

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И  
МЕХАНИКИ**

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ**

**Том 3**



**Екатеринбург  
1995**

УДК 62.50

## ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ В ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

С. И. Кумков, В. С. Пацко

Рассматривается модельная задача преследования с неполной информацией. Позиция игры включает в себя информационное множество состояний, совместимых с историей процесса. Исследуется случай, когда информационные множества являются отрезками. Приводится доказательство оптимальности предложенных стратегий обратной связи.

### Введение

Один из вариантов исследования задач управления при неполной информации о фазовом векторе связан с переходом к описанию состояния как множества точек в фазовом пространстве, совместимых с информацией о поведении системы, накопленной до данного момента. Такие множества принято называть информационными, и задача ставится как задача управления изменением информационного множества во времени с целью минимизации того или иного показателя. Поскольку информационное множество зависит от текущего замера, то естественно возникают минимаксные постановки, где первый игрок распоряжается полезным управлением, второй – выбором текущего замера. Проблеме формализации указанных задач посвящено большое число работ (см., например, [1–5]). Значительно меньшее количество работ связано с нахождением решений в конкретных задачах.

В статье рассматривается модельная задача преследования на плоскости, в которой догоняющий замеряет с ошибкой угловую скорость линии визирования и при помощи импульсного управления минимизирует величину промаха. В соответствие исходной задаче ставится вспомогательная дифференциальная игра с неполной информацией. Возможны различные по степени сложности постановки вспомогательной задачи [6, 7]. В данной статье изучается наиболее простой случай, когда информационные множества суть отрезки. Цель работы – доказательство оптимальности предложенных стратегий обратной связи. Исследуемые стратегии допускают модификацию и на случай, когда информационные множества не являются отрезками; однако в более сложном случае не удастся доказать их оптимальность. Результаты моделирования движений исходной системы при использовании стратегий вспомогательной дифференциальной игры приведены в [6, 7]. Отметим работы [3, 8, 9], где исследовались некоторые задачи с информационными множествами в виде отрезков и найдены оптимальные стратегии.

## Основные обозначения

$E_{НОМ}$ — номинальное начальное положение убегающего в разностной системе координат,  
 $V_{НОМ}$ — номинальный начальный вектор разностной скорости,  
 $e = |V_{НОМ}|$ ,  
 $x, z$ — оси разностной системы координат,  
 $V_x, V_z$ — составляющие вектора разностной скорости,  
 $N$ — запас импульсов преследователя,  
 $\Delta\Upsilon$ — величина одного импульса,  
 $v_x, v_z$ — составляющие ускорения убегающего по осям  $x$  и  $z$ ,  
 $\nu$ — константа, ограничивающая модуль ускорения убегающего,  
 $\Delta$ — шаг дискретной схемы наблюдения и управления,  
 $k(t_i)$ — количество импульсов преследователя с предписанным знаком, реализуемое в момент  $t_i$ ,  
 $\alpha$ — угол визирования,  
 $\omega$ — угловая скорость линии визирования,  
 $\omega_m$ — измеряемое значение угловой скорости линии визирования,  
 $\xi$ — ошибка замера,  
 $c_1, c_2$ — константы в геометрическом ограничении на ошибку замера,  
 $A$ — ограничение на значение  $\omega(t_0)$ ,  
 $I_-, I, I_+$ — информационные отрезки: до замера, после замера, после действия импульсов,  
 $\omega_c, b$ — центр и полуширина информационного отрезка,  
 $\omega_*, \omega^*$ — левый и правый края информационного отрезка,  
 $H$ — отрезок неопределенности,  
 $s_c, \beta$ — центр и полуширина отрезка неопределенности,  
 $s_*, s^*$ — левый и правый края отрезка неопределенности,  
 $\Pi$ — пассивный прогнозируемый промах,  
 $U, \Omega$ — стратегии первого и второго игроков,  
 $\Phi$ — функционал платы,  
 $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}$ — наилучшие гарантированные результаты первого и второго игроков,  
 $U^\circ, \Omega^\circ$ — оптимальные стратегии первого и второго игроков,  
 $a = c_2/(1 - c_1)$ ,  
 $F$ — функция гипотетического промаха.

## § 1. Содержательное описание задачи

Две материальные точки: преследователь  $P$  и убегающий  $E$  передвигаются на плоскости. Преследователь замеряет в дискретные моменты  $t_i$  угловую скорость линии визирования и, применяя в эти же моменты импульсное управление, старается уменьшить величину промаха. Большие промахи считаются неудовлетворительными (высокоточное наведение). Импульсы действуют ортогонально некоторому заранее заданному и неизменному во времени направлению. Пусть  $\Delta\Upsilon$ — величина одного импульса,  $N$ — запас импульсов. Символом  $k(t_i)$  обозначим количество импульсов с предписанным знаком, поданное в момент  $t_i$ ; ( $k(t_i)$ )— либо целое

отрицательное, либо целое положительное, либо нуль). Ограничение на расход:  $\sum_i |k(t_i)| \leq N$ . Убегающий изменяет скорость своего движения, выбирая вектор ускорения  $v$  с компонентами  $v_x, v_z$ . Управление  $v$  стеснено условием  $|v| \leq \nu$ .

Замеряемое в момент  $t_i$  значение  $\omega_m(t_i)$  и истинная угловая скорость  $\omega(t_i)$  линии визирования связаны соотношением  $\omega_m(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i)$ . Здесь  $\xi(t_i)$  – ошибка замера, относительно которой известно лишь, что  $|\xi(t_i)| \leq c_1 |\omega(t_i)| + c_2$ , где  $c_1, c_2$  – заданные константы,  $1 > c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ .

В начальный момент  $t_0$  оговорены номинальное положение  $E_{NOM}$  убегающего и номинальный вектор  $V_{NOME}$  его скорости. Символом  $V_P(t_0)$  обозначим вектор начальной скорости преследователя. Совместим начало разностной системы координат с преследователем (рис. 1). Направим ось  $x$  противоположно вектору  $V_{NOM} = V_{NOME} - V_P(t_0)$ . Условимся, что в момент  $t_0$  преследователь выбирает вектор  $V_P(t_0)$  так, чтобы ось  $x$  проходила через точку  $E_{NOM}$ . Перпендикулярную к  $x$  ось обозначим через  $z$ . Направления осей неизменны по  $t$ . Предположим, что импульсы действуют вдоль оси  $z$  (экономное расходование ресурса в процессе преследования). Положение  $E(t_0)$  убегающего в начальный момент и вектор начальной скорости  $V_E(t_0)$  могут отличаться от предварительно заданных значений  $E_{NOM}, V_{NOME}$ . Считаем, однако, что эти отличия не слишком велики. Символом  $\alpha(t)$  обозначим текущий угол визирования, символом  $V_x(t)$  – составляющую разностной скорости по оси  $x$ . Пусть  $e$  – модуль вектора  $V_{NOM}$ .

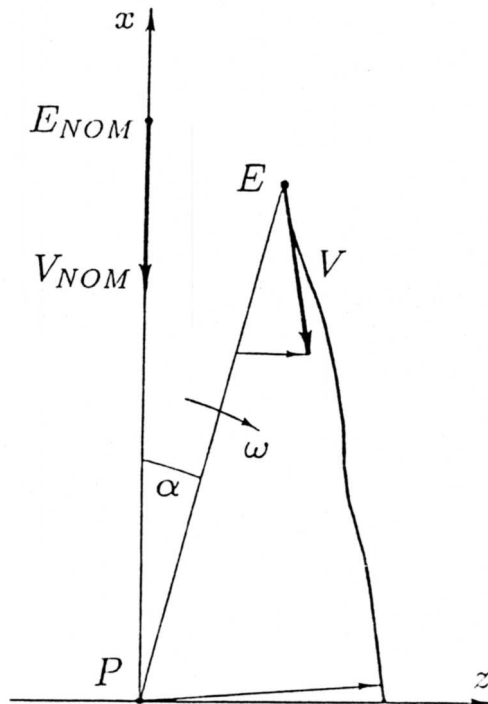


Рис. 1. Разностная система координат.



Уравнения динамики в координатах  $x, z$  ( $\delta$  – символ дельта-функции):

$$\ddot{z}(t) = v_z - \Delta\Upsilon \sum_i k(t_i)\delta(t - t_i), \quad \ddot{x}(t) = v_x; \quad (1.1)$$

$$\sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad |v| \leq \nu.$$

## § 2. Динамика вспомогательной дифференциальной игры

Перепишем систему (1.1) в координатах  $\alpha, \omega, x, V_x$ . Для этого продифференцируем дважды по  $t$  соотношение  $z(t) = x(t)\operatorname{tg}\alpha(t)$ . Получим

$$\ddot{z}(t) = \ddot{x}(t)\operatorname{tg}\alpha(t) + \frac{2\dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)}{\cos^2\alpha(t)} + \frac{2x(t)\operatorname{tg}\alpha(t)\dot{\alpha}^2(t)}{\cos^2\alpha(t)} + \frac{x(t)\ddot{\alpha}(t)}{\cos^2\alpha(t)}.$$

Отсюда

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\ddot{z}(t)\cos^2\alpha(t)}{x(t)} - \frac{\ddot{x}(t)\sin\alpha(t)\cos\alpha(t)}{x(t)} - \frac{2\dot{x}(t)\dot{\alpha}(t)}{x(t)} - 2\operatorname{tg}\alpha(t)\dot{\alpha}^2(t).$$

В результате имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \omega(t), \\ \dot{\omega}(t) &= -2V_x(t)\omega(t)/x(t) - 2\operatorname{tg}\alpha(t)\omega^2(t) - \sin\alpha(t)\cos\alpha(t)v_x/x(t) + \\ &\quad + \cos^2\alpha(t)v_z/x(t) - (\Delta\Upsilon\cos^2\alpha(t)/x(t))\sum_i k(t_i)\delta(t - t_i), \\ \dot{x}(t) &= V_x(t), \\ \dot{V}_x(t) &= v_x. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система в эквивалентных координатах удобна тем, что измеряемая величина  $\omega$  входит в число фазовых переменных. Кроме того, появляется возможность перехода к различным по степени сложности вспомогательным задачам. В данной статье ограничимся рассмотрением максимально простой задачи.

Предположим относительно малым изменение вектора разностной скорости, возникающее в процессе движения за счет управлений преследователя и убегающего (слабая управляемость). Поскольку нас интересуют не слишком большие промахи, такое допущение влечет за собой требование малости угла  $\alpha$  на сравнительно длительном промежутке движения, начиная от начального момента. Поэтому в упрощенной постановке вспомогательной задачи заменим  $\sin\alpha$  и  $\operatorname{tg}\alpha$  на нуль,  $\cos\alpha$  на единицу. Поскольку измеряемой величиной является  $\omega$ , а угол  $\alpha$  не входит теперь в соотношение для  $\dot{\omega}$ , то уравнение  $\dot{\alpha}(t) = \omega(t)$  можно опустить. Таким образом, понижаем размерность фазового вектора на единицу.

Сделаем дополнительные упрощения. Предположение о слабой управляемости приводит к тому, что (с учетом направления вектора  $V_{НОМ}$  вдоль оси  $x$ ) подсчет промаха на конкретном движении можно приближенно заменить подсчетом модуля координаты  $z$  в момент пересечения движением оси  $z$  (рис. 1). При этом на величину промаха более существенное влияние оказывает изменение скорости по оси  $z$ , чем по оси  $x$ . Таким образом, упрощая систему (2.1), можем считать  $V_x(t_0)$  точно известным и совпадающим с  $V_{НОМ} x = -e$ , управляющее воздействие  $v_x$  — тождественно равным нулю. Изменение координат  $\omega$ ,  $x$  опишется соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(t) &= 2e\omega(t)/x(t) + v_z/x(t) - (\Delta\Upsilon/x(t)) \sum_i k(t_i)\delta(t - t_i), \\ x(t) &= x(t_0) - e(t - t_0).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Предположим, наконец, что во вспомогательной задаче значение  $x(t_0)$  оговорено точно. Тогда поведение системы по координате  $x$  определено однозначно.

Формулу (2.2) примем за описание динамики вспомогательной дифференциальной игры. Импульсное воздействие в момент  $t_i$  изменяет координату  $\omega$  скачком на величину  $-\Delta\Upsilon k(t_i)/x(t_i)$ . При этом  $\sum_i |k(t_i)| \leq N$ . Соотношения неполноты информации:

$$\omega_m(t_i) = \omega(t_i) + \xi(t_i), \quad |\xi(t_i)| \leq c, \quad |v_z| \leq \nu, \quad \omega(t_0) \in A. \quad (2.3)$$

Здесь  $A$  — отрезок, содержащий в себе все значения угловой скорости в момент  $t_0$ , возможные в силу начальной неопределенности разностной системы (1.1) по  $x$ ,  $z$ ,  $\dot{x}$ ,  $\dot{z}$ . Изменение  $\omega$  описывается формулой

$$\omega(t) = \omega(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t)} + \frac{1}{x^2(t)} \int_{\hat{t}}^t x(\tau) v_z(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t)} \sum_{t_i \in [\hat{t}, t]} k(t_i) x(t_i). \quad (2.4)$$

Максимальное (минимальное) значение второго слагаемого достигается при  $v_z \equiv \nu$  ( $v_z \equiv -\nu$ ). Положим

$$\zeta(\hat{t}, t) = \frac{1}{x^2(t)} \int_{\hat{t}}^t x(\tau) \nu d\tau = \frac{\nu(t - \hat{t})}{x^2(t)} \left( x(\hat{t}) - \frac{e}{2}(t - \hat{t}) \right). \quad (2.5)$$

### § 3. Формализация дифференциальной игры с неполной информацией

Перейдем к формулировке вспомогательной дифференциальной игры двух лиц, в которой состоянием в момент  $t_i$  будет пара: информационное множество на прямой  $\omega$  и количество оставшихся импульсов.

