

# *Model Formulation of Pursuit Problem with Two Pursuers and One Evader*

Sergey Kumkov<sup>1</sup>   Stéphane Le Méne<sup>2</sup>  
Valerii Patsko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Mechanics,  
Ural Branch of Russian Academy of Sciences,  
Ekaterinburg, Russia

<sup>2</sup>EADS / MBDA France,  
Paris, France

# Outline

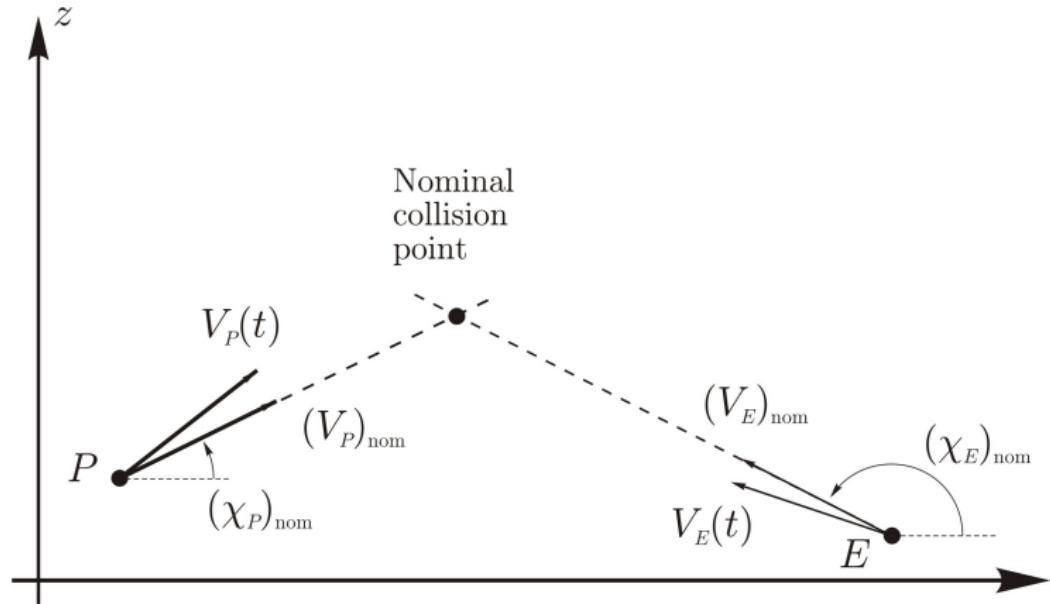
- ① One-to-One Problem
- ② Two Pursuers
- ③ Solvability Sets
- ④ Switching Lines
- ⑤ Simulations
- ⑥ Conclusion

В исследуемой задаче два преследователя и один убегающий. Но нам удобнее начать с более простого случая, когда есть один преследователь и один убегающий. Затем перейдём к нашей задаче. Главными будут множества разрешимости или, что то же самое, множества уровня функции цены игры. Наш способ квазиоптимального управления базируется на построении линий переключения. В заключение будут показаны результаты моделирования и будет сделан некоторый комментарий, связанный с дальнейшей работой.

---

In the problem under investigation, we have two pursuers and one evader. But it is more convenient to begin the talk with the case of one pursuer and one evader. After that, we shall pass to our problem. The main topic is solvability sets or, that is the same, level sets of the value function. Our method of quasioptimal control is based on the construction of switching lines. Next, there are simulation results and some discussion about the future work.

# Interception Problem



Velocities along the horizontal axis are very large.

S.Gutman, G.Leitmann, J.Shinar, T.Shima, V.Glizer, V.Turetsky...  
(1976 – up to now)

# Interception Problem

Представим плоскость прямолинейных номинальных движений в задаче космического перехвата. Управляющее ускорение преследователя ортогонально его номинальной траектории. То же самое можно сказать относительно ускорения убегающего. Поскольку номинальные скорости вдоль горизонтальной оси очень большие, мы можем подсчитывать реальный промах в фиксированный заранее момент номинальной встречи, причём только вдоль вертикальной оси  $z$ . Таким образом, получаем антагонистическую дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания и одномерным промахом в качестве функции платы. Преследователь за счёт своего управления старается уменьшить промах, убегающий — увеличить. Подобные задачи изучаются примерно с середины 1970-х годов.

# Interception Problem

Let us imagine the plane of nominal rectilinear trajectories in an interception problem. The pursuer's control acceleration is normal to his nominal path. The same can be said about the evader's control acceleration. Nominal velocities along the horizontal axis are very large. Due to this, we can measure the real miss as the miss along the vertical axis  $z$  at the instant of the nominal collision. So, we consider a zero-sum differential game with a fixed termination instant and a one-dimensional payoff. The pursuer tries to minimize the payoff, the interest of the evader is opposite. Such problems are investigated from the middle of 1970s.

# Linearized Dynamics

$$t \in [0, T], \quad z_P, z_E \in R,$$

$$\ddot{z}_P = a_P, \quad \ddot{z}_E = a_E,$$

$$\dot{a}_P = (u - a_P)/l_P, \quad \dot{a}_E = (v - a_E)/l_E,$$

$$|u| \leq \mu, \quad a_P(t_0) = 0, \quad |v| \leq \nu, \quad a_E(t_0) = 0.$$

Payoff  $\varphi = |z_E(T) - z_P(T)|, \quad \min_u \max_v \varphi$

$l_P, l_E$  are the time constants;

$\mu, \nu$  are the constraints for the controls  $u$  and  $v$ .

Shinar, J., Shima, T.: *Non-orthodox guidance law development approach for intercepting maneuvering targets*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics 25(4), 658–666 (2002)

# Linearized Dynamics

Здесь представлены линеаризованные уравнения динамики преследователя и убегающего. Рассматриваются управляемые схемы первого порядка (то есть переход от управления к ускорению описывается дифференциальным уравнением первого порядка). Дифференциальная игра с такой динамикой детально исследована в статье J.Shinar и T.Shima.

---

Here, we see the linearized dynamics for the pursuer and evader. One can see that the first order control scheme is involved (that is, the transfer from the control to the acceleration is described by a differential equation of the first order). The differential game with such a scheme was investigated in detail by J.Shinar and T.Shima.

# Relative Linear Dynamics

Change of variables:  $y = z_E - z_P$

The new dynamics is

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -a_P + a_E, \\ \dot{a}_P &= (u - a_P)/l_P, \\ \dot{a}_E &= (v - a_E)/l_E.\end{aligned}$$

Constraints for the players controls:

$$|u| \leq \mu, \quad |v| \leq \nu$$

The payoff:

$$\varphi(y(T)) = |y(T)|$$

# Relative Linear Dynamics

На этом слайде выписана динамика игры, получаемая после введения разностной геометрической координаты  $y$ .

---

In this slide, the game dynamics after introduction of a relative geometric coordinate  $y$  is written.

# Dynamics in Forecasted Coordinate ZEM, Zero Effort Miss Coordinate

Consider a coordinate  $x$  that is the value of  $y$  forecasted to the termination instant  $T$  under zero controls:

$$x = y + \dot{y}\tau - a_P l_P^2 h(\tau/l_P) + a_E l_E^2 h(\tau/l_E),$$
$$\tau = T - t, \quad h(\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha - 1$$

The dynamics:

$$\dot{x} = -l_P h(\tau/l_P) u + l_E h(\tau/l_E) v$$

The parameters of the game (J.Shinar, T.Shima):

$$\eta = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{— maximal relative acceleration}$$

$$\varepsilon = \frac{l_E}{l_P} \quad \text{— relative agility}$$

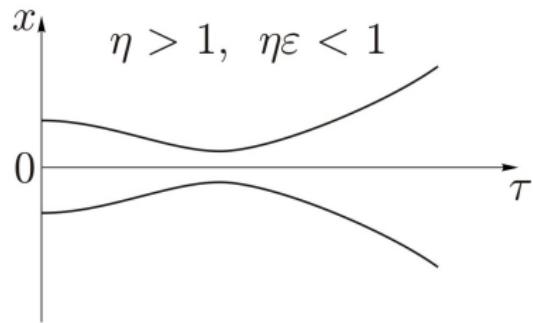
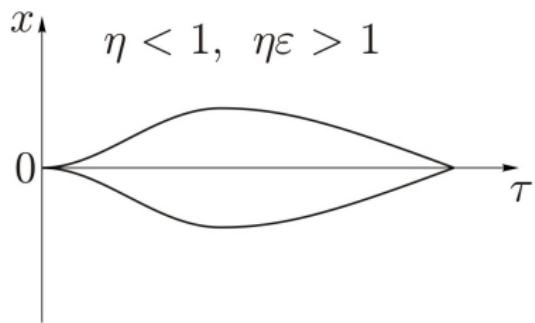
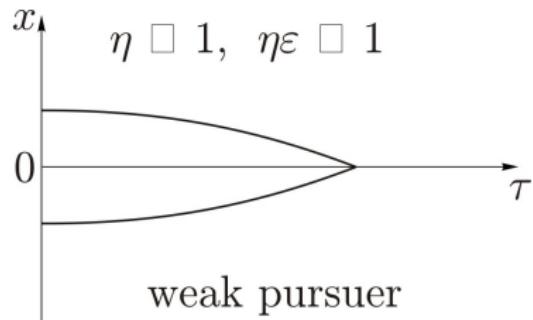
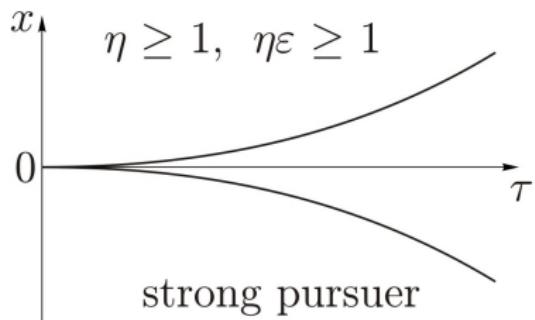
# Dynamics in Forecasted Coordinate ZEM, Zero Effort Miss Coordinate

