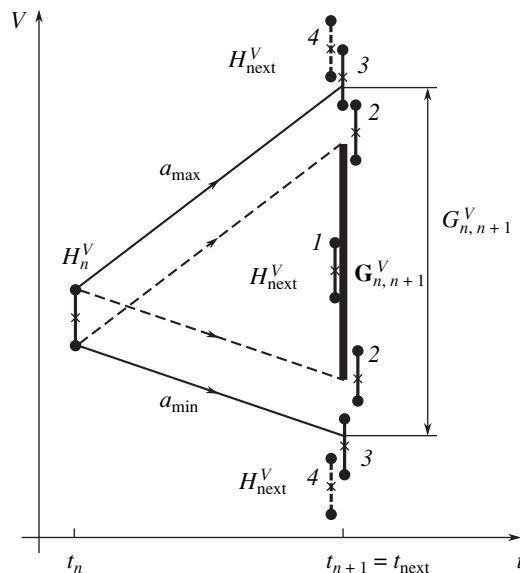


Рис. 1. Анализ совместности пары замеров.

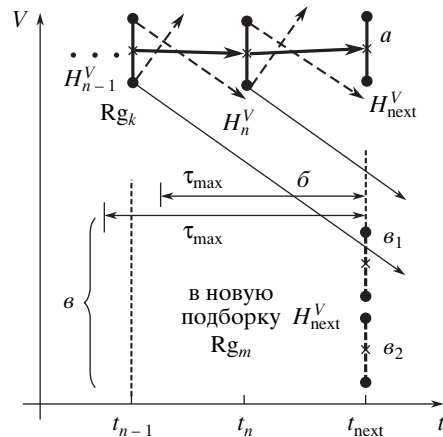


Рис. 2. Случаи сильной совместности (а), слабой совместности (б) и несовместности (в) очередного замера с накопленной подвыборкой.

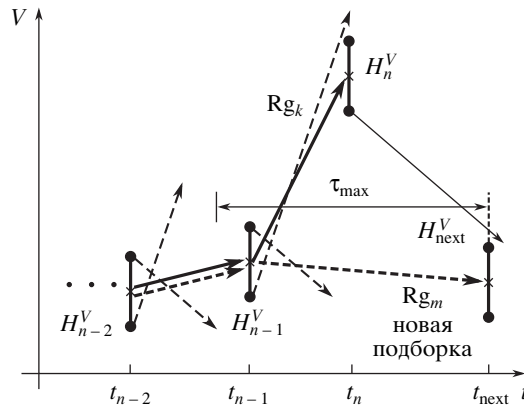


Рис. 3. Расщепление несовместной в целом выборки на параллельные подвыборки с общей предысторией.

Случай совместности и несовместности (по динамике) очередного (момент t_{next} , ИНЗ H_{next}^V) замера с *последним* (момент t_n , ИНЗ H_n^V) и *предпоследним* (момент t_{n-1} , ИНЗ H_{n-1}^V) замерами накопленной подвыборки Rg_k представлен на рис. 2; короткими штриховыми стрелками показаны направления прогнозирования для анализа сильной совместности; длинными наклонными стрелками вниз показаны направления прогнозирования для анализа простой совместности.

Сначала производится анализ совместности очередного замера по динамике с последним замером подвыборки. Если ИНЗ очередного замера оказывается сильно или просто совместным с последним n -м замером и, следовательно, со всей подвыборкой Rg_k , то он включается в нее (случай *a*).

Если очередной замер слабо совместен или несовместен по динамике с n -м замером, то производится дополнительный анализ совместности очередного замера по временному допуску τ_{max} с предпоследним $(n - 1)$ -м замером; при этом:

- если очередной замер несовместен с предпоследним замером по временному допуску (случай *b*), то очередной замер запоминается в качестве начального в новой подвыборке Rg_m ;

- если же очередной замер совместен по временному допуску τ_{max} с предпоследним $(n - 1)$ -м замером (случай *в*), но слабо совместен или несовместен с ним по динамике (случаи v_1 или v_2), то он также запоминается в качестве начального в новой подвыборке Rg_m ; в противном случае (т.е. когда обнаружены совместность очередного замера по временному допуску и сильная или простая совместность по динамике с предпоследним замером) возможен особый случай “расщепления” подвыборки Rg_k , его подробное рассмотрение приводится в следующем п. 4.

