

Номер 1

Январь - Февраль 1996

ISSN 0002-3388

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

# ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Главный редактор  
Е.А. Федосов

МАИК "НАУКА"



"НАУКА"

**УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ  
В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ**

УДК 62.50

**УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ  
ВОЗМОЖНЫХ ФАЗОВЫХ СОСТОЯНИЙ\***

© 1996 г. С. И. Кумков, В. С. Пацко

*Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН*

Поступила в редакцию 15.02.95 г.

Рассматривается задача преследования при неполной информации догоняющего об убегающем. Преследователь обладает ограниченным ресурсом импульсного управления и минимизирует промах. Предложен способ управления по принципу обратной связи, основанный на построении в процессе движения информационных множеств – совокупностей фазовых состояний, совместимых с наблюдаемой реализацией замеров. Каждое информационное множество представляется в виде набора своих выпуклых сечений, трансформация которых во времени осуществляется при помощи операций пересечения и алгебраического суммирования. Приведены результаты моделирования.

**Введение.** В “обычных” дифференциальных играх позиция игры включает в себя момент времени и фазовое состояние в этот момент. В играх с неполной информацией при геометрических ограничениях на ошибку замера позиция есть момент времени и информационное множество. Последнее определяется как совокупность всех точечных фазовых состояний, совместимых с историей процесса. Информационное множество зависит от текущего замера, поэтому совершенно естественно возникают минимаксные постановки, где первый игрок распоряжается полезным управлением, а второй – формированием замеров.

В теоретическом аспекте дифференциальные игры с неполной информацией интенсивно изучались в середине 70-х годов (см., например, [1–5]). В то же время весьма мало публикаций, посвященных конкретным задачам, решенным аналитически или при помощи ЭВМ. Данная статья связана с одной из таких проблем. Рассматривается задача преследования, в которой догоняющий замеряет с ошибкой направление на убегающего и, обладая запасом импульсного управления, пытается уменьшить промах. Большие промахи считаются неудовлетворительными (высокоточное наведение). Предлагаемый в статье способ управления по принципу обратной связи опирается на построение информационных множеств, использует понятие прогнозируемого промаха, является достаточно простым по реализации. Описывается также “игровой” способ формирования замеров. Статья продолжает исследования [6, 7], где аналогичная задача преследования изучалась для случая, когда в процессе движения замеряется с ошибкой угловая скорость линии визирования.

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, № 94-01-00350.

В вероятностной постановке близкие задачи исследовались в [8, 9].

**1. Задача преследования.** Две материальные точки: преследователь  $P$  и убегающий  $E$  передвигаются на плоскости. В дискретные моменты  $t_i$  преследователь замеряет направление на убегающего (угол визирования) и, применяя в эти же моменты импульсное управление, скачком изменяет скорость, стараясь уменьшить промах. Импульсы действуют ортогонально некоторому фиксированному направлению. Оговорена величина  $\sigma$  каждого отдельного импульса и общий запас  $N$ . Пусть  $k(t_i)$  – количество импульсов с предписанным знаком, поданное в момент  $t_i$  ( $k(t_i)$  – либо целое отрицательное, либо целое положительное, либо нуль). Ограничение:  $\sum_i |k(t_i)| \leq N$ . Убегающий изменяет скорость своего движения, выбирая вектор ускорения  $v$  с компонентами  $v_x, v_z$ . Ограничение:  $v \in Q$ , где  $Q$  – выпуклое замкнутое ограниченное множество, симметричное относительно нуля.

Замеряемое в момент  $t_i$  значение  $\alpha_M(t_i)$  и истинный угол визирования  $\alpha(t_i)$  связаны соотношением  $\alpha_M(t_i) = \alpha(t_i) + \zeta(t_i)$ . Здесь  $\zeta(t_i)$  – ошибка замера, относительно которой известно лишь, что  $|\zeta(t_i)| \leq d_1 |\alpha(t_i)| + d_2$ , где  $d_1, d_2$  – заданные постоянные,  $1 > d_1 \geq 0, d_2 \geq 0$ . Считаем, что в начальный момент  $t_0$  оговорены номинальное положение  $E_{NOM}$  убегающего и номинальный вектор  $V_{ENOM}$  его скорости. Совместим начало разностной системы координат с преследователем. Условимся, что преследователь выбирает вектор  $V_P(t_0)$  своей начальной скорости так, чтобы разностный вектор  $V_{NOM} = V_{ENOM} - V_P(t_0)$ , приложенный к точке  $E_{NOM}$ , был направлен на точку  $P$ . Ось  $x$  разностной системы направим противоположно вектору  $V_{NOM}$ . Перпендикулярную к  $x$  ось обозначим

