

Pontryagin maximum principle and Dubins mathematical car, lecture 1

Принцип максимума Понтрягина и математическая машина Дубинса, лекция 1

V. S. Patsko, A. A. Fedotov



Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Russia



СоПроМат

Modern problems in mathematics and its applications
International (51-st National) Youth School-Conference

Yekaterinburg, 2020 February from 3 to 7

Слайд 1

Две лекции будут посвящены трёхмерному множеству достижимости для управляемого объекта, который называют «машина Дубинса». Название условное. Здесь нет каких-либо сил трения. Объект движется с постоянной линейной скоростью и может поворачивать в одну или обе стороны с соблюдением заданного ограничения на угловую скорость поворота. Часто такую модель используют для описания движения самолёта в горизонтальной плоскости. Проблематичным является применение её для движения корабля или автомашины. Возможно, наиболее подходящим является использование для описания движения одноколёсного велосипеда (unicycle). Тем не менее, в литературе данная модель применяется для очень широкого класса задач, прежде всего, в робототехнике.

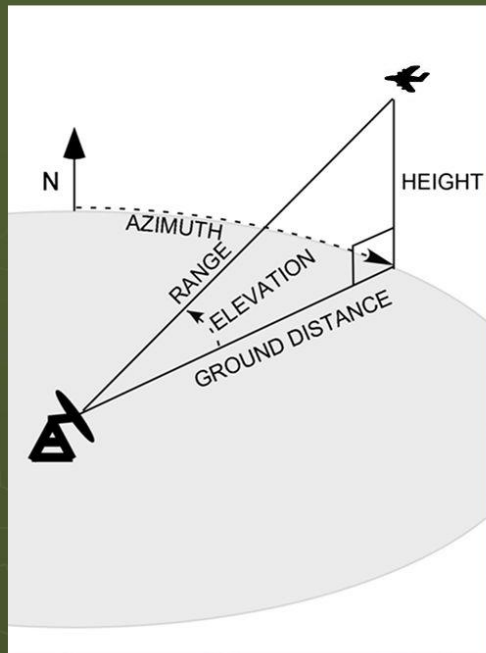
Slide 1

Two lectures will be devoted to three-dimensional reachable sets for the controlled object, which is called the “Dubins car”. It is a conventional name. There are no friction forces here. The object moves at a constant linear velocity and can turn to one or both sides. There are corresponding restrictions on the angular velocity of rotation. Often such a model is used to describe the motion of an aircraft in the horizontal plane. It is problematic to use it for description of motion of a ship or a car. Maybe, the most appropriate usage is to describe the motion of a unicycle. Nevertheless, in literature, this model is used for a very wide class of problems, primarily in robotics.

**Preamble:
model problem with
incomplete information**

An observation problem of aircraft motion

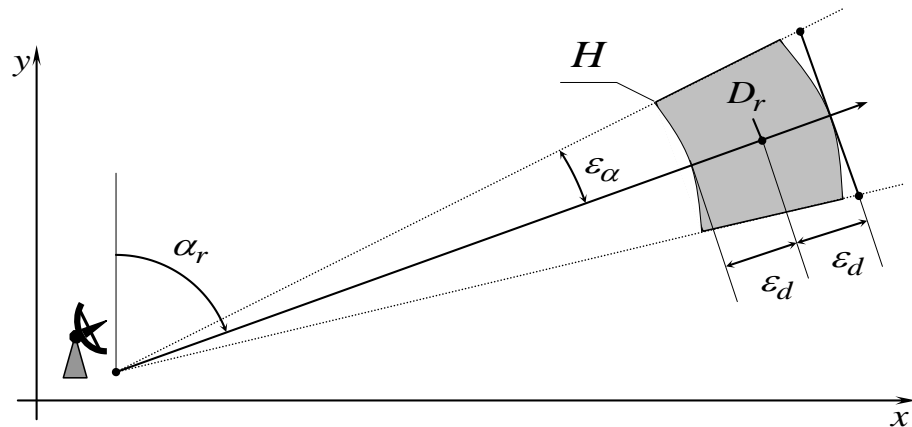
The polar coordinate system used by radars consists of azimuth (angle from north), elevation (angle up from horizontal), and slant range.



Measurement errors of a radar is restricted by geometric constraints.

Taking into account the dynamics of the aircraft motion, this allows to find an area of possible states of the aircraft during observation process

H is a set of uncertainty for a measurement in the horizontal plane



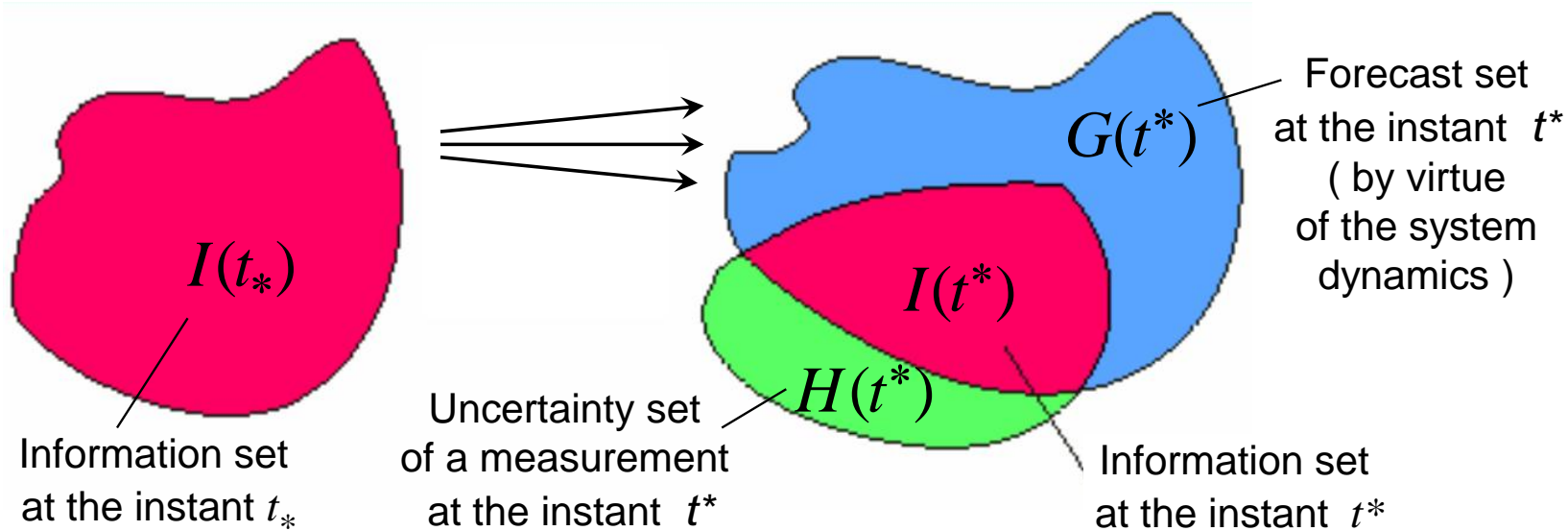
Слайд 3

Стимулом исследования трёхмерного множества достижимости для авторов доклада много лет назад послужила прикладная задача о построении информационных множеств при наблюдении за движением самолёта в горизонтальной плоскости. Радиолокатор отслеживает траекторию движения самолёта. С некоторым шагом по времени он выдаёт измерения азимута и дальности воздушного объекта. Принимая во внимание измерительные погрешности радиолокатора, в каждый момент измерения получаем на плоскости множество неопределённости замера, представляющее собой кольцевой сектор. Учитывая динамику самолёта, можем найти множество всех возможных фазовых состояний (геометрическое положение и направление скорости) самолёта, совместных с полученными замерами и заданными погрешностями радиолокаторов. Такие множества принято называть *информационными*.

Slide 3

Many years ago, the authors of this talk were stimulated to study the three-dimensional reachable sets by an applied problem of constructing information sets when observing a motion of an aircraft in the horizontal plane. The radar tracks the trajectory of the aircraft. With a certain time step, it gives measurements of the azimuth and range of the air object. Taking into account the measurement errors of the radar, at each instant of measurement, we get a set of measurement uncertainty in the plane, which is an annular sector. Given the dynamics of the aircraft, we can find the set of all possible phase states (geometric position and direction of velocity) of the aircraft, compatible with the measurements obtained and the specified radar errors. Such sets are usually called *information sets*.

Using of reachable (forecast) sets for construction of information sets



Information set at a current instant is a totality of all phase states consistent with description of the dynamics, constraints on measurement errors, and history of the observation – control process.

Terms equivalent to the term “**information set**” are “feasible set”, “membership set”, “likelihood set”.

The approach is often called the “set membership estimation” or “unknown but bounded error description (UBB approach)”

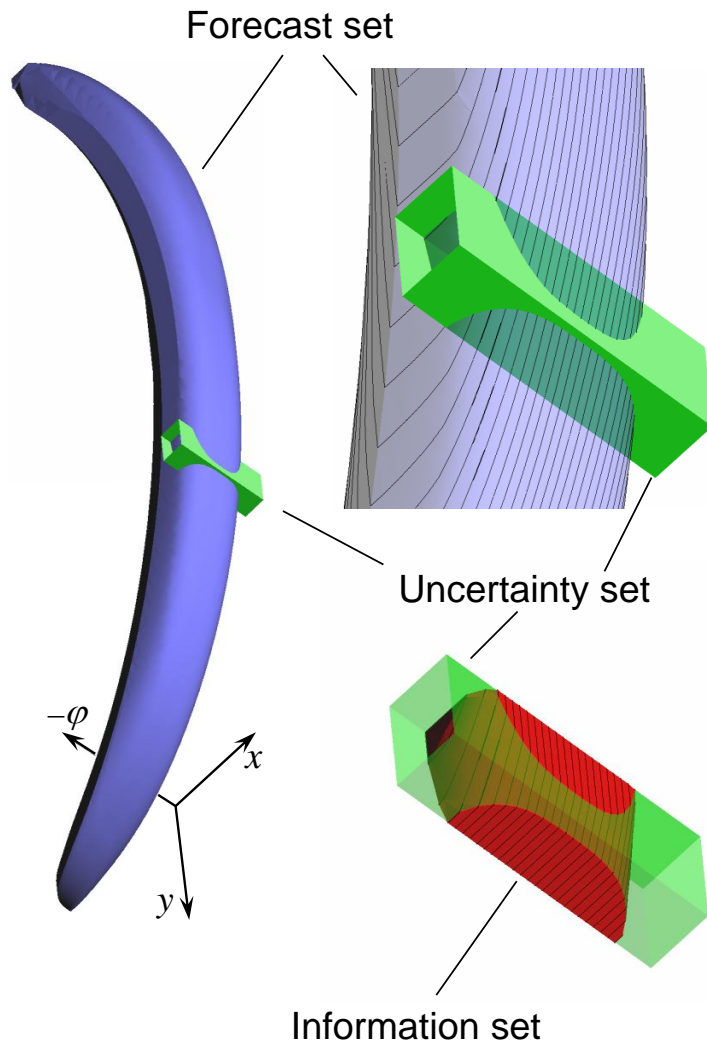
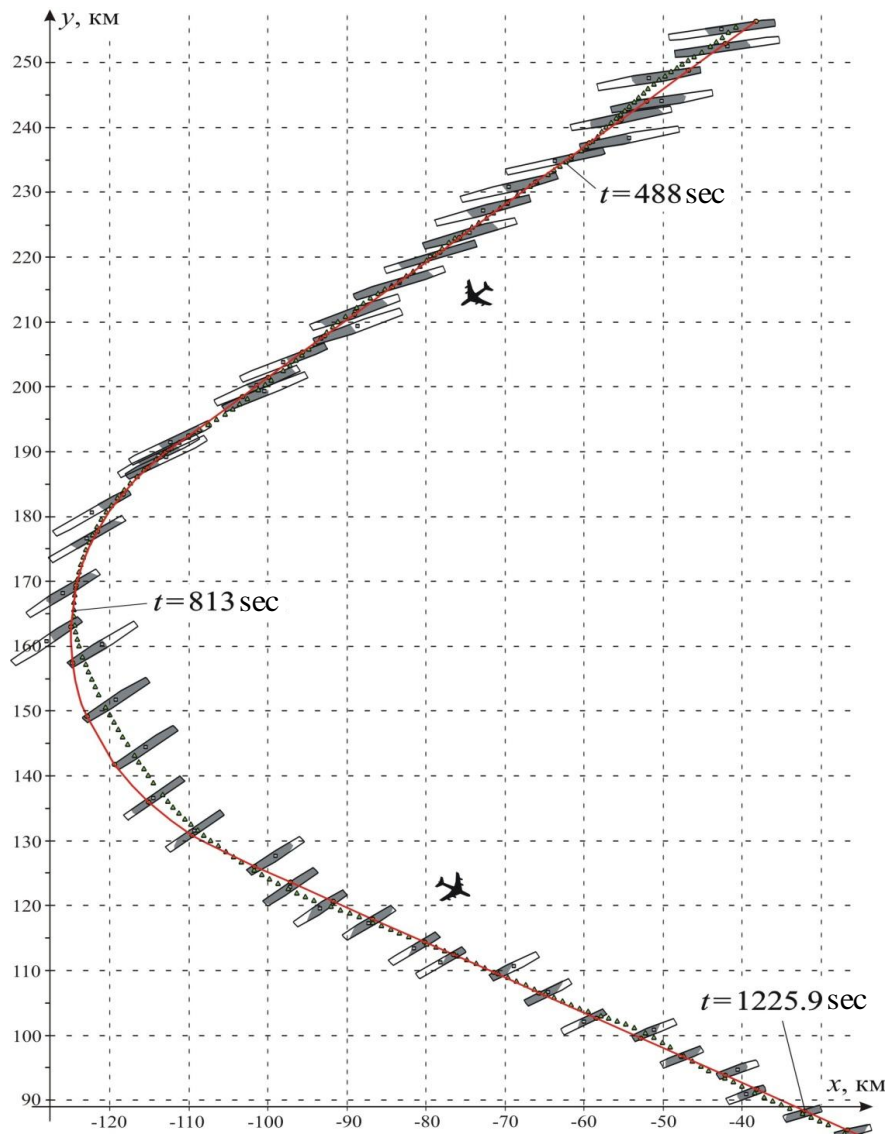
Слайд 4

На данном слайде схематично показана процедура пересчёта информационного множества при поступлении очередного замера. Пусть в момент t_* имеем информационное множество $I(t_*)$. Делаем прогноз фазового состояния самолёта на момент будущего замера в момент t^* . Такое множество называем прогнозным и обозначаем $G(t^*)$. По сути это множество достижимости, построенное на основе известного описания динамики самолёта и начального множества $I(t_*)$. Пересечение множества $G(t^*)$ с множеством неопределённости $H(t^*)$ очередного замера есть информационное множество $I(t^*)$ для момента t^* .

Slide 4

This slide schematically shows the procedure for recalculating the information set when the next measurement is received. Let at the instant t_* we have an information set $I(t_*)$. We make a forecast of the phase state of the aircraft at the time of the future measurement at the instant t^* . We call such a set as forecast set and denote it by $G(t^*)$. In fact, it is a reachable set constructed on the basis of dynamics description of the aircraft and the initial set $I(t_*)$. The intersection of the set $G(t^*)$ with the uncertainty set $H(t^*)$ of the next measurement is the information set $I(t^*)$ for the instant t^* .

Estimation of an aircraft position



Слайд 5

Таким образом, при построении информационных множеств мы должны уметь строить множество прогноза, множество неопределённости замера и осуществлять пересечение этих трёхмерных множеств (см. правую часть слайда). При построении множества прогноза будем опираться на описание множества достижимости для машины Дубинса при одноточечном начальном множестве.

В левой части слайда показаны проекции множеств неопределённости (в виде прямоугольников) на плоскость геометрических координат. Чёрным цветом выделены проекции информационных множеств. Истинная траектория (также в проекции) самолёта изображена сплошной линией.

Во второй лекции задача с неполной информацией будет рассмотрена более подробно.

Slide 5

Thus, when constructing information sets, we should be able to build a forecast set, a measurement uncertainty set, and perform the intersection of these three-dimensional sets (see the right part of the slide). When constructing the forecast set, we will rely on the description of the reachable set for the Dubins car with a one-point initial set. The terms “reachable set”, “reachability set”, and “attainability set” are regarded as synonyms.