В качестве начального информационного множества  $I_-(t_0)$  возьмем произвольный отрезок на прямой  $\omega$ . Рассмотрим момент  $t_i$  и отрезок  $I_-(t_i)$ ,  $i \geq 0$ . Пусть  $H(t_i) = \{\omega : |\omega - \omega_m(t_i)| \leq c_1 |\omega| + c_2\}$  — множество неопределенности, соответствующее замеру  $\omega_m(t_i)$ . Множество  $H$  представляет собой отрезок и описывается соотношениями

$$H = \begin{cases} [(\omega_m - c_2)/(1 + c_1), (\omega_m + c_2)/(1 - c_1)], & \text{если } \omega_m \geq c_2, \\ [(\omega_m - c_2)/(1 - c_1), (\omega_m + c_2)/(1 - c_1)], & \text{если } -c_2 < \omega_m < c_2, \\ [(\omega_m - c_2)/(1 - c_1), (\omega_m + c_2)/(1 + c_1)], & \text{если } \omega_m \leq -c_2. \end{cases}$$

Положим  $I(t_i) = I_-(t_i) \cap H(t_i)$ . Условимся, что такое пересечение не пусто.

В момент  $t_i$  после получения замера первый игрок, распоряжающийся выбором импульсов, может применить свое управление. Отрезок  $I(t_i)$  при этом жестким переносом на величину  $-\Delta \Upsilon k(t_i)/x(t)$  перейдет в отрезок  $I_+(t_i)$ .

Определим  $I_-(t_{i+1})$  как прогноз положения системы (2.2) на момент  $t_{i+1}$  при состоянии  $I_+(t_i)$  в момент  $t_i$  и нулевом управлении первого игрока на  $(t_i, t_{i+1}]$ . Координата левого края отрезка  $I_-(t_{i+1})$  принимает значение

$$\omega_{*-}(t_{i+1}) = \omega_{*+}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Здесь  $\omega_{*+}(t_i)$  — координата левого края отрезка  $I_+(t_i)$ . Положение  $\omega_{*+}^*(t_i)$  правого края меняется на

$$\omega_{*-}^*(t_{i+1}) = \omega_{*+}^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Каждое из множеств  $I_-(t_i)$ ,  $I(t_i)$ ,  $I_+(t_i)$  назовем информационным (до замера, после замера, после импульсов). Множество  $I_-(t_i)$  будем называть также множеством прогноза. Таким образом, рекуррентно определена последовательность информационных множеств. В игре с неполной информацией под движением будем понимать изменение во времени информационного множества и количества оставшихся импульсов. Первый игрок распоряжается выбором импульсного управления, второй — формированием замеров. Влияние  $v_z$  учитываем при построении множества  $I_-(t_i)$ .

Центр информационного отрезка обозначим символом  $\omega_c$ , его полуширину — символом  $b$ . Имеем  $I_- = (\omega_{c-}, b_-)$ ,  $I = (\omega_c, b)$ ,  $I_+ = (\omega_{c+}, b_+)$ . Пусть  $n_+(t_i) = n(t_i) - k(t_i)$ .

Позицией игры для первого игрока считаем совокупность  $(t_i, n, I)$ , где  $t_i$  — момент времени,  $n$  — количество оставшихся импульсов,  $I$  — информационное множество после замера. Допустимой стратегией первого игрока назовем правило  $U: (t_i, n, I) \rightarrow k$ , сопоставляющее позиции игры количество импульсов с определенным знаком,  $|k| \leq n$ . Позицией игры для второго игрока условимся считать совокупность  $(t_i, n, I_-)$ . Здесь  $I_-$  — информационное множество до замера (множество прогноза). Допустимой стратегией второго игрока назовем правило  $\Omega: (t_i, n, I_-) \rightarrow \omega_m$ , сопоставляющее позиции игры замер  $\omega_m$ . Потребуем, чтобы  $I_- \cap H \neq \emptyset$ , где  $H$  — множество неопределенности, построенное по  $\omega_m$ . В понятие позиции не включаем значение  $x(t_i)$ , предполагая функцию  $t \rightarrow x(t)$  заданной.

Задав пару допустимых стратегий  $U, \Omega$ , шаг  $\Delta$  (связывающий соседние дискретные моменты времени  $t_i, t_{i+1}$ ) и начальную позицию  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , можем говорить о движении системы во времени. Определим функционал платы. Для произвольных  $\omega, x$  ( $x > 0$ ) положим  $\Pi(\omega, x) = |\omega| x^2 / e$ . Величина  $\Pi(\omega, x)$  приближенно есть пассивный прогнозируемый промах из состояния  $\omega, x$ , т.е. промах при пересечении оси  $z$  свободным движением системы (2.2). Пусть  $\hat{\Pi}(\omega, x) = \Pi(\omega, x) + \nu x^2 / 2e^2$  — максимальный прогнозируемый промах.

Зафиксируем параметр  $\varepsilon \geq 0$ . Символом  $t_\varepsilon$  обозначим последний дискретный момент  $t_i$ , для которого  $x(t_i) \geq \varepsilon$ . Имеем  $x(t_\varepsilon) \leq \varepsilon + \Delta$ . Предположим, что импульсное управление перестает действовать после момента  $t_\varepsilon$ . Число

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta) = \max\{\hat{\Pi}(\omega, x(t_\varepsilon)) : \omega \in I_+(t_\varepsilon)\}$$

назовем промахом, соответствующим начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , стратегиям  $U, \Omega$ , дискрету  $\Delta$  и параметру  $\varepsilon$ .

Наилучшие гарантии игроков определим соотношениями

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \inf_U \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta),$$

$$\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \sup_{\Omega} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta).$$

Введем стратегию  $U^\circ$  первого игрока. Положим

$$k^\circ = \left[ \frac{\omega_c(t_i)x(t_i)}{\Delta\Upsilon} \right]. \quad (3.1)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть. Стратегию  $U^\circ$  зададим как функцию, сопоставляющую позиции  $(t_i, n, I)$  число  $k^\circ$ , вычисляемое по формуле (3.1), если  $|k^\circ| \leq n$ , и число  $n \operatorname{sign} k^\circ$ , если  $|k^\circ| > n$ . Поскольку  $\Delta\Upsilon/x(t)$  — изменение  $\omega$  (по модулю) при действии одного импульса, то вычисления по формуле (3.1) можно трактовать как сравнение величины  $\omega_c$  (с учетом знака) с порогом  $\Delta\Upsilon/x(t)$ , равным эффективности одного импульса. Рис. 2 поясняет сказанное: изображено возможное изменение информационного отрезка  $I$  при действии стратегии  $U^\circ$ .

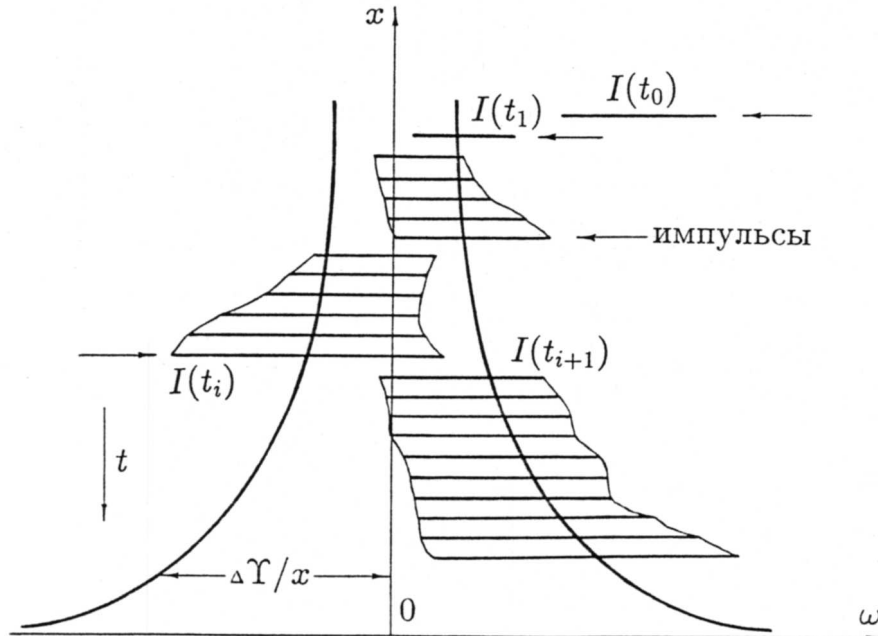


Рис. 2. Информационные отрезки при действии стратегии  $U^\circ$ .

Введем стратегию  $\Omega^\circ$  второго игрока. Пусть  $\omega^\circ$  – та из крайних точек отрезка  $I_-(t_i)$ , на которой достигается максимум величины  $\hat{\Pi}(\omega, t_i)$  по  $\omega \in I_-(t_i)$ . Точка  $\omega^\circ$  совпадает с наиболее удаленной от нуля точкой отрезка  $I_-(t_i)$ . Определение  $\Omega^\circ$ : если  $\omega^\circ$  – правый край отрезка  $I_-(t_i)$ , положим  $\omega_m = \omega^\circ - c$ ; если  $\omega^\circ$  – левый край, пусть  $\omega_m = \omega^\circ + c$ . Содержательный смысл: замер подается так, чтобы обеспечить попадание в  $I(t_i)$  “наихудшей” точки  $\omega^\circ$  из отрезка прогноза  $I_-(t_i)$  и получить при этом максимально возможную длину отрезка  $I_-(t_i)$ . Значение стратегии  $\Omega^\circ$  в момент  $t_i$  не зависит от  $n(t_i)$ .

#### § 4. Оптимальность стратегий $U^\circ, \Omega^\circ$

Перейдем к доказательству оптимальности стратегий  $U^\circ, \Omega^\circ$ . Основной результат – теорема о седловой точке, опирается на леммы 2, 3. Лемма 1 является наиболее важной среди подготовительных результатов. Доказательства существенно упрощаются, если  $c_1 = 0$ .

Изучаемая задача симметрична относительно нуля по  $\omega$ . Условимся поэтому, что правый край информационного отрезка удален от нуля не меньше, чем левый. При необходимости заменяем рассматриваемый отрезок на симметричный ему.

Ниже часто будет встречаться величина  $c_2/(1 - c_1)$ . Обозначим ее буквой  $a$ .

##### 4.1. Дополнительные сведения об информационных отрезках и отрезке неопределенности

1) Обозначим через  $s_*$ ,  $s^*$ ,  $s_c$ ,  $\beta$  левый край отрезка неопределенности  $H$ , соответственно его правый край, центр и полуширину. Приведем формулы, определяющие  $\beta$  через  $s^*$  и  $s_c$ , а также  $s_*$  и  $s_c$  через  $s^*$ . Значения  $s^*$  и  $s_c$ , используемые в формулах в качестве аргумента, считаем неотрицательными. Имеем

$$\beta = \beta^*(s^*) = \begin{cases} (c_1 s^* + c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a, \end{cases}$$

$$\beta = \beta_c(s_c) = \begin{cases} c_1 s_c + c_2, & \text{если } s_c > a, \\ a, & \text{если } 0 \leq s_c \leq a, \end{cases}$$

$$s_* = p(s^*) = s^* - 2\beta^*(s^*) = \begin{cases} (s^*(1 - c_1) - 2c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ s^* - 2a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a, \end{cases}$$

$$s_c = q(s^*) = s^* - \beta^*(s^*) = \begin{cases} (s^* - c_2)/(1 + c_1), & \text{если } s^* > 2a, \\ s^* - a, & \text{если } 0 \leq s^* \leq 2a. \end{cases}$$

Обратим внимание на монотонный характер указанных зависимостей.

2) Для каждого  $s \geq 0$  величина  $\beta^*(s)$  есть максимально возможная полуширина информационного отрезка  $I$ , правый край которого совпадает с  $s$ . Соответственно,  $\beta_c(s)$ ,  $s \geq 0$ , – максимально возможная полуширина информационного отрезка с центром в  $s$ . При  $s \geq \beta^*(s)$  имеем  $\beta^*(s) = \beta_c(s - \beta^*(s))$ . Таким образом, для информационного отрезка  $I$  с центром  $\omega_c \geq 0$  полуширина  $b$  является максимально возможной при данном правом крае  $\omega^*$  (т.е.  $b = \beta^*(\omega^*)$ ) тогда и только тогда, когда она является максимально возможной при данном центре  $\omega_c$  ( $b = \beta_c(\omega_c)$ ). Свойство максимальной отрезка  $I$ , записанное через левый и правый края:  $\omega_* = p(\omega^*)$ , через центр и правый край:  $\omega_c = q(\omega^*)$ .