4. “Расщепление” текущей несовместной в целом выборки на совместные параллельные подвыборки иллюстрируется на рис. 3. Тонкими штриховыми стрелками показаны направления прогнозирования для анализа сильной совместности, тонкой сплошной стрелкой показано направление прогнозирования простой совместности к очередному замеру. Жирные сплошные стрелки отмечают прежнюю подвыборку Rg_k , жирные штриховые стрелки отмечают новую “отщепившуюся” подвыборку Rg_m .

Здесь приводится случай, когда на предыдущем шаге анализа n -й замер (момент t_n , ИНЗ H_n^V) хотя и искажен несильной хаотической помехой, но все еще оказывается сильно совместным с накопленной подвыборкой Rg_k и включается в нее. Однако неискаженный очередной замер (момент t_{next} , ИНЗ H_{next}^V) оказывается

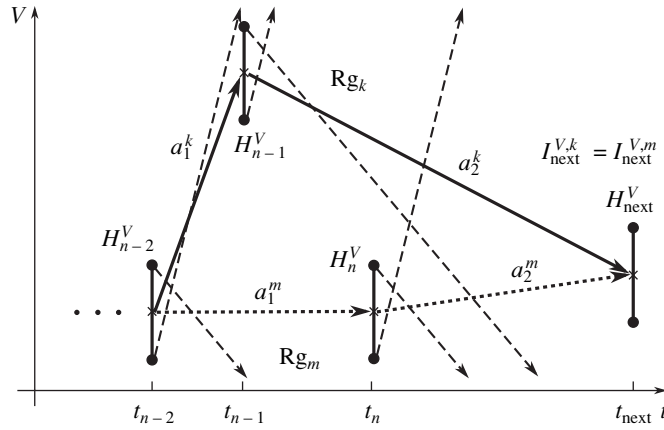


Рис. 4. Слияние подвыборок.

несовместным с n -м замером, но сильно или просто совместен с $(n - 1)$ -м замером (момент t_{n-1} , ИНЗ H_{n-1}^V). Отметим, что совместность очередного замера по временному допуску τ_{\max} с последним и предпоследним размерами уже выявлена. При этом прежняя подвыборка Rg_k остается без продолжения, а все ее предыдущие замеры (начиная с $(n - 1)$ -го) вместе с очередным замером образуют новую подвыборку Rg_m .

5. “Слияние” параллельных подвыборок (рис. 4). Процедура выявляет слияние пары подвыборок Rg_k и Rg_m на ИНЗ очередного замера (момент t_{next} , ИНЗ H_{next}^V). Штриховые стрелки направлений прогноза показывают, что очередной замер сильно совместен с обеими подвыборками. Процедуры слияния-удаления включаются по совпадению информационных интервалов $I_{\text{next}}^{V,k} = I_{\text{next}}^{V,m}$. Заметим, что при сильной и простой совместности замеров в каждой из подвыборок дополнительно имеем $I_{\text{next}}^{V,k} = I_{\text{next}}^{V,m} = H_{\text{next}}^V$; в случае слабой совместности (внутри подвыборок) возможен случай $I_{\text{next}}^{V,k} = I_{\text{next}}^{V,m} \neq H_{\text{next}}^V$. Поскольку в примере на рис. 4 в подвыборках одинаковое число замеров, то оставляется подвыборка Rg_m , характеризующаяся меньшим “суммарным расходом среднего управления”. На рис. 4 средние траектории, соединяющие замеры (крестики) в подвыборке Rg_k , обозначены жирными стрелками; они реализуются на постоянных “средних” управлениях a_1^k и a_2^k . Средние траектории, соединяющие замеры (крестики) в подвыборке Rg_m , обозначены жирными пунктирными стрелками; они реализуются на постоянных “средних” управлениях a_1^m и a_2^m .