The left part of the slide shows projections of uncertainty sets (in the form of rectangles) in the plane of geometric coordinates. Projections of information sets are highlighted in black. The true trajectory (also in the projection) of the aircraft is represented by a solid line.

In the second lecture, the problem with incomplete information will be considered in more detail.

**Dubins car:
notes of dynamics and
reachable set.
History of the issue**

Coordinated aircraft turning in the horizontal plane

$$(1) \quad \dot{x} - V \cos \varphi = 0,$$

$$(2) \quad \dot{y} - V \sin \varphi = 0,$$

$$T \cos \varepsilon - D - m\dot{V} = 0,$$

$$(T \sin \varepsilon + L) \sin \mu - mV\dot{\varphi} = 0,$$

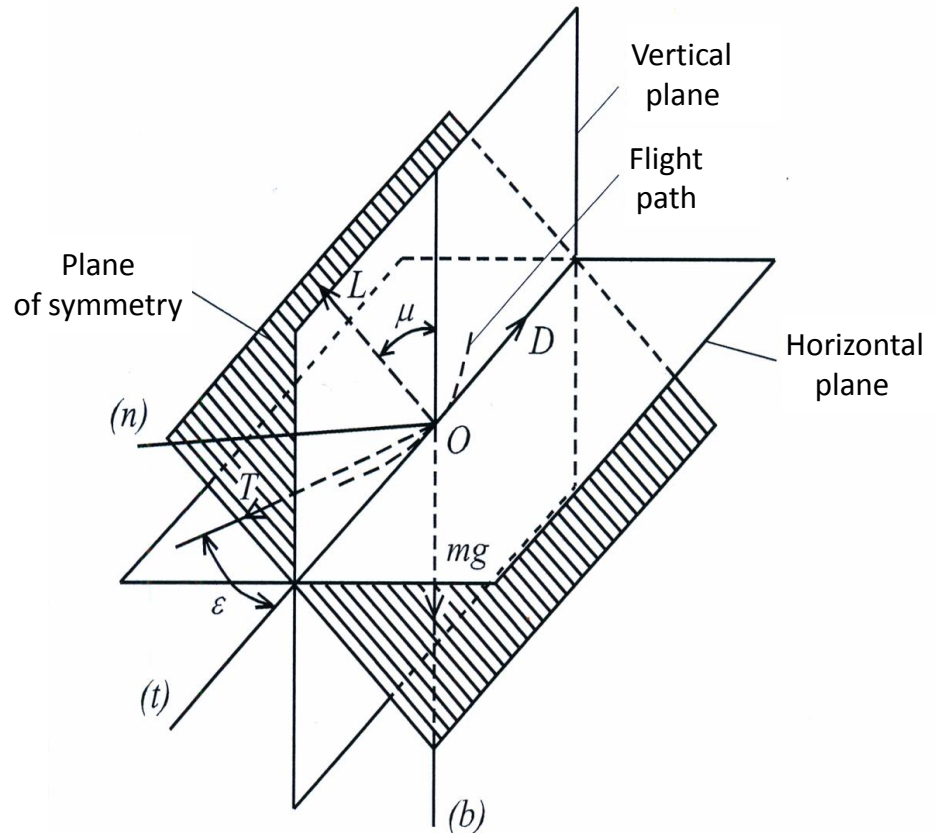
$$(T \sin \varepsilon + L) \cos \mu - mg = 0,$$

$$\dot{\varphi} = (g/V) \operatorname{tg} \mu$$

$$(3) \quad \dot{\varphi} = \frac{g \operatorname{tg} 30^\circ}{V} u, \quad |u| \leq 1$$

(1) – (3) in normalized variables :

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u$$



Miele A. Flight mechanics. 1962

(Миеле А. Механика полёта. Т. 1. М.: Наука, 1965)

Слайд 7

Поясним, как возникает динамика машины Дубинса при рассмотрении движения самолёта в горизонтальной плоскости. На слайде изображены рисунок и выкладки из книги А. Миеле «Механика полёта». Силы, действующие на самолёт по вертикали, уравновешены. Поэтому движение самолёта осуществляется в горизонтальной плоскости.

Величина линейной скорости V предполагается постоянной. Управление u задаёт угол крена, тем самым определяя радиус разворота в горизонтальной плоскости. Осуществляя нормировку геометрических координат и времени, приходим к описанию движения в виде соотношений, указанных в рамке. Именно такое описание и называется «машиной Дубинса».

Slide 7

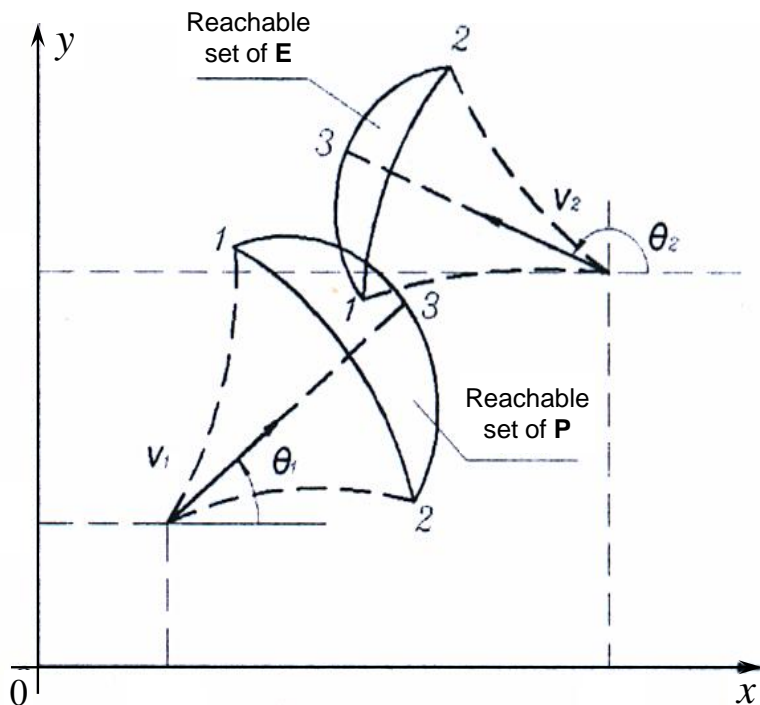
Let us explain how the dynamics of the Dubins car arises when considering the motion of the aircraft in the horizontal plane. The slide shows a drawing and calculations from the book by A. Miele “Flight Mechanics: Theory of Flight Paths”. The forces acting on the aircraft by vertical are balanced. Therefore, the motion of the aircraft is carried out in the horizontal plane.

The value of the linear velocity V is assumed to be constant. The control u specifies the roll angle, thereby determining the turning radius in the horizontal plane. Carrying out the normalization of geometric coordinates and time, we come to the description of motion in the form of relations indicated in the frame. Namely, such a description is called the “Dubins car”.

A pursuit problem in the vertical plane

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_i(t), \alpha_i(t)), \quad |\alpha_i(t)| \leq \alpha_{iM}(t)$$

$$z_i = \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \\ V_i \\ \theta_i \end{bmatrix}; \quad f_i(z_i(t), \alpha_i(t)) = \begin{bmatrix} V_i \sin \theta_i \\ V_i \cos \theta_i \\ -(C_{x0i} + A_i \alpha_i^2) q_i S_i / m_i - g \sin \theta_i \\ C_{yi}^\alpha \alpha_i q_i S_i / (m_i V_i) - g \cos \theta_i \end{bmatrix}$$



O.A. TOLPEGIN,
Baltic State Technical University
"Voenmeh", Saint Petersburg

**METHODS FOR CONTROLLING
THE MOTION OF UNMANNED AERIAL VEHICLES
BASED ON THE THEORY OF DIFFERENTIAL GAMES**

**(МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР)**

Слайд 8

В Балтийском государственном техническом университете «ВОЕНМЕХ» О.А. Толпегин в течение многих лет занимается применением методов теории дифференциальных игр (на базе книги Н.Н. Красовского) для решения различных прикладных задач преследования. На слайде приведено описание динамики одной из задач, рассматриваемых О.А. Толпегиным в его книге, которая сейчас готовится к изданию. Такое описание соответствует динамике двух объектов (преследователь и убегающий), движущихся в вертикальной плоскости. Исследование задачи преследования опирается на построение множеств достижимости в пространстве геометрических координат. Видим, что вид множеств достижимости очень похож на множества достижимости для машины Дубинса в проекции на плоскость геометрических координат. Таким образом, хотя в деталях описание динамики не совпадает с описанием динамики для машины Дубинса, качественные свойства множеств достижимости практически одинаковы.

Slide 8

At the Baltic State Technical University “VOENMEKH”, O.A. Tolpegin has been engaged for many years in the application of methods of the theory of differential games (based on the book by N.N. Krasovskii) to solve various applied problems of pursuit. The slide describes the dynamics of one of the problems considered by O.A. Tolpegin in his book, which is currently being prepared for publication. This description corresponds to the dynamics of two objects (the pursuer and the evader) moving in a vertical plane. The study of the pursuit problem is based on the construction of reachable sets in the space of geometric coordinates. We see that the form of reachable sets is very similar to the reachable sets for the Dubins car in the projection on the plane of geometric coordinates. Thus, although the description of the dynamics in detail does not coincide with the dynamics for the Dubins car, the qualitative properties of the reachable sets are almost the same.

Mobile wheeled robots

$$\dot{x} = V \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \Omega,$$

$$\dot{\beta} = -\Omega + \frac{V}{d} \sin \beta - \frac{\Omega b}{d} \cos \beta, \quad \dot{V} - a\Omega^2 = \frac{1}{mr} (M_L + M_R),$$

$$I_A \dot{\Omega} + maV\Omega = \frac{l}{r} (-M_L + M_R). \quad I_A = I_C + ma^2 = m\rho^2$$

$$M_L = c_1 n U_L - \frac{c_2 n^2}{r} (V - \Omega l), \quad M_R = c_1 n U_R - \frac{c_2 n^2}{r} (V + \Omega l).$$

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u$$

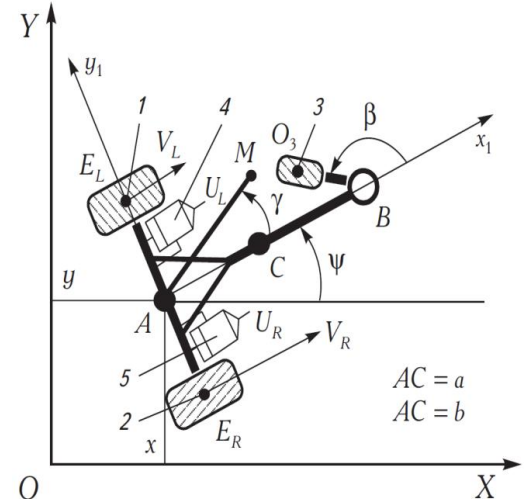


Рис. 4. Мобильный робот типа "Монотип" (пассивное ролярное колесо)

New problems of dynamics and motion control of mobile wheeled robots

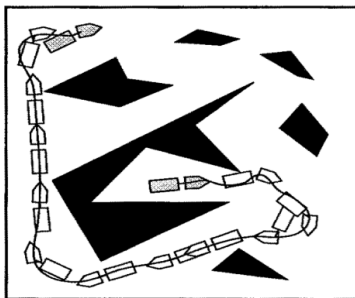
D.E. Okhotsimskii, Y.G. Martynenko // Usp. Mekh, 2003, № 1, P. 3 – 46

Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов

Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Мартыненко // Успехи механики, 2003, № 1, С. 3 – 46

ROBOT MOTION PLANNING AND CONTROL

J.-P. Loumond (Ed)
1998, Springer



On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints

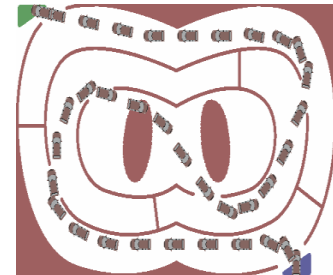
A.R. Matviychuk, V.N. Ushakov

// Journal of Computer and System Sciences International. 2006. T. 45. № 1. P. 1-16.

О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями

А.Р. Матвийчук, В.Н. Ушаков

// Изв. РАН. ТИСУ. 2006. №1. С. 5-20.



Слайд 9

Приведём теперь пример, показывающий, что использование модели Дубинса для описания движения различных «тележек» должно быть очень осторожным. На слайде показано описание динамики движения мобильного робота «Монотип» из статьи Д.Е. Охоцимского и Ю.Г. Мартыненко, посвящённой динамике роботов, используемых на соревнованиях в Институте механики МГУ. Видно, что модель Дубинса — это только первая строчка указанной на слайде системы дифференциальных соотношений.

В первом приближении модель Дубинса широко используется при решении многих прикладных задач движения, в частности, задач управления при наличии препятствий. На слайде указана ссылка на книгу, вышедшую под редакцией J.-P. Laumond (Франция, Тулуза), и ссылка на статью В.Н. Ушакова и А.Р. Матвийчука.

Slide 9

Let us now give an example showing that the usage of the Dubins model to describe the motion of various “carts” should be very careful. The slide shows a description of the dynamics of the motion of the mobile robot “Monotype” from the article by D.E. Okhotsimsky and Yu.G. Martynenko dedicated to the dynamics of robots used at competitions at the Institute of Mechanics of Moscow State University. It can be seen that the Dubins model is only the first line of the system of differential relations indicated in the slide.

At the first approximation, the Dubins model is widely used in solving many applied motion problems, in particular, control problems in the presence of obstacles. The slide contains a link to a book edited by J.-P. Laumond (France, Toulouse), and a link to an article by V.N. Ushakov and A.R. Matviychuk.

3D-Reachable set at instant t_f

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad u_1 = -1 \quad (\text{symmetric case})$$

$$\dot{y} = \sin \varphi, \quad u_1 \in (-1, 0) \quad (\text{asymmetric case})$$

$$\dot{\varphi} = u; \quad u_1 = 0 \quad (\text{one-sided case})$$

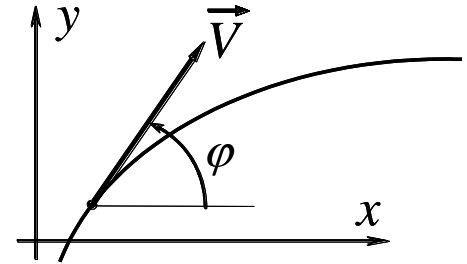
$$u \in [u_1, 1]. \quad u_1 \in (0, 1) \quad (\text{strictly one-sided case})$$

Reachable set at instant t_f :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

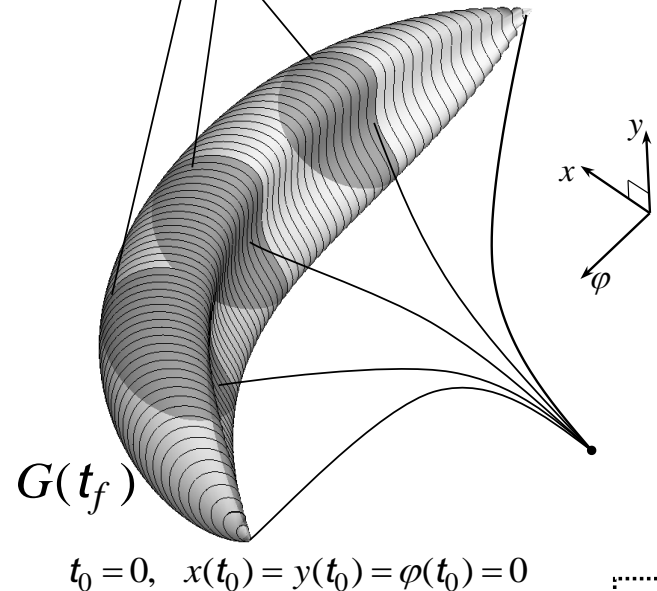
~~Reachable set up to instant t_f :~~

~~$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$~~



We consider $\varphi \in (-\infty, +\infty)$

φ -sections of reachable set



Слайд 10

Говоря о модели Дубинса, считаем значение u_1 , задающее левую границу на управление u , параметром рассматриваемой задачи. Мы различаем четыре случая: симметричный случай (при $u_1 = -1$), несимметричный случай ($-1 < u_1 < 0$), случай одностороннего поворота ($u_1 = 0$) и случай строго одностороннего поворота ($0 < u_1 < 1$).