Введём координату  $x$  как значение  $y$ , прогнозируемое на момент окончания  $T$  при нулевых управлениях игроков. Символ  $\tau$  обозначает обратное время. Получаем эквивалентную дифференциальную игру с одномерной фазовой переменной. Динамика игры определяется двумя нормированными независимыми параметрами  $\eta$  и  $\varepsilon$ .

---

Let  $x$  be the value of  $y$  forecasted to the termination instant  $T$  under absence of players' controls: *zero-effort miss coordinates*. The symbol  $\tau$  denotes the backward time. We have a one-dimensional dynamics for the equivalent game. There are two independent normalized parameters  $\eta$  and  $\varepsilon$  in this game.

# Variants of Level Set



varying advantage

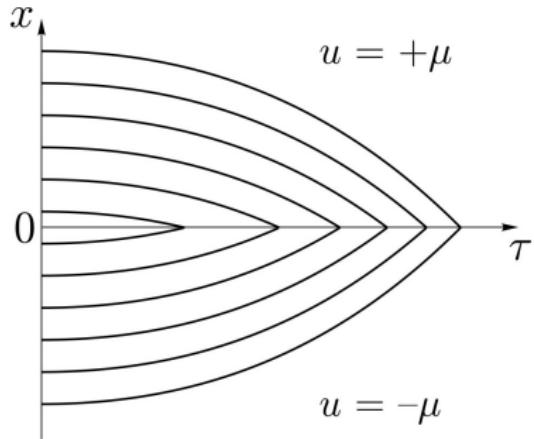
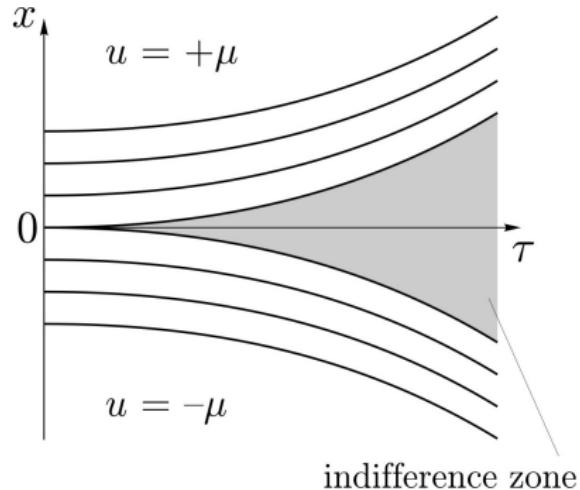
# Variants of Level Set

На этих рисунках горизонтальная ось — ось обратного времени  $\tau = T - t$ . В указанной выше статье J.Shinar и T.Shima было установлено, что может быть только 4 варианта конфигурации множеств уровня функции цены. Первый — для «сильного» преследователя, второй — когда преследователь «слабее» убегающего. Третий и четвёртый варианты могут быть названы случаями «переменного преимущества». В случае сильного преследователя в выделенном множестве цена игры равна нулю. Следовательно, это есть множество разрешимости с нулевым значением гарантированного промаха. Для левого нижнего рисунка выделенное множество также соответствует нулевому промаху. Для двух случаев справа не существует множеств разрешимости с нулевым промахом.

# Variants of Level Set

In this picture, the horizontal axis corresponds to the backward time  $\tau = T - t$ . J.Shinar and T.Shima established (the paper was pointed out above) that there are only 4 variants of configuration for the level sets of the value function. The first variant is for the case of “strong” pursuer. The second one is for the case when the pursuer is “weaker” than the evader. The third and fourth variants can be named variants of “varying advantage”. For the case of strong pursuer, we have zero value of the value function in the shown set. In other words, this set is the solvability set with zero guaranteed miss. For the left lower figure, the drawn set corresponds to zero miss too, but it is bounded. For two cases at the right, there are no solvability sets with zero miss.

# System of Level Sets



# System of Level Sets

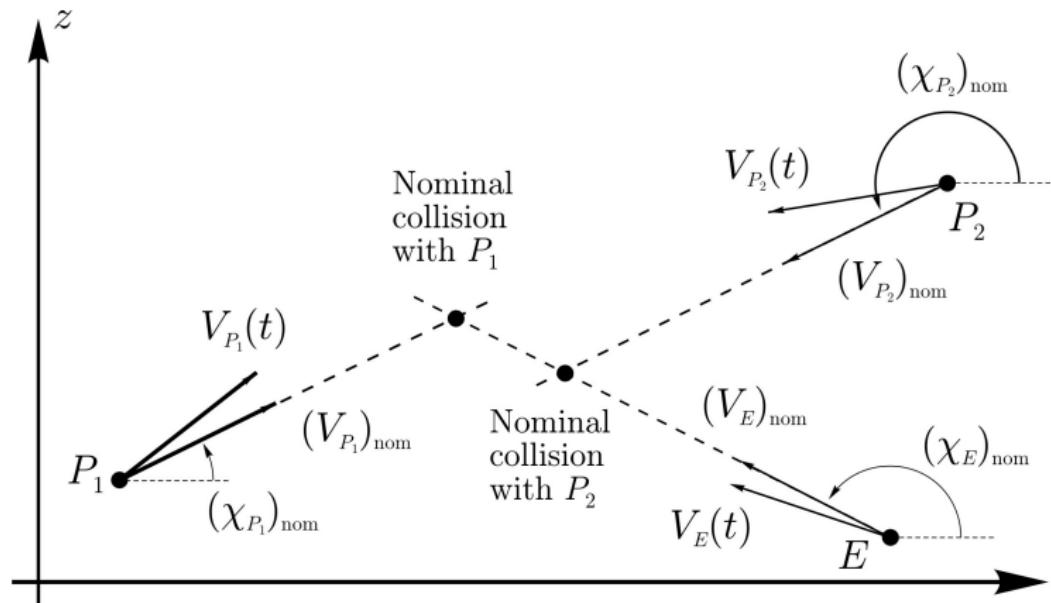
Здесь слева показаны множества уровня функции цены для случая сильного преследователя. Заливкой отмечена зона безразличия, где управление преследователя может быть произвольным. Все верхние линии отличаются от верхней границы зоны безразличия только смещением. Аналогично, нижние линии повторяют нижнюю границу этой зоны. Выше зоны безразличия оптимальное управление преследователя равно  $+\mu$ , ниже зоны безразличия его нужно брать равным  $-\mu$ . Горизонтальную ось можно взять в качестве линии переключения оптимального управления преследователя. На правом рисунке показаны множества уровня функции цены для случая слабого преследователя.

Это всё, что хотелось напомнить об игре «один-на-один».

# System of Level Sets

Here, at the left, level sets of the value function are shown for the case of strong pursuer. An indifference zone, where the pursuer's control can be arbitrary, is marked by gray fill. All upper lines are obtained by shift from the upper boundary of the indifference zone. Analogously, all the lower lines are parallel to the lower boundary. Above the indifference zone, the optimal pursuer's control is equal to  $+\mu$ , below the zone it equals  $-\mu$ . We can take the horizontal axis as a switching line for the optimal control of the pursuer. At the right figure, level sets of the value function are shown for the case of a weak pursuer. That's all that we would like to recall about the one-to-one problem.

# Scheme of Interception with Two Pursuers



Velocities along the horizontal axis are very large.

# Scheme of Interception with Two Pursuers

В нашей задаче мы имеем двух преследователей. На этом слайде изображена схема перехвата. Здесь два номинальных момента окончания, соответствующих номинальной встрече с первым преследователем и номинальной встрече со вторым преследователем.

---

In our problem, we have two pursuers. So, there are two instants of the nominal collisions, namely, with the first and second pursuers.