Поясним суть критерия “средний расход управления” [1]. Для подвыборок Rg_k и Rg_m на интервале расщепления $[t_{n-2}, t_{\text{next}}]$ этот показатель рассчитывается по формулам

$$(7) \quad S_a^{(k)} = \int_{t_{n-2}}^{t_{\text{next}}} |a^k(t)| dt = |a_1^k|(t_{n-2} - t_{n-1}) + |a_2^k|(t_{n-1} - t_{\text{next}}),$$

$$S_a^{(m)} = \int_{t_{n-2}}^{t_{\text{next}}} |a^m(t)| dt = |a_1^m|(t_{n-2} - t_n) + |a_2^m|(t_n - t_{\text{next}}).$$

Поскольку число замеров в данных подвыборках одинаково, но $S_a^{(k)} > S_a^{(m)}$, то удаляется подвыборка Rg_k . В случае равенства и этого показателя удалялась бы подвыборка с более слабой степенью совместности (см. раздел 4: общие процедуры анализа и оценивания, п. 5).

6. Сдвиг “скользящего окна” заданной длины по каждой из накапливаемых подвыборок выполняется стандартной логической операцией.

7. Построение выходного информационного интервала в случае единственной совместной выборки: при сильной или простой совместности очередного замера с выборкой Rg_k его информационный интервал $I_{n+1}^{V,k}$ равен H_{n+1}^V . Случай двух текущих параллельных подвыборок иллюстрируется на рис. 5. Здесь на последний момент t_{n+1} выходной информационный интервал $I_{n+1}^{V,k}$ подвыборки Rg_k равен H_{n+1}^V , а для подвыборки Rg_m информационный интервал $I_{n+1}^{V,m}$ совпадает с прогнозируемым интервалом $G_{n,n+1}^{V,m}$. Вследствие влияния хаотических искажений, текущее множество допустимых значений скорости стало несвязным.

Типичный вид трубки $Tb(V, n-1, n)$ допустимых траекторий скорости между информационными интервалами двух совместных замеров (с сильной или простой совместностью) иллюстрируется на рис. 6. В трубке верхняя $\bar{V}(t)$ и нижняя $\underline{V}(t)$ граничные траектории реализуются на соответствующих экстремальных значениях a_{\min} и a_{\max} допустимого управления $a(t)$ с одним переключением (моменты $\underline{\tau}^V$ и $\bar{\tau}^V$).

6. Процедуры анализа и оценивания по другим фазовым координатам

Процедуры анализа совместности замеров в канале скоростного угла θ . Такие процедуры аналогичны процедурам, рассмотренным в канале скорости V . Динамика фазовой координаты $\theta(t)$ в (1) описывается уравнением $\dot{\theta} = \alpha/V$, где управляющее ускорение $\alpha(t)$ (неизвестное наблюдателю) ограничено геометрически $\alpha_{\min} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}$ и по времени может иметь произвольную кусочно-постоянную структуру.

Это уравнение нелинейно относительно координаты V , и в общем случае реализации скорости $V(t)$ не удастся получить описание прогнозируемой траектории $\theta(t, \alpha(t), V(t))$ в аналитической форме. Заметим, что при прогнозировании будем интересоваться только экстремальными нижней и верхней граничными точками про-

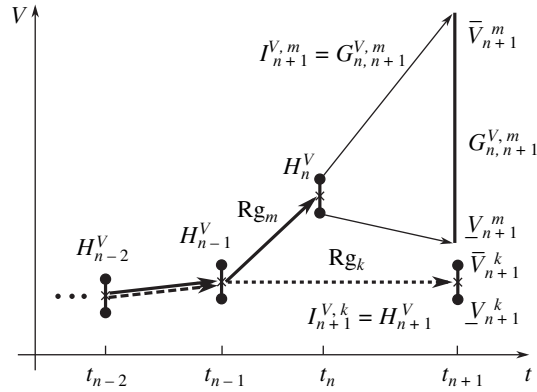


Рис. 5. Набор выходных информационных интервалов (случай двух параллельных подвыборок).

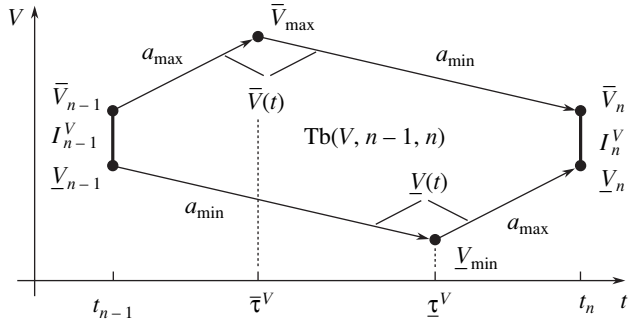


Рис. 6. Трубка допустимых траекторий по скорости.