В случае  $I(t_i) = H(t_i)$  выполнено равенство  $\omega_*(t_i) = p(\omega^*(t_i))$ , в случае  $I(t_i) \subset H(t_i)$  – неравенство  $\omega_*(t_i) \geq p(\omega^*(t_i))$ . Если в момент  $t_i$  действуют импульсы вправо (один или несколько), то  $\omega_{*+}(t_i) \geq p(\omega_+^*(t_i))$ . При импульсах влево возможны оба неравенства  $\omega_{*+}(t_i) \geq p(\omega_+^*(t_i))$ ,  $\omega_{*+}(t_i) \leq p(\omega_+^*(t_i))$ .

3) Пусть  $\omega_{*+}(t_i) \leq p(\omega_+^*(t_i))$ . Покажем, что для краев  $\omega_{*-}(t_{i+1})$ ,  $\omega_-^*(t_{i+1})$  отрезка прогноза  $I_-(t_{i+1})$  будет выполнено соотношение  $\omega_{*-}(t_{i+1}) \leq p(\omega_-^*(t_{i+1}))$ .

В самом деле,

$$\omega_{*-}(t_{i+1}) = \omega_{*+}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}),$$

$$\omega_-^*(t_{i+1}) = \omega_+^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \zeta(t_i, t_{i+1}).$$

Представим формулу для  $p(s)$  в виде  $p(s) = \varphi s - \psi$ ; константы  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют соотношениям  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\psi \geq 0$  и зависят от того, где лежит  $s$ : в области  $s > 2a$  или на промежутке  $0 \leq s \leq 2a$ . Обозначим через  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  величины, соответствующие положению точки  $\omega_+^*(t_i)$ , и через  $\varphi_{i+1}$ ,  $\psi_{i+1}$  – положению точки  $\omega_-^*(t_{i+1})$ . Тогда

$$\begin{aligned} p(\omega_-^*(t_{i+1})) &= \varphi_{i+1} \omega_+^*(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1} = \\ &= \left( \varphi_{i+1} \omega_+^*(t_i) + \varphi_i \omega_+^*(t_i) - \varphi_i \omega_+^*(t_i) + \psi_i - \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1} = \\ &= p(\omega_+^*(t_i)) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \left( \omega_+^*(t_i) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) - \psi_{i+1}. \end{aligned}$$

Установим, что  $(\omega_+^*(t_i) (\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i) x^2(t_i) / x^2(t_{i+1}) - \psi_{i+1} \geq 0$ . Действительно, это очевидно при  $\varphi_{i+1} = \varphi_i$ ,  $\psi_{i+1} = \psi_i$ . С учетом соотношения  $\omega_-^*(t_{i+1}) > \omega_+^*(t_i)$  нарушение указанных равенств возможно лишь при  $\omega_+^*(t_i) \leq 2a = 2c_2 / (1 - c_1)$ ,  $\omega_-^*(t_{i+1}) > 2c_2 / (1 - c_1)$ . В этом случае  $\varphi_i = 1$ ,  $\psi_i = 2c_2 / (1 - c_1)$ ,  $\varphi_{i+1} = (1 - c_1) / (1 + c_1)$ ,  $\psi_{i+1} = 2c_2 / (1 + c_1)$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \left( \omega_+^*(t_i)(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + \psi_i \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \psi_{i+1} \geq \\
 & \geq \left( \frac{2c_2}{1-c_1} \left( \frac{1-c_1}{1+c_1} - 1 \right) + \frac{2c_2}{1-c_1} \right) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \frac{2c_2}{1+c_1} = \\
 & = \frac{2c_2}{1+c_1} \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \frac{2c_2}{1+c_1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Учитывая полученное неравенство, а также неравенство  $p(\omega_+^*(t_i)) \geq \omega_{*+}(t_i)$ , имеем

$$\begin{aligned}
 p(\omega_-^*(t_{i+1})) & \geq \omega_{*+}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} + \varphi_{i+1} \zeta(t_i, t_{i+1}) \geq \\
 & \geq \omega_{*+}(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t_{i+1})} - \zeta(t_i, t_{i+1}) = \omega_{*-}(t_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Итак, если  $\omega_{*+}(t_i) \leq p(\omega_+^*(t_i))$ , то  $\omega_{*-}(t_{i+1}) \leq p(\omega_-^*(t_{i+1}))$ . При этом, за исключением вырожденного случая  $c_2 = 0$ ,  $\nu = 0$ , реализуется строгое неравенство. Последнее означает, что при любом замере в момент  $t_{i+1}$  образование отрезка  $I(t_{i+1})$  происходит с высечкой отрезка  $I_-(t_{i+1})$ .

В дальнейшем при описании движения в силу дискретной схемы будет удобно в некоторых случаях говорить об информационных отрезках не только в моменты  $t_i$ , но и в промежуточные моменты из интервалов  $(t_i, t_{i+1})$ . В соответствии с процедурой прогноза имеем, что на интервале  $(t_i, t_{i+1})$  скорость изменения левого (правого) края информационного отрезка описывается соотношением  $\dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t)$  ( $\dot{\omega}^*(t) = 2e\omega^*(t)/x(t) + \nu/x(t)$ ). В качестве  $I_-(t) = I(t) = I_+(t)$  при  $t \in (t_i, t_{i+1})$  договоримся брать прогноз развития информационного отрезка от момента  $t_i$  до момента  $t$ .

Условимся применять нижние индексы  $-$ ,  $+$  для обозначения пределов по  $t$  слева и справа. Это не приведет к противоречию с оговоренным ранее использованием индексов  $-$ ,  $+$ .

#### 4.2. Эталонное движение. Функция гипотетического промаха

Определим движение  $t \rightarrow (n(t), I(t))$ , которое назовем эталонным. Содержательно это есть изменение информационного отрезка (с учетом симметрии относительно нуля по  $\omega$ ) в схеме непрерывного наблюдения при действии стратегий  $U^\circ$ ,  $\Omega^\circ$ : выбор импульсного управления определяется при помощи порога  $\Delta\Upsilon/x(t)$ ; замер формируется так, чтобы правый край текущего множества неопределенности совпадал с правым краем информационного отрезка. Компонента  $n(\cdot)$  характеризует расход импульсов. Описывая эталонное движение, будем использовать прежние обозначения:  $\omega_*$ ,  $\omega^*$  для левого, правого краев и т.д.



Предположим, что  $\omega^*(\hat{t}) \geq 0$  в некоторый исходный момент  $\hat{t}$  и  $\omega_*(\hat{t}) \geq p(\omega^*(\hat{t}))$ . Пусть  $t \rightarrow \omega^*(t)$  – кусочно-непрерывная функция, описывающая изменение правого края отрезка  $I$ ,  $t \rightarrow \omega_*(t)$  – аналогичная функция для левого края. Моменты разрыва функций  $\omega^*(\cdot)$ ,  $\omega_*(\cdot)$  совпадают. Пусть далее на участках непрерывности выполнены условия 1) – 3):

$$1) \dot{\omega}^*(t) = 2e\omega^*(t)/x(t) + \nu/x(t),$$

$$2) \omega_*(t) \geq p(\omega^*(t)),$$

$$3) \text{ если } \omega_*(t) > p(\omega^*(t)), \text{ то } \dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t).$$

Для моментов разрыва оговорим условия 4) – 6):

4) если  $t \geq \hat{t}$  – момент разрыва, то скачок  $\Delta\omega^*(t) = \omega_+^*(t) - \omega^*(t)$  совпадает с  $-k(t)\Delta Y/x(t)$  при некотором целом положительном  $k(t) \leq n(t)$ , т.е. разрыв  $\omega^*(\cdot)$  соответствует  $k(t)$  импульсам влево. Новое значение (предел справа) левого края вычисляется по формуле

$$\omega_{*+}(t) = \max\{\omega_*(t) + \Delta\omega^*(t), p(\omega_+^*(t))\}.$$

5) разрывы при  $t > \hat{t}$  происходят в моменты, когда центр отрезка  $I$  находится на пороге  $\Delta Y/x(t)$ . Скачок соответствует одному импульсу влево.

6) разрыв в момент  $\hat{t}$  происходит, когда центр отрезка  $I$  лежит на или за порогом  $\Delta Y/x(t)$ . Число  $k(\hat{t})$  определяется как минимальное целое положительное  $k$  такое, что

$$\omega_{c+}(\hat{t}) = \max\left\{\omega_c(\hat{t}) - \frac{k\Delta Y}{x(\hat{t})}, q\left(\omega^*(\hat{t}) - \frac{k\Delta Y}{x(\hat{t})}\right)\right\} < \frac{\Delta Y}{x(\hat{t})}.$$

Иными словами,  $k(\hat{t})$  есть минимальное  $k$ , для которого новый центр  $\omega_{c+}(\hat{t})$  оказывается под порогом  $\Delta Y/x(\hat{t})$ . Если искомое  $k$  превышает  $n(\hat{t})$ , полагаем  $k(\hat{t}) = n(\hat{t})$ .

Зададим компоненту  $n(\cdot)$ :

7) функция  $t \rightarrow n(t)$  кусочно-постоянна и определяется формулой  $n(t) = n(\hat{t}) - \sum_{t_j < t} k(t_j)$ , где  $t_j \geq \hat{t}$  – моменты разрыва функции  $\omega^*(\cdot)$ .

Пару  $(n(\cdot), I(\cdot))$ , удовлетворяющую 1) – 7), назовем эталонным движением, выходящим из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}), I(\hat{t}))$ .

Производная  $\frac{d}{dt}p(\omega^*(t))$  вдоль эталонного движения существует на участках непрерывности функции  $\omega^*(\cdot)$  для всех  $t$ , за исключением ситуаций, когда  $\omega^*(t) = 2a = 2c_2/(1 - c_1)$  (на каждом участке непрерывности не более одного такого момента). Имеем

$$\frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq \frac{2e}{x(t)} \left( p(\omega^*(t)) + \frac{2c_2}{1 + c_1} \right) + \frac{\nu}{x(t)} \frac{(1 - c_1)}{(1 + c_1)}.$$

Следовательно, если на некотором интервале  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ , то

$$\dot{\omega}_*(t) = \frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq \frac{2e}{x(t)}\omega_*(t) - \frac{\nu}{x(t)}.$$

При этом в случае  $c_2 > 0$  или  $\nu > 0$  реализуется строгое неравенство.



Итак, на участках непрерывности эталонного движения правый край информационного отрезка уходит вправо с максимально возможной скоростью, левый стремится влево с максимальной скоростью, допускаемой ограничением  $\omega_*(t) \geq p(\omega^*(t))$ .

Пусть  $K = [\omega_*, \omega^*]$  – произвольный отрезок. Символом  $Y(K)$  обозначим отрезок, правый край которого совпадает с  $\omega^*$ , а левый определяется как  $\max\{\omega_*, p(\omega^*)\}$ . Таким образом,  $Y(K)$  – усечение отрезка  $K$ .

Подчеркнем, что на эталонном движении равенство  $I(t) = Y(I(t))$  выполнено при любом  $t$ . Отметим также различие в описании скачка информационного отрезка в момент действия импульсов в случае движения в силу дискретной схемы управления и в случае эталонного движения. А именно, пусть в момент  $t$  действует  $k$  импульсов влево и  $\mathcal{G}(t)$  – результат переноса отрезка  $I(t)$  на величину  $-k(t)\Delta\Upsilon/x(t)$ . В случае дискретной схемы управления имеем  $I_+(t) = \mathcal{G}(t)$ , в случае эталонного движения  $I_+(t) = Y(\mathcal{G}(t))$ . Изменение полуширины: в первом случае  $b_+(t) = b(t)$ , во втором  $b_+(t) = \min\{b(t), \beta^*(\omega_+^*(t))\}$ .

В соответствие эталонному движению, выходящему из позиции  $(\hat{t}, n, I)$  (считаем  $\omega_*(\hat{t}) \geq p(\omega^*(\hat{t}))$ , т.е.  $I = Y(I)$ ), поставим значение  $F(\hat{t}, n, I)$  функции гипотетического промаха. Это значение определим как максимальный прогнозируемый промах, просчитываемый на эталонном движении в момент  $t_f$  последнего импульса:

$$F(\hat{t}, n, I) = \frac{\omega_+^*(t_f)x^2(t_f)}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(t_f)}{e} \right)^2. \quad (4.1)$$

### 4.3. Некоторые свойства движений системы (2.2), эталонного движения и функции гипотетического промаха

1. Пусть  $\omega^{(1)}(\cdot)$ ,  $\omega^{(2)}(\cdot)$  – решения дифференциального уравнения (2.2) на промежутке  $[\hat{t}, t']$  в силу управляющих воздействий  $v_z^{(1)}(\cdot)$ ,  $k^{(1)}(\cdot)$  и  $v_z^{(2)}(\cdot)$ ,  $k^{(2)}(\cdot)$ , выходящие в момент  $\hat{t}$  из состояния  $\omega^{(1)}(\hat{t}) = \omega^{(2)}(\hat{t})$ . Предположим, что:  $v_z^{(1)}(\cdot) = v_z^{(2)}(\cdot)$ ;  $k^{(1)}(t)$  принимает целые положительные значения на дискретном наборе моментов  $t_s$ ,  $s = \overline{1, d}$ , и равно нулю для остальных моментов;  $k^{(2)}(t) = 0$  при  $t \in [\hat{t}, t')$  и  $k^{(2)}(t') = \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_s)$ . Тогда  $\omega^{(1)}(t') \leq \omega^{(2)}(t')$ . Равенство реализуется лишь в случае  $d = 1$ ,  $t_d = t'$ .