# Linearized Dynamics

Two termination instants  $T_1$  and  $T_2$  for the corresponding pursuers. The dynamics:

$$\ddot{z}_{P_i} = a_{P_i},$$

$$\ddot{z}_E = a_E,$$

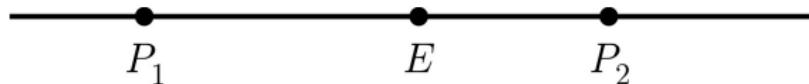
$$\dot{a}_{P_i} = (u_i - a_{P_i})/l_{P_i},$$

$$\dot{a}_E = (v - a_E)/l_E,$$

$$|u_i| \leq \mu_i, \quad a_{P_i}(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad |v| \leq \nu, \quad a_E(t_0) = 0.$$

The joint control  $u = (u_1, u_2)$ . The payoff:

$$\varphi = \min \left\{ |z_E(T_1) - z_{P_1}(T_1)|, |z_E(T_2) - z_{P_2}(T_2)| \right\}, \quad \min_u \max_v \varphi$$



Le Menec, S.: *Linear Differential Game with Two Pursuers and One Evader*. In: Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol.11, 209–226 (2011)

# Linearized Dynamics

Здесь видим линеаризованную динамику для каждого из преследователей. Преследователи действуют координированно. Поэтому можем объединить их в *первого игрока* с векторным управлением  $u$ , имеющим независимо ограниченные скалярные компоненты. Динамика убегающего такая же, как и прежде. Назовём его *вторым игроком*. Плата в игре — минимум расстояний, которые подсчитываются в моменты окончания  $T_1$  и  $T_2$  между убегающим и соответствующим преследователем. Первой публикацией по рассматриваемой задаче была статья S. Le Méne.

---

Here, we see linearized dynamics for each of pursuers. They act in coordination. Therefore, we can join them into the *first player* with a vector control  $u$  that has independently bounded scalar components. Dynamics of the evader is the same as earlier. We name it the *second player*. The payoff is the minimum of two distances computed at the termination instants  $T_1$  and  $T_2$  between the evader and the corresponding pursuer. The first publication on this problem was the paper by S. Le Méne.

# Relative Linear Dynamics

Change of variables:  $y_1 = z_E - z_{P_1}$ ,  $y_2 = z_E - z_{P_2}$

The new dynamics is

$$\begin{array}{rcl} \ddot{y}_1 & = & -a_{P_1} + a_E, \\ \dot{a}_{P_1} & = & (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, \\ \dot{a}_E & = & (v - a_E)/l_E \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \ddot{y}_2 & = & -a_{P_2} + a_E, \\ \dot{a}_{P_2} & = & (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, \end{array}$$

Constraints for the players controls:

$$|u_1| \leq \mu_1, \quad |u_2| \leq \mu_2; \quad |v| \leq \nu$$

The payoff:

$$\varphi(y_1(T_1), y_2(T_2)) = \min(|y_1(T_1)|, |y_2(T_2)|)$$

# Relative Linear Dynamics

Введём разностные геометрические координаты  $y_1$  и  $y_2$ . Запишем соответствующую динамику, ограничения на управления и функцию платы.

---

Let us introduce difference geometric coordinates  $y_1$  and  $y_2$ . We write the corresponding dynamics, constraints for the controls, and the payoff function.

# Dynamics in Forecasted Coordinates

## ZEM, Zero Effort Miss Coordinates

Consider coordinates  $x_1$  and  $x_2$  that are the values of  $y_1$  and  $y_2$  forecasted to the corresponding termination instants  $T_i$  under zero controls:

$$x_i = y_i + \dot{y}_i \tau_i - a_{P_i} l_{P_i}^2 h(\tau_i/l_{P_i}) + a_E l_E^2 h(\tau_i/l_E),$$
$$\tau_i = T_i - t, \quad i = 1, 2, \quad h(\alpha) = e^{-\alpha} + \alpha - 1$$

The dynamics:

$$\dot{x}_1 = -l_{P_1} h(\tau_1/l_{P_1}) u_1 + l_E h(\tau_1/l_E) v,$$
$$\dot{x}_2 = -l_{P_2} h(\tau_2/l_{P_2}) u_2 + l_E h(\tau_2/l_E) v$$

The parameters of the game:

$$\eta_i = \frac{\mu_i}{\nu} \quad \text{— maximal relative acceleration}$$

$$\varepsilon_i = \frac{l_E}{l_{P_i}} \quad \text{— relative agility} \quad i = 1, 2$$



# Dynamics in Forecasted Coordinates

## ZEM, *Zero Effort Miss* Coordinates

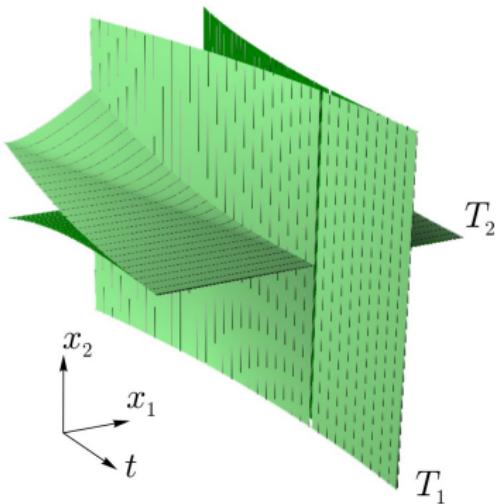
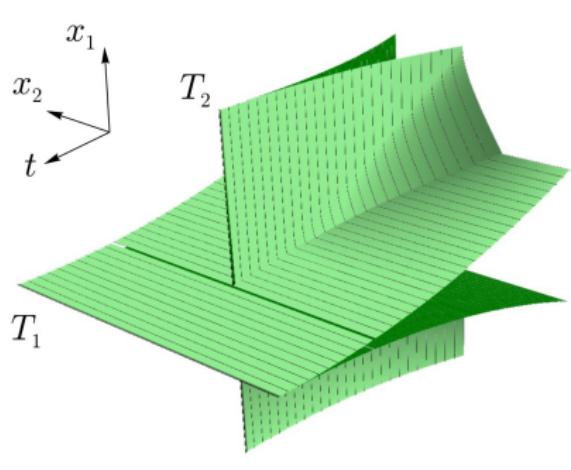
Запишем динамику в координатах прогнозируемого промаха.

Размерность нового фазового вектора равна 2. Величины  $\eta_i, \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , — нормированные параметры игры.

---

This is the dynamics in the ZEM-coordinates. The new phase vector has the dimension 2. The values  $\eta_i$  and  $\varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , are normalized parameters of the game.

# Solvability Set: “Strong” Pursuers



$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \nu = 1, l_{P_1} = 1/2, l_{P_2} = 1/0.857, l_E = 1, \\ T_1 = 7, T_2 = 5, c = 0$$

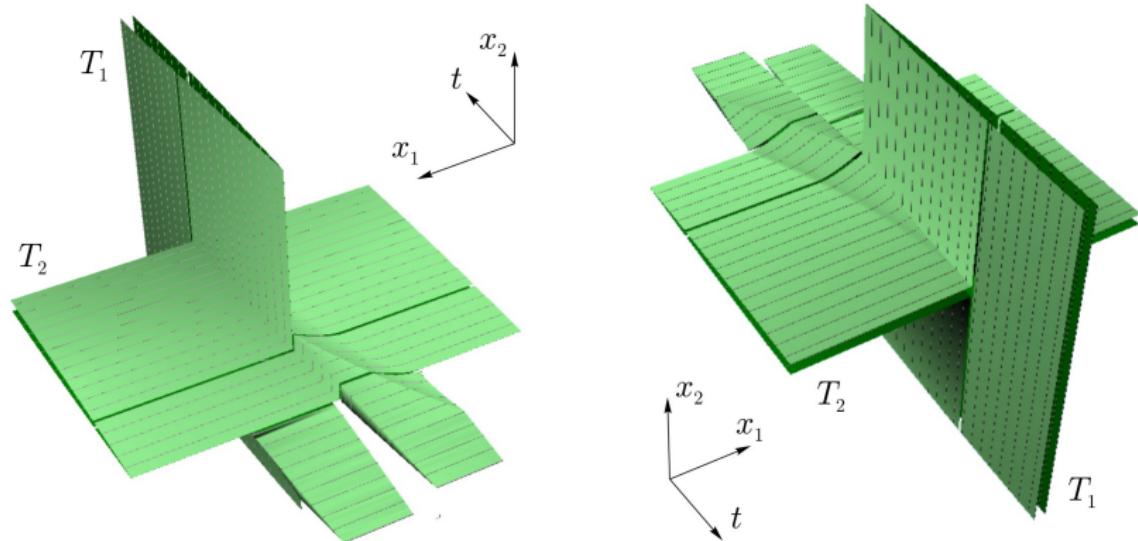
# Solvability Set: “Strong” Pursuers

Сейчас будут показаны численно просчитанные варианты множеств разрешимости. Пространство игры трёхмерное: ось времени  $t$  и две оси  $x_1, x_2$  координат прогнозируемого промаха. На этом слайде мы видим с двух точек зрения множество разрешимости для случая сильных преследователей. Моменты  $T_1$  и  $T_2$  — моменты окончания. Гарантированный промах, для которого построено множество разрешимости, равен нулю. В нижней части слайда указаны параметры задачи.