гнозируемого интервала $G_{n,n+1}^\theta$ по θ :

$$(8) \quad \begin{aligned} \underline{\theta}(t_{n+1}) &= \underline{h}_n + \min_{\alpha(t)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \alpha(t) dt / V(t) \right\}, \\ \bar{\theta}(t_{n+1}) &= \bar{h}_n + \max_{\alpha(t)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \alpha(t) dt / V(t) \right\}. \end{aligned}$$

Экстремальные прогнозируемые траектории в (8) реализуются на соответствующих экстремальных значениях α_{\min} и α_{\max} ускорений $\alpha(t)$ и нижней граничной траектории $\underline{V}(t)$ трубки $\text{Tb}(V, n-1, n)$ допустимых траекторий скорости (рис. 6). (Напомним, что всегда рассматриваем движения самолета, для которых $\underline{V}(t) \geq V_{\min} > 0$.)

Нижняя граничная траектория $\underline{V}(t)$ может состоять (рис. 6):

– из одного отрезка с постоянным значением ускорения $a(t) \equiv a_{\min}$ или $a(t) \equiv a_{\max}$ (при слабой совместности или при простой совместности и крайних положениях правого ИНЗ) или

– максимум из двух отрезков на постоянных значениях управления с одним переключением $a(t) = a_{\min} \rightarrow a_{\max}$ (при сильной и простой совместности).

Такое описание нижней граничной траектории скорости позволяет получить очень простое представление граничных точек прогнозируемого интервала $G_{n+1}^\theta = [\underline{\theta}_{n+1}, \bar{\theta}_{n+1}]$.

Имея на момент t_{n+1} этот прогнозируемый интервал $G_{n,n+1}^\theta$, можно выполнять анализ совместности очередного замера θ_{n+1} . Все остальные процедуры в канале скоростного угла θ реализуются аналогично соответствующим операциям в канале скорости V . В результате получаем последовательность информационных интервалов I_n^θ и трубок $\text{Tb}(\theta, n, n+1)$ допустимых траекторий скоростного угла θ .

Аналогичные процедуры выполняются в канале путевого угла ψ по его динамике (1) с построением информационных интервалов I_n^ψ и соответствующих трубок $\text{Tb}(\psi, n, n+1)$ по ψ .

Процедуры анализа и оценивания вертикальной координаты y . Теперь, имея трубку $\text{Tb}(V, n, n+1)$ допустимых траекторий по скорости V , трубку допустимых траекторий $\text{Tb}(\theta, n, n+1)$ по скоростному углу θ и описание динамики $\dot{y} = V \sin \theta$ вертикальной координаты y в (1), можно выполнять анализ совместности выборки замеров вертикальной координаты на основе их ИНЗ H_n^y , $n = 1, 2, \dots$

Вычисление нижней и верхней границ прогнозируемого интервала $G_{n,n+1}^y$ (например, для анализа простой или слабой совместности) по y сводится к решению задач оптимизации вида

$$(9) \quad \begin{aligned} \underline{y}(t_{n+1}) &= \underline{h}_n^y + \min_{\text{Tb}(V,n,n+1), \text{Tb}(\theta,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \sin \theta(t) dt \right\}, \\ \bar{y}(t_{n+1}) &= \bar{h}_n^y + \max_{\text{Tb}(V,n,n+1), \text{Tb}(\theta,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \sin \theta(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

В общем случае траекторий $V(t)$ и $\theta(t)$ экстремальные точки (9) могут быть найдены только численно. Кроме того, при оптимизации указанных интегралов искомые экстремальные значения могут достигаться *на внутренних траекториях трубок* $\text{Tb}(V, n, n+1)$ и $\text{Tb}(\theta, n, n+1)$. Это усложняет поиск оптимального решения.