Множество достижимости в заданный момент t_f определяем как совокупность всех трёхмерных фазовых состояний, которые можно получить, перебирая все допустимые программные управления на промежутке $[t_0, t_f]$. Под допустимыми управлениями $u(\cdot)$ понимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению $u(t) \in [u_1, 1]$. Не теряя общности, начальное фазовое состояние $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))$ считаем нулевым. Начальный момент t_0 также полагаем нулевым. Из принципа максимума Понтрягина мы получим, что при изучении множества достижимости можно ограничиться кусочно-постоянными управлениями.

Подчеркнём отличие множества достижимости «в момент» от множества достижимости «к моменту». Отметим также, что мы не будем отождествлять угол φ по модулю 2π . Предполагаем, что угол φ принимает значения в промежутке $(-\infty, +\infty)$.

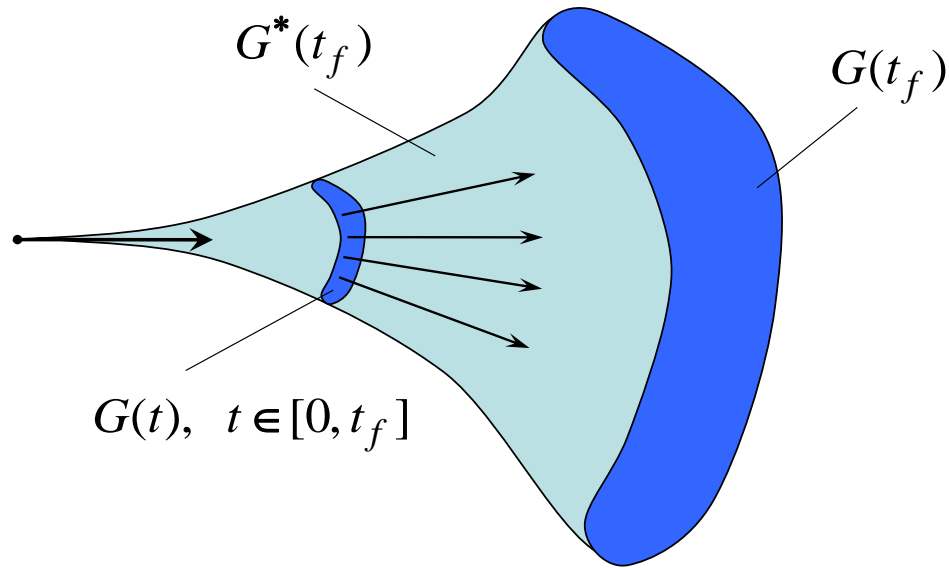
Slide 10

Speaking about the Dubins model, we consider the value u_1 , which defines the left boundary for the control of u , as a parameter of the problem. We distinguish four cases: the symmetric case (for $u_1 = -1$), the asymmetric case ($-1 < u_1 < 0$), the case of one sided turn ($u_1 = 0$), and the case of strictly one-sided turn ($0 < u_1 < 1$).

The reachable set at a given instant t_f is defined as the set of all three-dimensional phase states that can be obtained with the help of all admissible open-loop controls in the interval $[t_0, t_f]$. By admissible controls $u(\cdot)$, we mean measurable time functions satisfying the constraint $u(t) \in [u_1, 1]$. Without losing generality, we consider the initial phase state $(x(t_0), y(t_0), \varphi(t_0))$ to be zero. The initial instant t_0 is also assumed to be zero. From the Pontryagin maximum principle, we get that when studying the reachable set, we can restrict ourselves to piecewise constant controls.

We emphasize the difference between the reachable set “at the instant” and the reachable set “by the instant”. Note also that we will not identify the angle φ modulo 2π . We assume that the angle φ takes values in the interval $(-\infty, +\infty)$.

Reachable sets at the instant and up to the instant



$G(t_f; t_0, x_0, y_0, \varphi_0)$ – three-dimensional reachable set at the instant t_f

$G(t_f)$ for $x_0 = y_0 = 0, \varphi_0 = 0, t_0 = 0$.

$G^*(t_f) = \bigcup_{t \in [0, t_f]} G(t)$ – three-dimensional reachable set up to the instant t_f

Слайд 11

Отличие множеств достижимости «в момент» и «к моменту» поясняется на слайде. В дальнейшем будем рассматривать только множества достижимости в момент. Множества достижимости к моменту надо изучать отдельно.

Slide 11

The difference between the reachable sets “at the instant” and “by the instant” is explained on this slide. Further, we will consider only the reachable sets at the instant. The reachable sets by the instant should be studied separately.

Background of the considered model



Optimal railway track planning

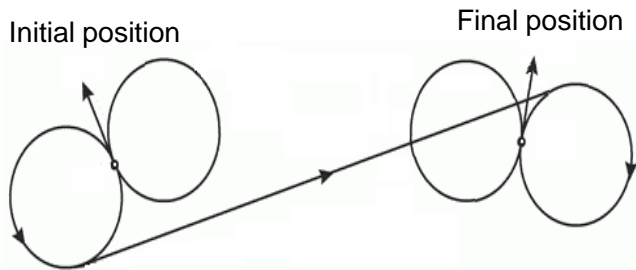
Markov, A. A. (1889). Some examples of the solution of a special kind of problem on greatest and least quantities, Soobschenija Charkovskogo matematicheskogo obščestva, Vol. 2-1 (No. 5,6), 250–276 (in Russian).

Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ.



Homicidal chauffeur game

Isaacs, R. (1951). Games of pursuit, Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica.



The problem of finding the shortest path for given initial / final states and directions

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume LXXIX, Number 3 JULY, 1957, pp 497 - 515

ON CURVES OF MINIMAL LENGTH WITH A CONSTRAINT ON AVERAGE CURVATURE, AND WITH PRESCRIBED INITIAL AND TERMINAL POSITIONS AND TANGENTS.*

By L. E. DUBINS.

Слайд 12

Более аккуратно об истории вопроса.

В 1889 г. А.А. Марков опубликовал в «Сообщениях Харьковского математического общества» статью, в которой рассмотрел четыре математические задачи, связанные с проектированием железных дорог. Первая из них описывается следующим образом: между двумя точками на плоскости провести кратчайшую линию при условии, что радиус кривизны кривой не меньше заданного числа и касательная к кривой в начальной точке имеет заданное направление.

В 1951 г. R. Isaacs, работая в Rand Corporation, представил свой первый отчет по теории дифференциальных игр, в котором поставил и наметил решение задачи «шофер-убийца». В этой игре «автомобиль» с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине линейной скоростью пытается как можно скорее сблизиться с «пешеходом». Пешеход пытается уклониться от столкновения. Именно Р. Айзекс первым стал называть словом «car» управляемый объект, о котором пойдёт речь в докладе.

В 1957 г. L. Dubins в чисто математической работе установил свойства кривых минимальной длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющих две точки на плоскости с заданными направлениями выхода и входа. Ясно, что это соответствует задаче быстрогодействия для объекта, движущегося с постоянной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Специалисты по теоретической робототехнике стали называть такую модель «Dubins car».

Slide 12

More accurately about the history of the issue.

In 1889, A.A. Markov published an article in the “Communications of the Kharkiv Mathematical Society”, in which he considered four mathematical problems related to the design of railways. The first of them is described as follows. It is necessary to construct the shortest curve between two points in the plane provided that the radius of curvature of the curve is not less than a given number and the tangent to the curve at the starting point has a given direction.

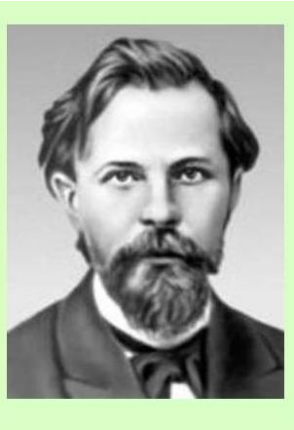
(to be continued in the next page)

In 1951, R. Isaacs, working at the Rand Corporation, presented his first report on the theory of differential games, in which he formulated and outlined a solution to the “Homicidal chauffeur” problem. In this game, a “car” with a restricted turning radius and a constant linear velocity tries to get closer to a “pedestrian” as soon as possible. The pedestrian tries to avoid a collision. R. Isaacs was the first who named the controlled object, which will be discussed in our lecture, by the word “car”.

In 1957, in a purely mathematical work, L. Dubins established the properties of curves of minimal length with a restricted radius of curvature connecting two points in the plane with given exit and entrance directions. It is clear that this corresponds to the time optimal problem for an object moving at a constant linear velocity and a restricted turning radius. Specialists in theoretical robotics began to call such a model “Dubins car”.

Markov, Isaacs, and Dubins

Андрей Андреевич Марков



Всемирно известный учёный в области математического анализа и теории вероятности; Математический аппарат марковских случайных процессов и марковской цепи играет важную роль при исследовании многих явлений в науке и технике.

Шахматист, фотограф, конструктор, математик, литературовед.

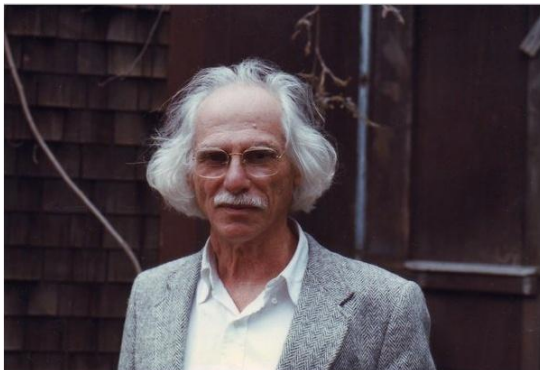
Автор автоспуска – устройства в фотоаппарате

Rufus Isaacs



Rose and Rufus Isaacs embarking on a cruise in their 40s or 50s

Lester Dubins



American mathematician noted primarily for his research in probability theory. He was a faculty member at the University of California at Berkeley from 1962 through 2004, and in retirement was Professor Emeritus of Mathematics and Statistics



Rose and Rufus Isaacs with the daughter Ellen in Hartford, Connecticut before Isaacs went to Notre Dame University in about 1945.

Слайд 13

Фотографии А.А. Маркова и L. Dubins на этом слайде взяты из Интернета. Обратим внимание на увлечения А.А. Маркова (шахматист, фотограф, конструктор, литературовед) помимо основной профессии математика. Работа Дубинса «О кривых минимальной длины. . . » не является типичной среди его других работ, которые, в основном, посвящены теории вероятности. Но именно эта работа приобрела широкую известность.

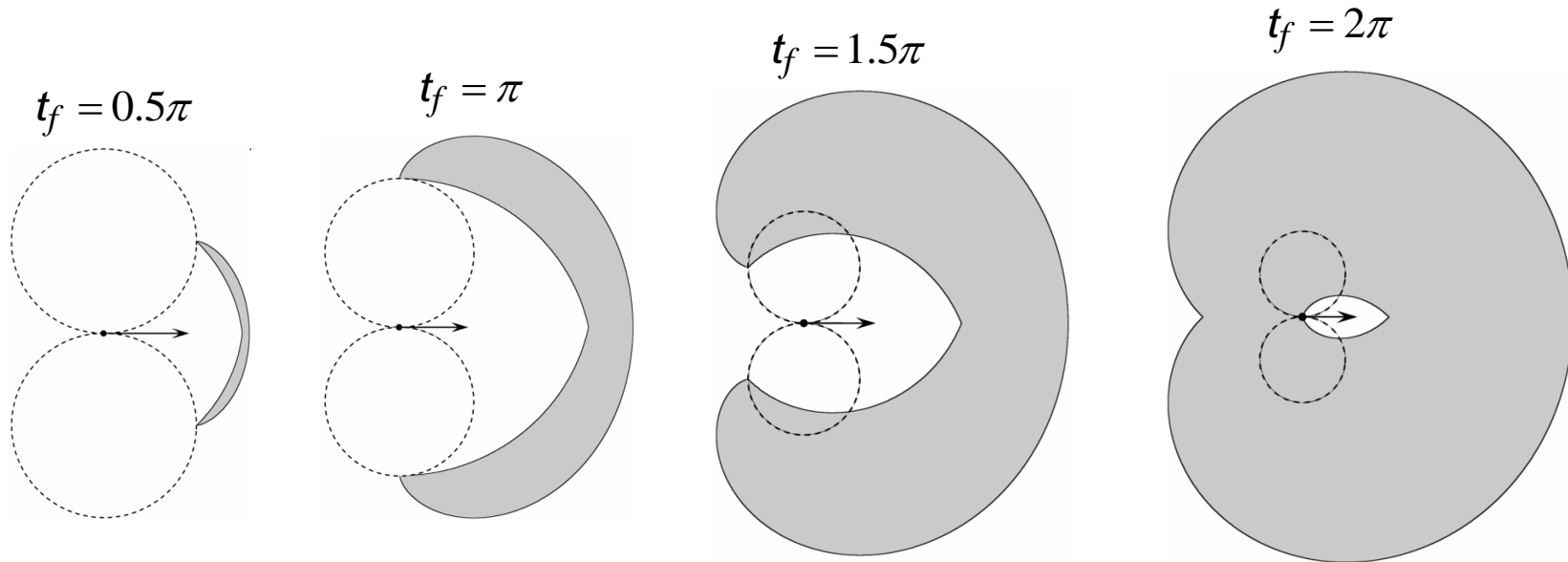
Две фотографии R. Isaacs с женой Rose были предоставлены их дочерью Ellen, которая на снимке 1945 г. была ещё совсем маленькой.

Slide 13

The photos of A.A. Markov and L. Dubins in this slide are taken from the Internet. Let's pay attention to the hobbies of A.A. Markov (chess player, photographer, designer, literary critic) in addition to his main profession of mathematician. Dubins work "On curves of minimal length. . ." is not typical among his other works, which are mainly devoted to probability theory. But this work became widely known.

Two photos of R. Isaacs and his wife Rose were provided by their daughter Ellen, who was a very small girl in the picture of 1945.

Reachable sets in projection onto a geometric plane, symmetric case



SIAM J. CONTROL
Vol. 13, No. 1, January 1975

PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t , the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t , thus extending the results of several recent authors.

Yu.I. Berdyshev

Nelineinye zadachi posledovatel'nogo upravleniya i ikh prilozhenie.
[Nonlinear Problems in Sequential Control and Their Application].
Ekaterinburg: IMM UB RAS, 2015, 193 p.

Слайд 14

Множество достижимости в момент для симметричного случая в проекции на плоскость геометрических координат описано в статье E.G. Cocayne and G.W.C. Hall 1975 г. На слайде показано развитие такого множества достижимости во времени.

Ю.И. Бердышев (ИММ УрО РАН) изучал задачи управления в проекции на плоскость геометрических координат, когда величина линейной скорости не обязательно является постоянной. Полученные им результаты отражены в книге 2015 г.

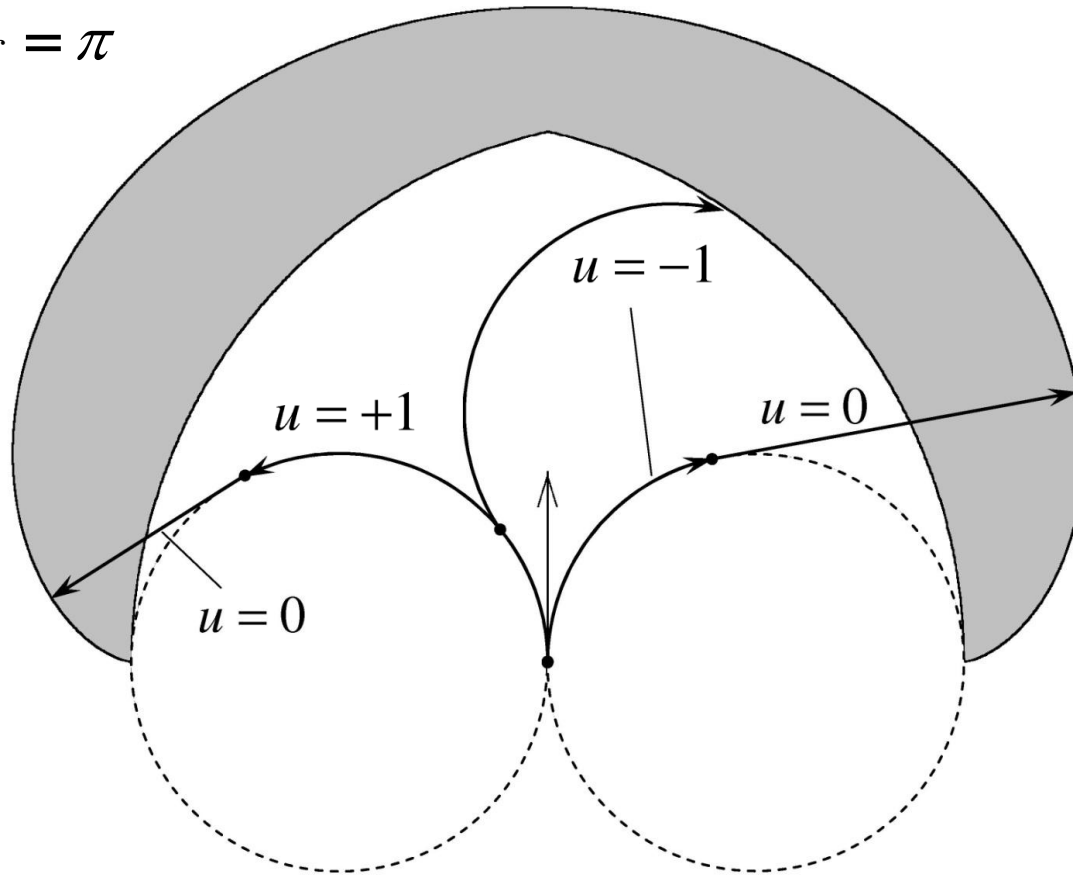
Slide 14

The reachable set at the instant for the symmetric case in the projection on the plane of geometric coordinates is described in the article by E.G. Cocayne and G.W.C. Hall, 1975. This slide shows the development of such a reachable set in time.

