

Pontryagin maximum principle and Dubins mathematical car, lecture 2

Принцип максимума Понтрягина и математическая машина Дубинса, лекция 2

V. S. Patsko, A. A. Fedotov



Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Russia

Dubins car:

one-sided

and strictly one-sided cases,

Pontryagin maximum principle

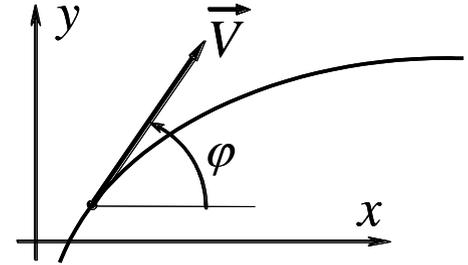
3D-Reachable set at instant t_f

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad u_1 = -1 \quad (\text{symmetric case})$$

$$\dot{y} = \sin \varphi, \quad u_1 \in (-1, 0) \quad (\text{asymmetric case})$$

$$\dot{\varphi} = u; \quad u_1 = 0 \quad (\text{one-sided case})$$

$$u \in [u_1, 1]. \quad u_1 \in (0, 1) \quad (\text{strictly one-sided case})$$



We consider $\varphi \in (-\infty, +\infty)$

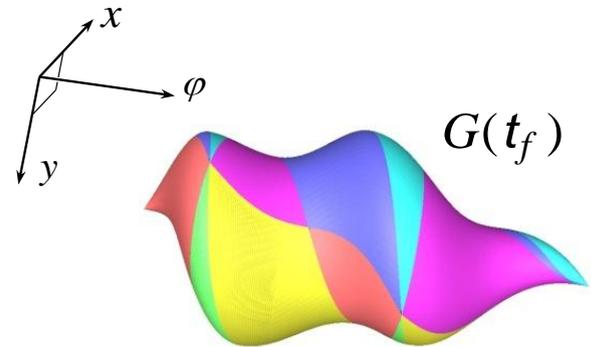
Reachable set at instant t_f :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

~~Reachable set up to instant t_f :~~

~~$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$~~

Example of a reachable set for a strictly one-sided case



$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$$

Слайд 3

Мы напоминаем дифференциальные уравнения для машины Дубинса и определение множества достижимости «в момент». Во второй лекции остановимся на случаях одностороннего и строго одностороннего поворотов. На рисунке справа внизу показан вид трёхмерного множества достижимости в случае строго одностороннего поворота.

Slide 3

We recall the differential equations for the Dubins car and the definition of the reachable set “at instant”. In the second lecture, we will focus on the cases of one-sided and strictly one-sided turns. The figure at the bottom right shows a view of the three-dimensional reachable set in the case of a strictly one-sided turn.

Pontryagin Maximum Principle (PMP): what is it?

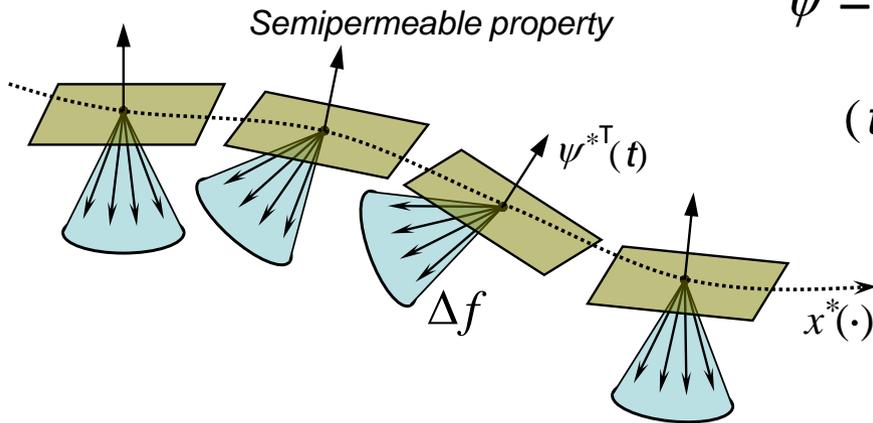
$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in P; \quad t \in [t_0, t_f], \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$\psi^{*\top}(t) \left(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \right) \leq 0, \quad u \in P, \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_f]$$

$$\max_{u \in P} \psi^{*\top}(t) f(t, x^*(t), u) = \psi^{*\top}(t) f(t, x^*(t), u^*(t)), \quad \text{a.e. } t \in [t_0, t_f] \quad (2)$$

$$\dot{\psi} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} (t, x^*(t), u^*(t)) \right)^\top \psi \quad (3)$$