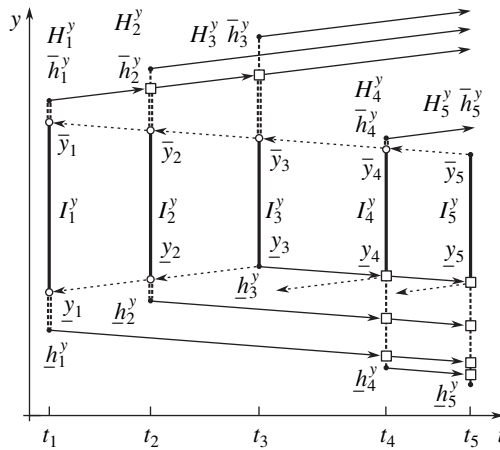


Рис. 7. Информационные интервалы и трубки допустимых траекторий вертикальной координаты y .

При практической реализации использовались специальные численные процедуры, гарантирующие аппроксимацию снизу для нижней граничной точки $\underline{y}(t_{n+1})$ и аппроксимацию сверху для верхней граничной точки $\overline{y}(t_{n+1})$.

На базе построенного прогнозируемого интервала $G_{n,n+1}^y$ выполняется (аналогично соответствующим операциям в каналах скорости V , скоростного θ и путевого ψ углов) расчет информационных интервалов I_n^y вертикальной координаты.

Замечание 6.1. В описании динамики (1) первые три фазовые координаты V , θ и ψ являются “быстрыми”, так как прямо зависят от эффективных управляющих ускорений. Как следствие, размеры прогнозируемых интервалов $\mathbf{G}_{n,n+1}^\mu$ (и $G_{n,n+1}^\mu$) (здесь $\mu = V, \theta$ или ψ) по этим фазовым координатам оказываются значительно больше размеров соответствующих ИНЗ H_{n+1}^μ . Для небольшого уровня хаотических искажений совместность замеров оказывается простой или даже сильной. Но фазовые координаты y , x и z представляются, по сути, вторыми интегралами от управляющих ускорений и являются “медленными”. Размеры прогнозируемых интервалов $\mathbf{G}_{n,n+1}^\mu$ и $G_{n,n+1}^\mu$ по этим координатам оказываются только немногим больше соответствующих ИНЗ H_{n+1}^μ . Даже для небольших хаотических искажений замеров по данным фазовым координатам между последовательными замерами существует только слабая совместность. Поэтому во избежание неограниченного возрастания числа параллельных подвыборок анализ совместности каждого очередного замера с анализируемой подвыборкой выполняется по процедурам слабой совместности с необходимостью просчета его совместности с каждым замером подвыборки. Информационные интервалы пересчитываются соответствующим образом указанным методом “вперед–назад” по всей анализируемой подвыборке (см. замечание 4.1). При этом информационные интервалы каждого замера получаются пересечением прогнозируемых интервалов с интервалами неопределенности замеров.

Анализ совместности выборки замеров координаты y и построение информационных интервалов иллюстрируются на рис. 7. Используется стандартный метод построения информационных множеств “вперед–назад” [2, 7]. Для пояснения взят условный случай, когда в скользящем окне без предыдущей обработки накоплены все пять замеров с моментами t_i и ИНЗ $H_i^y = [\underline{h}_i^y, \overline{h}_i^y]$, $i = \overline{1, 5}$, с соответствующими нижними и верхними граничными точками (маленькие черные кружочки).

Слабая совместность данной выборки в целом выявляется уже при прогнозировании в прямом времени от каждого из ИНЗ (тонкие стрелки вправо от граничных точек каждого ИНЗ). Действительно, от каждого ИНЗ прогнозируемое вправо множество $G_{i,j}^y$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{i+1,5}$ (ввиду очевидности построения интервалы $G_{i,j}^y$ на рисунке не показаны) имеет непустое пересечение $G_{i,j}^y \cap H_j^y$ с каждым ИНЗ H_j^y , но каждое из таких пересечений меньше этого ИНЗ. При анализе вправо белыми квадратиками отмечены граничные точки отсекаемых частей (жирные штриховые отрезки) ИНЗ, не совместных с предыдущими ИНЗ.

Обратный прогноз влево в обратном времени (тонкие пунктирные стрелки) выполняется уже только от частей ИНЗ, оставшихся после операций пересечения при прогнозе вправо и операций пересечения при текущем прогнозе влево. Белыми кружочками отмечены граничные точки отсекаемых частей при последовательном выполнении прогнозов и пересечений влево. Отсекаемые части обозначаются двойными жирными штриховыми отрезками.