Yu.I. Berdyshev (IMM UrB RAS, Yekaterinburg, Russia) studied control problems in the projection on the plane of geometric coordinates, when the linear velocity is not necessarily constant. The results obtained by him are represented in the book of 2015.

Structure of controls leading to the boundary of the reachable set at the instant t_f in projection onto the plane x, y

$$t_f = \pi$$



Слайд 15

Здесь представлены управления, которые ведут на границу для одного из множеств, показанных на предыдущем слайде. На внешнюю часть границы ведут управления с не более, чем одним моментом переключения.

На первом участке управление принимает значения $u = \pm 1$, на втором — движение осуществляется по прямой при $u = 0$. Управления, ведущие на внутреннюю часть границы, также имеют не более одного переключения. На первом участке действует одно из крайних управлений $u = \pm 1$, на втором участке крайнее управление меняет знак.

Slide 15

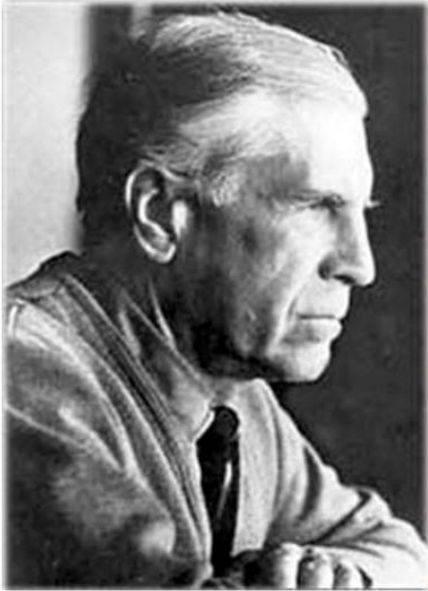
Here are the controls that lead to the boundary for one of the sets shown on the previous slide. Controls with no more than one switching instant lead to the outer part of the boundary.

In the first part of the motion, the control takes the values $u = \pm 1$. In the second part, the motion is carried out along a straight line under $u = 0$. Controls leading to the inner part of the boundary also have no more than one switch. In the first part of the motion, one of the extreme controls $u = \pm 1$ operates. In the second part, the extreme control changes its sign.

Pontryagin maximum principle for Dubins car (simple facts)

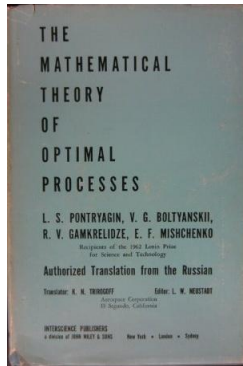
Lev Semyonovich Pontryagin

Понтрягин Лев Семёнович



Выдающийся советский математик, крупный специалист по топологии, теории колебаний, дифференциальным играм.

Родился 21 августа (3 сентября) 1908 года в Москве. В 14 лет в результате несчастного случая потерял зрение. В 1925 году окончил единую трудовую десятилетнюю школу.



Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F.

The Mathematical Theory of Optimal Processes

The book has been translated into all the leading languages of the world

Слайд 17

При исследовании задач программного управления естественно использовать Принцип максимума Понтрягина. Лев Семёнович Понтрягин — выдающийся и уникальный советский математик. На фото справа запечатлён рабочий момент, когда Лев Семёнович использует магнитофон после прошедшего у него семинара. Написанная совместно с его учениками (В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко) книга «Математическая теория оптимальных процессов» является основополагающей для теории управления и известна во всём мире.

Slide 17

When investigating open-loop control problems, it is natural to use the Pontryagin Maximum Principle. Lev Semenovich Pontryagin is an outstanding and unique Soviet mathematician. The photo on the right shows a working moment when Lev Semyonovich uses a tape recorder after a seminar held by him. Written together with his students (V. G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko), the book “The Mathematical Theory of Optimal Processes” is fundamental for control theory and is known all over the world.

Pontryagin Maximum Principle (PMP): what is it?

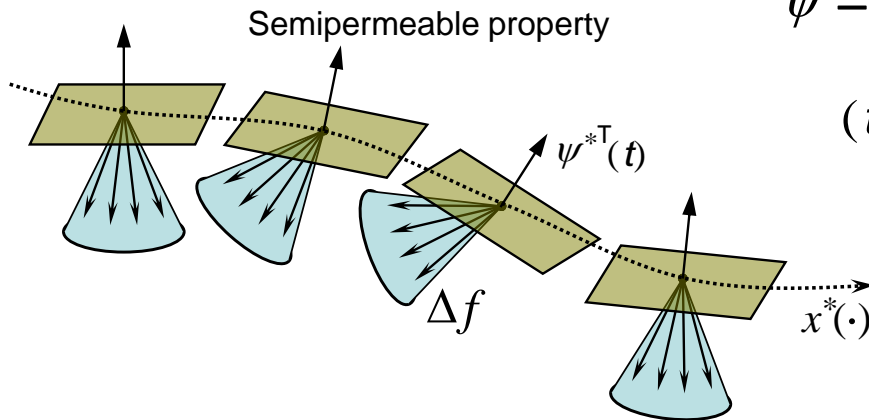
$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P; \quad t \in [t_0, t_f], \quad x \in R^n \quad (1)$$

$$\psi^{*\top}(t) \left(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \right) \leq 0, \quad u \in P, \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_f]$$

$$\max_{u \in P} \psi^{*\top}(t) f(t, x^*(t), u) = \psi^{*\top}(t) f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_f] \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} (t, x^*(t), u^*(t)) \right)^\top \psi \quad (3)$$

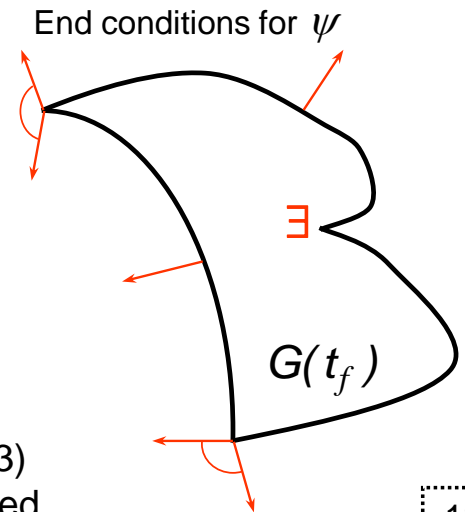
$$(t, x, u, \psi) \rightarrow \psi^\top f(t, x, u)$$



$$\Delta f(t, x^*(t), u^*(t)) = \bigcup_{u \in P} \left(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \right)$$

PMP for $u^*(\cdot), x^*(\cdot)$:

\exists non-zero solution $t \rightarrow \psi^*(t)$ of system (3)
such that the maximum condition (2) is realized



Слайд 18

Пусть движение управляемой системы описывается векторным дифференциальным уравнением (1). Принцип максимума Понтрягина (ПМП) означает существование невырожденного (не равного нулю) решения сопряжённой системы (3), для которого выполнено условие максимума (2). Геометрически такое свойство можно интерпретировать как свойство «полупроницаемости» рассматриваемого движения $x^*(t)$ в силу управления $u^*(t)$. А именно, разностный вектор $(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)))$ для любого $u \in P$ направлен в «противоположную» сторону относительно «площадки», ортогональной вектору $\psi^*(t)$.

Термин «полупроницаемость» принадлежит Р. Айзексу. Полупроницаемые поверхности и движения, идущие по ним, рассматриваются в его книге «Дифференциальные игры». Достоинство и отличие ПМП в том, что здесь ни о каких поверхностях не говорится. Тем самым для задач управления свойство «полупроницаемости» введено в наиболее полном виде.

Рассматривая различные задачи управления, в том числе, характеризуя движения, идущие на границу множества достижимости, удаётся показать выполнение ПМП для исследуемых движений. Картинка справа поясняет выбор вектора краевого условия в момент t_f для сопряжённой системы. Данный вектор соответствует управлению, ведущему на границу множества достижимости $G(t_f)$. Квантор существования \exists проставлен около точки на границе, для которой геометрический смысл вектора краевого условия не является очевидным.

Slide 18

Let the motion of the controlled system be described by the vector differential equation (1). The Pontryagin Maximum Principle (PMP) means the existence of a non-degenerate (non-zero) solution of the conjugate system (3), for which the condition of maximum (2) is satisfied. Geometrically, such a property can be interpreted as a “semipermeable” property of the considered motion $x^*(t)$ under to the control $u^*(t)$. Namely, the difference vector $(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)))$ for any $u \in P$ is directed in the “opposite” direction relatively to the “platform” orthogonal to the vector $\psi^*(t)$.

(to be continued in the next page)

The term “semipermeable” belongs to R. Isaacs. Semipermeable surfaces and the motions going on them are considered in his book “Differential Games”. The advantage and difference of the PMP are that here no surfaces are mentioned. Thus, for control problems, the property of “semipermeability” is introduced in the most complete form.

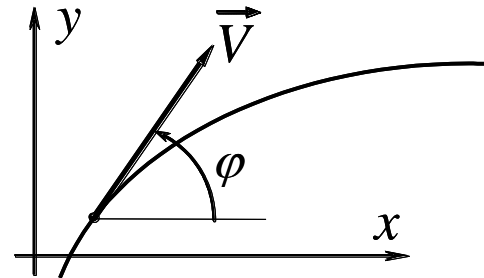
Considering various control problems, including characterizing the motions going to the boundary of the reachable set, it is possible to show the implementation of the PMP for the studied motions. The picture on the right explains the choice of the vector of the boundary condition at the instant t_f for the conjugate system. This vector corresponds to the control leading to the boundary of the reachable set $G(t_f)$. The symbol \exists of existence is placed near a point on the boundary for which the geometric meaning of the boundary condition vector is not obvious.

Pontryagin Maximum Principle

It is known [Lee, E.B., Markus L.] that controls that carry a system onto the reachable set boundary satisfy the PMP.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dynamic description} \\ \text{of Dubins car} \\ \text{in normalized coordinates} \end{array}$$

$$u \in [u_1, u_2], \quad u_2 = 1$$



Let $u^*(\cdot)$ be some admissible control and $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ be the corresponding motion of Dubins car on the interval $[t_0, t_f]$

Differential equations of the adjoint system :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^* - \psi_2 \cos \varphi^*. \end{cases}$$

We have $\psi_1^*(\cdot) = \text{const}$, $\psi_2^*(\cdot) = \text{const}$.

Слайд 19

В книге E.B. Lee и L. Markus сформулирована и доказана теорема о том, что любое программное управление и соответствующее ему движение, ведущее на границу множества достижимости, удовлетворяют ПМП. Вид сопряжённой системы для модели Дубинса очень прост.

Slide 19

In the book by E.B. Lee and L. Markus, a theorem is formulated and proved that any open-loop control and its corresponding motion leading to the boundary of the reachable set satisfy the PMP. The type of conjugate system for the Dubins model is very simple.

Maximum Principle Condition

The PMP means that a nonzero solution $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ of the adjoint system exists, for which almost everywhere (a.e.) on the interval $[t_0, t_f]$, the following condition is satisfied :

$$\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u \right]$$

$$\Rightarrow \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_3^*(t)u \right], \text{ a.e. } t \in [t_0, t_f]$$

1. If $\psi_1^* = 0$ and $\psi_2^* = 0$, then $\psi_3^*(\cdot) = \text{const} \neq 0$ on the interval $[t_0, t_f]$.

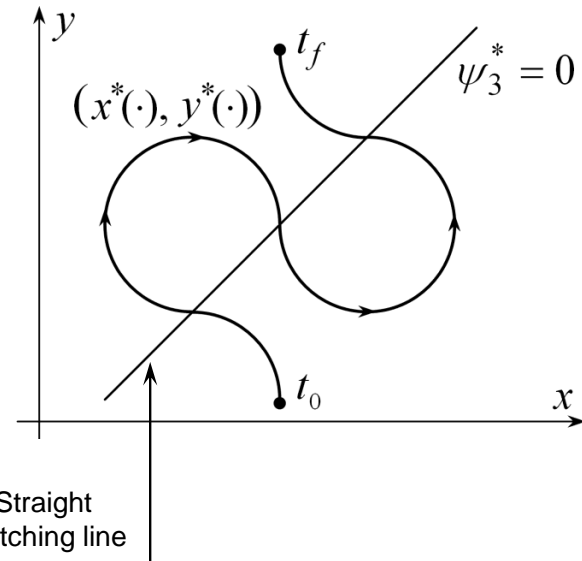
Therefore, we have a.e. $u^*(t) = u_1$ or $u^*(t) = u_2$.

2. Let at least one of the numbers ψ_1^* and ψ_2^* is non-zero. Using the equations of dynamics and adjoint system equations, one can write

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Therefore, $\psi_3^*(t) = 0$ iff the point $(x^*(t), y^*(t))^T$ of the geometric position at the instant t obeys the straight line equation

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0.$$



Слайд 20

Здесь выписана формула принципа максимума, из которой следует, что управление $u^*(\cdot)$, ведущее на границу, определяется в каждый момент t знаком третьей компоненты $\psi_3^*(t)$ вектора $\psi^*(t)$ сопряжённой системы. Если управление $u^*(\cdot)$ имеет два или более переключения, то возникает прямая переключения. Важно отметить, что прямая переключения не является универсальной. Для каждого движения, ведущего на границу, прямая переключения своя.

Отмеченные на слайдах 19 и 20 факты являются простейшими. Они непосредственно следуют из записи ПМП. Эти соотношения позволяют также говорить о конечном числе переключений для каждого управления, ведущего на границу множества достижимости.

Slide 20

Here we write out the formula of the maximum principle, from which it follows that the control $u^*(\cdot)$ leading to the boundary is determined at each instant t by the sign of the third component $\psi_3^*(t)$ of the vector $\psi^*(t)$ of the conjugate system. If the control $u^*(\cdot)$ has two or more switches, then a switching line occurs. It is important to note that straight switching line is not universal. For each motion leading to the boundary, the switching line is different.

The facts noted on slides 19 and 20 are the simplest. They directly follow from the relations for the PMP. These relations also allow us to talk about a finite number of switches for each control leading to the boundary of the reachable set.

One of the main themes :

Relation of the PMP and properties of the φ -sections of the reachable set

1. The Pontryagin maximum principle for controls leading to the boundary is a necessary condition. But what about a sufficient condition?
2. Properties of the φ -sections of the reachable set (convexity, simple connectedness).
3. The uniqueness of extremal controls leading to the boundary.

Слайд 21

На этом слайде в качестве первого указан стандартный вопрос о достаточности ПМП для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Очень часто для нелинейных управляемых систем ПМП является лишь необходимым условием перевода на границу. Но как обстоит дело для машины Дубинса?