---

Now, we shall show some numerically obtained pictures of solvability sets. The game space is three-dimensional: the time axis  $t$  and two axes  $x_1$  and  $x_2$  of the ZEM-coordinates. On this slide, for the case of strong pursuers, we see a solvability set from two points of view. Termination instants are marked as  $T_1$  and  $T_2$ . In the lower part of the slide, the parameters of the problem are given.

# Solvability Set: “Weak” Pursuers



$\mu_1 = 0.9, \mu_2 = 0.8, \nu = 1, l_{P_1} = l_{P_2} = 1/0.7, l_E = 1, T_1 = 9,$   
 $T_2 = 7, c = 2.0$

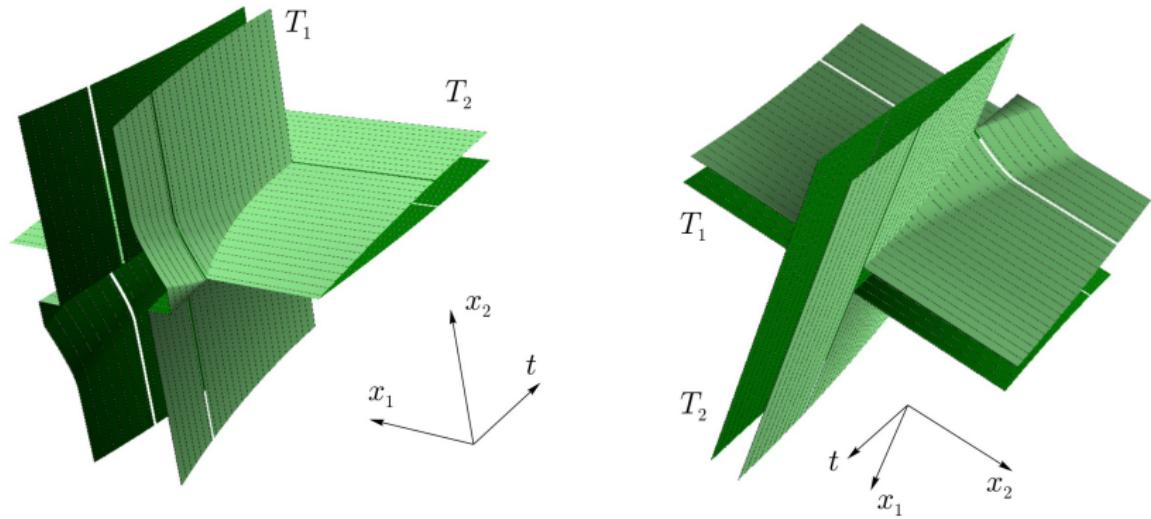
# Solvability Set: “Weak” Pursuers

Здесь с двух точек зрения показано множество разрешимости для случая слабых преследователей. Величина промаха  $c = 2.0$ . В некоторый момент обратного времени  $t$ -сечение множества разрешимости разделяется на два подмножества. Каждое из них обрывается с увеличением обратного времени.

---

Here, the solvability set for the miss  $c = 2.0$  was constructed for the case of weak pursuers. The set is shown from two points of view. At some instant of the backward time, the  $t$ -section of the solvability set disjoins into two subsets. Each of them degenerates at some further instant of the backward time.

# One Strong and One Weak Pursuers



$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \nu = 1, l_{P_1} = 1/2, l_{P_2} = 1/0.3, l_E = 1, \\ T_1 = 5, T_2 = 7, c = 5.0$$

# One Strong and One Weak Pursuers

Множество разрешимости на этом слайде соответствует промаху  $c = 5.0$  и построено для случая одного сильного и одного слабого преследователей.

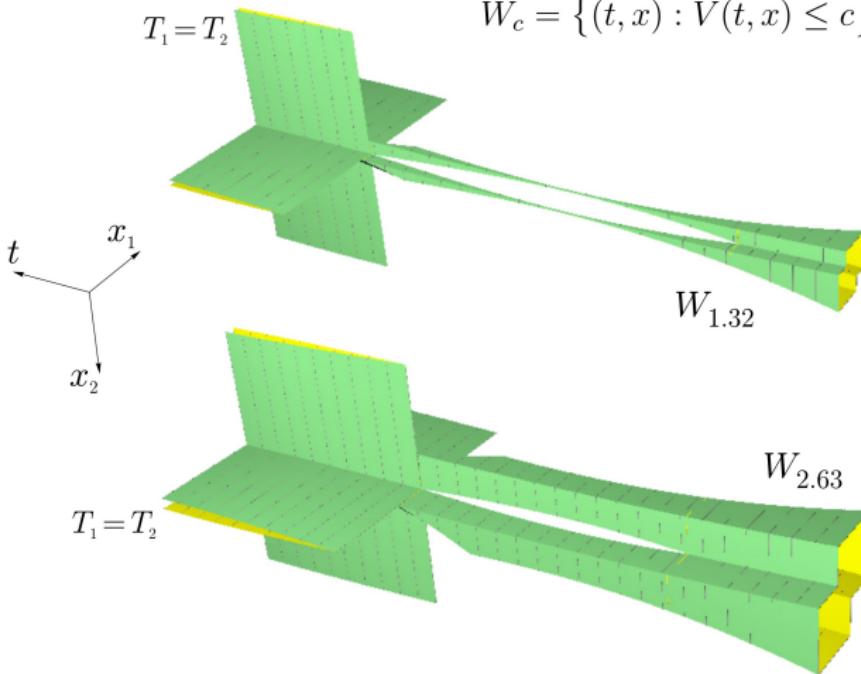
---

The solvability set in this slide corresponds to the case of one strong and one weak pursuers. The guaranteed miss  $c$  equals 5.0.

# Varying Advantage of Pursuers (1)

$$T_1 = T_2$$

$$W_c = \{(t, x) : V(t, x) \leq c\}$$



$$\mu_1 = \mu_2 = 1.5, \nu = 1, l_{P_1} = l_{P_2} = 1/0.25, l_E = 1,$$
$$T_1 = T_2 = 15$$

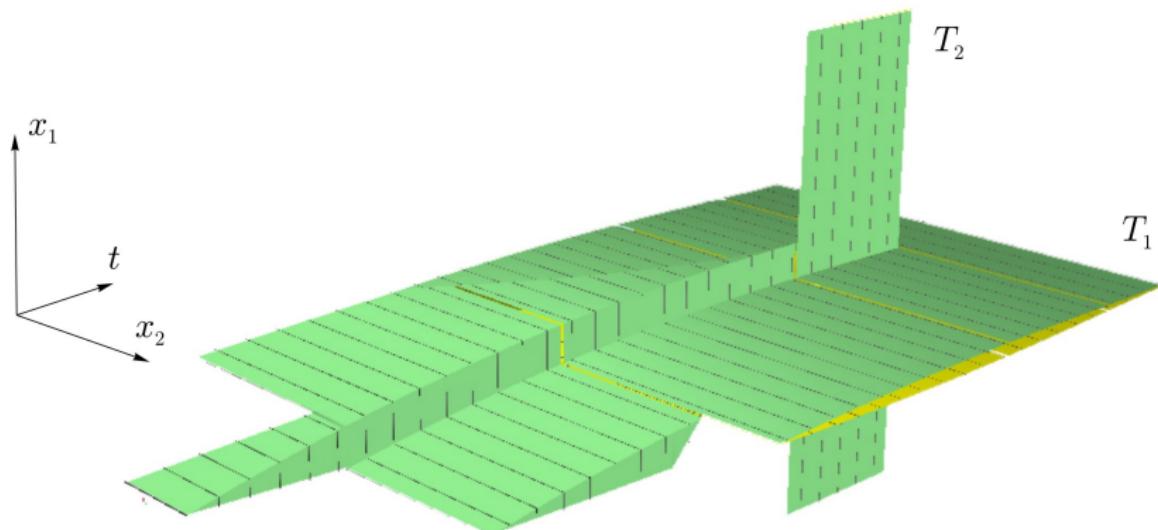
# Varying Advantage of Pursuers (1)

Здесь показаны два множества разрешимости со значениями промаха  $c = 1.32$  и  $c = 2.63$ , построенные для случая одинаковых преследователей, причём на начальном промежутке обратного времени динамическое преимущество имеет убегающий, а потом оно переходит к преследователям. Моменты окончания  $T_1$  и  $T_2$  совпадают.