2. Пусть  $\hat{t} < t'$ . Тогда

$$\beta_c \left( \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} \right) < \beta_c \left( \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}.$$

3. Пусть на эталонном движении для некоторого момента  $t' > t_0$  выполнено неравенство  $\omega_*(t') > p(\omega^*(t'))$ . Тогда  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in [t_0, t')$ . До момента  $t'$  на промежутках без импульсов скорость развития полуширины  $b(t)$  описывается соотношением  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ . В моменты действия импульсов  $b_+(t) = b(t)$ .

4. Пусть для движения в силу дискретной схемы при произвольной стратегии  $U$  первого игрока и стратегии  $\Omega^\circ$  второго на промежутке  $(\hat{t}, t')$  нет импульсов. Предположим, что  $\omega_*(t') > p(\omega^*(t'))$ . Тогда  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in (\hat{t}, t')$ , скорость развития полуширины  $b(t)$  на  $(\hat{t}, t')$  описывается соотношением  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ .

5. Пусть в позиции  $(t, n(t), I(t))$  реализуется  $k(t)$  импульсов эталонного движения. Тогда множество  $I_+(t)$ , задаваемое формулами

$$I_+(t) = (\omega_{c+}(t), b_+(t)), \quad \omega_{c+}(t) = \omega_+^*(t) - b_+(t),$$

$$\omega_+^*(t) = \omega^*(t) - k(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)}, \quad b_+(t) = \min\{b(t), \beta^*(\omega_+^*(t))\},$$

можно определить последовательно при помощи множеств  $I_1, I_2, \dots, I_{k(t)}$ , где  $I_i = (\omega_{ci}, b_i)$ ,  $\omega_{ci} = \omega_i^* - b_i$ ,  $\omega_i^* = \omega_{i-1}^* - \Delta\Upsilon/x(t)$ ,  $b_i = \min\{b_{i-1}, \beta^*(\omega_i^*)\}$ ,  $\omega_0^* = \omega^*(t)$ ,  $b_0 = b(t)$ . А именно:  $I_+(t) = I_{k(t)}$ .

6. Пусть для двух эталонных движений на промежутке  $[\hat{t}, t')$  нет импульсов и  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t')$ ,  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$ . Тогда  $b^{(1)}(t') \geq b^{(2)}(t')$ .

7. Пусть для двух эталонных движений на промежутке  $[\hat{t}, t')$  нет импульсов и  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) < \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $\omega^{(1)*}(\hat{t}) < \omega^{(2)*}(\hat{t})$ . Тогда  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t']$ .

8. Пусть в момент  $t$  для двух эталонных движений  $\omega_c^{(1)}(t) \geq \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t)$ ,  $k^{(1)}(t) = k^{(2)}(t)$ . Тогда (после действия импульсов)  $\omega_{c+}^{(1)}(t) \geq \omega_{c+}^{(2)}(t)$ ,  $b_+^{(1)}(t) \geq b_+^{(2)}(t)$ .

9. Вдоль эталонного движения функция  $F$  гипотетического промаха есть константа.

Следующее свойство можно назвать свойством монотонности функции гипотетического промаха. Сформулируем его в виде леммы. Положим  $F^{(i)} = F(t, n^{(i)}(t), I^{(i)}(t))$ ,  $i = 1, 2$ .

**Лемма 1.** Пусть в момент  $t$  две позиции  $(t, n^{(1)}(t), I^{(1)}(t))$ ,  $(t, n^{(2)}(t), I^{(2)}(t))$  таковы, что  $n^{(1)}(t) = n^{(2)}(t)$ ,  $\omega_c^{(1)}(t) \geq \omega_c^{(2)}(t)$ ,  $b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t)$ . Справедлива оценка

$$F^{(2)} \leq F^{(1)} \leq F^{(2)} + \frac{(\omega^{(1)*}(t) - \omega^{(2)*}(t))x^2(t)}{e}. \quad (4.2)$$

Неравенство  $F^{(2)} \leq F^{(1)}$  выполнено также в случае  $n^{(1)}(t) \leq n^{(2)}(t)$ ,  $I^{(1)}(t) \supset I^{(2)}(t)$ .

В следующих двух утверждениях говорится о сравнении значений  $F(t, n(t), I(t))$ ,  $F(t, n(t) - 1, Y(I_+(t)))$  функции  $F$  до и после одного импульса.

10. Пусть позиция  $(t, n(t), I(t))$  произвольна и действует один импульс вправо. Тогда значение функции  $F$  после импульса не убывает.

11. Пусть позиция  $(t, n(t), I(t))$  такова, что  $\omega_c(t) < \Delta\Upsilon/x(t)$  (центр под порогом), и действует один импульс влево. Тогда значение функции  $F$  после импульса не убывает.

#### 4.4. Доказательство утверждений 1 – 9

1. Доказывается при помощи формулы (2.4). Имеем

$$\omega^{(1)}(t') = \omega^{(1)}(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} + \frac{1}{x^2(t')} \int_{\hat{t}}^{t'} x(\tau) v_z^{(1)}(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t')} \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_s) x(t_s),$$

$$\omega^{(2)}(t') = \omega^{(2)}(\hat{t}) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} + \frac{1}{x^2(t')} \int_{\hat{t}}^{t'} x(\tau) v_z^{(2)}(\tau) d\tau - \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(t')} k^{(2)}(t') x(t').$$

Следовательно,

$$\omega^{(2)}(t') - \omega^{(1)}(t') = \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} \left[ -k^{(2)}(t') + \sum_{s=1}^d k^{(1)}(t_s) \frac{x(t_s)}{x(t')} \right] \geq 0.$$

Равенство реализуется лишь в случае  $d = 1, t_d = t'$ .

2. Пусть  $\Delta\Upsilon/x(t') \leq a = c_2/(1 - c_1)$ . Тогда  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) < a$ . Поэтому  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t')) = \beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = a$ . Доказываемое неравенство следует из того, что  $x(\hat{t})/x(t') > 1$ .

Пусть  $\Delta\Upsilon/x(t') > a$ . Тогда  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t')) = c_1 \Delta\Upsilon/x(t') + c_2$ . Если  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) < a$ , то  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = a$ . Если  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) \geq a$ , то  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(\hat{t})) = c_1 \Delta\Upsilon/x(\hat{t}) + c_2$ . Нужное неравенство вытекает из соотношения

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} + c_2 &= \left( c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(\hat{t})} < \\ < c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} \frac{x^2(\hat{t})}{x(\hat{t})x(t')} + c_2 \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} &= \left( c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}. \end{aligned}$$

Пояснений при этом требует лишь случай  $\Delta\Upsilon/x(\hat{t}) < a$ . Для него, с учетом равенства  $a = c_1 a + c_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \beta_c \left( \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} \right) &= c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(t')} + c_2 < \left( c_1 \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} + c_2 \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} < \\ < (c_1 a + c_2) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} &= a \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')} = \beta_c \left( \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} \right) \frac{x^2(\hat{t})}{x^2(t')}. \end{aligned}$$

**3.** Покажем, что  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in [t_0, t']$ . Предполагая противное, обозначим через  $t^\circ$  максимальный из моментов, для которых реализуется равенство  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . Таким образом,  $\omega_*(t^\circ) = p(\omega^*(t^\circ))$  и  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$ ,  $t \in (t^\circ, t']$ .

Момент  $t^\circ$  существует. Действительно, имеем конечное число участков непрерывности  $\omega^*(\cdot)$ . Берем ближайший к  $t'$ , содержащий точки с равенством  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . В пределах выделенного участка находим точную верхнюю грань моментов, для которых  $\omega_*(t) = p(\omega^*(t))$ . Точная верхняя грань достигается в силу замкнутости рассматриваемого промежутка справа.

Предположим, что  $t^\circ$  — внутренняя точка промежутка непрерывности. Пусть  $t^h > t^\circ$  — некоторый момент того же промежутка. На интервале  $(t^\circ, t^h)$  имеем  $\dot{\omega}_*(t) = 2e\omega_*(t)/x(t) - \nu/x(t)$ , в то же время  $\frac{d}{dt}p(\omega^*(t)) \geq 2ep(\omega^*(t))/x(t)$ . Поэтому, с учетом условия  $\omega_*(t^\circ) = p(\omega^*(t^\circ))$ , получим в момент  $t^h$  соотношение  $\omega_*(t^h) \leq p(\omega^*(t^h))$ . Пришли к противоречию. Допустим теперь, что  $t^\circ$  — правый край промежутка непрерывности. Вследствие монотонности зависимости  $\omega \rightarrow p(\omega)$  получим  $\omega_{*+}(t^\circ) = p(\omega_{*+}(t^\circ))$ , что приведет к  $\omega_*(t) \leq p(\omega^*(t))$  для  $t$  близких к  $t^\circ$  справа. Противоречие.

Доказательство второй части, связанной с полушириной  $b(t)$ , вытекает непосредственно из определения эталонного движения и формулы  $b(t) = (\omega^*(t) - \omega_*(t))/2$ .

**4.** Неравенство  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$  при  $t \in (\hat{t}, t')$  доказывается от противного с учетом динамики развития информационного отрезка на интервалах  $(t_i, t_{i+1})$  между двумя соседними дискретными моментами и с учетом правила перехода от  $I_-(t_i)$  к  $I(t_i)$ , когда действует стратегия  $\Omega^\circ$ . При выполнении соотношения  $\omega_*(t) > p(\omega^*(t))$ ,  $t \in (\hat{t}, t')$ , в силу определения стратегии  $\Omega^\circ$  имеем  $I(t_i) = I_-(t_i)$  для любых  $t \in (\hat{t}, t']$ . Поэтому скорость изменения полуширины  $b(t)$  на промежутке  $(\hat{t}, t')$  такая же, как и на каждом интервале  $(t_i, t_{i+1})$ , т.е.  $\dot{b}(t) = 2eb(t)/x(t) + \nu/x(t)$ .

**5.** Доказательство следует из монотонности  $\beta^*(\omega)$  по  $\omega$ . В самом деле,  $I_{k(t)} = (\omega_{ck(t)}, b_{k(t)})$  — множество, получаемое в результате последовательных переходов. Очевидно, что  $\omega_{k(t)}^* = \omega_{+}^*(t)$ . Далее,

$$\begin{aligned} b_{k(t)} &= \min\{b(t); \beta^*(\omega_i^*), i = \overline{1, k(t)}\} = \min\{b(t), \beta^*(\omega_{k(t)}^*)\} = \\ &= \min\{b(t), \beta^*(\omega_{+}^*(t))\} = b_+(t). \end{aligned}$$

Поэтому  $I_+(t) = I_{k(t)}$ .

**6.** Предположим противное:  $b^{(1)}(t') < b^{(2)}(t')$ . Тогда с учетом  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$  имеем  $b^{(1)}(t') < b^{(2)}(t') \leq \beta_c(\omega_c^{(2)}(t')) = \beta_c(\omega_c^{(1)}(t'))$ , т.е.  $b^{(1)}(t') < \beta_c(\omega_c^{(1)}(t'))$  или, что то же самое,  $b^{(1)}(t') < \beta^*(\omega^{(1)*}(t'))$ . Следовательно,  $\dot{\omega}_c^{(1)}(t) = 2e\omega_c^{(1)}(t)/x(t)$  в некоторой малой окрестности  $t'$  (свойство 3).

Пусть  $b^{(2)}(t) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t < t'$ . Тогда  $\dot{\omega}_c^{(2)}(t) = 2e\omega_c^{(2)}(t)/x(t)$  вблизи  $t'$ . Из  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$  следует  $\omega_c^{(1)}(t) = \omega_c^{(2)}(t)$  вблизи  $t'$ , что противоречит  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$  при  $t < t'$ . Пусть существует момент  $t'' \in [\hat{t}, t']$ , для которого  $b^{(2)}(t'') = \beta^*(\omega^{(2)*}(t''))$ . Тогда  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  для любого  $t \in [t'', t']$  (свойство 3). Если  $\omega^{(2)*}(t') \leq 2a$ , то  $\omega^{(2)*}(t) < 2a$  при  $t \in [t, t']$  и  $\dot{\omega}_c^{(2)}(t) = \dot{\omega}^{(2)*}(t) = 2e(\omega_c^{(2)}(t) + a)/x(t) + \nu/x(t)$ . Приходим к противоречию с  $\omega_c^{(1)}(t') = \omega_c^{(2)}(t')$ ,  $\omega_c^{(1)}(t) < \omega_c^{(2)}(t)$  при  $t < t'$ . Пусть  $\omega^{(2)*}(t') > 2a$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_c^{(2)}(t) &= \frac{\dot{\omega}^{(2)*}(t)}{1+c_1} = \frac{2e\omega^{(2)*}(t)}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)} = \\ &= \frac{2e(\omega_c^{(2)}(t)(1+c_1) + c_2)}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)} = \\ &= \frac{2e}{x(t)}\omega_c^{(2)}(t) + \frac{2ec_2}{x(t)(1+c_1)} + \frac{\nu}{x(t)(1+c_1)} \end{aligned}$$

вблизи  $t'$ . Снова пришли к противоречию.