Вопрос о достаточности тесно связан с вопросом о выпуклости множества достижимости или о выпуклости его сечений по какой-либо координате. Для машины Дубинса трёхмерное множество достижимости в целом выпуклым не является. Однако рассматриваемая система обладает спецификой: геометрические координаты отсутствуют в правой части кинематических уравнений; управление u входит только в соотношение для производной угла φ . В дальнейшем будем анализировать сечения множества достижимости по координате φ (φ -сечения).

Важным также является вопрос об единственности экстремальных (удовлетворяющих ПМП) управлений, ведущих на границу множества достижимости. При этом будем рассматривать только кусочно-постоянные управления.

Slide 21

On this slide, as the first, the standard question about the sufficiency of the PMP for controls leading to the boundary of the reachable set is indicated. Very often, for nonlinear controlled systems, the PMP is only a necessary condition for transferring to the boundary. But what is the situation for the Dubins car?

The question of sufficiency is closely related to the question of the convexity of the reachable set or the convexity of its sections on some coordinate. For the Dubins car, the three-dimensional reachable set as a whole is not convex. However, the system under consideration has a specific feature: geometric coordinates are absent in the right part of the kinematic equations; the control u is included only in the relation for the derivative of the angle φ . In the sequel, we will analyze the sections of the reachable set by the coordinate φ (φ -sections).

An important question is also the uniqueness of extreme (satisfying the PMP) controls leading to the boundary of the reachable set. With that, we will consider only piecewise-constant controls.

Symmetric and asymmetric cases.

**Further using the PMP to obtain conditions
for transfer motions
onto the boundary of the reachable set**

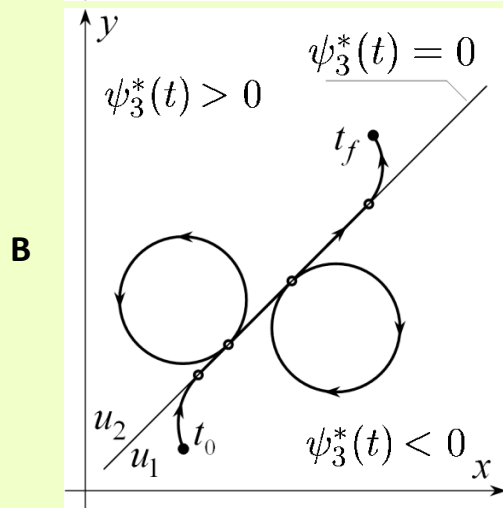
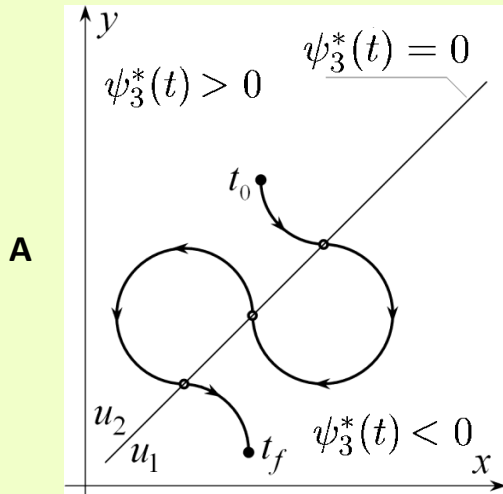
Слайд 22

Далее в первой лекции речь пойдёт о симметричном и несимметричном случаях. Случаи одностороннего и строго одностороннего поворотов будут рассмотрены во второй лекции.

Slide 22

Later in the first lecture, we will talk about the symmetric and asymmetric cases. The cases of one-sided and strictly one-sided turns will be considered in the second lecture.

Types of extremal motions

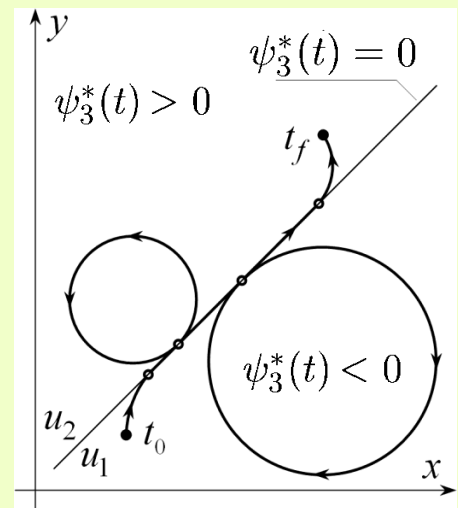
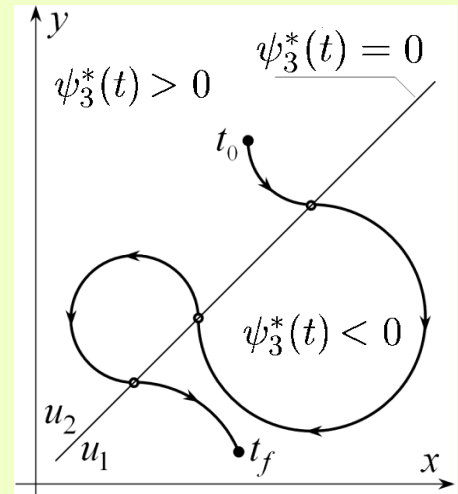


symmetric case

$$(u_1 = -1)$$

Lemma 1 (symmetric and asymmetric cases)

- Trajectories are formed by arcs of circles and by straight line segments
- Piecewise-constant controls with a finite number of switchings
- Equal angles of contact with the switching line
- Equal time intervals between switching points (A)
- Possible occurrence of cycles in the case $t \geq 2\pi$ (B, D)



asymmetric case

$$(u_1 = -0.5)$$

Слайд 23

Симметричный и несимметричный случаи в основном аналогичны. На этом слайде показаны типы экстремальных движений, сведения о которых вытекают из первичного анализа ПМП. Показаны прямые переключения и траектории на плоскости x, y , состоящие из дуг окружностей и прямолинейных участков. Используемые в дальнейшем свойства сформулированы в виде Леммы 1. Отметим постоянство углов на стыках траектории с линией переключения. Такое свойство задаёт некоторое соотношение между моментами переключения управления.

Slide 23

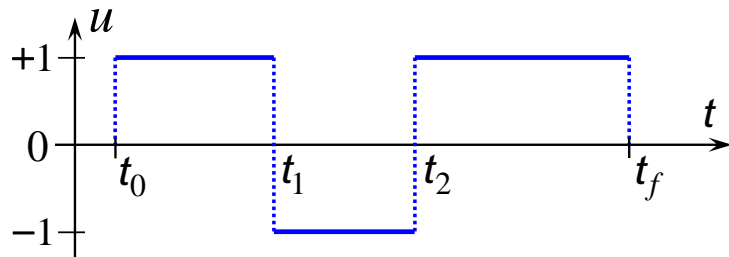
The symmetric and non-symmetric cases are basically similar. This slide shows the types of extreme motions the information about which follows from the primary analysis of the PMP. Straight switching lines and trajectories on the x, y plane consisting of arcs of circles and straight line segments are shown. The properties used in the following are formulated in the form of Lemma 1. Note the constancy of the angles at the junctions of the trajectory with the switching line. This property defines a certain relationship between the instants of control switches.

Auxiliary statements, 1

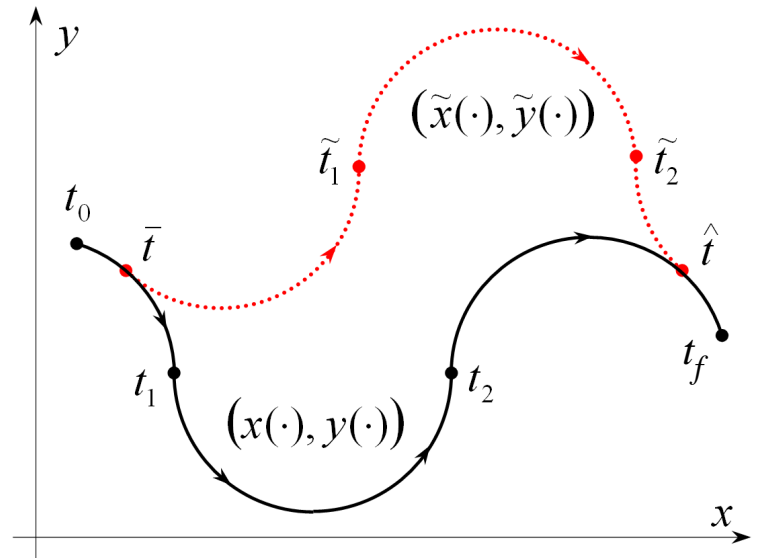
Lemma 2 (symmetric case). Let a motion $z(\cdot)$ on an interval $[t_0, t_f]$ be generated by a piecewise-constant control $u(\cdot)$ taking values ± 1 with two switching instants t_1 and t_2 . Suppose that the points of the geometric position in the plane x, y at the switching instants are different. In addition, let the inequality

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) > (t_2 - t_1)$$

be fulfilled. Then $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$.



this control does not lead to the boundary



We construct an auxiliary motion with the same three-dimensional terminal condition, but the PMP is not hold true for such a motion.

Therefore, the terminal point does not lie on the boundary of the reachable set $G(t_f)$.

Слайд 24

В нашей работе 2003 г. сформулированы и доказаны для симметричного случая вспомогательные свойства, выделяющие экстремальные движения, ведущие во внутренность множества достижимости. Одно из таких свойств (Лемма 2) связано с длительностью среднего участка экстремального движения между двумя моментами переключения t_1 и t_2 . Если продолжительность среднего участка меньше суммарной продолжительности первого и третьего участков, то такое управление ведёт во внутренность множества достижимости. Доказательство опирается на построение вспомогательного движения, ведущего в то же терминальное фазовое состояние, что и исходное, но не удовлетворяющее ПМП (точки переключения управления на вспомогательном движении не лежат на одной прямой).

Для несимметричного случая аналогичное утверждение формулируется в терминах «накопленных» углов на среднем и двух крайних участках.

Slide 24

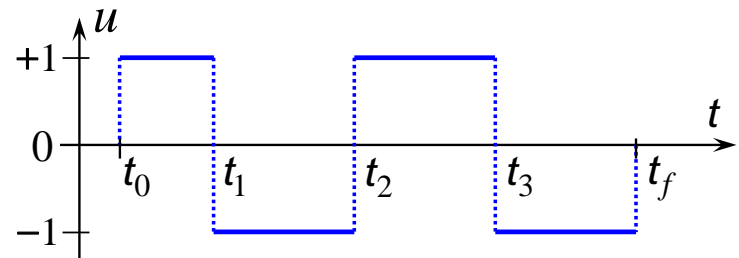
In our work of 2003, auxiliary properties that highlight extreme motions leading to the interior of the reachable set are formulated and proved for the symmetric case. One of these properties (Lemma 2) is associated with the duration of the middle part of the extreme motion between two switching instants t_1 and t_2 . If the duration of the middle part is less than the total duration of the first and third parts, then such a control leads to the interior of the reachable set. The proof is based on the construction of an auxiliary motion leading to the same terminal phase state as the initial one, but not satisfying the PMP (the control switching points of the auxiliary motion do not lie on one straight line).

For the asymmetric case, a similar statement is formulated in terms of “accumulated” angles on the middle and two extreme parts.

Auxiliary statements, 2

Lemma 3 (symmetric case). Let a motion $z(\cdot)$ on an interval $[t_0, t_f]$ be generated by a piecewise-constant control $u(\cdot)$ taking values ± 1 with three switching instants.

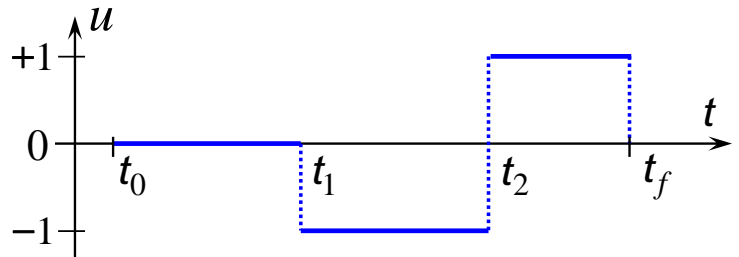
Then $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$.



this control does not lead to the boundary

Lemma 4 (symmetric case). Let a motion $z(\cdot)$ on an interval $[t_0, t_f]$ be generated by a piecewise-constant control $u(\cdot)$ taking values $0, \pm 1$ with two switching instants. Suppose that the control is equal to zero on only one interval and this interval is either of the two extreme intervals of control

constancy. Then $z(t_f) \in \text{int } G(t_f)$.



this control does not lead to the boundary

Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. (2003) *Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system.* Journal of Computer and Systems Sciences International. Vol. 42, No. 3, pp. 320–328

Simonenko A.S., Fedotov A.A. (2017) *Reachable set for the Dubins car under asymmetric constraint on control.* Proceedings of 48 International Youth School-conference: Modern Problems in Mathematics and its Applications, Yekaterinburg, Russia, Vol. 1894, pp. 79–87, (in Russian), URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1894/opt6.pdf>.

Слайд 25

Есть ещё два вспомогательных свойства об экстремальных движениях, ведущих во внутренность множества достижимости. Одно из них (Лемма 3) связано с количеством переключений для управлений, принимающих значения ± 1 . Второе свойство (Лемма 4) относится к управлению, принимающему значения $0, \pm 1$ с двумя переключениями. Если значение $u = 0$ реализуется только на первом или только на третьем участке, то такое движение также идёт во внутренность множества достижимости.

Аналогичные свойства справедливы и для несимметричного случая, рассмотренного в статье А.С.Симоненко и А.А.Федотова, 2017 г.

Slide 25

There are two more auxiliary properties about extreme motions leading to the interior of the reachable set. One of them (Lemma 3) is related to the number of switches for controls taking the values ± 1 . The second property (Lemma 4) refers to a control that takes the values $0, \pm 1$ with two switches. If the value $u = 0$ implements only on the first or only on the third part, then such a motion also goes into the interior of the reachable set.

Similar properties are also valid for the asymmetric case considered in the article by A.S. Simonenko and A.A. Fedotov, 2017.

Controls leading to the boundary of the reachable set

Theorem (symmetric case). Any boundary point of the reachable set for system

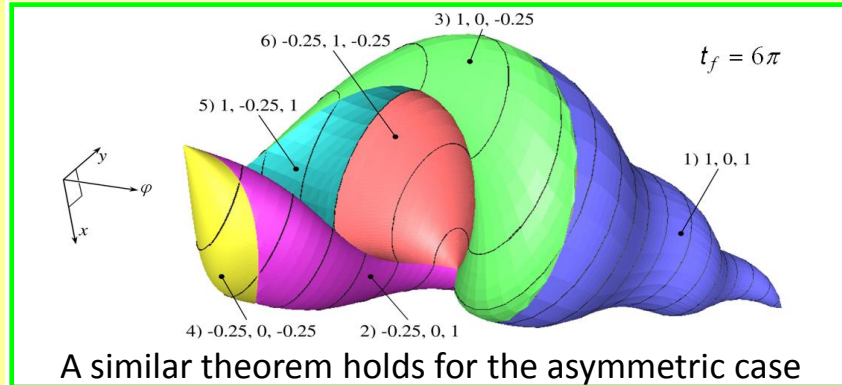
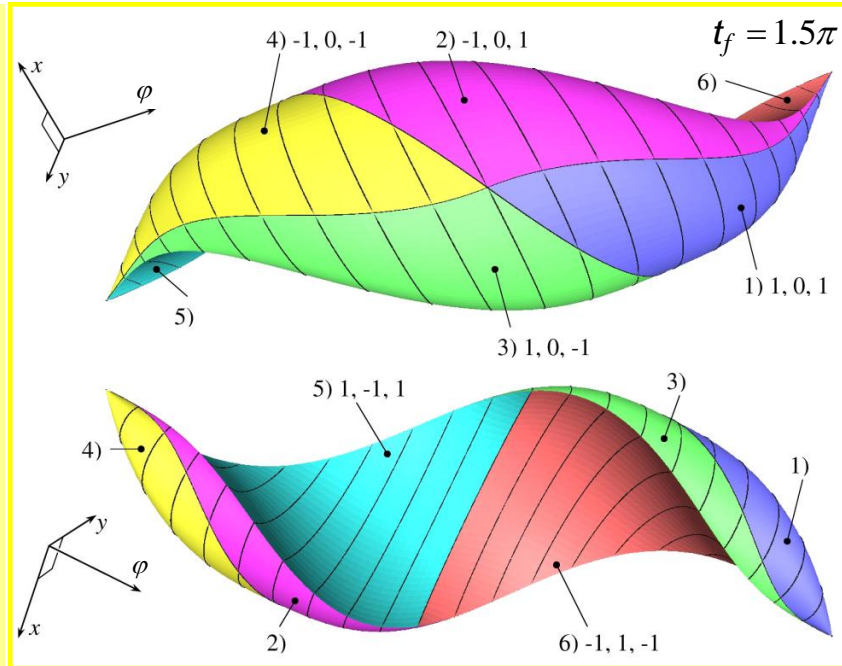
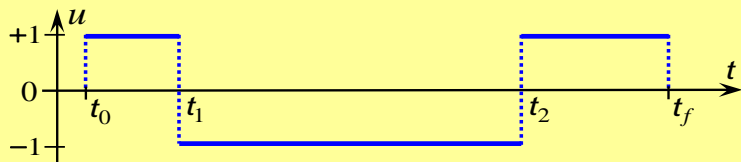
$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad |u| \leq 1$$

can be reached by means of a piecewise-constant control with no greater than two switching instants. In the case of two switchings, it is sufficient to consider 6 sequences of the control values, namely,

- 1) $+1, 0, +1$; 2) $-1, 0, +1$; 3) $+1, 0, -1$;
 4) $-1, 0, -1$; 5) $+1, -1, +1$; 6) $-1, +1, -1$.