В результате прохода “вперед–назад” оставшиеся части ИНЗ отмечены жирными вертикальными линиями. Эти отрезки и являются искомыми информационными интервалами $I_i^y = [y_i, \bar{y}_i]$, $i = \overline{1,5}$, с соответствующими нижними и верхними граничными точками. Видно, что некоторые из этих точек совпадают с граничными точками исходных ИНЗ, а некоторые сформировались уже при выполнении процедур анализа совместности рассматриваемой выборки. Стрелки, соединяющие граничные точки информационных интервалов, ограничивают трубки допустимых траекторий по вертикальной координате.

Процедуры анализа расщепления выборки замеров вертикальной координаты и их слияния аналогичны соответствующим процедурам по фазовым координатам V , θ и ψ . В процедуре отбора при слиянии используются последовательный анализ по указанным формализованным инженерным критериям (см. раздел 4: общие процедуры анализа и оценивания, п. 5).

Процедуры анализа и оценивания координат x и z на горизонтальной плоскости. Имея трубки допустимых траекторий скорости $Tb(V, n, n+1)$, скоростного $Tb(\theta, n, n+1)$ и путевого $Tb(\psi, n, n+1)$ углов и описание динамики $\dot{x} = V \cos \theta \cos \psi$ и $\dot{z} = V \cos \theta \sin \psi$ координат x и z в (1), можно выполнить анализ совместности выборки замеров по данной координате на основе их ИНЗ H_n^x, H_n^z , $n = 1, 2, \dots$

Вычисление нижней и верхней граничных точек прогнозируемых интервалов $G_{n,n+1}^x$ ($G_{n,n+1}^z$) по $x(z)$ (например, для анализа простой или слабой совместности) реализуется в виде задач оптимизации:

$$(10) \quad \begin{aligned} \underline{x}(t_{n+1}) &= \underline{h}_n^x + \min_{Tb(V,n,n+1), Tb(\theta,n,n+1), Tb(\psi,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \cos \theta(t) \cos \psi(t) dt \right\}, \\ \bar{x}(t_{n+1}) &= \bar{h}_n^x + \max_{Tb(V,n,n+1), Tb(\theta,n,n+1), Tb(\psi,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \cos \theta(t) \cos \psi(t) dt \right\}; \\ \underline{z}(t_{n+1}) &= \underline{h}_n^z + \min_{Tb(V,n,n+1), Tb(\theta,n,n+1), Tb(\psi,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \cos \theta(t) \sin \psi(t) dt \right\}, \\ \bar{z}(t_{n+1}) &= \bar{h}_n^z + \max_{Tb(V,n,n+1), Tb(\theta,n,n+1), Tb(\psi,n,n+1)} \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) \cos \theta(t) \sin \psi(t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Как и в случае построения граничных точек прогнозируемого множества по координате y , точки (10) могут быть найдены лишь численно. Кроме того, при оптими-

зации указанных интегралов искомые экстремальные значения могут достигаться на внутренних траекториях трубок $T_b(V, n, n + 1)$, $T_b(\theta, n, n + 1)$ и $T_b(\psi, n, n + 1)$. Это усложняет поиск оптимального решения.

При практической реализации использовались численные процедуры, гарантирующие аппроксимацию снизу для нижней граничной точки $\underline{x}(t_{n+1})$ и $\underline{z}(t_{n+1})$ и аппроксимацию сверху для верхней граничной точки $\bar{x}(t_{n+1})$ и $\bar{z}(t_{n+1})$. На базе построенных прогнозируемых интервалов $G_{n,n+1}^x$ и $G_{n,n+1}^z$ методом “вперед–назад” выполняется расчет информационных интервалов I_n^x и I_n^z этих координат. Процедуры аналогичны соответствующим процедурам канала координаты y .

7. Результаты численного моделирования

При моделировании работы алгоритмов оценивания использовался файл исходных данных с заранее сформированным списком замеров (момент времени замера, координаты геометрического положения самолета в трехмерном пространстве и соответствующие компоненты скорости).