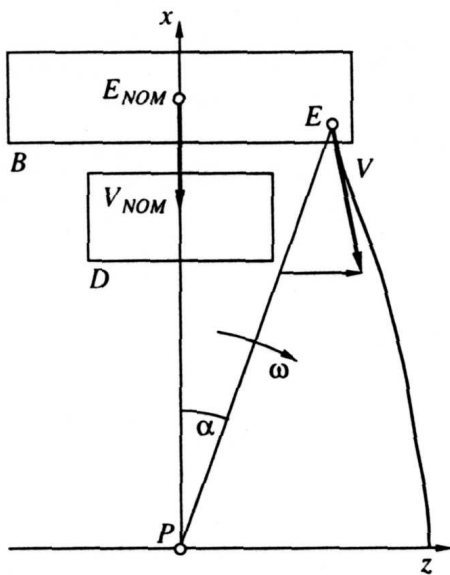


Рис. 1. Разностная система координат.

через  $z$  (рис. 1). Направления осей неизменны по  $t$ . Предположим, что импульсы действуют вдоль оси  $z$ . Начальное положение убегающего и вектор его начальной скорости могут отличаться от номинальных значений. Пусть  $B, D$  – множества, задающие в разностных координатах начальные неопределенности по положению и скорости. Символом  $e$  обозначим модуль вектора  $V_{NOM}$ , символами  $V_x(t), V_z(t)$  – составляющие вектора  $V(t)$  разностной скорости по осям  $x, z$ .

Уравнения динамики в разностных координатах  $x, z$  имеют вид

$$\ddot{z}(t) = v_z - \sigma \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \quad \ddot{x}(t) = v_x, \quad (1.1)$$

$$\sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad (v_x, v_z)' \in Q.$$

Импульсное воздействие в момент  $t_i$  изменяет скорость  $\dot{z}$  скачком на величину  $-k(t_i)\sigma$ . Соотношения, характеризующие неполноту информации:

$$\alpha_M(t_i) = \alpha(t_i) + \zeta(t_i), \quad |\zeta(t_i)| \leq d_1 |\alpha(t_i)| + d_2, \quad (1.2)$$

$$(x(t_0), z(t_0))' \in B, \quad (V_x(t_0), V_z(t_0))' \in D. \quad (1.3)$$

Предположим относительно малым изменение вектора разностной скорости, возникающее в процессе движения за счет управлений преследователя и убегающего (слабо управляемые объекты). Считаем также относительно малым размер множества  $D$  и размах по оси  $z$  множества  $B$ . Требуется построить управление преследователя по принципу обратной связи, дающее удовлетвори-

тельное решение задачи минимизации промаха в условиях неполной информации.

**2. Вспомогательная игра с неполной информацией.** Перейдем к формулировке вспомогательной дифференциальной игры двух лиц, в которой состоянием в момент  $t_i$  будет пара: информационное множество в пространстве  $\alpha, \omega, x$  и количество оставшихся импульсов.

2.1. Перепишем систему (1.1) в координатах  $\alpha, \omega, x, V_x$ . Используя соотношение  $z(t) = x(t) \operatorname{tg} \alpha(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = -2V_x(t)\omega(t)/x(t) - \\ &- 2 \operatorname{tg} \alpha(t)\omega^2(t) - \sin \alpha(t) \cos \alpha(t) v_x/x(t) + \\ &+ \cos^2 \alpha(t) v_z/x(t) - (\cos^2 \alpha(t) \sigma/x(t)) \times \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\times \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \quad \dot{x}(t) = V_x(t), \quad \dot{V}_x(t) = v_x.$$

Упростим систему (2.1). В исследуемой задаче преследователь заинтересован в минимизации промаха. Допущение о слабой управляемости приводит к тому, что (с учетом направления вектора  $V_{NOM}$  вдоль оси  $x$ ) подсчет промаха на конкретном движении можно приближенно заменить подсчетом модуля координаты  $z$  в момент пересечения движением оси  $z$ . При этом на величину промаха более существенное влияние оказывает изменение скорости по оси  $z$ , чем по оси  $x$ . Таким образом, упрощая систему (2.1), можем считать  $V_x(t_0)$  точно известным и совпадающим с  $V_{NOMx} = -e$ , а управляющее воздействие  $v_x$  – тождественно равным нулю. Изменение координаты  $x$  опишется соотношением  $x(t) = x(t_0) - e(t - t_0)$ . Условимся, что  $v_z$  выбирается из отрезка  $[-v, v]$  – проекции  $Q$  на ось  $z$ .