**7.** Предположим от противного существование  $t^\circ \in [\hat{t}, t']$ , для которого  $\omega_c^{(1)}(t^\circ) \geq \omega_c^{(2)}(t^\circ)$ . Возьмем первый такой момент  $t''$  после  $\hat{t}$ . Для него  $\omega_c^{(1)}(t'') = \omega_c^{(2)}(t'')$ . В силу свойства 6 имеем  $b^{(1)}(t'') \geq b^{(2)}(t'')$ . Следовательно,  $\omega^{(1)*}(t'') \geq \omega^{(2)*}(t'')$ . С другой стороны, в силу условия  $\omega^{(1)*}(\hat{t}) < \omega^{(2)*}(\hat{t})$  получаем  $\omega^{(1)*}(t) < \omega^{(2)*}(t)$ ,  $t \in [\hat{t}, t']$ . Пришли к противоречию.

**8.** Очевидно  $\omega^{(1)*}(t) \geq \omega^{(2)*}(t)$ . Имеем

$$\omega_+^{(1)*}(t) = \omega^{(1)*}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} \geq \omega^{(2)*}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} = \omega_+^{(2)*}(t).$$

Докажем неравенство  $b_+^{(1)}(t) \geq b_+^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_+^{(1)}(t) < \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t))$ . Тогда  $b_+^{(1)}(t) = b^{(1)}(t) \geq b^{(2)}(t) \geq b_+^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_+^{(1)}(t) = \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t))$ . Тогда  $b_+^{(1)}(t) = \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t)) \geq \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t)) \geq b_+^{(2)}(t)$ .

Перейдем к доказательству неравенства  $\omega_{c+}^{(1)}(t) \geq \omega_{c+}^{(2)}(t)$ . Предположим вначале, что  $b_+^{(2)}(t) = \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t))$ . Получим  $\omega_{c+}^{(1)}(t) \geq q(\omega_+^{(1)*}(t)) \geq q(\omega_+^{(2)*}(t)) = \omega_{c+}^{(2)}(t)$ . Пусть  $b_+^{(2)}(t) < \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t))$ . Следовательно,  $b_+^{(2)}(t) = b^{(2)}(t)$ . Учитывая  $b^{(1)}(t) \geq b_+^{(1)}(t)$ , имеем

$$\begin{aligned} \omega_{c+}^{(1)}(t) &= \omega_+^{(1)*}(t) - b_+^{(1)}(t) \geq \omega_+^{(1)*}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} - b^{(1)}(t) = \\ &= \omega_c^{(1)}(t) - k^{(1)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} \geq \omega_c^{(2)}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} = \end{aligned}$$

$$= \omega^{(2)*}(t) - k^{(2)}(t) \frac{\Delta\Upsilon}{x(t)} - b^{(2)}(t) = \omega_+^{(2)*}(t) - b_+^{(2)}(t) = \omega_{c+}^{(2)}(t).$$

9. Следует непосредственно из определения эталонного движения и функции гипотетического промаха.

#### 4.5. Доказательство леммы 1 и утверждений 10, 11

Доказательство леммы 1. Обозначим рассматриваемый момент через  $\hat{t}$ . Установим справедливость неравенства

$$F^{(1)} \leq F^{(2)} + \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e}.$$

Начиная с момента  $\hat{t}$ , пронумеруем по порядку импульсы первого эталонного движения. Символом  $t_s^{(1)}$  обозначим момент  $s$ -го импульса,  $s \leq n^{(1)}(\hat{t})$ . Считаем  $t_s^{(1)} = \hat{t}$  для  $s \leq k^{(1)}(\hat{t})$ . Аналогично, пусть  $t_s^{(2)}$ ,  $s \leq n^{(2)}(\hat{t})$ , — момент  $s$ -го импульса на втором эталонном движении и  $t_s^{(2)} = \hat{t}$  для  $s \leq k^{(2)}(\hat{t})$ .

Правило чередования импульсов первого и второго движений описывается предложением: при любом  $s \leq n^{(1)}(\hat{t}) = n^{(2)}(\hat{t})$  справедливо неравенство  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$ . Отсюда вытекает требуемая оценка. Действительно,  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$  влечет  $x(t_s^{(1)}) \geq x(t_s^{(2)})$ . Используя (4.1), (2.4) и (2.5), получаем

$$\begin{aligned} F^{(1)} - F^{(2)} &= \frac{\omega^{(1)*}(\hat{t})x^2(\hat{t})}{e} - \sum_{s=1}^{n^{(1)}(\hat{t})} \frac{\Delta\Upsilon x(t_s^{(1)})}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\hat{t})}{e} \right)^2 - \\ &\quad - \frac{\omega^{(2)*}(\hat{t})x^2(\hat{t})}{e} + \sum_{s=1}^{n^{(2)}(\hat{t})} \frac{\Delta\Upsilon x(t_s^{(2)})}{e} - \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(\hat{t})}{e} \right)^2 = \\ &= \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e} - \frac{\Delta\Upsilon}{e} \sum_{s=1}^{n^{(1)}(\hat{t})=n^{(2)}(\hat{t})} (x(t_s^{(1)}) - x(t_s^{(2)})) \leq \\ &\leq \frac{(\omega^{(1)*}(\hat{t}) - \omega^{(2)*}(\hat{t}))x^2(\hat{t})}{e}. \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству предложения о характере чередования импульсов. Требуется установить, что  $t_s^{(1)} \leq t_s^{(2)}$  при любом  $s \leq n^{(1)}(\hat{t}) = n^{(2)}(\hat{t})$ .

Предположим противное:  $t_{\bar{s}}^{(1)} > t_{\bar{s}}^{(2)}$  для некоторого номера  $\bar{s}$ . Если таких номеров более одного, считаем номер  $\bar{s}$  наименьшим, т.е.  $t_{\bar{s}}^{(1)} \leq t_s^{(2)}$ ,  $s < \bar{s}$ .

1) Из предположений леммы следует  $k^{(1)}(\hat{t}) \geq k^{(2)}(\hat{t})$ . Поэтому  $t_{\bar{s}}^{(2)} > \hat{t}$ . Отметим также, что  $t_{\bar{s}}^{(2)}$  не может быть одновременно моментом импульса первого движения. Покажем, что  $\bar{s} > 1$ . В самом деле, пусть  $\bar{s} = 1$ . Тогда, с учетом  $t_{\bar{s}}^{(1)} > t_{\bar{s}}^{(2)} > \hat{t}$ , это означает, что второе движение при  $t > \hat{t}$  выходит на порог раньше первого. Такое невозможно, ибо  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$  (свойство 7 с несложными дополнительными рассуждениями).

2) Поскольку  $t_{\bar{s}-1}^{(1)} \leq t_{\bar{s}-1}^{(2)}$  и  $t_{\bar{s}}^{(2)} > t_{\bar{s}-1}^{(2)}$ , то ближайшим к  $t_{\bar{s}}^{(2)}$  слева моментом импульса является импульс на втором движении. Имеем  $n_+^{(1)}(t_{\bar{s}-1}^{(2)}) = n_+^{(2)}(t_{\bar{s}-1}^{(2)})$ .

Момент  $t_{\bar{s}-1}^{(2)}$  не может совпадать с  $\hat{t}$ . В самом деле, при совпадении получили бы  $k^{(1)}(\hat{t}) = k^{(2)}(\hat{t})$  и из неравенств  $\omega_c^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_c^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$  вытекало бы  $\omega_{c+}^{(1)}(\hat{t}) \geq \omega_{c+}^{(2)}(\hat{t})$ ,  $b_+^{(1)}(\hat{t}) \geq b_+^{(2)}(\hat{t})$  (свойство 8). В таком случае ближайший справа к  $\hat{t} = t_{\bar{s}-1}^{(2)}$  выход на порог был бы выходом первого движения (свойство 7), что противоречит определению моментов  $t_{\bar{s}}^{(2)}$ ,  $t_{\bar{s}-1}^{(2)}$ .

Обозначим для краткости  $t^{\sharp} = t_{\bar{s}-1}^{(2)}$ . Покажем, что  $\omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_+^{(1)*}(t^{\sharp})$ . В самом деле, пусть  $\omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}) \leq \omega_+^{(1)*}(t^{\sharp})$ . Если  $b_+^{(2)}(t^{\sharp}) = \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}))$ , то  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  для  $t > t^{\sharp}$  (свойство 3) и  $\omega_c^{(2)}(t) = q(\omega^{(2)*}(t)) \leq q(\omega^{(1)*}(t)) \leq \omega_c^{(1)}(t)$  при  $t \in (t^{\sharp}, t_{\bar{s}}^{(2)})$ . Таким образом, первое движение выходит при  $t > t^{\sharp}$  на порог не позже второго, что противоречит определению момента  $t_{\bar{s}}^{(2)}$ . Если  $b_+^{(2)}(t^{\sharp}) < \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}))$ , то  $\omega_{c+}^{(2)}(t^{\sharp}) = 0$  и значит  $\omega_c^{(2)}(t) = 0$  до момента  $\bar{t}$ , когда впервые  $b^{(2)}(\bar{t}) = \beta^*(\omega^{(2)*}(\bar{t}))$ . В случае  $\bar{t} < t_{\bar{s}}^{(2)}$  приходим к предыдущему варианту. В случае  $\bar{t} \geq t_{\bar{s}}^{(2)}$  имеем, очевидно,  $\omega_c^{(1)}(t_{\bar{s}}^{(2)}) \geq 0 = \omega_c^{(2)}(t_{\bar{s}}^{(2)})$ .

3) Из неравенства  $\omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_+^{(1)*}(t^{\sharp})$  получаем  $b^{(2)}(t^{\sharp}) = \omega_+^{(2)*}(t^{\sharp}) > \omega_+^{(1)*}(t^{\sharp}) \geq b^{(1)}(t^{\sharp})$ , т.е.  $b^{(2)}(t^{\sharp}) > b^{(1)}(t^{\sharp})$ . Таким образом, указан момент, когда  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ , хотя в начальный момент  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$ .

4) Пусть  $t'' < t^{\sharp}$  – момент, когда впервые  $b_+^{(2)}(t'') \geq b_+^{(1)}(t'')$  и  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  при  $t$  близких к  $t''$  справа. Тогда  $b_+^{(1)}(t'') = \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t''))$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  для  $t > t''$  (свойство 3 с учетом  $b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t})$ ).

Имеем  $\omega_+^{(2)*}(t'') > \omega_+^{(1)*}(t'')$ ,  $\omega_{c+}^{(2)}(t'') > \omega_{c+}^{(1)}(t'')$ . Действительно, пусть  $\omega_+^{(2)*}(t'') \leq \omega_+^{(1)*}(t'')$ . Тогда  $\omega^{(2)*}(t) \leq \omega^{(1)*}(t)$  для  $t$  близких к  $t''$ ,  $t > t''$ , и значит  $b^{(2)}(t) \leq \beta^*(\omega^{(2)*}(t)) \leq \beta^*(\omega^{(1)*}(t)) = b^{(1)}(t)$ , что противоречит  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ . Из  $\omega_+^{(2)*}(t'') > \omega_+^{(1)*}(t'')$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  следует  $\omega_{c+}^{(2)}(t'') \geq q(\omega_+^{(2)*}(t'')) > q(\omega_+^{(1)*}(t'')) = \omega_{c+}^{(1)}(t'')$ .

5) Покажем, что

$$\omega_+^{(1)*}(t'') \geq b_+^{(2)}(t''). \quad (4.3)$$



Для момента  $t''$  выполнены неравенства

$$b^{(1)}(t'') \geq b^{(2)}(t'') \geq b_+^{(2)}(t''). \quad (4.4)$$

Пусть  $t'' > \hat{t}$ . Если  $t''$  – момент импульса на первом движении, то  $\omega_+^{(1)*}(t'') = b^{(1)}(t'')$ . С учетом (4.4) отсюда следует (4.3). Если  $t''$  не является моментом импульса первого движения, то  $\omega_+^{(1)*}(t'') = \omega^{(1)*}(t'') \geq b^{(1)}(t'')$ . Вновь с учетом (4.4) получаем (4.3).