---

Here for the case of identical pursuers and varying advantage (the evader has a dynamic advantage in the initial interval of the backward time, then the advantage passes to the pursuers), we see two solvability sets corresponding to the misses  $c = 1.32$  and  $c = 2.63$ . Termination instants  $T_1$  and  $T_2$  are equal.

# Varying Advantage of Pursuers (2)



$$\mu_1 = 0.8, \mu_2 = 1.3, \nu = 1, l_{P_1} = 1/20, l_{P_2} = 1/0.5, l_E = 1, T_1 = 15, T_2 = 13.5, c = 0.263$$

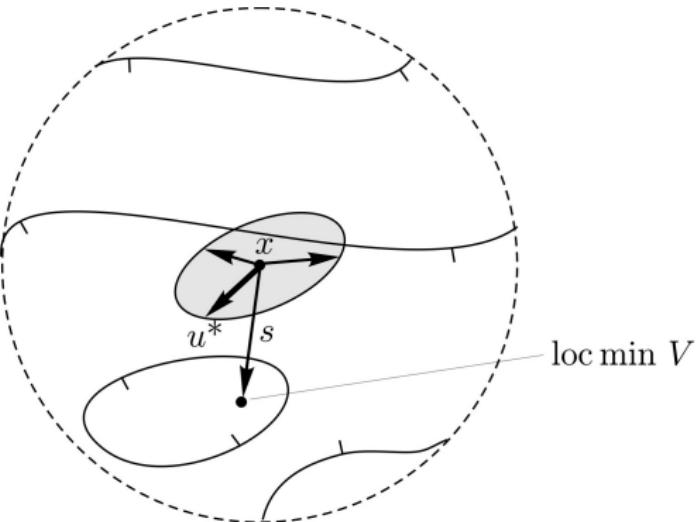
# Varying Advantage of Pursuers (2)

Здесь параметры игры подобраны так, что первый преследователь имеет динамическое преимущество над убегающим на некотором начальном промежутке обратного времени, но теряет его при дальнейшем увеличении обратного времени. Наоборот, второй преследователь в начале обратного времени слабее убегающего, а потом становится сильнее. Показанное на слайде множество разрешимости соответствует значению промаха  $c = 0.263$ . Из-за слабости первого преследователя при больших значениях обратного времени множество обрывается.

---

Here, the parameters of the game are such that the pursuer  $P_1$  has an advantage over the evader in some initial interval of the backward time, but then the advantage passes to the evader with growth of the backward time. On the contrary, the pursuer  $P_2$  is weaker than the evader and after that it becomes stronger. The solvability set shown in this slide corresponds to the miss  $c = 0.263$ . Due to the weakness of the first pursuer at large instants of the backward time, the solvability set degenerates at some instant.

# General Method of Control Generation



$x$  is the current phase state,  $s$  is the vector of the desirable shift,  $u^*$  is the optimal control

The problem is in storing the entire value function or in fast computing it in the neighborhood of the current phase state

# General Method of Control Generation

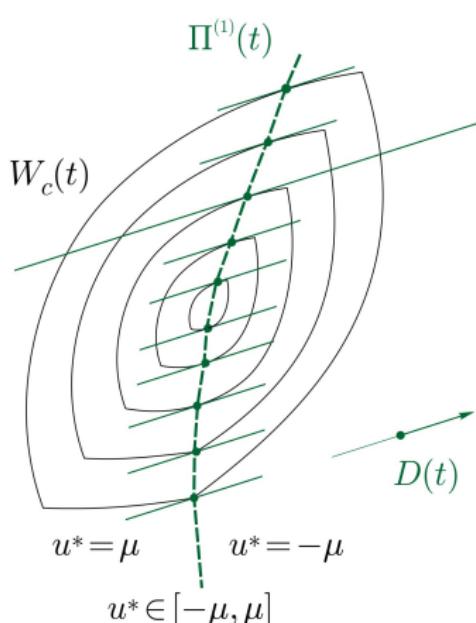
Общая идеология теории дифференциальных игр предполагает для построения оптимального управления обратной связи либо хранение в памяти функции цены целиком, либо быстрое её вычисление в некоторой окрестности текущего фазового состояния системы. При этом оптимальное управление в текущий момент определяется при помощи некоторого вектора экстремального сдвига.

---

A common ideology of differential game theory for constructing an optimal feedback control supposes either storing the entire value function or its fast computing in some neighborhood of the current phase state of the system. By this, the optimal control is found with the help of some vector of extremal shift.

# Constructing Switching Lines

$$\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad |u| \leq \mu, \quad |v| \leq \nu$$



Convex case

N.D.Botkin, V.S.Patsko, M.A.Zarkh

# Constructing Switching Lines

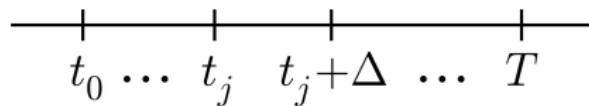
Для задач с выпуклой функцией платы имеем выпуклые  $t$ -сечения множеств уровня функции цены. В случае скалярного управления (и как следствие, скалярной векторограммы) одного или обоих игроков мы можем обработать сечения множеств уровня, взятые на некоторой сетке моментов времени, и получить линии переключения оптимального управления. На слайде показана схема такой обработки в случае скалярных управлений обоих игроков.

Используются векторы  $D(t)$  и  $E(t)$  из записи динамики в координатах прогнозируемого промаха. По одну сторону от линии переключения оптимальное управление соответствующего игрока принимает одно крайнее значение, по другую — другое. На самой линии переключения для первого игрока управление может быть произвольным, а для второго допустимо выбирать только крайние значения. При этом в памяти хранятся только сами линии переключения без какой-либо дополнительной информации.

# Constructing Switching Lines

For differential games with convex payoff function, we have convex  $t$ -sections of level sets of the value function. In the case of scalar control (and therefore, scalar vectogram) of one or both players, we can process the sections taken in some time grid and obtain switching lines for optimal control. In this slide, we see a scheme of the processing in the case of scalar controls of both players. The processing involves the vectors  $D(t)$  and  $E(t)$  from the dynamics written in the coordinates of the forecasted miss. On one side of the switching line, the optimal control of the corresponding player takes one extreme value, on the other side it has the opposite extreme value. On the switching line, the optimal control is arbitrary for the first player. The second player should take one of the extreme values when being on his switching line. With that, we store the switching lines only without any additional information.

# Krasovskii's Discrete Control Scheme



$$u(t) = u^*(t_j, x(t_j)), \quad t \in [t_j, t_j + \Delta)$$

$$v(t) = v^*(t_j, x(t_j)), \quad t \in [t_j, t_j + \Delta)$$

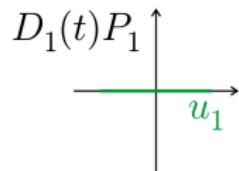
# Krasovskii's Discrete Control Scheme

Мы применяем управление, основанное на линиях переключения, в дискретной схеме управления. На каждом интервале дискретной схемы управление является постоянным.

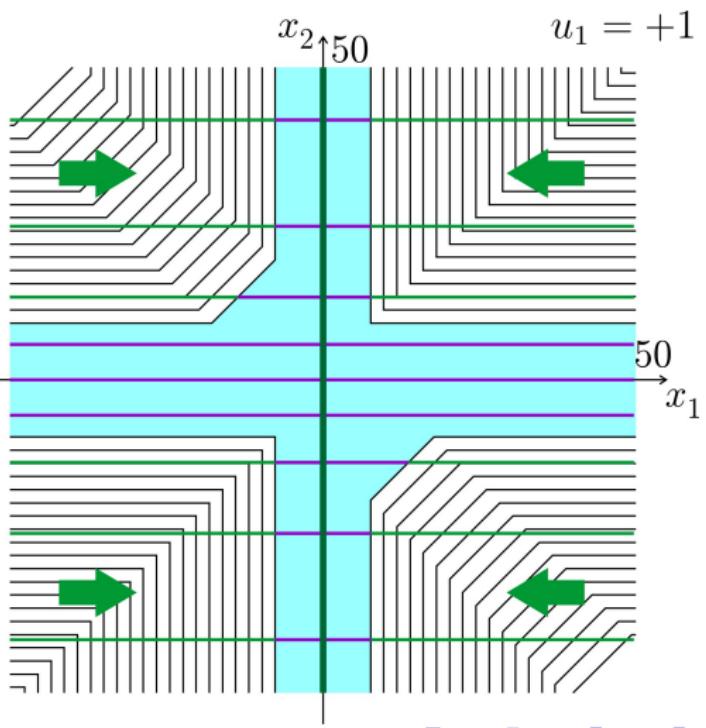
---

We apply the feedback control based on the switching lines in discrete scheme of control. In each time interval of discrete scheme, the control is kept constant.