Предположение о слабой управляемости позволяет также считать угол  $\alpha$  малым на длительном промежутке интервала движения, начиная от начального момента. Поэтому в постановке вспомогательной задачи заменим  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  на нуль, а  $\cos \alpha$  – на единицу. Окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \omega(t), \quad \dot{\omega}(t) = 2e\omega(t)/x(t) + v_z/x(t) - \\ &- (\sigma/x(t)) \sum_i k(t_i) \delta(t - t_i), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$x(t) = x(t_0) - e(t - t_0), \quad \sum_i |k(t_i)| \leq N, \quad |v_z| \leq v.$$

При импульсном воздействии в момент  $t_i$  координаты  $\alpha$  и  $x$  остаются неизменными, координата  $\omega$  изменяется скачком на величину  $-k(t_i)\sigma/x(t_i)$ .

Таким образом, описана динамика вспомогательной дифференциальной игры. Формулы (1.2) связывают величину  $\alpha(t_i)$  и ее измеряемое значе-



ние  $\alpha_M(t_i)$ . Начальные неопределенности примем в виде

$$\begin{aligned} x(t_0) &\in [x_0, x^0], \quad \omega(t_0) \in A_\omega(x(t_0)), \\ \alpha(t_0) &\in A_\alpha(x(t_0)). \end{aligned}$$

Здесь  $[x_0, x^0]$  – проекция множества  $B$  на ось  $x$ ;  $A_\omega(x(t_0))$  – некоторый отрезок (оценка сверху), содержащий в себе для конкретного  $x(t_0)$  все начальные значения  $\omega(t_0)$  угловой скорости, возможные в силу ограничений (1.3);  $A_\alpha(x(t_0))$  – отрезок, содержащий все начальные значения угла визирования  $\alpha(t_0)$ .

Приведем формулы изменения координат  $\alpha$ ,  $\omega$  на промежутке  $[t_i, t_{i+1})$  при  $v_z \equiv \pm v$ :

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha(t_i) + \omega(t_i)(t - t_i) \frac{x(t_i)}{x(t)} \pm \\ &\pm \frac{v(t - t_i)^2}{2x(t)} - \frac{\sigma k(t_i)(t - t_i)}{x(t)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \omega(t_i) \frac{x^2(t_i)}{x^2(t)} \pm \frac{v(t - t_i)}{x^2(t)} \times \\ &\times (x(t_i) - \frac{e}{2}(t - t_i)) - \frac{\sigma k(t_i)x(t_i)}{x^2(t)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. Зафиксируем параметр  $\varepsilon > 0$ . В качестве начального информационного множества  $I_-(t_0)$  возьмем произвольное ограниченное замкнутое множество в пространстве  $\alpha, \omega, x (x \geq \varepsilon)$  с выпуклыми сечениями по  $x$ . Пусть теперь в пространстве  $\alpha, \omega, x (x \geq \varepsilon)$  задано ограниченное замкнутое множество  $I_-(t_i), i \geq 0$ , сечение которого при любом  $x$  является выпуклым. В момент  $t_i$  поступает замер  $\alpha_M$ . Обозначим через  $H(t_i) = \{(\alpha, \omega, x) : \alpha_M = \alpha + \zeta, |\zeta(t_i)| \leq d_1|\alpha(t_i)| + d_2\}$  соответствующее замеру множество неопределенности. Положим  $I(t_i) = I_-(t_i) \cap H(t_i)$ . Условимся, что такое пересечение не пусто. В момент  $t_i$  после получения замера первый игрок, распоряжающийся выбором импульсов, может применить свое управление. Множество  $I(t_i)$  перейдет в множество  $I_+(t_i)$ . Преобразование  $I(t_i) \rightarrow I_+(t_i)$  есть перенос каждого  $x$ -сечения на величину  $-k(t_i)\sigma/x$  вдоль оси  $\omega$ . В множестве  $I_+(t_i)$  выделим часть  $J_\varepsilon(t_i)$ , для которой  $x \leq \varepsilon + e(t_{i+1} - t_i)$ . Эта часть в момент  $t_{i+1}$  уйдет по  $x$  под уровень  $\varepsilon$ . Положим  $I_{+\varepsilon}(t_i) = I_+(t_i) \setminus J_\varepsilon(t_i)$ .

Определим  $I_-(t_{i+1})$  как прогноз положения системы (2.2) на момент  $t_{i+1}$  при состоянии  $I_{+\varepsilon}(t_i)$  в момент  $t_i$  и нулевом управлении первого игрока на  $(t_i, t_{i+1}]$ . Множество  $I_-(t_{i+1})$  удобно рассматривать как результат действия линейной системы (2.2) на  $x$ -сечения множества  $I_{+\varepsilon}(t_i)$ : выпуклое множество переходит в выпуклое. Каждое из множеств  $I_-(t_i), I(t_i), I_+(t_i), I_{+\varepsilon}(t_i)$  назовем информационным (до замера, после замера, после импуль-

сов, после  $\varepsilon$ -отсечки). Множество  $I_-(t_i)$  будем называть также множеством прогноза. Таким образом, рекуррентно определена последовательность информационных множеств.