Пусть  $t^b = \hat{t}$ . Из неравенства  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$ , справедливого для  $t > t'' = \hat{t}$  близких к  $\hat{t}$ , следует  $k^{(1)}(\hat{t}) > k^{(2)}(\hat{t})$ . Рассмотрим последний импульс из серии  $k^{(1)}(\hat{t})$ . Обозначим для краткости через  $b_d^{(1)} = b_{k^{(1)}(\hat{t})-1}^{(1)}$  (см. свойство 5) полуширину перед последним импульсом, соответственно пусть  $\omega_d^{(1)*} = \omega_{k^{(1)}(\hat{t})-1}^{(1)*} = \omega^{(1)*}(\hat{t}) - (k^{(1)}(\hat{t}) - 1)\Delta\Upsilon/x(\hat{t})$ ,  $\omega_{c_d}^{(1)} = \omega_d^{(1)*} - b_d^{(1)}$ . Имеем  $\omega_{c_d}^{(1)} \geq \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$ , в то время как  $\omega_{c_+}^{(2)}(\hat{t}) < \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$  (центр первого движения перед последним импульсом в момент  $\hat{t}$  лежит на или за порогом, центр второго после действия всех импульсов – под порогом). Неравенство  $\omega_{c_d}^{(1)} \geq \Delta\Upsilon/x(\hat{t})$  влечет за собой  $\omega_+^{(1)*}(\hat{t}) = \omega_d^{(1)*} - \Delta\Upsilon/x(\hat{t}) = \omega_{c_d}^{(1)} + b_d^{(1)} - \Delta\Upsilon/x(\hat{t}) \geq b_d^{(1)}$ . Покажем, что  $b_d^{(1)} \geq b_+^{(2)}(\hat{t})$ . Действительно, пусть  $b_d^{(1)} < \beta^*(\omega_d^{(1)*})$ . Тогда  $b_d^{(1)} = b^{(1)}(\hat{t}) \geq b^{(2)}(\hat{t}) \geq b_+^{(2)}(\hat{t})$ . Если  $b_d^{(1)} = \beta^*(\omega_d^{(1)*})$ , то из неравенства  $\beta_c(\omega_{c_d}^{(1)}) \geq \beta_c(\omega_{c_+}^{(2)}(\hat{t}))$  получаем  $b_d^{(1)} = \beta^*(\omega_d^{(1)*}) = \beta_c(\omega_{c_d}^{(1)}) \geq \beta_c(\omega_{c_+}^{(2)}(\hat{t})) \geq b_+^{(2)}(\hat{t})$ . Таким образом,  $\omega_+^{(1)*}(\hat{t}) \geq b_d^{(1)} \geq b_+^{(2)}(\hat{t})$ . Неравенство (4.3) доказано для случая  $t'' = \hat{t}$ .

6) Рассмотрим ближайший к  $t''$  момент импульса  $t^\circ > t''$ . Из неравенства  $\omega_+^{(2)*}(t'') > \omega_+^{(1)*}(t'')$  получаем  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > \omega^{(1)*}(t^\circ)$ . Отсюда с учетом соотношения  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$ ,  $t > t''$ , имеем  $\omega_c^{(2)}(t^\circ) \geq q(\omega^{(2)*}(t^\circ)) > q(\omega^{(1)*}(t^\circ)) = \omega_c^{(1)}(t^\circ)$ . Следовательно,  $t^\circ$  – момент импульса на втором движении. Первое движение в момент  $t^\circ$  ниже порога.

Из  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  для  $t > t''$  близких к  $t''$  и  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t \in (t'', t^\circ]$ ,  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > \omega^{(1)*}(t^\circ)$  вытекает  $b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$ . Действительно, если  $b^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ , то опираемся на свойство 3. Пусть  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ . Соотношения  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$ ,  $b^{(2)}(t) > b^{(1)}(t)$  влекут за собой  $\omega^{(2)*}(t) > 2a$ . Тем более  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > 2a$ . Но тогда  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) > \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ)) = b^{(1)}(t^\circ)$ .

7) Неравенство (4.3) влечет за собой  $\omega^{(1)*}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$  и поэтому  $\omega_+^{(1)*}(t^\circ) = \omega^{(1)*}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ) = \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ .

Покажем, что  $b_+^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$ . От противного: пусть  $b_+^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t^\circ))$ . Тогда  $b_+^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ)$  и значит  $b_+^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ) = b_+^{(1)}(t^\circ)$ . С другой стороны,  $b_+^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t^\circ)) \geq b_+^{(2)}(t^\circ)$ . Пришли к противоречию.

Отметим, наконец, что следствием  $b^{(2)}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$  является также  $b_+^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) < b^{(2)}(t^\circ) = \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ .



Таким образом,  $\omega_+^{(1)*}(t^\circ) \geq \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ ,  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t > t''$ ,  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t > t^\circ$ ,  $b_+^{(1)}(t^\circ) < \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ .

8) Если  $\omega_+^{(1)*}(t^\circ) = \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ , то первое и второе движения совпадают при  $t > t^\circ$  по крайней мере до момента  $t_{\frac{\sigma}{2}}^{(1)}$ .

Если  $\omega_+^{(1)*}(t^\circ) > \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$ , то следующим за  $t^\circ$  будет выход на порог первого движения. Пусть  $\check{t}$  – момент выхода. Второе движение в момент  $\check{t}$  ниже порога. Имеем  $b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t})$ . Из  $b_+^{(1)}(t^\circ) < \omega_+^{(2)*}(t^\circ)$  получим  $b^{(1)}(\check{t}) < \omega^{(2)*}(\check{t})$  и значит  $\omega_+^{(2)*}(\check{t}) = \omega^{(2)*}(\check{t}) > b^{(1)}(\check{t}) = \omega_+^{(1)*}(\check{t})$ . Неравенство  $b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t})$  влечет за собой  $b_+^{(2)}(\check{t}) = b^{(2)}(\check{t}) \leq b^{(1)}(\check{t}) = \omega_+^{(1)*}(\check{t})$ .

Таким образом,  $\omega_+^{(2)*}(\check{t}) > \omega_+^{(1)*}(\check{t})$ ,  $b_+^{(2)}(\check{t}) \leq \omega_+^{(1)*}(\check{t})$ ,  $b^{(1)}(t) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t))$  при  $t > t''$ ,  $b^{(2)}(t) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t))$  при  $t > t^\circ$ .

Продолжая анализ ситуаций выхода движений на порог, приходим к выводу, что движения либо совпадают, начиная с некоторого момента и вплоть до момента  $t_{\frac{\sigma}{2}}^{(1)}$ , либо происходит чередование вплоть до  $t_{\frac{\sigma}{2}}^{(1)}$  моментов выхода первого и второго движений на порог. В обоих случаях получаем противоречие с тем, что на  $(t_{\frac{\sigma}{2}-1}^{(2)}, t_{\frac{\sigma}{2}}^{(2)})$  нет импульсов первого движения.

Доказательство правого неравенства оценки (4.2) закончено. Доказательство левого неравенства опускаем. Опускаем также доказательство второго утверждения леммы 1.

Доказательство утверждений 10, 11. Утверждение 10 является прямым следствием леммы 1 и того, что при импульсе вправо  $b_+(t) = b(t)$ .

Доказательство утверждения 11 также сведем к свойству монотонности функции  $F$ . Обозначим рассматриваемый момент времени через  $\hat{t}$ . При импульсе влево величина  $\omega_+^*(\hat{t})$  подсчитывается (с учетом возможного перевертывания информационного отрезка в силу симметрии задачи относительно нуля) по формуле

$$\omega_+^*(\hat{t}) = - \left( \omega_*(\hat{t}) - \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} \right) = \frac{\Delta\Upsilon}{x(\hat{t})} - \omega_c(\hat{t}) + b(\hat{t}).$$

1) Пусть  $\omega_+^*(\hat{t}) \geq \omega^*(\hat{t})$ . Тогда  $b_+(\hat{t}) = b(\hat{t})$  и значит  $\omega_{c+}(\hat{t}) \geq \omega_c(\hat{t})$ . Кроме того,  $n_+(\hat{t}) = n(\hat{t}) - 1$ . Значение  $F$  не убывает.

2) Пусть  $\omega_+^*(\hat{t}) < \omega^*(\hat{t})$ . Вначале покажем, что  $\omega_{c+}(\hat{t}) < \omega_c(\hat{t})$ . Если  $b(\hat{t}) \leq \beta^*(\omega_+^*(\hat{t}))$ , то  $b_+(\hat{t}) = b(\hat{t})$  и поэтому  $\omega_{c+}(\hat{t}) < \omega_c(\hat{t})$ . Если  $b(\hat{t}) > \beta^*(\omega_+^*(\hat{t}))$ , то  $b_+(\hat{t}) = \beta^*(\omega_+^*(\hat{t}))$ . Следовательно,  $\omega_{c+}(\hat{t}) = q(\omega_+^*(\hat{t})) < q(\omega^*(\hat{t})) \leq \omega_c(\hat{t})$ .

Символом 1 обозначим эталонное движение, выходящее из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}), I(\hat{t}))$ , символом 2 – из позиции  $(\hat{t}, n(\hat{t}) - 1, Y(I_+(\hat{t})))$ . Неравенства  $\omega^*(\hat{t}) > \omega_+^*(\hat{t})$ ,  $\omega_c(\hat{t}) > \omega_{c+}(\hat{t})$  дают (свойство 7), что первое движение выходит на порог раньше второго. Пусть  $t^\circ$  – момент выхода. Второе движение в момент  $t^\circ$  ниже порога.

Имеем  $\omega^{(1)*}(t^\circ) > \omega^{(2)*}(t^\circ)$ . С учетом  $b(\hat{t}) \geq b_+(\hat{t})$  получаем также  $b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$ . В самом деле, если  $b^{(1)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ))$ , то неравенство  $b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ)$  следует из свойства 3. Если  $b^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ))$ , то  $b^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(1)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) \geq b^{(2)}(t^\circ)$ .

Поскольку  $\omega_+^*(\hat{t}) = \Delta Y/x(\hat{t}) - \omega_c(\hat{t}) + b(\hat{t}) > b(\hat{t})$ , то  $\omega^{(2)*}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ)$  и поэтому  $\omega_+^{(2)*}(t^\circ) = \omega^{(2)*}(t^\circ) > b^{(1)}(t^\circ) = \omega_+^{(1)*}(t^\circ)$ .

Покажем, что  $b_+^{(2)}(t^\circ) \geq b_+^{(1)}(t^\circ)$ . В случае  $b^{(2)}(t^\circ) < \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$  имеем  $b^{(2)}(\hat{t}) < \beta^*(\omega^{(2)*}(\hat{t}))$  (свойство 3), т.е.  $b_+(\hat{t}) < \beta^*(\omega_+^*(\hat{t}))$  и значит  $b_+(\hat{t}) = b(\hat{t})$ . Следовательно,  $b^{(2)}(\hat{t}) = b^{(1)}(\hat{t})$ . Поскольку  $b^{(2)}(t)$  развивалась на  $(\hat{t}, t^\circ)$  с максимальной скоростью, то  $b^{(2)}(t^\circ) \geq b^{(1)}(t^\circ)$ . В результате  $b^{(2)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ)$  и поэтому  $b_+^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) \geq b_+^{(1)}(t^\circ)$ . В случае  $b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ))$  имеем  $b_+^{(2)}(t^\circ) = b^{(2)}(t^\circ) = \beta^*(\omega^{(2)*}(t^\circ)) = \beta^*(\omega_+^{(2)*}(t^\circ)) \geq \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t^\circ)) \geq b_+^{(1)}(t^\circ)$ .

Предполагая  $b_+^{(1)}(t^\circ) < \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t^\circ))$ , получаем  $b_+^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ)$  и значит  $b_+^{(1)}(t^\circ) = b^{(1)}(t^\circ) \geq b^{(2)}(t^\circ) = b_+^{(2)}(t^\circ)$ . Таким образом,  $b_+^{(2)}(t^\circ) = b_+^{(1)}(t^\circ)$ . Отсюда с учетом  $\omega_+^{(2)*}(t^\circ) > \omega_+^{(1)*}(t^\circ)$  имеем  $\omega_{c+}^{(2)}(t^\circ) > \omega_{c+}^{(1)}(t^\circ)$ . Если  $b_+^{(1)}(t^\circ) = \beta^*(\omega_+^{(1)*}(t^\circ))$ , то  $\omega_{c+}^{(2)}(t^\circ) \geq q(\omega_+^{(2)*}(t^\circ)) > q(\omega_+^{(1)*}(t^\circ)) = \omega_{c+}^{(1)}(t^\circ)$ .

Итак,  $n_+^{(2)}(t^\circ) = n_+^{(1)}(t^\circ)$ ,  $b_+^{(2)}(t^\circ) \geq b_+^{(1)}(t^\circ)$ ,  $\omega_{c+}^{(2)}(t^\circ) > \omega_{c+}^{(1)}(t^\circ)$ . Поэтому  $F_+^{(2)}(t^\circ) \geq F_+^{(1)}(t^\circ)$ . С учетом  $F_+^{(2)}(t^\circ) = F_+(\hat{t})$  и  $F_+^{(1)}(t^\circ) = F(\hat{t})$  получаем требуемое неравенство  $F_+(\hat{t}) \geq F(\hat{t})$ .

#### 4.6. Седловая точка

**Лемма 2.** Для любой начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , любой стратегии  $U$  первого игрока, любых  $\varepsilon$  и  $\Delta$  справедливо неравенство

$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega^\circ, \varepsilon, \Delta) \geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))). \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Говоря о реальном движении, подразумеваем движение в силу дискретной схемы и стратегий  $U, \Omega^\circ$ . Символы, относящиеся к реальному движению, отмечаем чертой сверху. Волна будет сопровождать символы вспомогательных эталонных движений. Основная идея — доказательство неубывания функции  $F$  вдоль реального движения.

Выделим моменты  $\tau_s$ ,  $s = \overline{1, m}$ , действия импульсов на реальном движении. Подразумеваем, что  $\tau_m \leq t_\varepsilon$ .

А. При действии импульсов множество  $\bar{I}(\tau_s)$  переходит в  $\bar{I}_+(\tau_s)$ . Из свойств 9–11 следует, что

$$F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), Y(\bar{I}_+(\tau_s))) \geq F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)), \quad s = \overline{1, m}. \quad (4.6)$$

Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), Y(\bar{I}_+(\tau_s))), \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (4.7)$$

Положим  $\bar{n}(\tau_s) = \bar{n}_+(\tau_s)$ ,  $\bar{I}(\tau_s) = (\bar{\omega}_c(\tau_s), \bar{b}(\tau_s)) = Y(\bar{I}_+(\tau_s))$ . Выпустим из позиции  $(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s))$  эталонное движение и доведем его до момента  $\tau_{s+1}$ . Покажем, что  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\bar{F} \geq \bar{F}$ ). Отсюда, поскольку  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s))$ , будет следовать (4.7).