# Strategy for the Control $u_1$ of the First Player; Strong Pursuers



- the minimum of the value function
- — the direction of the control
- zone of indifference
- the switching line



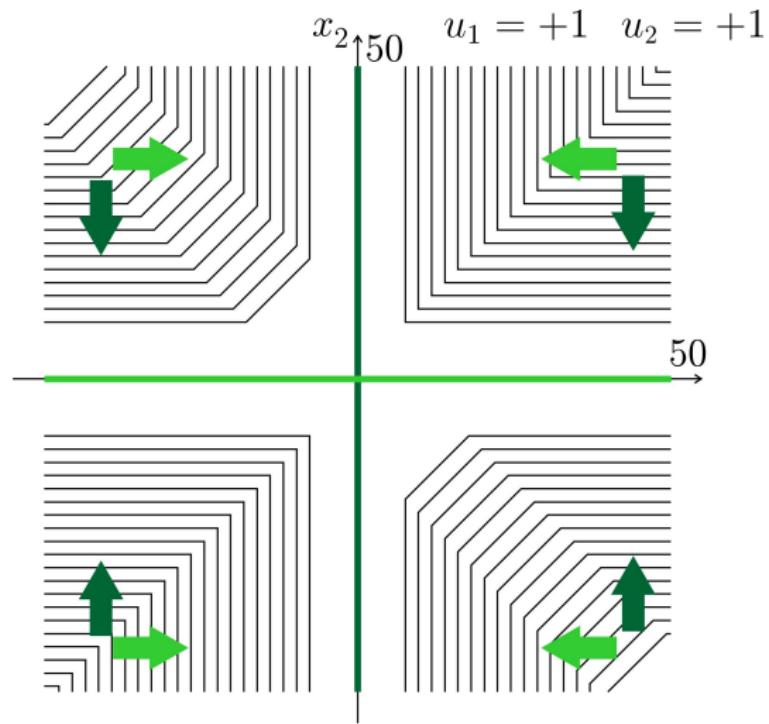
# Strategy for the Control $u_1$ of the First Player; Strong Pursuers

Несмотря на то, что в нашей задаче  $t$ -сечения множеств уровня функции цены не являются выпуклыми, удаётся сохранить схему построения линий переключения, разработанную для выпуклого случая. На этом слайде для случая сильных преследователей для некоторого момента времени  $t$  показаны  $t$ -сечения множеств уровня функции цены. Управление первого игрока имеет две независимые компоненты  $u_1$  и  $u_2$ . Управление  $u_1$  действует по горизонтали. Расслаивая плоскость  $x_1, x_2$  горизонтальными прямыми, на каждой из них находим отрезок минимума сужения функции цены на эту прямую и берём в нём произвольную точку, которая пойдёт в линию переключения для управления  $u_1$ . В случае сильных преследователей в качестве линии переключения управления  $u_1$  в любой момент времени можно взять вертикальную ось.

# Strategy for the Control $u_1$ of the First Player; Strong Pursuers

In spite of the fact that in our problem  $t$ -sections of level sets of the value function are not convex, it is possible to keep the scheme of switching line construction elaborated for the convex case. In this slide,  $t$ -sections of level sets of the value function are shown for some instant for the case of strong pursuers. Control vector of the first player has two independent components  $u_1$  and  $u_2$ . The control  $u_1$  acts horizontally. Analyzing the value function along the horizontal lines, we determine intervals of minimum of the value function in each of the lines. We take an arbitrary point from every interval for the switching line of the control  $u_1$ . In the case of strong pursuers, at any instant, we can take the vertical axis as the switching line for the control  $u_1$ .

# Switching Lines of the First Player for Case of Two Strong Pursuers



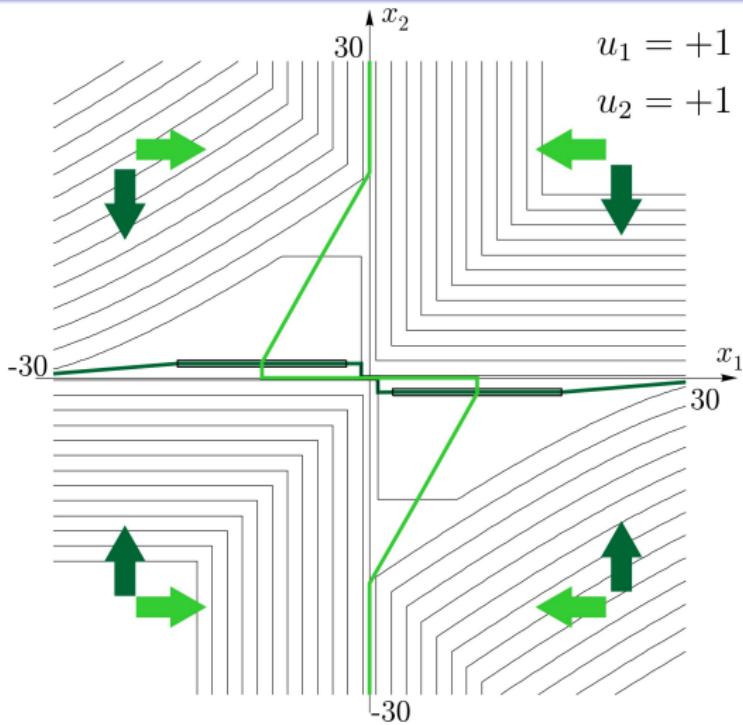
# Switching Lines of the First Player for Case of Two Strong Pursuers

Для управления  $u_2$ , которое действует по вертикали, рассуждая аналогично, в качестве линии переключения можно взять вертикальную ось. Таким образом, в случае сильных преследователей линии переключения для первого игрока очень простые: это вертикальная и горизонтальная оси.

---

For the control  $u_2$  that acts in the vertical direction, doing analogous constructions, we can take the horizontal axis as the switching line. So, in the case of strong pursuers, the switching lines are very simple, namely, they are the vertical and horizontal axes.

# Switching Lines of the First Player for Case of Two Weak Pursuers



The switching lines depend on time  $t$

# Switching Lines of the First Player for Case of Two Weak Pursuers

На этом слайде для некоторого момента времени показаны линии переключения первого игрока для случая двух слабых преследователей. В этом случае линии переключения зависят от времени.

---

In this slide, the switching lines of the first player are shown for the case of two weak pursuers for some instant. In this case, the switching lines depend on the time.

# Quasioptimality and Stability of the Control Method

For the case of two strong pursuers, it is proved that the first player's control method based on the switching lines guarantees a result close to the value of the Value function at an arbitrary initial position if the errors of numerical constructions and inaccuracies of measurements of the current phase state are small.

The same statement is true for the case of two weak pursuers.

We think that the statement is true also for the case of one strong and one weak pursuers.

But for the case of varying advantage of pursuers, in all likelihood, we need, maybe, some additional information on or near some parts of the switching lines, for example, values of the Value function or vectors of its gradients.

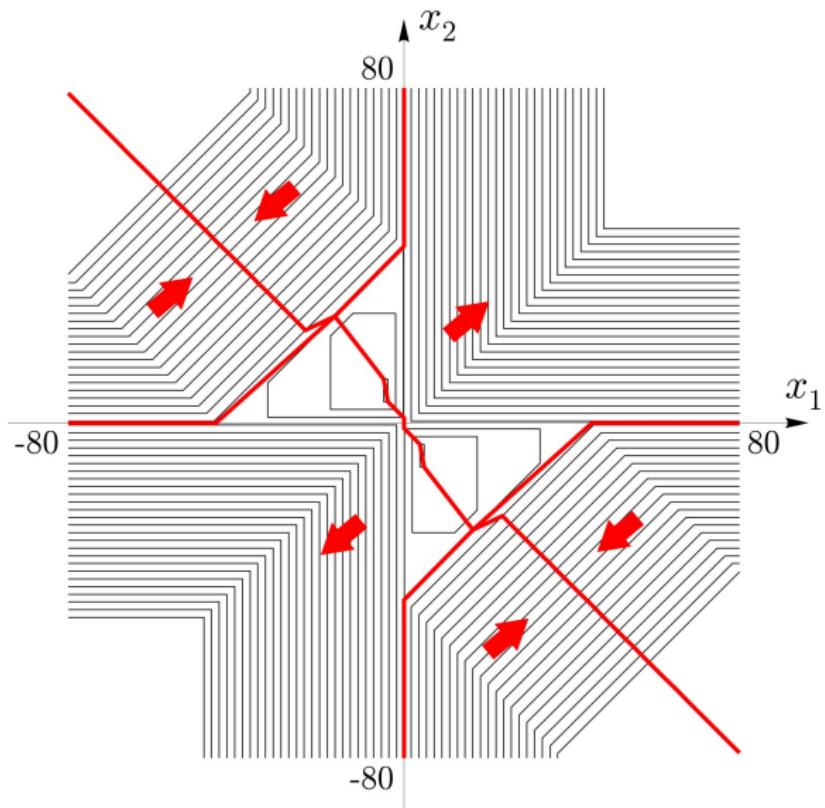
# Quasioptimality and Stability of the Control Method

Не выписывая аккуратно соответствующие утверждения, отметим следующее. Для случая сильных преследователей линии переключения, применяемые в дискретной схеме управления, гарантируют первому игроку результат, близкий к цене игры для произвольной начальной позиции. Доказана устойчивость метода управления относительно малых погрешностей при численном построении линий переключения и малых неточностей при измерении текущего фазового состояния системы. Аналогичное утверждение доказано для случая слабых преследователей. Мы думаем, что подобные утверждения справедливы и для случая, когда один из преследователей сильный, а другой слабый. Но существуют проблемы с обоснованием способа управления при помощи линий переключения для случая переменного преимущества.