В игре с неполной информацией под движением будем понимать изменение во времени информационного множества и количества оставшихся импульсов. Первый игрок распоряжается выбором импульсного управления, второй – формированием замеров. Влияние параметра  $v_z$  учитываем при построении множеств  $I_-(t_i)$ . Считаем, что импульсное управление в момент  $t_i$  применяется после замера, поступившего в этот момент.

2.3. Позацией игры для первого игрока назовем совокупность  $(t_i, n, I)$ , где  $t_i$  – момент времени,  $n$  – количество оставшихся импульсов,  $I$  – информационное множество после замера. Допустимой стратегией первого игрока назовем правило  $U: (t_i, n, I) \rightarrow k$ , сопоставляющее позиции игры количество импульсов с определенным знаком,  $|k| \leq n$ .

Позицией игры для второго игрока условимся считать совокупность  $(t_i, n, I_-)$ . Здесь  $I_-$  – информационное множество до замера (множество прогноза). Допустимой стратегией второго игрока назовем правило  $\Omega: (t_i, n, I_-) \rightarrow \alpha_M$ , сопоставляющее позиции игры замер  $\alpha_M$ . При этом потребуем, чтобы  $I_- \cap H \neq \emptyset$ , где  $H$  – множество неопределенности, построенное по  $\alpha_M$ . Задав пару допустимых стратегий  $U, \Omega$ , шаг  $\Delta$  дискретной схемы наблюдения и управления, параметр  $\varepsilon$ , а также начальную позицию  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , можем говорить о движении системы во времени.

2.4. Определим на движении вспомогательной игры значение платы. Для произвольной пары  $\omega, x (x > 0)$  положим  $\Pi(\omega, x) = |\omega|x^2/e$ . Величина  $\Pi(\omega, x)$  приближенно есть пассивный прогнозируемый промах из состояния  $\omega, x$ , т.е. промах при пересечении оси  $z$  свободным движением системы (2.2). Точная формула:  $|\omega|x^2/(e \cos^2 \alpha)$ . Таким образом, пренебрегаем малым углом  $\alpha$ . Пусть  $\hat{\Pi}(\omega, x) = \Pi(\omega, x) + v(x/e)^2/2$ . Произвольному множеству  $M$  в пространстве  $\alpha, \omega, x (x > 0)$  поставим в соответствие число  $\bar{\Pi}(M) = \sup\{\hat{\Pi}(\omega, x) : (\alpha, \omega, x) \in M\}$  – максимальный прогнозируемый промах.

Для конкретного движения информационного множества символом  $T_\varepsilon$  обозначим совокупность моментов  $t_i$ , таких, что  $J_\varepsilon(t_i) \neq \emptyset$ . Число

$$\begin{aligned} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta) &= \\ &= \max \{ \bar{\Pi}(J_\varepsilon(t_i)) : t_i \in T_\varepsilon \} \end{aligned}$$

назовем промахом, соответствующим начальной позиции  $(t_0, n(t_0), I_-(t_0))$ , стратегиям  $U, \Omega$ , параметру  $\varepsilon$  и дискрету  $\Delta$ .

Поясним смысл величины  $\Phi$ . При заданном  $\varepsilon$  фактически считаем, что импульсное управление перестает действовать после момента  $t_i$  для части информационного множества, которая в момент  $t_{i+1}$  окажется по координате  $x$  ниже уровня  $\varepsilon$ . Одноточечные движения, развивающиеся из этой части, как бы заканчиваются, в то время как движения из части выше уровня  $\varepsilon$  продолжают. Множество  $J_\varepsilon(t_i)$  и определяет заканчивающиеся одноточечные движения. Плата для  $J_\varepsilon(t_i)$  естественно вводится как  $\bar{\Pi}(J_\varepsilon(t_i))$ . Затем берем максимум по моментам  $t_i$ , для которых  $J_\varepsilon(t_i)$  не пусто.

Наилучшую гарантию первого игрока определим соотношением

$$\Gamma^{(1)}(t_0, n(t_0), I_-(t_0)) = \inf_U \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sup_{\Omega} \Phi(t_0, n(t_0), I_-(t_0), U, \Omega, \varepsilon, \Delta).$$

Стратегию, на которой достигается внешний экстремум, назовем оптимальной. Конструктивное построение оптимальной стратегии представляется очень трудной задачей. Ниже предложен вариант "разумной" стратегии первого игрока. Подобная стратегия исследовалась в [6, 7], где был выделен случай, когда она является оптимальной.