Note: in the cases 5), 6), we can restricted by the motions that satisfy the inequality (Lemma 2)

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) \leq (t_2 - t_1)$$



Слайд 26

Здесь представлено для симметричного случая в виде теоремы основное утверждение о движениях, ведущих на границу множества достижимости. Указано шесть типов кусочно-постоянных управлений с не более, чем двумя переключениями. Таких управлений достаточно для построения границы множества достижимости. Заметим, что при $t_f > 2\pi$ в некоторые части границы могут вести управления, удовлетворяющие ПМП, но не входящие в указанные шесть типов. Подробнее об этом скажем позже.

В правой части слайда 26 приведены примеры изображений трёхмерных множеств достижимости. На верхнем рисунке представлено множество достижимости для симметричного случая в двух ракурсах. На нижнем рисунке показан пример множества достижимости для несимметричного случая. Каждому из шести типов управления соответствует кусок поверхности, отмеченный своим цветом.

L. Dubins в статье 1957 г. (слайд 12) рассмотрел задачу, которая при формулировке в терминах математической теории управления эквивалентна задаче быстрогодействия при заданных трехмерных начальном и конечном состояниях. Им были указаны такие же шесть типов управлений, которые в совокупности являются необходимыми и достаточными для решения задачи быстрогодействия. Подчеркнём, что в строгом смысле задача о построении множества достижимости в момент отличается от задачи быстрогодействия, исследованной L. Dubins.

Slide 26

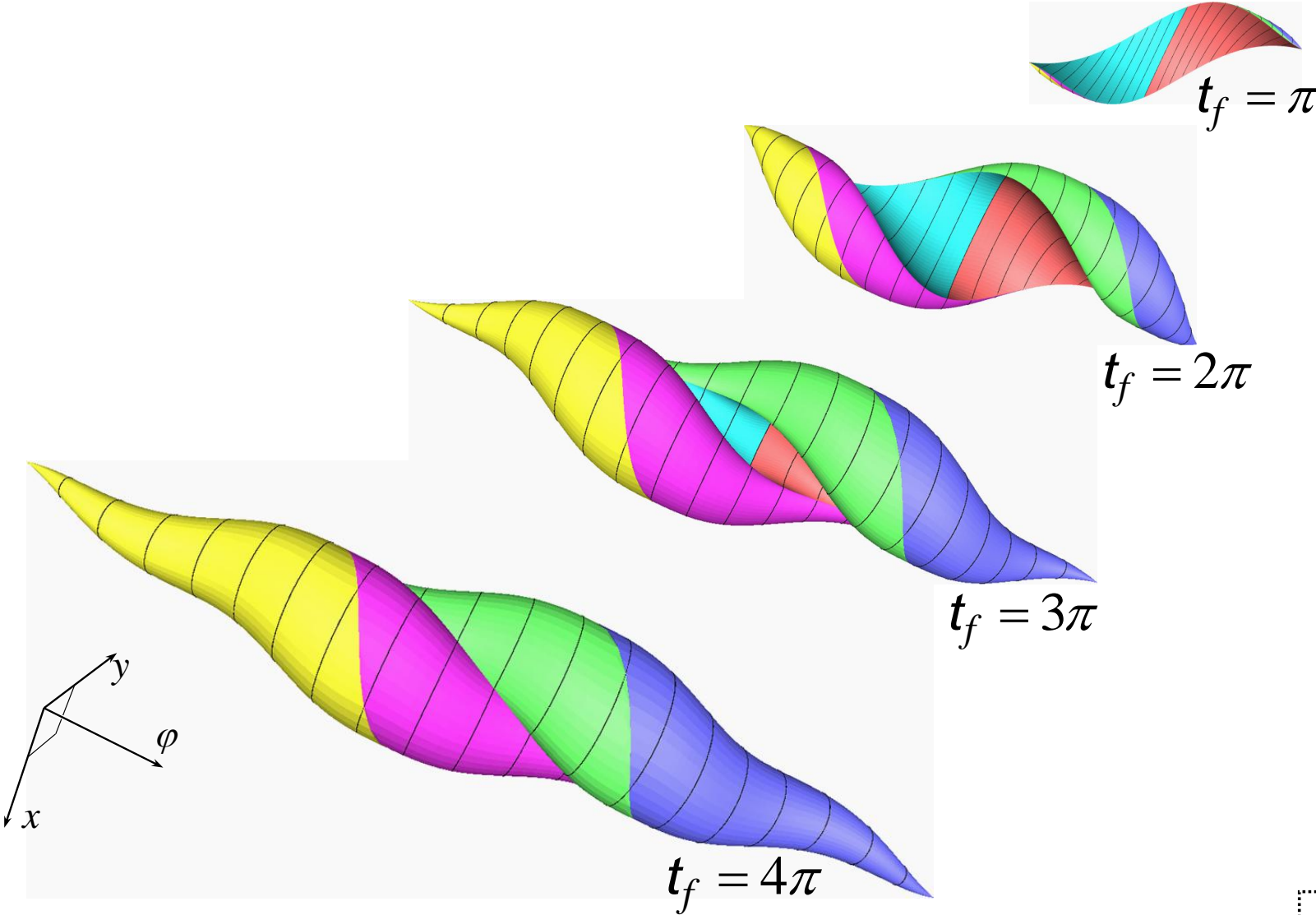
Here, for the symmetric case, the main statement about the motions leading to the boundary of the reachable set is presented in the form of a theorem. Six types of piecewise constant controls with at most two switches are indicated. Such controls are sufficient to construct the boundary of the reachable set. Note that for $t_f > 2\pi$, controls that satisfy the PMP, but are not included into the specified six types, can lead to some parts of the boundary. We will talk about them later.

(to be continued in the next page)

The right part of slide 26 shows examples of images of three-dimensional reachable sets. The upper figure shows the reachable set for the symmetric case from two points of view. The lower figure shows an example of the reachable set for the asymmetric case. Each of the six types of control corresponds to a piece of surface marked with its own color.

L. Dubins in his article of 1957 (see slide 12) considered a problem that, which being formulated in terms of mathematical control theory is equivalent to the time optimal problem for given three-dimensional initial and final states. He indicated the same six types of controls, which together are necessary and sufficient for solving the time optimal problem. Emphasize that, in the strict sense, the problem of constructing a reachable set at instant differs from the time optimal problem investigated by L. Dubins.

Evolution of reachable set in the symmetric case



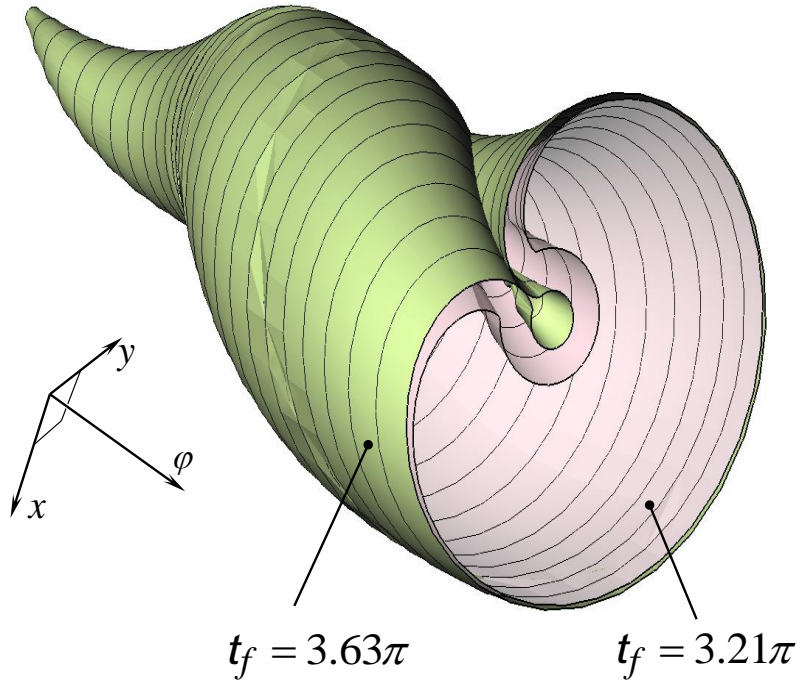
Слайд 27

На этом слайде показано развитие во времени множества достижимости для симметричного случая. Видно, что, начиная с некоторого момента t_f , управления типа $+1, -1, +1$ или $-1, +1, -1$ не участвуют в образовании границы.

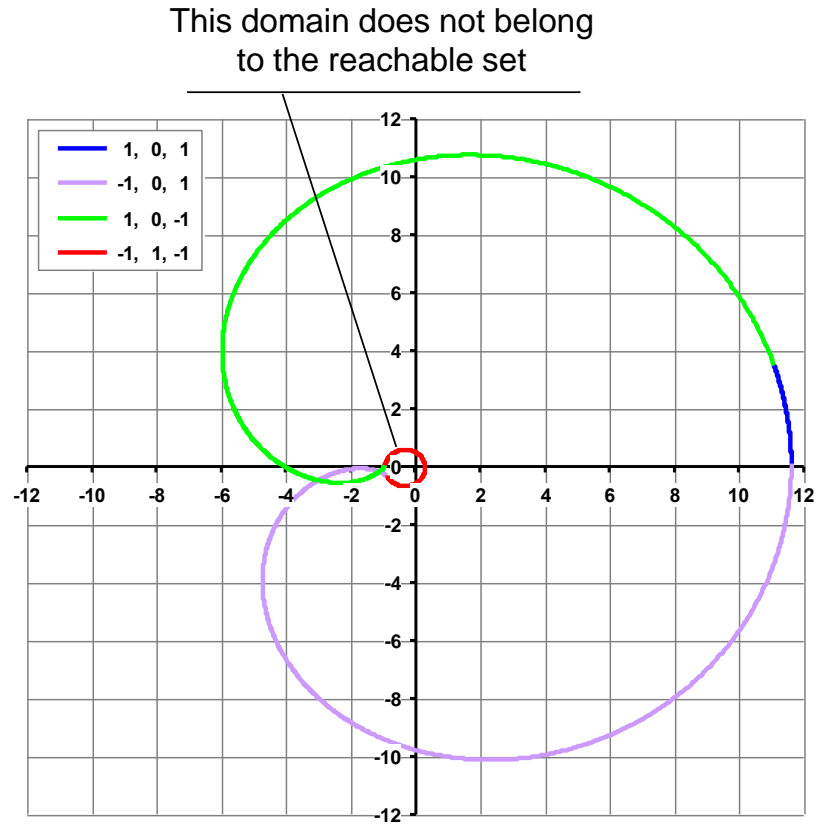
Slide 27

This slide shows the evolution in time of the reachable set for the symmetric case. It can be seen that starting from a certain instant t_f , controls of the type $+1, -1, +1$ or $-1, +1, -1$ do not participate in the formation of the boundary.

Violation of simple connectedness of the reachable set



The plane of cross-section corresponds to $\varphi = 0$



φ -section of the reachable set
for $\varphi = 0.1\pi$ and $t_f = 3.7\pi$

Слайд 28

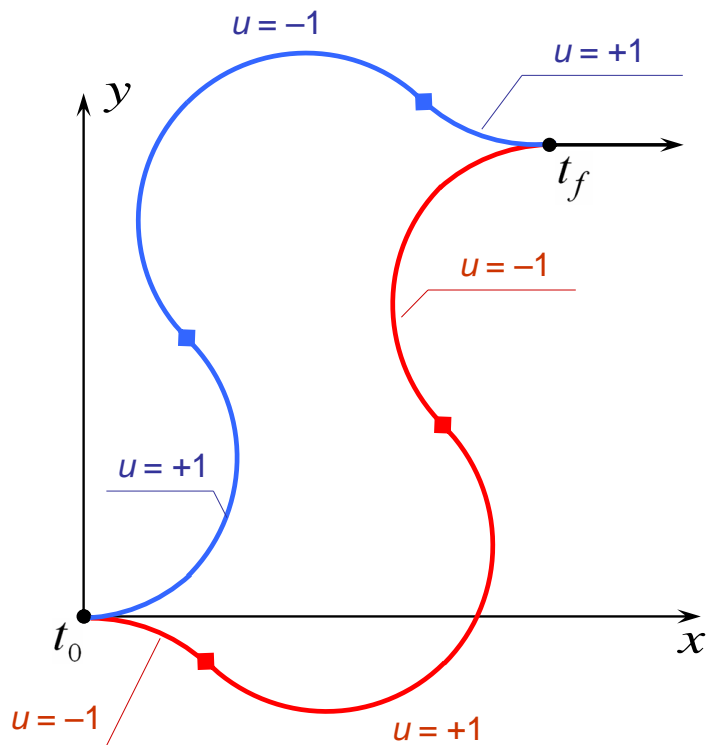
Множество достижимости в симметричном и несимметричном случаях может быть неодносвязным. Промежуток времени, на котором такое происходит, зависит от значения u_1 . Как следствие, некоторые φ -сечения на таком промежутке также не являются односвязными. На рисунке слева показана часть границы множества достижимости в симметричном случае для двух моментов времени, отсечённая плоскостью $\varphi = 0$. Нарушение односвязности появляется около момента $t_f = 3.63\pi$ и длится непродолжительное время.

Slide 28

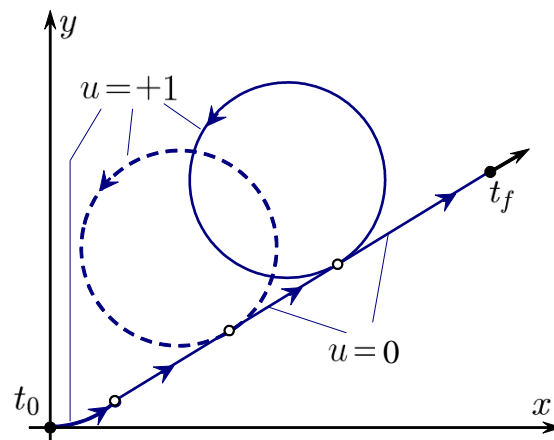
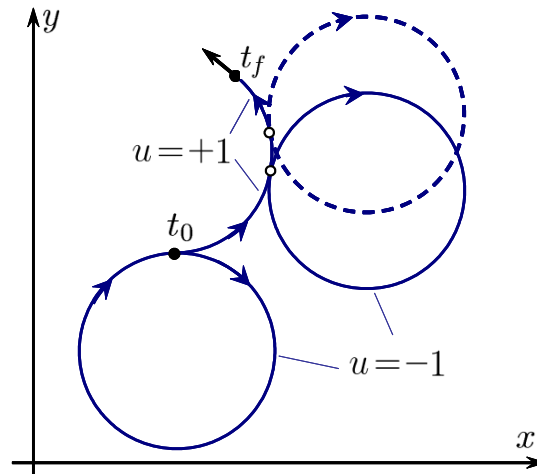
The reachable set in symmetric and asymmetric cases can be non-simply connected. The time interval, during which it happens, depends on the value of u_1 . As a consequence, some φ -sections in such an interval are also not simply connected. The figure on the left shows a part of the boundary of the reachable set in the symmetric case for two instants, cut off by the plane $\varphi = 0$. Violation of simple connectedness appears around the instant $t_f = 3.63\pi$ and lasts for a short time.