# Quasioptimality and Stability of the Control Method

Not writing strict mathematical statements accurately, we would remark the following. For the case of strong pursuers, the switching lines applied in a discrete scheme of control guarantee to the first player a result close to the value function for any initial position of the game. It is proved that the method is stable with respect to small errors of numerical constructions of switching lines and to small inaccuracies of measurements of the current phase position of the system. We think that similar statements are valid for the case of one strong and one weak pursuers. But there are some difficulties with justification of the switching line method for the cases of varying advantage of pursuers.

# Switching Lines for the Second Player



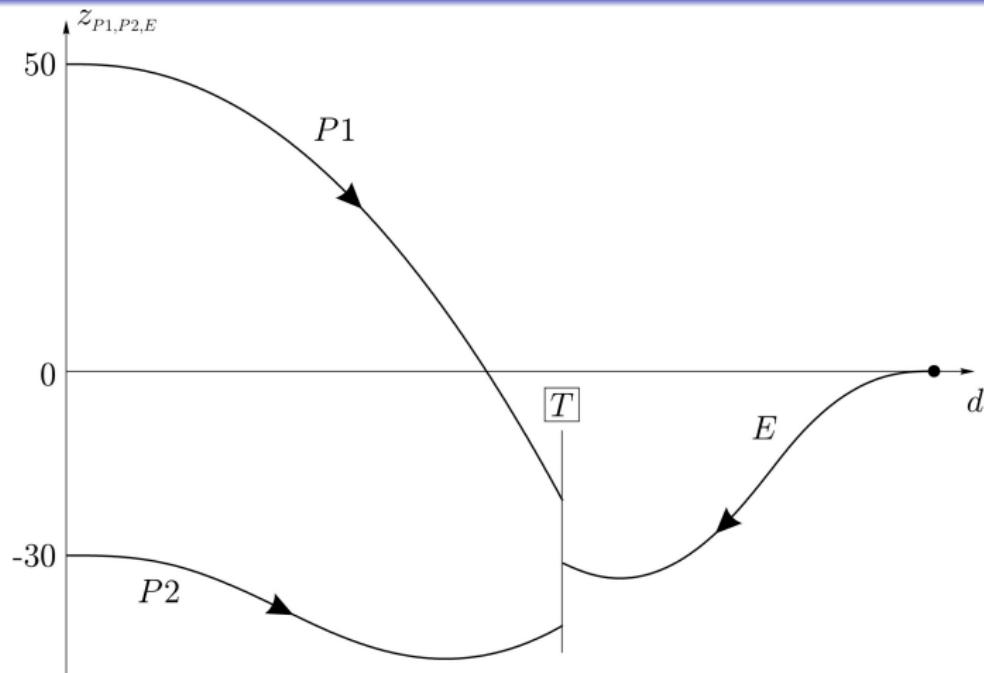
# Switching Lines for the Second Player

Линии переключения строятся также и для второго игрока. На этом слайде показаны линии переключения управления  $v$  для некоторого момента времени в случае слабых преследователей. Здесь мы имеем 6 клеток, внутри которых оптимальное управление  $v$  постоянно и принимает то или иное крайнее значение.

---

We build switching lines for the second player too. In this slide, we show them for some instant in the case of weak pursuers. Here, we have 6 cells, inside of which the optimal control  $v$  is constant and equal to some extreme value.

# Trajectory under Quasioptimal Controls of Both Players; Weak Pursuers



$$\mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.95, \nu = 1, l_{P_1} = 1/1.3, l_{P_2} = 1/0.4, l_E = 1, \\ T = T_1 = T_2 = 15$$

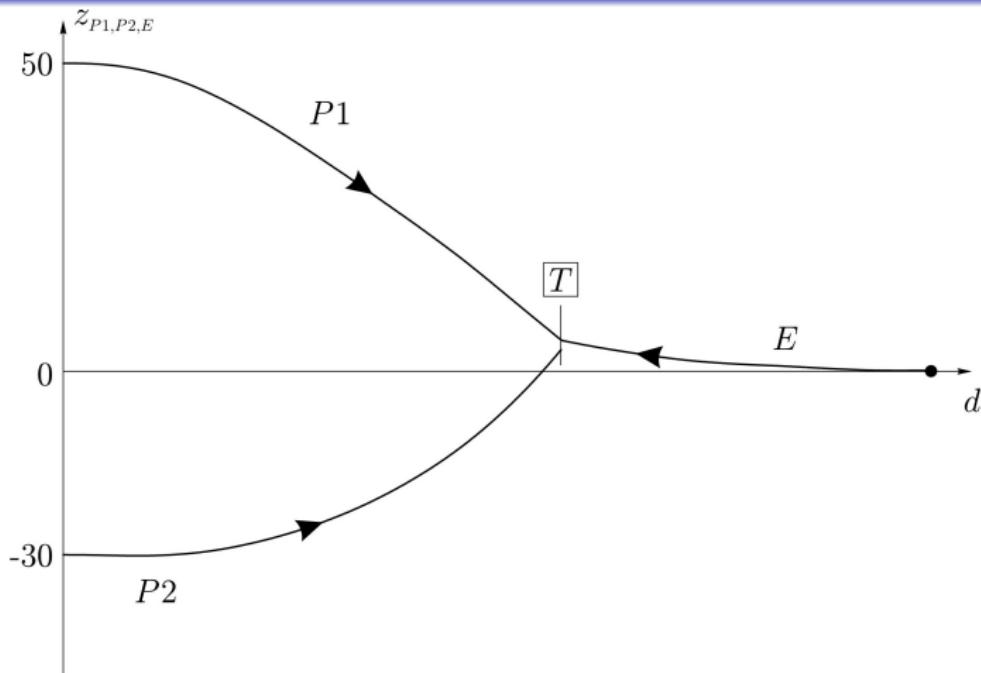
# Trajectory under Quasioptimal Controls of Both Players; Weak Pursuers

Сейчас будут представлены результаты моделирования движений системы для случая слабых преследователей. Преследователи и убегающий двигаются, имея постоянные горизонтальные составляющие скоростей. Моменты  $T_1$  и  $T_2$  совпадают. Управление каждого из объектов влияет только на вертикальные составляющие движения. На этом слайде показаны траектории в силу управлений при помощи линий переключения.

---

Now, simulation results for the case of weak pursuers will be considered. The pursuers and evader move having constant horizontal components of their velocities. The termination instants  $T_1$  and  $T_2$  are equal. For each of these objects, its control affects only the vertical component of the motion. In this slide, the trajectories are generated under controls on the basis of switching lines.

# Quasioptimal Control of the First Player and Random Control of the Second One



$$\mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.95, \nu = 1, l_{P_1} = 1/1.3, l_{P_2} = 1/0.4, l_E = 1, T = T_1 = T_2 = 15$$

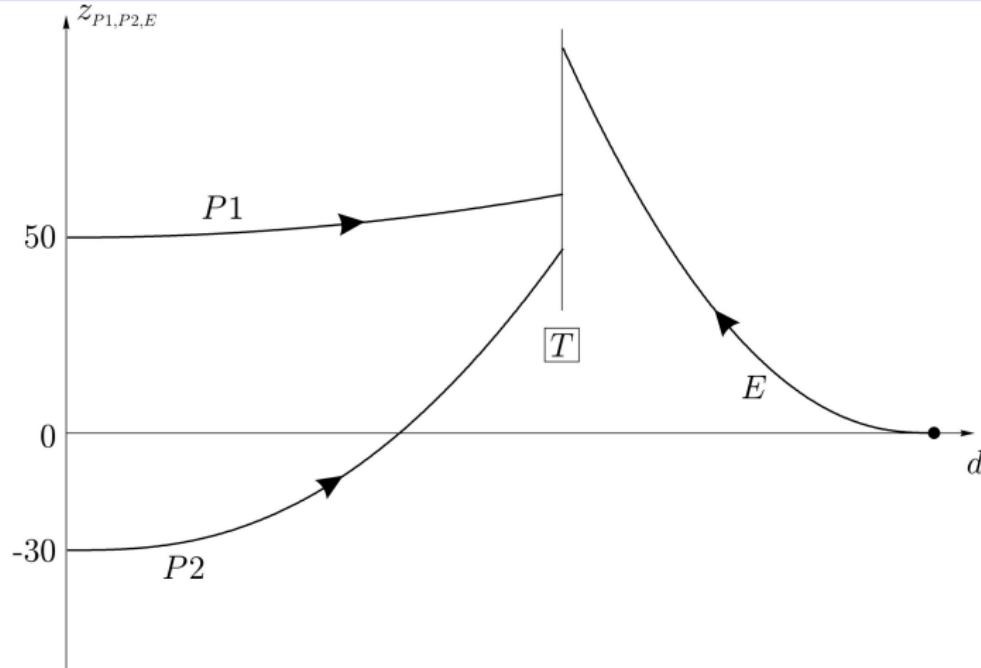
# Quasioptimal Control of the First Player and Random Control of the Second One

Здесь для убегающего использовалось случайное управление.  
Результирующий промах равен нулю, хотя преследователи слабее.