2.5. Введем стратегию  $U_s$  первого игрока, которую назовем стратегией поддержания симметрии прогнозируемого промаха. При каждом  $x$  спроектируем  $x$ -сечение множества  $I$  на ось  $\omega$ . Символом  $L(I)$  обозначим объединение полученных отрезков по  $x$ . Пусть  $\partial^* L(I)$  – совокупность правых концов отрезков (каждый при фиксированном  $x$ ), из которых составлено множество  $L(I)$ . Аналогично  $\partial_* L(I)$  – совокупность левых концов. Положим

$$\pi^*(I) = \max \left\{ \frac{\omega x^2}{e} + \frac{v}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 : (\omega, x) \in \partial^* L(I) \right\}, \quad (2.5)$$

$$\pi_*(I) = \min \left\{ \frac{\omega x^2}{e} - \frac{v}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 : (\omega, x) \in \partial_* L(I) \right\}. \quad (2.6)$$

Пусть  $(\omega^*, x^*)$ ,  $(\omega_*, x_*)$  – точки, на которых достигается максимум в (2.5) и минимум в (2.6). Отрезок с концами  $\pi_*(I)$ ,  $\pi^*(I)$  назовем отрезком прогнозируемого промаха, соответствующим множеству  $I$ . Если в текущий момент первый игрок применяет управление из  $k$  импульсов, то промах для бывшей максимизирующей точки в (2.5) изменится мгновенно на величину  $\Delta \omega x^{*2}/e = -k \sigma x^{*2}/x^* e = -k \sigma x^*/e$ , а для минимизирующей

точки в (2.6) – на величину  $\Delta \omega x_*^2/e = -k \sigma x_*/e$ .

Составим соотношение симметрии  $\pi^* - k \sigma x^*/e = -(\pi_* - k \sigma x_*/e)$ . Разрешая его относительно целочисленного неизвестного  $k$ , получим

$$k_s = \left[ \frac{(\pi^* + \pi_*) e}{(x^* + x_*) \sigma} \right]. \quad (2.7)$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть.

Стратегию  $U_s$  определим как функцию, ставящую в соответствие позиции  $(t_i, n, I)$  число  $k_s$ , вычисляемое по формуле (2.7), если  $|k_s| \leq n$ , и число  $n \operatorname{sign} k_s$ , если  $|k_s| > n$ .

**3. Результаты моделирования.** Моделируется движение системы (1.1), неполнота информации задается соотношениями (1.2), (1.3). Перечень исходных данных (в разностных координатах): номинальное начальное расстояние по вертикали  $x_{NOM} = 80\,000$  м, ограничение на возможные начальные положения

$$B = \{ (x, z) : |x - 80\,000| \leq 10\,000, |z| \leq 2\,000 \},$$

номинал начальной скорости по вертикали  $V_{NOMx} = -5\,000$  м/с, ограничение на вектор начальной скорости

$$D = \{ (V_x, V_z) : |V_x + 5\,000| \leq 100, |V_z| \leq 100 \},$$

величина одного импульса  $\sigma = 5$  м/с, количество импульсов  $N = 70$ , ограничение на ускорение убегающего

$$Q = \{ (v_x, v_z) : |v_x| \leq 2, |v_z| \leq 2 \},$$

константы в ограничении на максимальную величину погрешности замера угла визирования  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 0.06$  град.

Указанные исходные данные известны преследователю. Какой-либо более точной информацией преследователь до начала процесса не обладает. Будем применять за преследователя способ управления, основанный на стратегии  $U_s$ . Обозначим его SM. Выберем шаг  $\Delta$  дискретной схемы наблюдения и управления равным 0.1 с. Начальное информационное множество  $I_-(t_0)$ :  $[x_0, x^0] = [70\,000, 90\,000]$ ; сечение при любом  $x \in [x_0, x^0]$  – прямоугольник со сторонами, параллельными осям  $\alpha$ ,  $\omega$ , и координатами крайних точек

$$\alpha_0(x) = \arctg \frac{-2000}{x}, \quad \alpha^0(x) = \arctg \frac{2000}{x};$$

$$\omega_0(x) = \frac{-100x - 5100 \times 2000}{x^2},$$

$$\omega^0(x) = \frac{100x + 5100 \times 2000}{x^2}.$$

Поскольку истинные значения угла визирования и угловой скорости в момент  $t$  подсчитываются по формулам

$$\alpha(t) = \arctg \frac{z(t)}{x(t)}, \quad \omega(t) = \frac{\dot{z}(t)x(t) - \dot{x}(t)z(t)}{x^2(t) + z^2(t)},$$

то  $L_-(t_0)$  охватывает все возможные положения троек  $\alpha(t_0)$ ,  $\omega(t_0)$ ,  $x(t_0)$  в пространстве  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $x$ , согласованные с ограничениями (1.3) при указанных выше множествах  $B$ ,  $D$ .