Пусть  $g_s \geq 0$  – количество импульсов рассматриваемого эталонного движения на  $[\tau_s, \tau_{s+1})$ . В соответствие позиции  $(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  поставим позицию  $(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1}))$ , где  $\bar{n}^1(\tau_{s+1}) = \bar{n}(\tau_{s+1}) + g_s = \bar{n}_+(\tau_s)$ , правый край  $\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$  отрезка  $\bar{I}^1(\tau_{s+1})$  получен переносом вправо на  $g_s$  импульсов точки  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$ , полуширина  $\bar{b}^1(\tau_{s+1})$  равна  $\bar{b}(\tau_{s+1})$ . Имеем  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\bar{F}^1 = \bar{F}$ ). Докажем неравенство  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1}))$  ( $\bar{F} \geq \bar{F}^1$ ). Для сокращения записи условимся опускать аргумент  $\tau_{s+1}$ .

Поскольку второй игрок использует стратегию  $\Omega^0$ , то на  $(\tau_s, \tau_{s+1})$  правый край информационного отрезка на реальном движении уходит вправо с максимально возможной скоростью. В силу свойства 1 получаем  $\bar{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$ . Если  $\bar{\omega}_c^1 \geq \bar{\omega}_c$ , то  $\bar{I}^1 \subset \bar{I}$  и нужное неравенство  $\bar{F} \geq \bar{F}^1$  вытекает из второй части леммы 1. Пусть  $\bar{\omega}_c^1 < \bar{\omega}_c$ . Тогда при  $\bar{b}^1 \leq \bar{b}$  ссылаемся на левое неравенство оценки (4.2). Предположим, что  $\bar{b}^1 > \bar{b}$ . С учетом  $\bar{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$  имеем  $\bar{b} < \bar{b}^1 \leq \beta^*(\bar{\omega}^{1*}) \leq \beta^*(\bar{\omega}^*)$ , т.е.  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$ . Отсюда, опираясь на свойство 4, получаем, что  $\bar{b}_+(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}_+(\tau_s))$  и на  $(\tau_s, \tau_{s+1})$  полуширина  $\bar{b}(t)$  развивалась с максимально возможной скоростью. Из  $\bar{b}_+(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}_+(\tau_s))$  вытекает  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$ . Получаем  $\bar{b} \geq \bar{b}$ . В итоге  $\bar{b}^1 = \bar{b} \leq \bar{b}$ , т.е. приходим к противоречию. Случай  $\bar{b}^1 > \bar{b}$  невозможен. Неравенство  $\bar{F} \geq \bar{F}^1$ , а вместе с ним и неравенство  $\bar{F} \geq \bar{F}$ , доказаны.

Аналогично (4.7) для случая  $\tau_1 > t_0$  (т.е. когда начальный момент  $t_0$  не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)). \quad (4.8)$$

Эталонное движение при этом выпускается из позиции  $(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0))$ .

В. Учитывая неравенства (4.6), (4.7) для всех моментов  $\tau_s$ , а также неравенство (4.8), получим

$$\begin{aligned} F(\tau_m, 0, Y(\bar{I}_+(\tau_m))) &\geq F(\tau_m, \bar{n}_+(\tau_m), Y(\bar{I}_+(\tau_m))) \geq F(\tau_m, \bar{n}(\tau_m), \bar{I}(\tau_m)) \geq \\ &\geq \dots \geq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \geq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), Y(\bar{I}_+(\tau_s))) \geq \\ &\geq F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)) \geq \dots \geq F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Так как действует стратегия  $\Omega^0$ , то  $\bar{I}(t_i) = Y(\bar{I}_-(t_i))$  в любой дискретный момент  $t_i$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) &= F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{I}_-(t_0))), \\ F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) &= F(\tau_m, 0, Y(\bar{I}_+(\tau_m))). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь  $Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon)) = \bar{I}(t_\varepsilon)$ , если  $t_\varepsilon > \tau_m$ . В силу (4.9), (4.10) имеем

$$F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \geq F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{I}_-(t_0))).$$

Поскольку  $\Phi(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}_-(t_0), U^\circ, \Omega, \varepsilon, \Delta) = F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon)))$  и  $\bar{n}(t_0) = n(t_0)$ ,  $\bar{I}_-(t_0) = I_-(t_0)$ , приходим к неравенству (4.5).

**Лемма 3.** *Для любой начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , любой стратегии  $\Omega$  второго игрока, любых  $\varepsilon$  и  $\Delta$  справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq \\ & \leq \max\{F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) + r_1\Delta, [r_2 + r_3(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta)\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где константы  $r_1, r_2, r_3$  зависят только от параметров задачи.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Под реальным подразумеваем движение в силу дискретной схемы и стратегий  $U^\circ, \Omega$ . Символы, относящиеся к реальному движению, отмечаем чертой сверху. Волна будет сопровождать символы вспомогательных эталонных движений. Основная идея – оценка возрастания функции  $F$  вдоль реального движения. Увеличение  $F$  мало при малых  $\varepsilon, \Delta$ .

Выделим моменты  $\tau_s, s = \overline{1, m}$ , действия импульсов на реальном движении. Поскольку используется стратегия  $U^\circ$ , то импульсы подаются в те из дискретных моментов, когда центр реального движения находится на или за порогом.

А. Исследуем изменение  $F$  вдоль реального движения на промежутке от  $\tau_s$  до  $\tau_{s+1}$ . При действии импульсов множество  $\bar{I}(\tau_s)$  переходит в  $\bar{I}_+(\tau_s)$ . Опираясь на свойства 5, 9, имеем

$$F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), Y(\bar{I}_+(\tau_s))) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s)), \quad s = \overline{1, m}. \quad (4.12)$$

Положим  $\bar{n}(\tau_s) = \bar{n}_+(\tau_s)$ ,  $\bar{I}(\tau_s) = (\bar{\omega}_c(\tau_s), \bar{b}(\tau_s)) = Y(\bar{I}_+(\tau_s))$ . Выпустим из позиции  $(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s))$  эталонное движение и доведем его до момента  $\tau_{s+1}$ . Пусть  $g_s$  – число импульсов эталонного движения на  $[\tau_s, \tau_{s+1}]$ . Установим неравенство

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) + g_s \Delta \Upsilon \Delta, \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (4.13)$$

Поскольку  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) = F(\tau_s, \bar{n}(\tau_s), \bar{I}(\tau_s))$ , откуда будет следовать оценка

$$F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1})) \leq F(\tau_s, \bar{n}_+(\tau_s), Y(\bar{I}_+(\tau_s))) + g_s \Delta \Upsilon \Delta, \quad s = \overline{1, m-1}. \quad (4.14)$$

Обозначим через  $t^d$  ближайший слева к  $\tau_{s+1}$  дискретный момент,  $t^d \neq \tau_{s+1}$ . Возможно совпадение  $t^d$  с  $\tau_s$ .

1) Оценим  $\bar{\omega}^*(t^d)$  через  $\bar{\omega}^*(t^d)$ , предполагая  $t^d > \tau_s$ . В этом случае центр реального движения в момент  $t^d$  ниже порога.

Если на  $[\tau_s, t^d]$  нет импульсов эталонного движения, то очевидно  $\bar{\omega}^*(t^d) \leq \bar{\omega}^*(t^d)$ . Покажем, что при наличии импульсов

$$\bar{\omega}^*(t^d) \leq \bar{\omega}^*(t^d) + \frac{\Delta \Upsilon}{x(t^d)}. \quad (4.15)$$

Пусть  $t^b < t^a$  – момент последнего импульса эталонного движения до  $t^a$ . Если  $t^b > \tau_s$ , то в момент  $t^b$  центр эталонного движения на пороге. В этом случае  $\bar{b}(t^b) = \bar{\omega}_+^*(t^b)$ . Если  $t^b = \tau_s$ , центр может быть также и за порогом. Тогда  $\bar{b}(t^b) \leq \bar{\omega}_+^*(t^b)$ .

1а) Рассмотрим случай  $\bar{b}(t^b) = \beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^b))$ . Опираясь на свойство 2 и учитывая неравенство  $\bar{b}(t^b) \leq \bar{\omega}_+^*(t^b)$ , имеем  $\beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^a)) \leq \beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^b))x^2(t^b)/x^2(t^a) = \bar{b}(t^b)x^2(t^b)/x^2(t^a) \leq \bar{\omega}_+^*(t^b)x^2(t^b)/x^2(t^a) \leq \bar{\omega}^*(t^a)$ . Соотношение (4.15) следует из того, что

$$\bar{\omega}^*(t^a) = \bar{\omega}_c(t^a) + \bar{b}(t^a), \quad \bar{\omega}_c(t^a) < \frac{\Delta\Upsilon}{x(t^a)},$$

$$\bar{b}(t^a) \leq \beta_c(\bar{\omega}_c(t^a)) \leq \beta_c\left(\frac{\Delta\Upsilon}{x(t^a)}\right) \leq \bar{\omega}^*(t^a).$$

1b) Пусть  $\bar{b}(t^b) < \beta_c(\Delta\Upsilon/x(t^b))$ . Тогда  $\bar{b}(\tau_s) < \beta_c(\bar{\omega}_c(\tau_s))$  в силу свойства 3. Отсюда  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$  и  $t^b > \tau_s$ . Получаем также, что  $\bar{b}(t)$  на  $[\tau_s, t^b]$  развивалось с максимально возможной скоростью. Следовательно,  $\bar{b}(t^b) \geq \bar{b}(t^a)$  (даже если  $t^b$  не является дискретным моментом). Поскольку  $\bar{b}(t^b) = \bar{\omega}_+^*(t^b)$ , то

$$\bar{b}(t^a) \leq \bar{b}(t^b) \frac{x^2(t^b)}{x^2(t^a)} + \zeta(t^b, t^a) \leq \bar{\omega}_+^*(t^b) \frac{x^2(t^b)}{x^2(t^a)} + \zeta(t^b, t^a) = \bar{\omega}^*(t^a).$$

Неравенство (4.15) следует из  $\bar{\omega}^*(t^a) = \bar{\omega}_c(t^a) + \bar{b}(t^a)$ ,  $\bar{\omega}_c(t^a) < \Delta\Upsilon/x(t^a)$ .

Пусть теперь  $t^a = \tau_s$ . Тогда  $\bar{\omega}_+^*(t^a) = \bar{\omega}^*(t^a)$ .

2) Перейдем непосредственно к доказательству оценки (4.13). Положим  $h_s = 0$ , если  $t^a = \tau_s$  или  $t^a > \tau_s$ , но на  $[\tau_s, t^a]$  отсутствуют импульсы эталонного движения. Считаем  $h_s = 1$ , если  $t^a > \tau_s$  и на  $[\tau_s, t^a]$  есть импульсы эталонного движения. Пусть  $\varphi_s \geq 0$  – количество импульсов эталонного движения на  $[t^a, \tau_{s+1})$ .

В соответствие позиции  $(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  поставим позицию  $(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1}))$ , где  $\bar{n}^1(\tau_{s+1}) = \bar{n}(\tau_{s+1}) + (h_s + \varphi_s)$ , правый край  $\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$  отрезка  $\bar{I}^1(\tau_{s+1})$  получен переносом вправо на  $(h_s + \varphi_s)$  импульсов точки  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$ , полуширина  $\bar{b}^1(\tau_{s+1})$  совпадает с  $\bar{b}(\tau_{s+1})$  в случае  $\bar{b}(\tau_{s+1}) < \beta^*(\bar{\omega}(\tau_{s+1}))$  и  $\bar{b}^1(\tau_{s+1}) = \beta^*(\bar{\omega}^1(\tau_{s+1}))$ , если  $\bar{b}(\tau_{s+1}) = \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}))$ . Очевидно, что  $F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1(\tau_{s+1}), \bar{I}^1(\tau_{s+1})) = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$  (кратко:  $\bar{F}^1 = \bar{F}$ ).

2а) Предположим, что  $t^a > \tau_s$ . Из точки  $\bar{\omega}^*(t^a)$  в момент  $t^a$  выпустим движение системы (2.2) при  $v_z(t) \equiv \nu$ ,  $k(t_i) \equiv 0$ . Пусть  $\hat{\omega}(\tau_{s+1})$  – его положение в момент  $\tau_{s+1}$ . Имеем  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \hat{\omega}(\tau_{s+1})$ .