---

Here, we used a random control for the evader. The resultant miss equals zero, despite the pursuers are weaker.

# Quasioptimal Controls. One Pursuer is Very Weak



$$\mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.95, \nu = 1, l_{P_1} = 1/9.0, l_{P_2} = 1/0.4, l_E = 1, T = T_1 = T_2 = 15$$

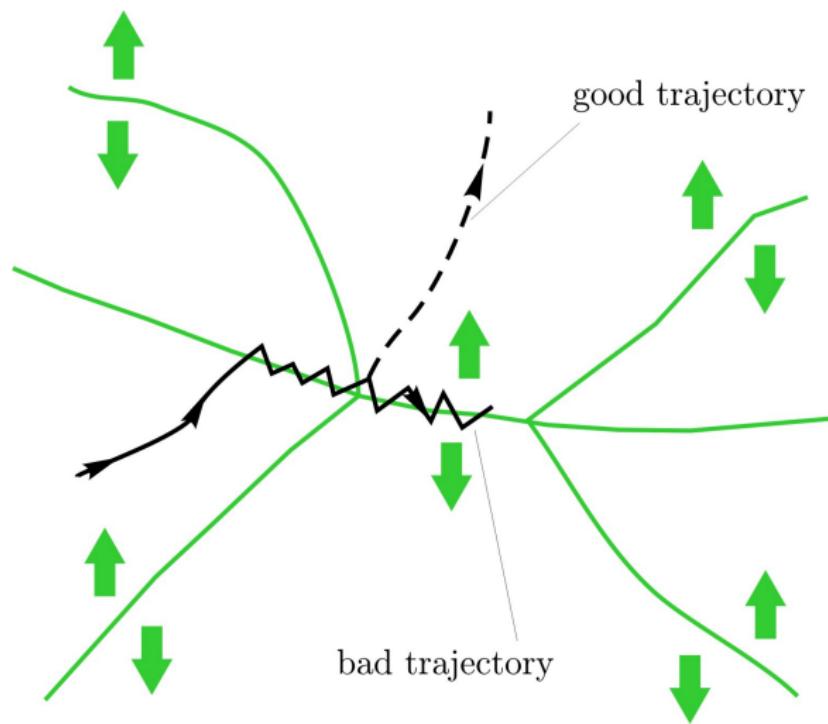
# Quasioptimal Controls. One Pursuer is Very Weak

Для этого моделирования преследователь  $P_1$  сделан очень слабым.  
Действуя оптимально, убегающий получает большой промах.

---

In this simulation, the pursuer  $P_1$  is very weak. Using optimal control, the evader obtains a very large miss.

# Possible Problems of the Suggested Control Method



# Possible Problems of the Suggested Control Method

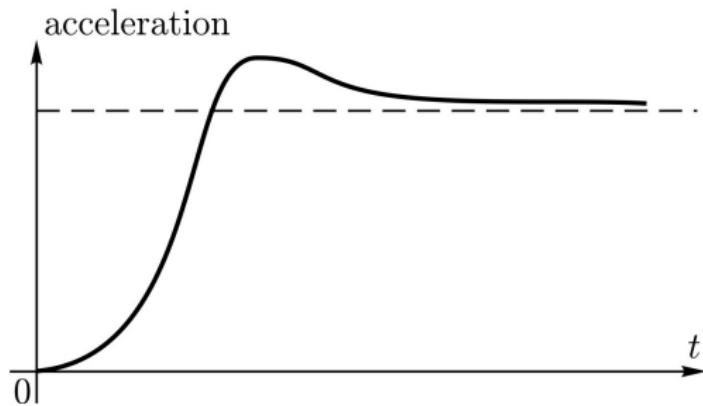
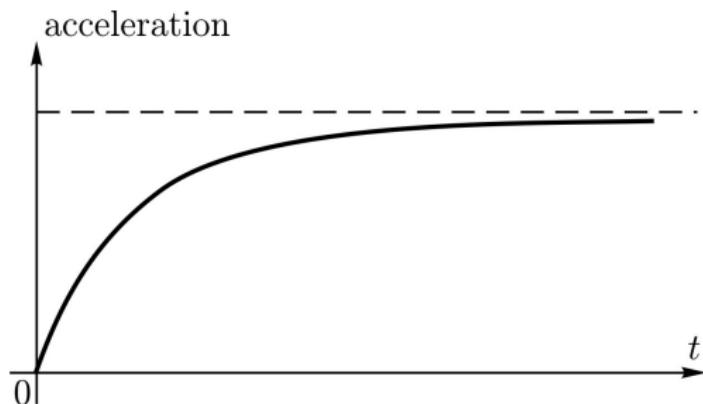
Дадим краткое пояснение, почему может отсутствовать устойчивость метода управления, основанного на линиях переключения, в случае малых возмущений в измерении фазового состояния. Рисунок, показанный на этом слайде, схематичный. Предположим, что движение попадает на участок линии переключения первого игрока (построенной, например, для управления  $u_2$ ), обладающий свойством рассеивания (то есть, оптимальная траектория должна пойти от линии переключения). Тогда информационные ошибки в определении положения системы относительно линии переключения могут привести к возникновению скользящего режима: например, система расположена выше линии переключения, но в силу ошибки измерения метод считает, что система находится ниже, и выбирает управление, тянувшее систему вниз; и наоборот. Вдоль получаемой траектории цена игры может возрастать. Но это требует очень «искусного» сочетания ошибки измерения и поведения противника, то есть второго игрока, что на практике маловероятно.



# Possible Problems of the Suggested Control Method

Let us give a brief explanation, why the stability property of the control method based on switching lines can be destroyed if there are small inaccuracies in measurements of system phase state. The picture shown in this slide is schematic. Suppose that a motion of the system reaches a part of the first player's switching line (constructed, for example, for the control  $u_2$ ) with dispersal property (that is, the optimal trajectory should go away the line). The under information errors, there can be sliding regime near the switching line: let the system actually located above the line, but due to a measurement error the method counts that the system is located below the line and chooses the control, which pushes the system down; and vice versa. Along such a chattering trajectory, the value function can increase. But it requires very skilful combination of an information error and a behavior of the opponent (that is, the second player). This is almost impossible in a real process.

# More Complicated Acceleration Law



# More Complicated Acceleration Law

В описании динамики объектов использовалось звено первого порядка при переходе от управления к ускорению. Мы планируем модернизировать наши построения для более реалистичного, но и более сложного случая, когда переход от управления к ускорению осуществляется через звено второго порядка.

---

It is used the first order law to form the acceleration of the objects. In the future, we shall try to modify our computations for the case of the second order control law.

# References

- ① Krasovskii, N.N.: *Control of Dynamic System*. Nauka, Moscow (1985) (in Russian)
- ② Krasovskii, N.N., Subbotin, A.I.: *Game-Theoretical Control Problems*. Springer-Verlag, New York (1988)
- ③ Gutman, S., Leitmann, G.: *Optimal strategies in the neighborhood of a collision course*. AIAA Journal **14**(9), 1210–1212 (1976)
- ④ Shinar, J., Shima, T.: *Non-orthodox guidance law development approach for intercepting maneuvering targets*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics **25**(4), 658–666 (2002)
- ⑤ Le Méne, S.: *Linear differential game with two pursuers and one evader*. In: Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 11, Breton, M., Szajowski, K. (Eds.), Birkhauser: Boston. 209–226 (2011)
- ⑥ Ganebny, S.A., Kumkov, S.S., Le Méne, S., Patsko, V.S.: *Model problem in a line with two pursuers and one evader*. Dyn. Games Appl. **2**, 228–257 (2012)

# References

Здесь указаны основные публикации, которые использовались в нашем исследовании.

---

Here, the main publications are shown, which were used in our investigation.