Информационное множество при численной реализации задается конечным числом своих выпуклых  $x$ -сечений. В представленных ниже результатах в начальном множестве  $L_-(t_0)$  взято 7 прямоугольных сечений. Каждое сечение при переходе от момента  $t_i$  к моменту  $t_{i+1}$  пересчитывается независимо от других. Выпуклая добавка, возникающая за счет параметра  $v_z$  (множество достижимости по  $v_z$ ), подменяется отрезком, концы которого находятся при помощи формул (2.3), (2.4). В результате  $x$ -сечение аппроксимируется выпуклым многоугольником. По ходу процесса количество сечений в информационном множестве может убывать. Если в какой-то момент оставшееся количество сечений становится меньше заданного числа (в нашем случае 3), вводятся дополнительные, чтобы общее число сечений удвоилось. Выберем порог  $\varepsilon = 500$  м. Управление преследователя прекращается, когда информационное множество, просчитываемое им по формулам разд. 2, целиком уходит по координате  $x$  под уровень  $\varepsilon$ .

Говоря о способах формирования замеров  $\alpha_M(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , и управляющих воздействий  $v_x$  и  $v_z$ , рассмотрим два варианта. Обозначим их RN, GM.

**RN.** Значение  $\alpha_M(t_i)$  в каждый момент  $t_i$  вырабатывается при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением в диапазоне  $[\alpha(t_i) - d_2, \alpha(t_i) + d_2]$ , где  $\alpha(t_i)$  – истинный угол визирования. Воздействия  $v_x$  и  $v_z$  являются постоянными на всем интервале времени и выбираются в начальный момент  $t_0$  из множества  $Q$  при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением.

**GM.** Второй вариант формирования  $\alpha_M(t_i)$ ,  $v_x$ ,  $v_z$  назовем игровым. Пусть  $L(L_-)$  – проекция множества прогноза  $L_-$  на плоскость  $\omega$ ,  $x$ . Рассмотрим точку  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$  из  $L(L_-)$ , на которой достигается максимум

$$\tilde{\pi}(n, L_-) = \max \left\{ \left( \frac{|\omega| x^2}{e} + \frac{v}{2} \left( \frac{x}{e} \right)^2 - \frac{n \sigma x}{e} \right); (\omega, x) \in L(L_-) \right\}.$$

Величина  $\tilde{\pi}$  – прогноз промаха с учетом возможной компенсации за счет управления первого игрока. Пусть, далее,  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}, \tilde{x})$  – точка из  $L_-$ , проектируемая в  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ . Выбор  $\alpha_M(t_i)$ :

$$\alpha_M(t_i) = \begin{cases} \min \{ \tilde{\alpha}(t_i) - d_2, \alpha(t_i) + d_2 \}, & \text{если } \tilde{\alpha}(t_i) \geq \alpha(t_i), \\ \max \{ \tilde{\alpha}(t_i) + d_2, \alpha(t_i) - d_2 \}, & \text{если } \tilde{\alpha}(t_i) < \alpha(t_i). \end{cases}$$

Такое формирование замера обеспечивает максимальную близость множества  $H(\alpha_M(t_i))$  (и, стало быть, множества  $I(t_i)$ ) к “наихудшей” точке  $(\tilde{\alpha}(t_i), \tilde{\omega}(t_i), \tilde{x}(t_i))$ . Выбор управляющих воздействий  $v_x$ ,  $v_z$  определим следующим образом. Если  $x(t_0) \geq (x_0 + x^0)/2$ , положим  $v_x \equiv 2$ ; в случае  $x(t_0) < (x_0 + x^0)/2$  пусть  $v_x \equiv -2$ . Таким образом, управление  $v_x$  постоянно на всем промежутке движения. Управление  $v_z$  выбираем заново в каждый момент  $t_i$  и держим постоянным на  $[t_i, t_{i+1})$ : если просчитанная на момент  $t_{i+1}$  точка  $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$  лежит на правом краю множества  $L(L_-(t_{i+1}))$ , примем  $v_z(t_i) = 2$ ; если на левом, то  $v_z(t_i) = -2$ .