Symmetric case

Non-uniqueness of the extremal motions



Two extremal motions for $\varphi = 0$



The non-uniqueness of the extremal motions due to the transport of the cycle for $t_f > 2\pi$

Слайд 29

На рисунке слева показаны два различных экстремальных движения в симметричном случае, приходящие в одно и то же фазовое состояние со значением $\varphi = 0$. Неоднозначно определённые экстремальные движения могут возникать также при $t_f > 2\pi$ за счёт «циклических» движений. Справа изображены соответствующие возможные варианты.

Slide 29

The figure on the left shows two different extreme motions in the symmetric case, arriving at the same phase state with the value $\varphi = 0$. Not uniquely defined extreme motions can also arise for $t_f > 2\pi$ due to “cyclic” motions. The corresponding possible variants are shown on the right.

Analytical description of φ -sections of the reachable set, $\varphi > 0$, $t_f \leq 2\pi$

$$\mathbf{A1}(s_1) = \begin{pmatrix} X_{U1}(s_1) \\ Y_{U1}(s_1) \end{pmatrix} = \left(t_f - \frac{\varphi}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_1 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A2}(s_2) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_2}{u_2} - \frac{s_2}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A3}(s_3) = \left(t_f - \frac{\varphi - s_3}{u_1} - \frac{s_3}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_3 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_3}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_3}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_3}{2} \right) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A6}(s_6) = 2 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \begin{pmatrix} \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \left(\frac{u_2 (\varphi - t_f \cdot u_1)}{2 (u_2 - u_1)} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{u_1 (\varphi - t_f \cdot u_2)}{2 (u_2 - u_1)} - s_6 \right) \\ \sin \left(\frac{u_1 (\varphi - t_f \cdot u_2)}{2 (u_2 - u_1)} - s_6 \right) \end{pmatrix}.$$

Each of four arcs $\mathbf{A1}$, $\mathbf{A2}$, $\mathbf{A3}$, $\mathbf{A6}$ is defined by the corresponding parameter s_1 , s_2 , s_3 , s_6 .

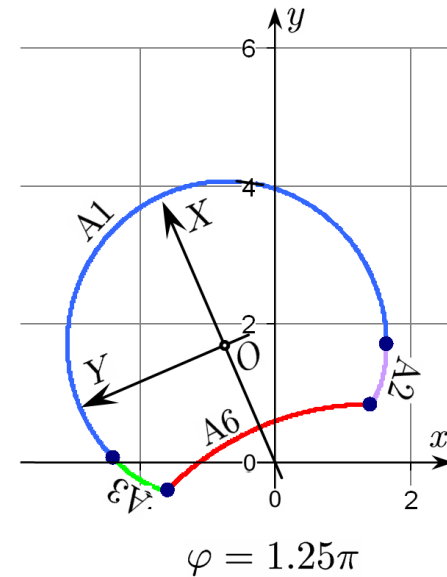
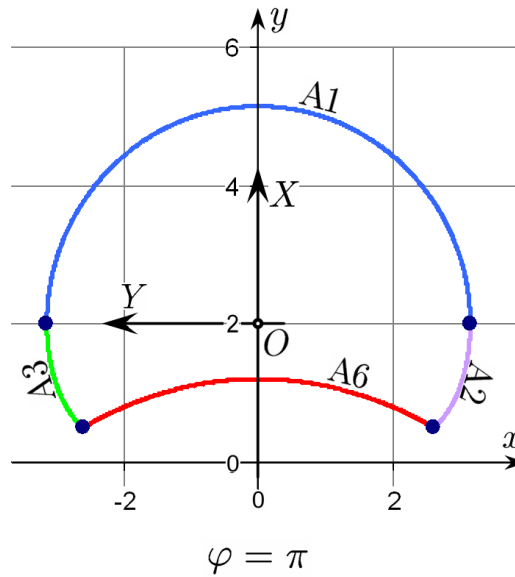
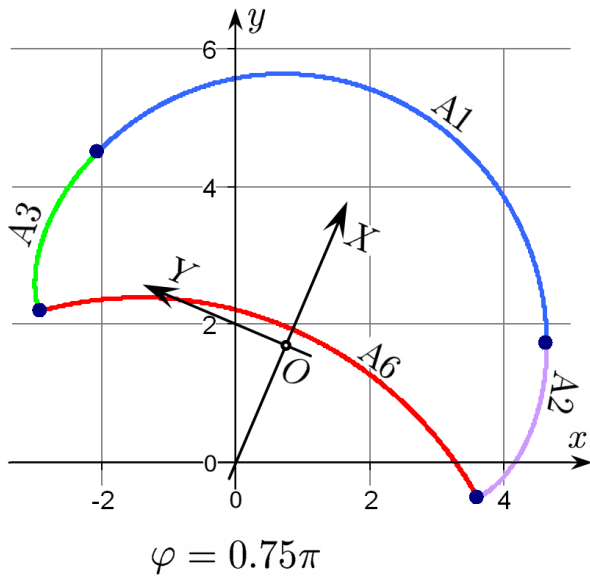
Слайд 30

В последнее время авторы получили аналитическое описание границы φ -сечений множества достижимости в предположении, что $t_f \leq 2\pi$. Детальное описание границы базируется на формулах параметрического представления кривых каждого из шести типов при фиксированном значении φ . На слайде представлены формулы такого описания для случая $\varphi > 0$. При положительных значениях φ лишь четыре типа участвуют в построении границы. Речь идёт о кривых **A1**, **A2**, **A3**, **A6**, соответствующих ранее указанным управлениям (с теми же номерами, см. слайд 26). Кривые **A1**, **A6** являются дугами окружностей, кривые **A2** и **A3** имеют более сложное описание.

Slide 30

Recently, the authors have obtained an analytical description of the boundary of the φ -sections of the reachable set under the assumption that $t_f \leq 2\pi$. The detailed description of the boundary is based on the formulas for the parametric representation of curves for each of the six types at a fixed value φ . The slide shows the formulas of such a description for the case $\varphi > 0$. For positive values of φ , only four types take part in the construction of the boundary. We are talking about curves **A1**, **A2**, **A3**, **A6** corresponding to the previously specified controls (with the same numbers, see slide 26). Curves **A1**, **A6** are arcs of circles, curves **A2** and **A3** have a more complex description.

Structure of φ -sections of the reachable set, $\varphi > 0$



Calculated samples of three φ -sections of the reachable set

for $u_1 = -0.5$, $u_2 = 1$, $t_f = 2\pi$

Слайд 31

Установлен (даже в несимметричном случае) факт симметрии φ -сечений относительно некоторой вспомогательной оси OX . Каждое сечение при $t_f \leq 2\pi$ и $\varphi > 0$ состоит из четырёх последовательно соединённых кривых **A1**, **A3**, **A6**, **A2**. Стыковка кривой **A1** с кривыми **A3** и **A2** является гладкой. В то же время стыковка кривой **A6** с кривыми **A3** и **A2** гладкой не является.

На слайде показаны три φ -сечения множества достижимости для несимметричного случая.

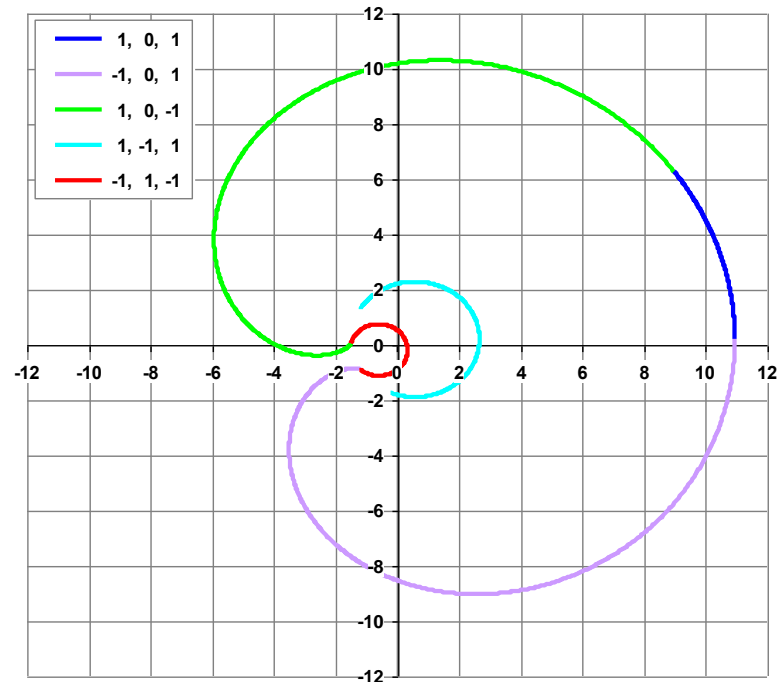
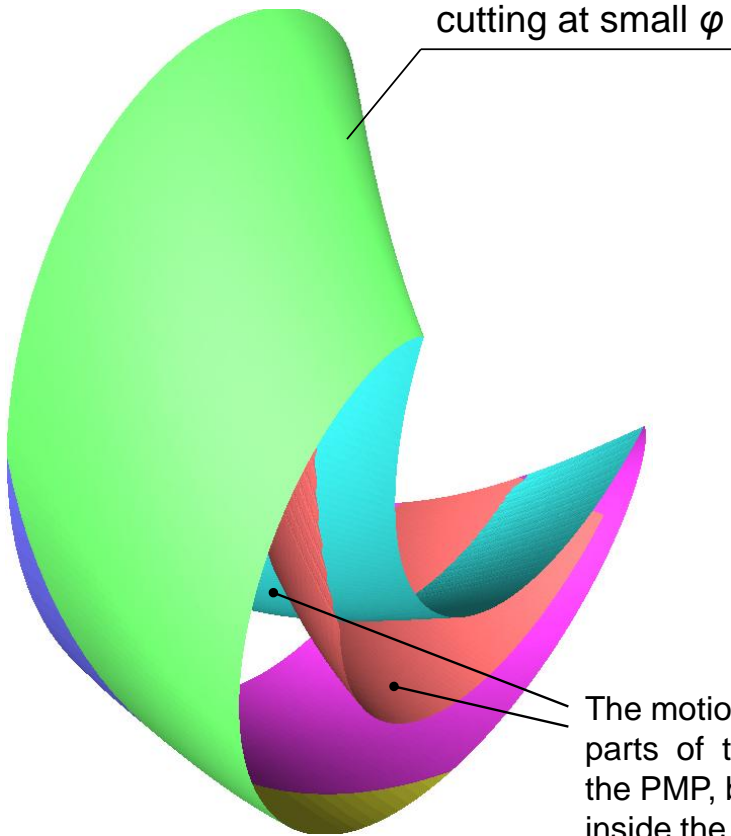
Slide 31

The fact of the symmetry of the φ -sections with respect to some auxiliary axis OX is established (even in the asymmetric case). Each section at $t_f \leq 2\pi$ and $\varphi > 0$ consists of four sequentially connected curves **A1**, **A3**, **A6**, **A2**. The connections of the curve **A1** with the curves **A3** and **A2** are smooth. At the same time, the connections of the curve **A6** with the curves **A3** and **A2** are not smooth.

The slide shows three φ -sections of the reachable set for the asymmetric case.

Symmetric case

The PMP is only a necessary condition for controls leading to the boundary



φ -section of the reachable set
for $\varphi = 0.2\pi$ and $t_f = 3.5\pi$

Слайд 32

На слайде для симметричного случая показаны части поверхностей, лежащие строго внутри множества достижимости, на которые ведут движения, удовлетворяющие ПМП. Стало быть, ПМП является лишь необходимым условием перевода на границу. Аналогичное свойство справедливо и в несимметричном случае.

Slide 32

For the symmetric case, the slide shows the parts of surfaces that lie strictly inside the reachable set, to which motions that satisfy the PMP lead. Therefore, the PMP is only a necessary condition for transfer to the boundary. A similar property is also true in the asymmetric case.

Symmetric and asymmetric cases

Properties of the reachable set boundary

1. Pontryagin maximum principle	Only necessary condition for controls leading onto the boundary
2. φ -sections of the reachable set	Convexity of φ -sections for $ \varphi \geq 2\pi$.
	Non convexity of φ -sections for $ \varphi < 2\pi$.
3. Controls leading to the boundary	Non-uniqueness (in the class of piecewise constant controls)

Theorem

Let $t_f \leq 2\pi$. In order for a piecewise constant control to lead to the boundary of the reachable set $\mathbf{G}(t_f)$, it is necessary and sufficient that it belongs to the set of controls U1 – U6 with an additional condition

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \geq |\varphi(t_1) - \varphi(t_0) + \varphi(t_f) - \varphi(t_2)|$$

for controls U5 and U6 .

$$U1: u_2, 0, u_2$$

$$U2: u_1, 0, u_2$$

$$U3: u_2, 0, u_1$$

$$U4: u_1, 0, u_1$$

$$U5: u_2, u_1, u_2$$

$$U6: u_1, u_2, u_1$$

Слайд 33

Здесь для симметричного и несимметричного случаев представлена таблица свойств границы множества достижимости. Приведена теорема о необходимых и достаточных условиях перевода на границу при помощи кусочно-постоянных управлений.

Slide 33

Here, for symmetric and asymmetric cases, a table of properties of the boundary of the reachable set is presented. A theorem on necessary and sufficient conditions for transfer to the boundary with the help of piecewise-constant controls is given.

Some additional pictures

Слайд 34

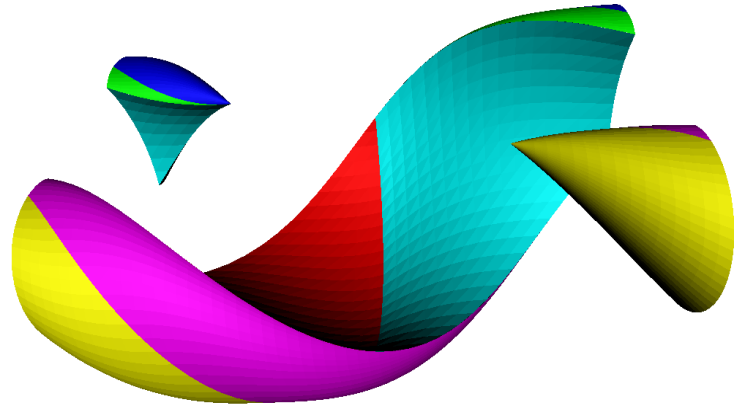
Далее будет показан ряд дополнительных картинок вне основного доклада, поясняющих, в том числе, структуру границы множества достижимости.

Slide 34

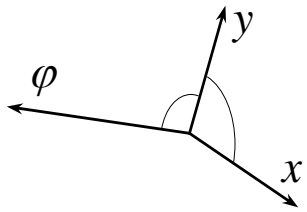
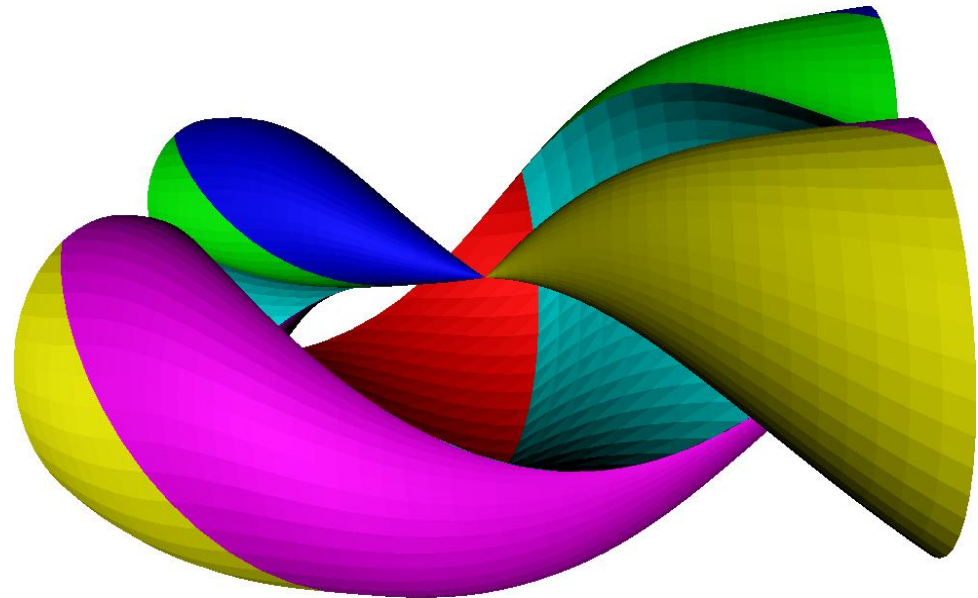
Further, a number of additional pictures outside the main report will be shown, explaining, among other things, the structure of the boundary of the reachable set.