В модели динамики движения (1) задавались следующие числовые значения параметров: рабочий диапазон по скорости V $30 \div 330$ м/с; ограничения на управляющие ускорения $a_{\min} = -2$ м/с², $a_{\max} = +3$ м/с²; $\alpha_{\min} = -3$ м/с², $\alpha_{\max} = +2$ м/с²; $\beta_{\max} = 3$ м/с². Приняты следующие ограничения на ошибки замеров по фазовым координатам: $\varepsilon_{\max}^x = \varepsilon_{\max}^z = 30$ м (по x и z); $\varepsilon_{\max}^y = 50$ м (по y); $\varepsilon_{\max}^{V_x} = \varepsilon_{\max}^{V_z} = 0,15$ м/с (по V_x и V_z); $\varepsilon_{\max}^{V_y} = 0,25$ м/с (по V_y). Шаг интегрирования системы дифференциальных уравнений с модельной динамикой был взят равным 0,1 с.

Исходные замеры компонент скорости (V_x, V_z, V_y) преобразовывались к косвенным замерам (V, ψ, θ) величины скорости, скоростного и путевого углов, т.е. к варианту (2) информации, используемой в разработанных алгоритмах. Аналогично исходные интервалы неопределенности $[V_x], [V_z], [V_y]$ замеров компонент скорости преобразовывались прямо к интервалам неопределенности H_n^V, H_n^θ и H_n^ψ скорости, скоростного угла и путевого углов соответственно. В отличие от теоретического варианта (4) ширина получающихся в итоге ИНЗ в силу нелинейности преобразования координат оказывается разной для разных моментов времени.

При численном моделировании использовалась короткая выборка из шести замеров с произвольным шагом поступления замеров в диапазоне 1–2 с. Ошибки измерений компонент скорости и координат воздушного судна формировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением из указанных интервалов значений ошибок. Для проверки работоспособности алгоритмов и правильной работы всех логических условий в них хаотические возмущения в замерах задавались вручную специальным образом. В качестве “истинной” траектории, относительно которой моделировались замеры, было взято равномерное прямолинейное движение в горизонтальной плоскости со скоростью $V \sim 141,4$ м/с (скорость полета среднего самолета).

Результаты обработки выборки замеров вертикальной координаты – на рис. 8. Напомним, что выборка является совместной **в целом**, если через информационные отрезки **всех** ее замеров можно провести хотя бы одну допустимую траекторию. Здесь (рис. 8,а, случай слабой совместности выборки) жирными вертикальными отрезками отмечены результирующие информационные интервалы замеров; тонкими вертикальными отрезками показаны отсеченные части исходных интервалов неопределенности замеров; трубки допустимых траекторий по вертикальной координате отмечены серой заливкой; стрелки вдоль границ трубок допустимых траекторий поясняют процессы прогнозирования и отсечения частей ИНЗ при вычислениях информационных интервалов методом “вперед–назад”. Жирной сплошной ломаной линией отмечена траектория, соединяющая замеры. Эта траектория недопустима.