Сравним  $\bar{\omega}^*(\tau_{s+1})$  с  $\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$ . Справедливы соотношения

$$\hat{\omega}(\tau_{s+1}) = \bar{\omega}^*(t^a) \frac{x^2(t^a)}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^a, \tau_{s+1}) \leq$$

$$\leq \left( \bar{\omega}^*(t^{\Delta}) + h_s \frac{\Delta\Upsilon}{x(t^{\Delta})} \right) \frac{x^2(t^{\Delta})}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^{\Delta}, \tau_{s+1}),$$

$$\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) = \bar{\omega}^*(t^{\Delta}) \frac{x^2(t^{\Delta})}{x^2(\tau_{s+1})} + \zeta(t^{\Delta}, \tau_{s+1}) - \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta\Upsilon}{x(t_j)} \frac{x^2(t_j)}{x^2(\tau_{s+1})},$$

$$\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) = \bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) + (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta\Upsilon}{x(\tau_{s+1})}.$$

Здесь через  $t_j$ ,  $j = \overline{1, \varphi_s}$ , обозначены моменты импульсов эталонного движения на промежутке от  $t^{\Delta}$  до  $\tau_{s+1}$ . Далее,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\tau_{s+1}) - \bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) &\leq \left( \bar{\omega}^*(t^{\Delta}) + h_s \frac{\Delta\Upsilon}{x(t^{\Delta})} \right) \frac{x^2(t^{\Delta})}{x^2(\tau_{s+1})} - \bar{\omega}^*(t^{\Delta}) \frac{x^2(t^{\Delta})}{x^2(\tau_{s+1})} + \\ &+ \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta\Upsilon}{x(t_j)} \frac{x^2(t_j)}{x^2(\tau_{s+1})} - (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta\Upsilon}{x(\tau_{s+1})} = \frac{h_s \Delta\Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t^{\Delta}) + \sum_{j=1}^{\varphi_s} \frac{\Delta\Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t_j) - \\ &- (h_s + \varphi_s) \frac{\Delta\Upsilon}{x(\tau_{s+1})} \leq \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} x(t^{\Delta}) - \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon}{x(\tau_{s+1})} = \\ &= \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon}{x^2(\tau_{s+1})} (x(t^{\Delta}) - x(\tau_{s+1})) = \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon e \Delta}{x^2(\tau_{s+1})}. \end{aligned}$$

В итоге,

$$\bar{\omega}^*(\tau_{s+1}) \leq \bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1}) + \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon e \Delta}{x^2(\tau_{s+1})}. \quad (4.16)$$

Если  $t^{\Delta} = \tau_s$ , то в сделанных выкладках вместо  $\bar{\omega}^*(t^{\Delta})$  следует писать  $\bar{\omega}_+^*(t^{\Delta})$ . При этом  $h_s = 0$ .

2b) Покажем, что

$$\bar{F} \leq \bar{F}^1 + (h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon \Delta. \quad (4.17)$$

Здесь  $\bar{F} = F(\tau_{s+1}, \bar{n}(\tau_{s+1}), \bar{I}(\tau_{s+1}))$ .

Поскольку будут рассматриваться величины, связанные только с моментом  $\tau_{s+1}$ , для сокращения записи опустим скобку аргумента в обозначении этих величин. Так, вместо  $\bar{\omega}^{1*}(\tau_{s+1})$  будем писать  $\bar{\omega}^{1*}$  и т.д.

2b<sub>1</sub>) Пусть  $\bar{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$ . Предположим вначале, что  $\bar{b}^1 \leq \bar{b}$ . Покажем, что  $\bar{\omega}_c^1 \leq \bar{\omega}_c$ . В самом деле, это очевидно при  $\bar{b}^1 = \bar{b}$ . Пусть  $\bar{b}^1 < \bar{b}$ . Если  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$ , то  $\bar{b}(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_s))$  и на  $[\tau_s, \tau_{s+1})$  полуширина  $\bar{b}(t)$  развивалась с максимально возможной скоростью (свойство 3). Из  $\bar{b}(\tau_s) < \beta^*(\bar{\omega}^*(\tau_s))$  следует  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$ . Получаем  $\bar{b} \geq \bar{b}$ . В итоге,  $\bar{b}^1 = \bar{b} \geq \bar{b}$ . Таким образом, соотношение  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  невозможно. Если  $\bar{b} = \beta^*(\bar{\omega}^*)$ , то  $\bar{b}^1 = \beta^*(\bar{\omega}^{1*})$  и с учетом  $\bar{\omega}^{1*} \leq \bar{\omega}^*$  получаем  $\bar{\omega}_c^1 = q(\bar{\omega}^{1*}) \leq q(\bar{\omega}^*) \leq \bar{\omega}_c$ .

Для оценки  $\bar{F}$  через  $\bar{F}^1$  применим лемму 1. Учтем при этом неравенство (4.16) и соотношение  $\bar{n}^1 \leq \bar{n}$ . Имеем

$$\bar{F} \leq \bar{F}^1 + \frac{(h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon e \Delta}{x^2(\tau_{s+1})} \frac{x^2(\tau_{s+1})}{e} = \bar{F}^1 + (h_s + \varphi_s) \Delta\Upsilon \Delta.$$

Пусть теперь  $\bar{b}^1 > \bar{b}$ . Положим  $\bar{I}^1 = (\bar{\omega}_c^1, \bar{b}^1)$ ,  $\bar{\omega}_c^1 = \bar{\omega}^* - \bar{b}^1$ ,  $\bar{n}^1 = \bar{n}$ ,  $\bar{F}^1 = F(\tau_{s+1}, \bar{n}^1, \bar{I}^1)$ . Применяя лемму 1, получим  $\bar{F}^1 \leq \bar{F}^1$  в случае  $\bar{\omega}_c^1 \leq \bar{\omega}_c^1$  и  $\bar{F}^1 \leq \bar{F}^1 + (h_s + \varphi_s)\Delta\Upsilon\Delta$ , если  $\bar{\omega}_c^1 > \bar{\omega}_c^1$ . Поскольку  $\bar{I}^1 \supset \bar{I}$ , то

$$\bar{F} \leq \bar{F}^1 \leq \bar{F}^1 + (h_s + \varphi_s)\Delta\Upsilon\Delta.$$

2b<sub>2</sub>) Пусть  $\bar{\omega}^{1*} > \bar{\omega}^*$ . Предположим, что  $\bar{b}^1 < \bar{b}$ . Тогда  $\bar{b}^1 < \bar{b} \leq \beta^*(\bar{\omega}^*) \leq \beta^*(\bar{\omega}^{1*})$ . Следовательно,  $\bar{b}^1 = \bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  (см. правило переноса вправо на  $(h_s + \varphi_s)$  импульсов). Из неравенства  $\bar{b} < \beta^*(\bar{\omega}^*)$  следует (свойство 3), что  $\bar{b}(t)$  развивалось на  $[\tau_s, \tau_{s+1})$  с максимальной возможной скоростью и, кроме того,  $\bar{b}(\tau_s) = \bar{b}_+(\tau_s)$ . Поэтому  $\bar{b} \geq \bar{b}$ . В итоге,  $\bar{b}^1 = \bar{b} \geq \bar{b}$ . Пришли к противоречию. Случай  $\bar{b}^1 < \bar{b}$  невозможен. Предположим, что  $\bar{b}^1 \geq \bar{b}$ . В силу леммы 1 получаем  $\bar{F}^1 \geq \bar{F}$ .

Итак, величины  $\bar{F}$  и  $\bar{F}^1$  связаны соотношением (4.17). Поскольку  $(h_s + \varphi_s) \leq g_s$ , то из (4.16), (4.17) следует неравенство (4.13). Тем самым доказано и (4.14).

Аналогично (4.14) для случая  $\tau_1 > t_0$  (т.е. когда начальный момент  $t_0$  не является моментом импульса) доказывается неравенство

$$F(\tau_1, \bar{n}(\tau_1), \bar{I}(\tau_1)) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) + g_0\Delta\Upsilon\Delta, \quad (4.18)$$

где  $g_0$  – число импульсов эталонного движения на  $[t_0, \tau_1)$ , выпущенного из позиции  $(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0))$ .

В. Рассмотрим момент  $\tau_m \leq t_\varepsilon$  последнего импульса на реальном движении.

1) Предположим вначале, что  $\bar{n}_+(\tau_m) = 0$ . Это означает, что истрачены все импульсы.

Учитывая формулы (4.12), (4.14) для всех моментов  $\tau_s$ , неравенство (4.18), а также соотношения  $g_s \leq \bar{n}_+(\tau_s) \leq N$ ,  $m \leq N$ , получим

$$\begin{aligned} F(\tau_m, 0, Y(\bar{I}_+(\tau_m))) &= F(\tau_m, \bar{n}_+(\tau_m), Y(\bar{I}_+(\tau_m))) = \\ &= F(\tau_m, \bar{n}(\tau_m), \bar{I}(\tau_m)) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) + N(N+1)\Delta\Upsilon\Delta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как стратегия  $\Omega$  произвольна, то с учетом леммы 1 имеем  $F(t_i, \bar{n}(t_i), \bar{I}(t_i)) \leq F(t_i, \bar{n}(t_i), Y(\bar{I}_-(t_i)))$  в любой дискретный момент  $t_i$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}(t_0)) &\leq F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{I}_-(t_0))), \\ F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) &\leq F(\tau_m, 0, Y(\bar{I}_+(\tau_m))). \end{aligned} \quad (4.20)$$

В силу (4.19), (4.20) имеем

$$F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \leq F(t_0, \bar{n}(t_0), Y(\bar{I}_-(t_0))) + N(N+1)\Delta\Upsilon\Delta.$$

Поскольку  $\Phi(t_0, \bar{n}(t_0), \bar{I}_-(t_0), U^0, \Omega, \varepsilon, \Delta) = F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon)))$  и  $\bar{n}(t_0) = n(t_0)$ ,  $\bar{I}_-(t_0) = I_-(t_0)$ , то



$$\Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) + r_1 \Delta, \quad (4.21)$$

где константа  $r_1$  зависит только от параметров задачи.

2) Предположим, что  $\bar{n}_+(\tau_m) > 0$ . Тогда в момент  $t_\varepsilon$  центр  $\bar{\omega}_{c+}(t_\varepsilon)$  реального движения находится под порогом. Следовательно,

$$F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \leq \left( \frac{\Delta \Upsilon}{x(t_\varepsilon)} + \beta_c(\bar{\omega}_{c+}(t_\varepsilon)) \right) \frac{x^2(t_\varepsilon)}{e} + \frac{\nu}{2} \left( \frac{x(t_\varepsilon)}{e} \right)^2. \quad (4.22)$$

Здесь

$$\beta_c(\bar{\omega}_{c+}(t_\varepsilon)) \leq \beta_c(\Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon)) = \begin{cases} c_1 \Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon) + c_2, & \text{если } \Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon) \geq a, \\ a, & \text{если } \Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon) < a. \end{cases}$$

Выражение для  $\beta_c(\Delta \Upsilon / x(\tau_m))$  перепишем в форме  $\beta_c(\Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon)) = \max\{c_1 \Delta \Upsilon / x(t_\varepsilon) + c_2, a\}$ . Учитывая дополнительное неравенство  $x(t_\varepsilon) \leq e(\varepsilon + \Delta)$ , преобразуем оценку (4.22):

$$\begin{aligned} & F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \leq \\ & \leq \left[ \Delta \Upsilon + \max \left\{ c_1 \Delta \Upsilon + c_2 e(\varepsilon + \Delta), \frac{c_2}{1 - c_1} (\varepsilon + \Delta) \right\} \right] (\varepsilon + \Delta) + \frac{\nu}{2} (\varepsilon + \Delta)^2, \end{aligned}$$

или

$$F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \leq [r_2 + r_3(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta).$$

Константы  $r_2, r_3$  зависят только от параметров задачи.

В итоге имеем

$$\begin{aligned} & \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ, \Omega, \varepsilon, \Delta) = \\ & = F(t_\varepsilon, 0, Y(\bar{I}_+(t_\varepsilon))) \leq [r_2 + r_3(\varepsilon + \Delta)](\varepsilon + \Delta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Объединяя (4.21) и (4.23), получаем оценку (4.11).

**Теорема.** В случае  $x_0 = x^0$  стратегии  $U^\circ, \Omega^\circ$  являются оптимальными. При этом

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))).$$

**Доказательство.** Используя оценки (4.5) и (4.11), получаем

$$\begin{aligned} L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), \Omega^\circ) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{\Delta \rightarrow 0} \inf_U \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega^\circ, \varepsilon, \Delta) \geq \\ &\geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ) &= \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ, \Omega, \varepsilon, \Delta) \leq \\ &\leq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))). \end{aligned}$$



Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) &\geq L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), \Omega^\circ) \geq F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) \geq \\ &\geq L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ) \geq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)). \end{aligned}$$

С другой стороны, непосредственно из определения  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$  имеем

$$\Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) \leq \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) &= L^{(2)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), \Omega^\circ) = F(t_0, n(t_0), Y(I_-(t_0))) = \\ &= L^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U^\circ) = \Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00350).

Поступила 20.03.94

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
3. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. – М.: Наука, 1978. – 270 с.
4. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Задача управления с неполной информацией // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – N. 4. – С.9–14.
5. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1977. – N. 5. – С.14–23.
6. Кумков С.И., Пацко В.С. Модельная задача импульсного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1992. – Т.1. – С.106–121.
7. Кумков С.И., Пацко В.С. Задача преследования с неполной информацией: Препринт / РАН. УрО. ИММ.–Екатеринбург.– 1993. – 64 с.
8. Меликян А.А., Черноусько Ф.Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // Прикл. математика и механика. – 1971. – Т.35, Вып.6. – С.952–961.
9. Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т.7, N. 3. – С.424–435.; 1972. – Т.8, N. 8. – С.1423–1434.