Reachable sets with φ computed by modulo 2π in the symmetric case

$$t_f = 1.5\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



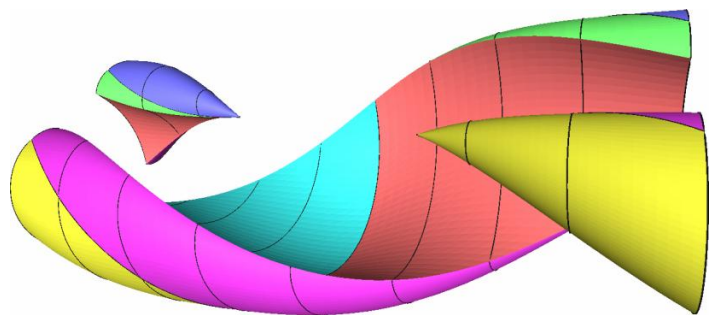
Слайд 35

Множества достижимости можно просчитывать «по модулю 2π ». Это важно для приложений. Соответствующие множества легко получаются из множеств, построенных при условии, когда φ принимает значения в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Однако способ представления множеств достижимости по модулю 2π значительно усложняет их «восприятие».

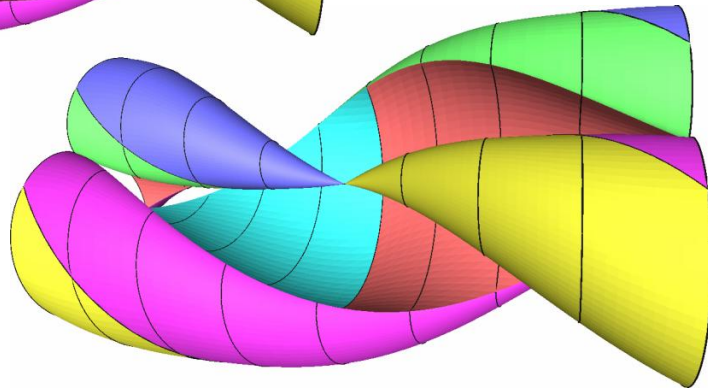
Slide 35

The reachable sets can be calculated “by modulo 2π ”. It is important for applications. The corresponding sets are easily obtained from the sets constructed under the condition when φ takes values in the interval $(-\infty, +\infty)$. However, the way of representing the reachable sets by modulo 2π significantly complicates “comprehension” of them.

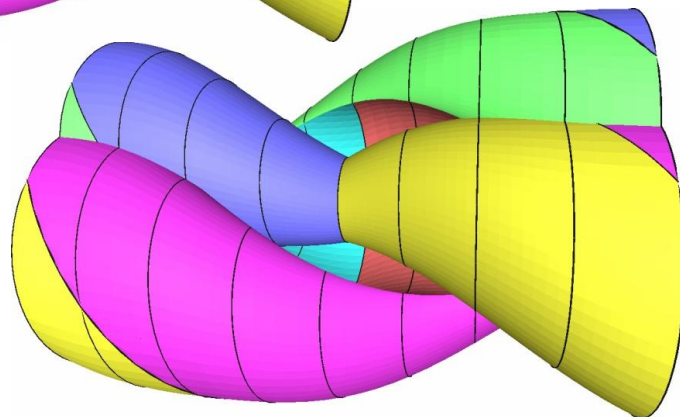
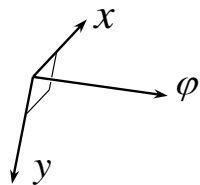
Reachable sets with φ computed by modulo 2π in the symmetric case



$$t_f = 1.6\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



$$t_f = 2.5\pi$$

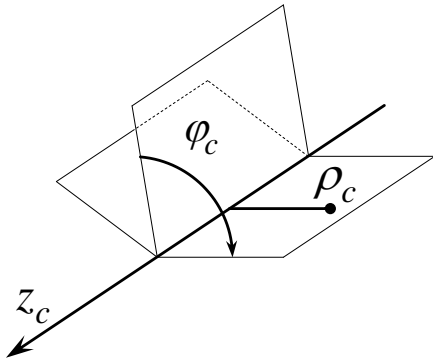
Слайд 36

Показаны ещё примеры вычислений множеств достижимости по модулю 2π для трёх моментов времени.

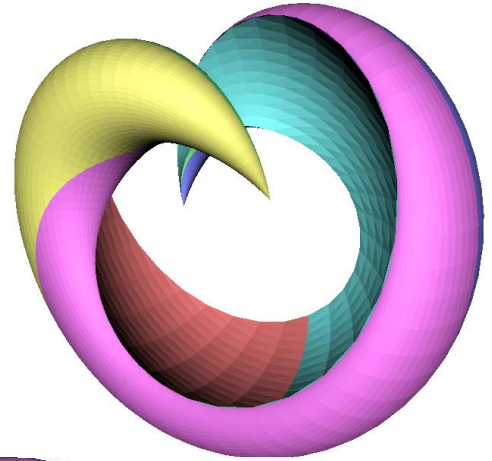
Slide 36

Some more examples of calculations of reachable sets by modulo 2π for three instants are shown.

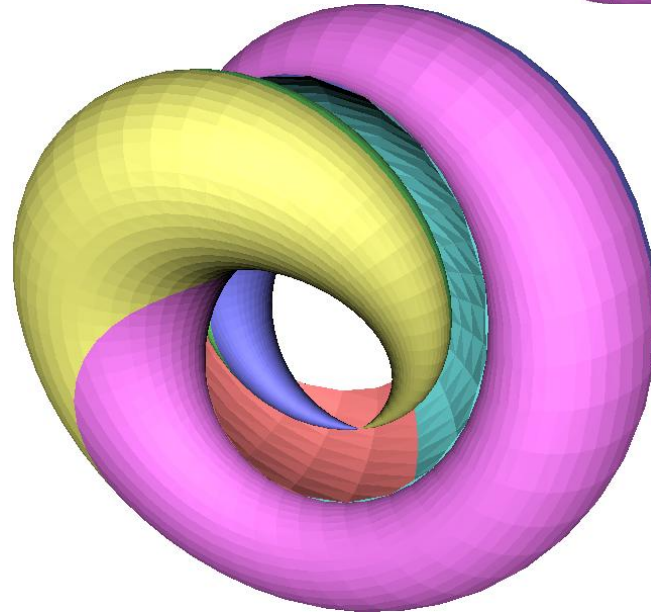
Reachable sets at the instant in “cylindrical” coordinates



$$t_f = 1.5\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



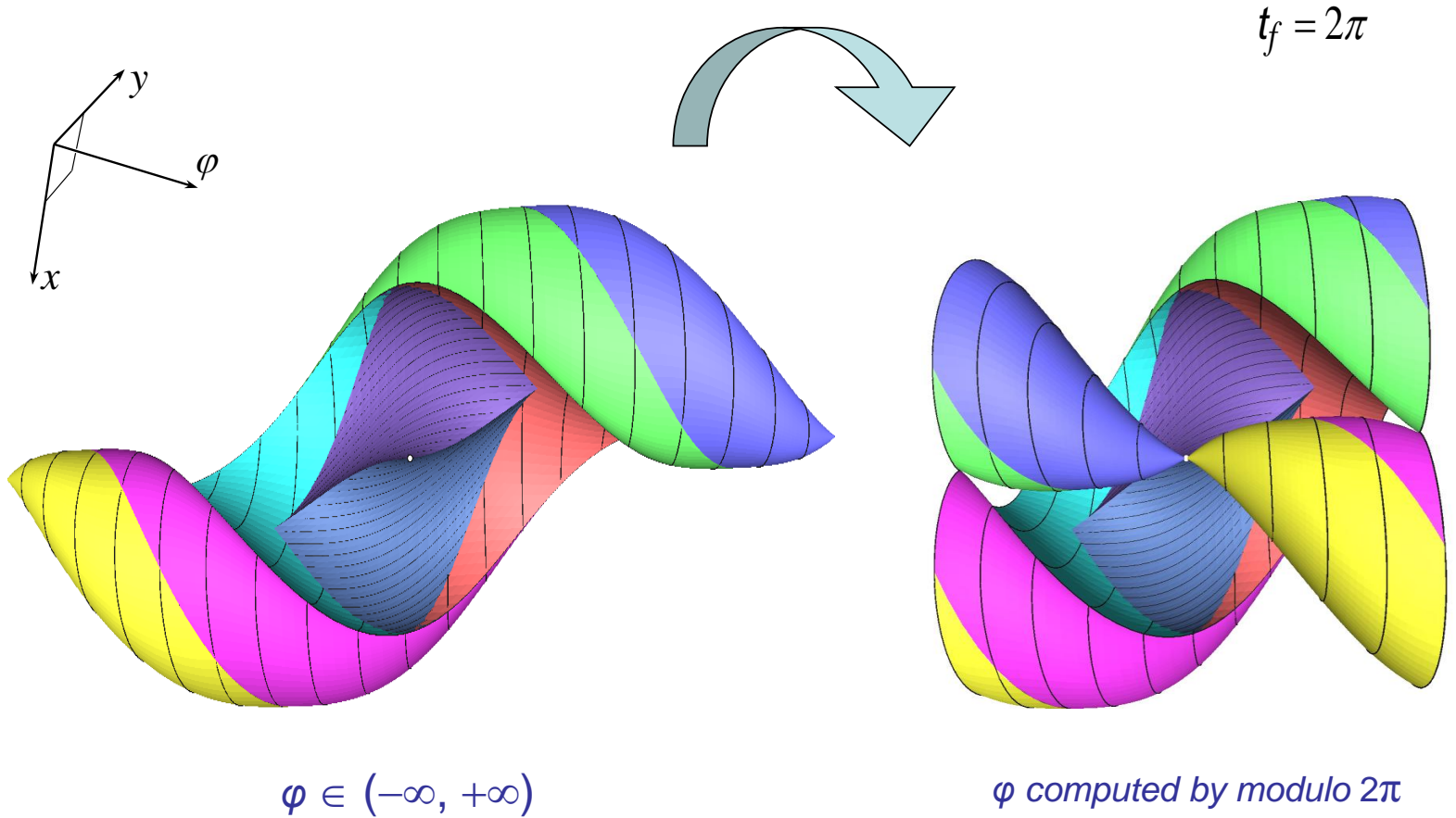
Слайд 37

Здесь представлены множества достижимости, пересчитанные в псевдоцилиндрические координаты. К радиусу добавлена некоторая константа.

Slide 37

The reachable sets converted to pseudocylindrical coordinates are shown on the slide. Here, some constant is added to the radius component.

Reachable set up to instant t_f in the symmetric case



Слайд 38

В начальной части лекции было отмечено, что множества достижимости к моменту t_f следует исследовать отдельно. Множество достижимости к моменту $t_f = 2\pi$ для симметричного случая представлено на слайде в двух вариантах. Картинка слева соответствует $\varphi \in (-\infty, +\infty)$. Справа то же множество просчитано по модулю 2π .

Slide 38

In the initial part of the lecture, it was noted that the reachable sets *up to instant* t_f should be investigated separately. The reachable set up to the instant $t_f = 2\pi$ for the symmetric case is presented on the slide in two versions. The picture on the left corresponds to $\varphi \in (-\infty, +\infty)$. On the right, the same set is calculated by modulo 2π .

3D-Printing



Example of a stable support during printing for the reachable set



Reachable sets at instant for $t_f = 2\pi, 3\pi, 4\pi$
(symmetric case)

Starodubtsev, I.S., Fedotov, A.A.,
Averbukh, V.L., Patsko, V.S. (2016)
*Reachable sets for Dubins car in control
problems: Physical visualization*
24th International Conference in Central
Europe on Computer Graphics,
Visualization and Computer Vision.
WSCG 2016, Posters Proceedings,
Plzen, Czech Republic, pp. 49-52



Reachable set at instant for $t_f = 5\pi$
(asymmetric case)

Слайд 39

Несколько лет назад И.С. Стародубцев (ИММ УрО РАН, сектор компьютерной визуализации) напечатал на 3D-принтере ряд множеств достижимости с использованием одноцветного режима. Напечатанные множества были использованы в образовательных и презентационных целях.

Slide 39

A few years ago, I.S. Starodubtsev (Computer Visualization Laboratory of the IMM UB RAS) printed a number of reachable sets using a 3D printer (in single-color mode). The printed sets were used for education and presentation purposes.

Reachable set for octopus tentacle

(Множество достижимости для щупальца осьминога)

SIMONE CACACE, ANNA CHIARA LAI, AND PAOLA LORETI

Modeling and Optimal Control of an Octopus Tentacle

2020 SIAM Journal on Control and Optimization 58(1):59-84

DOI: [10.1137/19M1238939](https://doi.org/10.1137/19M1238939)

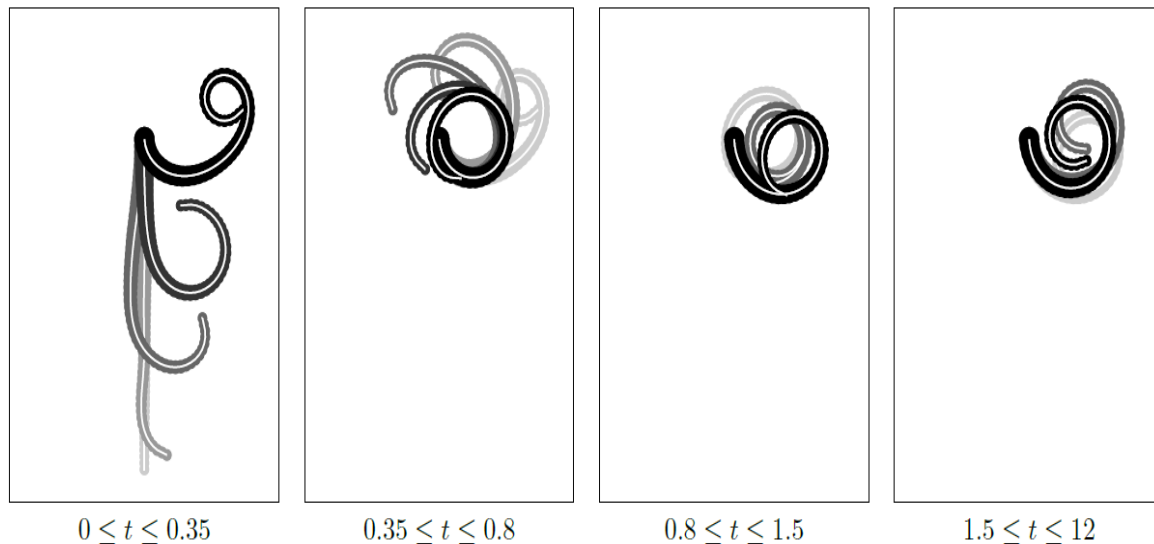


FIGURE 1. tentacle dynamics for a full contraction control

Control of soft robots
(Управление гибкими роботами)

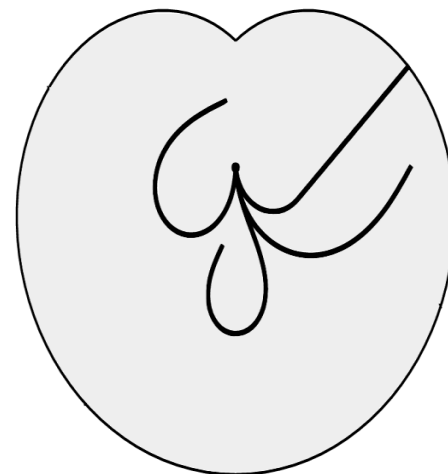


FIGURE 4. solutions of the stationary optimal control problem for different target points

Слайд 40

В этом году вышла статья итальянских авторов, посвящённая необычному применению множеств достижимости машины Дубинса при исследовании «гибких роботов».

Slide 40

In this year, an article by Italian authors was published on an unusual use of the reachable sets for Dubins car in the study of “flexible robots”.