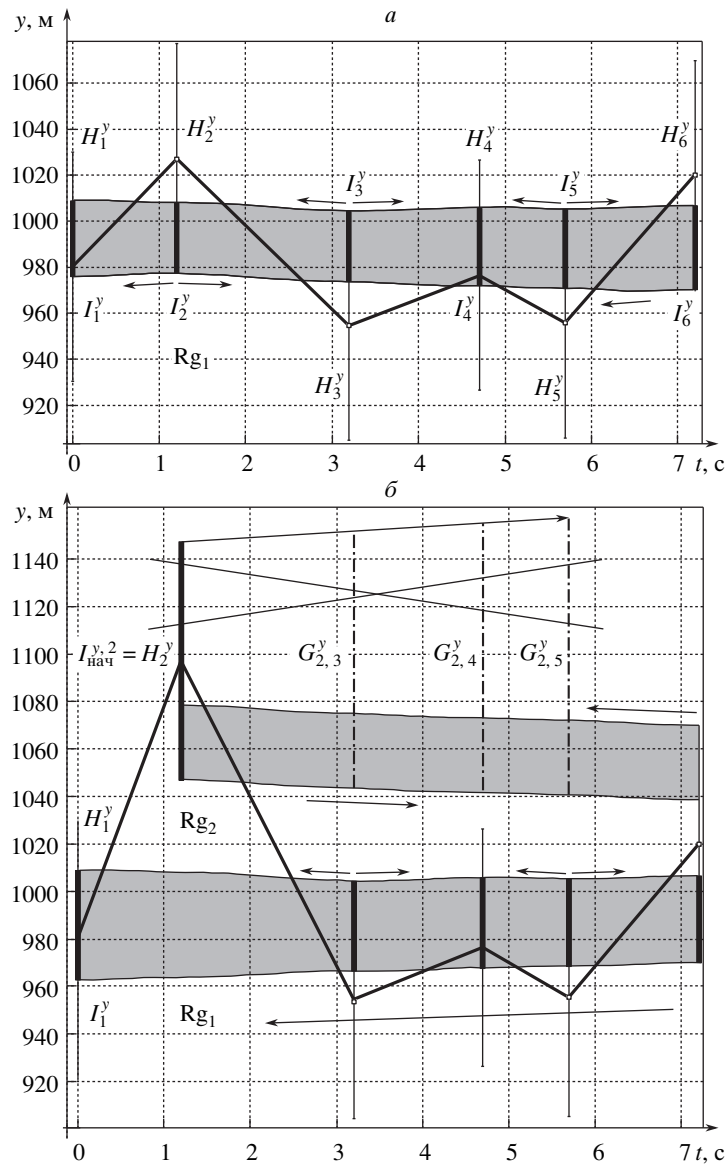


Рис. 8. Обработка выборки замеров вертикальной координаты; слабая совместность выборки в целом.

Результаты обработки выборки замеров вертикальной координаты y в варианте несовместности выборки в целом представлены на рис. 8,б (здесь обозначения те же, что и на рис. 8,а). Замеры 1, 3–6 образуют слабо совместную подвыборку Rg₁. Второй замер был выделен в качестве начального для новой подвыборки Rg₂ с начальным информационным интервалом $I_{нач.2}^y$, равным ИНЗ H_2^y этого замера. Однако на дальнейших шагах прогнозирования (интервалы $G_{2,3}^y$, $G_{2,4}^y$ и $G_{2,5}^y$, вертикальные штрих-пунктирные отрезки) от граничных точек этого интервала (тонкие наклонные сплошные стрелки) показывает, что три замера подряд (под номерами 3, 4 и 5) не включаются в эту ложную подвыборку Rg₂. Данная подвыборка оказывается

непродолжимой и исключается (на рис. 8,б условно зачеркнута) из дальнейшего анализа. Если бы данный критерий непродолжимости не использовался, то подвыборка Rg_2 была бы продолжена до шестого замера. Как и на рис. 8,а, жирной сплошной ломаной линией отмечена траектория, соединяющая замеры. Эта траектория недопустима.

8. Заключение

На основе методов информационных множеств и интервального анализа разработан подход к оцениванию текущего множества допустимых состояний динамического объекта со стандартной динамикой (1) в условиях статистической неопределенности измерительных ошибок и при произвольных хаотических возмущениях.

Разработанные алгоритмы и вычислительные процедуры позволяют отсеивать как одиночные выбросы, так и ложные подвыборки, ими порожденные.

Выходная оценка множества допустимых состояний строится в виде внешней аппроксимирующей шестимерной box-оценки, на основе найденных интервальных оценок каждой фазовой координаты.

Численное моделирование подтвердило эффективность разработанных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматизированные системы управления воздушным движением / Под ред. Пятко С.Г. и Красова А.И. СПб.: Политехника, 2004.
2. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Е. Прикладной интервальный анализ. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
3. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юсупов З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. Bounding Approaches to System Identification / Eds. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. London: Plenum Press, 1996.
5. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
6. Кумков С.И. Фильтрация и оценивание информации в условиях хаотических искажений // Тез. Междунар. конф. "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посв. 100-летию со дня рождения В.К. Иванова. Екатеринбург, Россия, 1-6 сентября 2008. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН. С. 68-69.
7. Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А. Оценивание движения воздушного судна на основе информационных множеств при неполных замерах координат / Препринт. СПб.: Изд-во Академии граждан. авиации, 1999.
8. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. Изд-е официальное. М.: Госкомстандарт, 1980.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2009