Графики на рис. 2 показывают изменение параметров вдоль единичных реализаций для сочетаний SM–RN и SM–GM. Начальные координаты:  $x(t_0) = 80\,000$  м,  $z(t_0) = 100$  м,  $\dot{x}(t_0) = -5000$  м/с,  $\dot{z}(t_0) = 10$  м/с. Ускорение в способе RN:  $v_x = v_z \equiv 2$  м/с<sup>2</sup>. Представлены зависимости от  $t$  замеряемого и истинного углов визирования, графики текущей угловой скорости и текущего импульсного управления. Левая колонка соответствует сочетанию SM–RN, правая – сочетанию SM–GM. Промех для сочетания SM–RN составил 0.07 м, для сочетания SM–GM он равен 1.01 м. В первом варианте израсходовано 48 импульсов, во втором – 61 импульс.

Операции с  $x$ -сечениями информационных множеств поясняются на рис. 3 для случая игровой помехи. Демонстрируется переход от момента  $t = 15.1$  с к моменту  $t = 15.2$  с. Вычисляемые на ЭВМ информационные множества имеют в эти моменты 5 сечений. На рисунке показаны два из них, для которых  $x = 1167$  и  $4500$  м в момент  $t = 15.1$  с. Сечение, соответствующее меньшему  $x$ , развивается более динамично. Пунктиром отмечено множество неопределенности, определяемое по текущему замеру (квадратик на оси  $\alpha$ ). Положение истинной разностной точки в координатах  $\alpha$ ,  $\omega$  обозначено крестиком. В момент  $t = 15.1$  с проработал один импульс коррекции.

**Заключение.** Способ управления SM монотонно уменьшает максимальный прогнозируемый промах, просчитываемый в процессе движения по

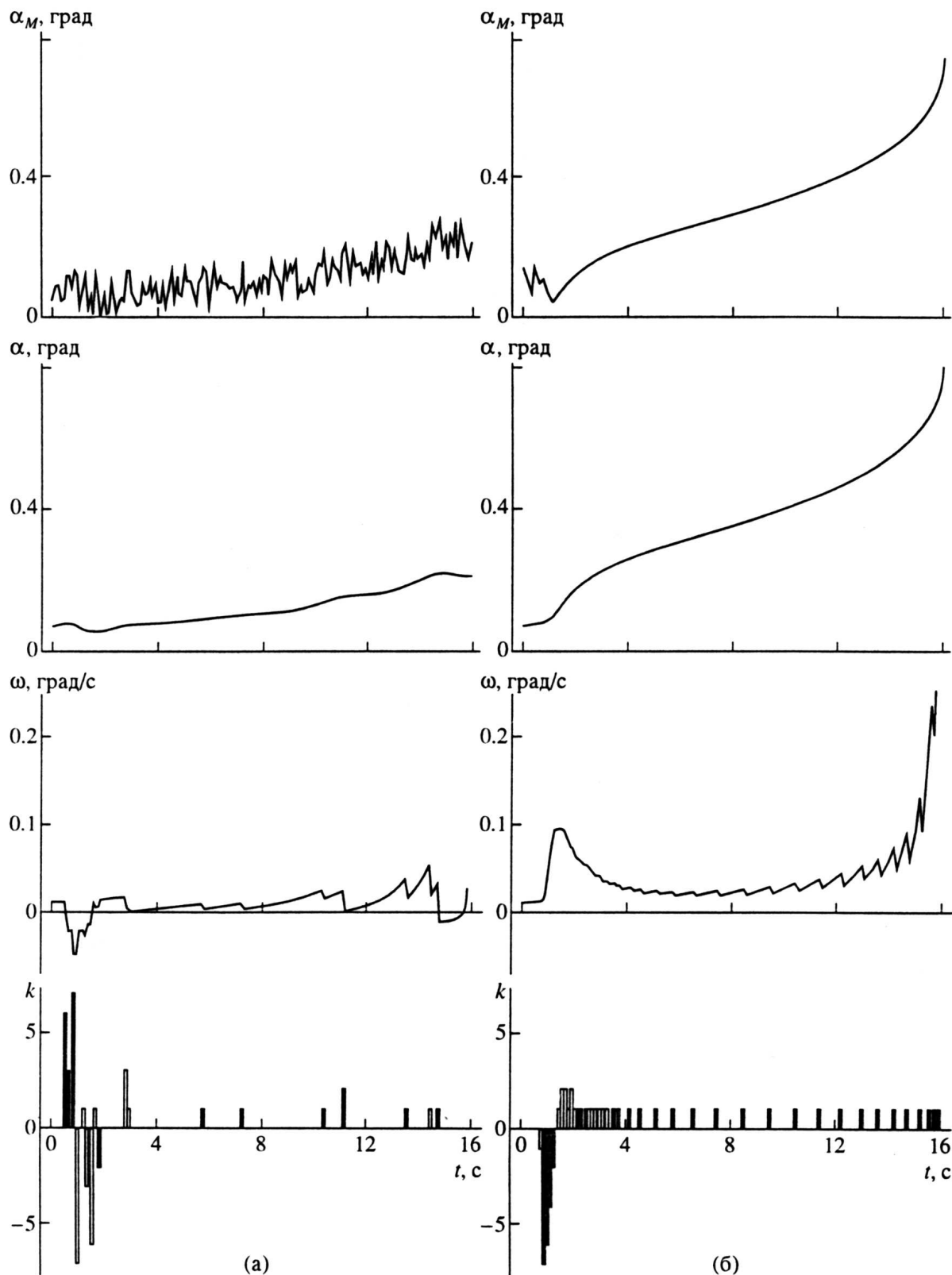


Рис. 2. Замер угла визирования, истинный угол визирования, угловая скорость, импульсное управление: а – случайная помеха, б – игровая помеха.

текущему информационному множеству. В то же время в инженерной практике известны приемы, когда на определенных этапах преследования часть ресурса тратится на уменьшение информа-

ционных неопределенностей, при этом величина прогнозируемого промаха временно возрастает. Вполне возможно, что оптимальная стратегия вспомогательной дифференциальной игры



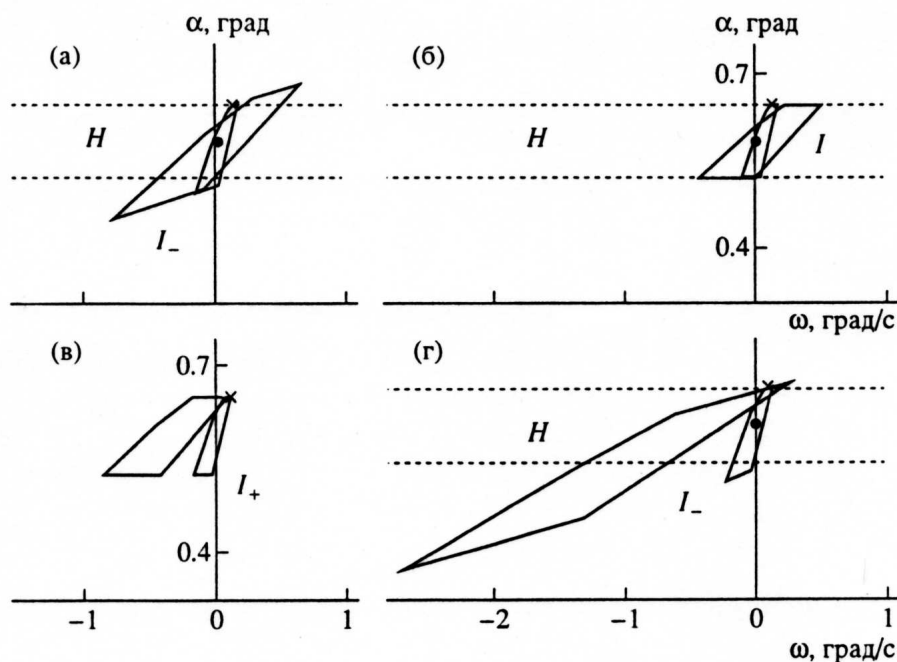


Рис. 3. Преобразование  $x$ -сечений информационных множеств: а –  $t = 15.1$  с (ситуация до высечки), б –  $t = 15.1$  с (после высечки), в –  $t = 15.1$  с (после импульса коррекции), г –  $t = 15.2$  с (до высечки).

(вопрос о нахождении оптимальной стратегии является открытым) давала бы в исходной задаче на некоторых реализациях такой же эффект: резкое уменьшение информационного множества при увеличении на коротком промежутке времени величины максимального прогнозируемого промаха. Тем самым эмпирические инженерные приемы нашли бы обоснование в рамках теории дифференциальных игр.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
4. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр с неполной информацией // ДАН СССР. 1974. Т. 215. № 4.
5. Субботина Н.Н., Субботин А.И. Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1977. № 5.
6. Кумков С.И., Пацко В.С. Импульсные коррекции в задаче преследования с неполной информацией // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3.
7. Кумков С.И., Пацко В.С. Модельная задача импульсного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1.
8. Merz A.W. Stochastic guidance laws in satellite pursuit-evasion // Comput. Math. Appl. 1987. V. 13. № 1 - 3.
9. Merz A.W. Noisy satellite pursuit-evasion guidance // J. Guidance. 1989. V. 12. № 6.