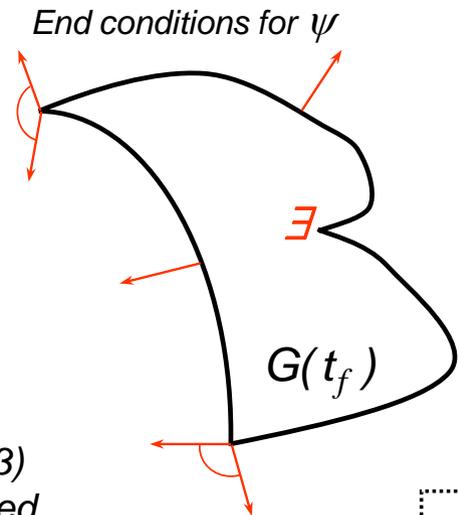
$$(t, x, u, \psi) \rightarrow \psi^\top f(t, x, u)$$



$$\Delta f(t, x^*(t), u^*(t)) = \bigcup_{u \in P} \left(f(t, x^*(t), u) - f(t, x^*(t), u^*(t)) \right)$$

PMP for $u^*(\cdot), x^*(\cdot)$:

\exists non-zero solution $t \rightarrow \psi^*(t)$ of system (3)
such that the maximum condition (2) is realized



Слайд 4

Этот слайд повторяет слайд 18 из первой лекции.

Slide 4

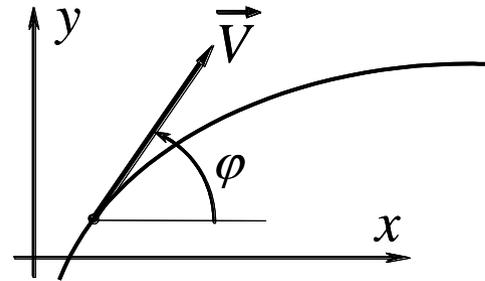
This slide repeats Slide 18 from the first lecture.

Pontryagin Maximum Principle

It is known [Lee, E.B., Markus L.] that controls that carry a system onto the reachable set boundary satisfy the PMP.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dynamic description} \\ \text{of Dubins car} \\ \text{in normalized coordinates} \end{array}$$

$$u \in [u_1, u_2], \quad u_2 = 1$$



Let $u^*(\cdot)$ be some admissible control and $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ be the corresponding motion of Dubins car on the interval $[t_0, t_f]$

Differential equations of the adjoint system :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^* - \psi_2 \cos \varphi^*. \end{cases}$$

We have $\psi_1^*(\cdot) = \text{const}$, $\psi_2^*(\cdot) = \text{const}$.

Слайд 5

В первой лекции уже был такой слайд с номером 19.

Slide 5

In the first lecture, there was already such a slide with number 19.

Maximum Principle Condition

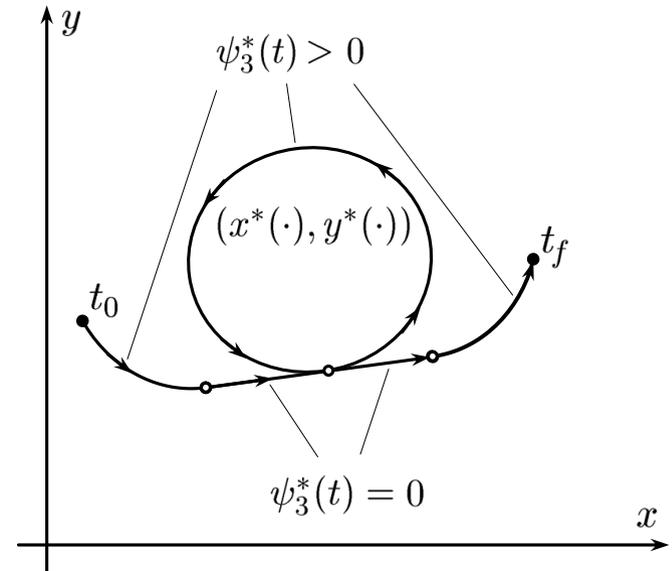
The PMP means that a nonzero solution $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ of the adjoint system exists, for which almost everywhere (a.e.) on the interval $[t_0, t_f]$, the following condition is satisfied :

$$\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_1^*(t)\cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t)\sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t)u \right]$$

$$\Rightarrow \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_3^*(t)u \right], \text{ a.e. } t \in [t_0, t_f]$$

From the maximum condition (1), it follows that in one-sided and strictly one-sided cases, extremal motions (satisfying the PMP) consist of pieces with extreme control values (either $u=u_1$ or $u=u_2$) and pieces where $\psi_3=0$.

One of these variants is shown in the figure



Слайд 6

Отличие данного слайда от слайда с номером 20 в первой лекции только в том, что здесь помещена картинка, соответствующая одностороннему повороту.

Slide 6

The only difference between this slide and Slide 20 in the first lecture is that here a picture at the bottom right corresponds to a one-sided turn.

Types of extremal motions

We have $\psi_1^*(\cdot) = \psi_1^* = \text{const}$, $\psi_2^*(\cdot) = \psi_2^* = \text{const}$.

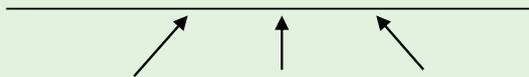
1) If $\psi_1^* = 0$ and $\psi_2^* = 0$, then $\psi_3^*(\cdot) = \text{const} \neq 0$ on $[t_0, t_f]$.

So, a. e. $u^*(t) = u_1$, or a. e. $u^*(t) = u_2$.

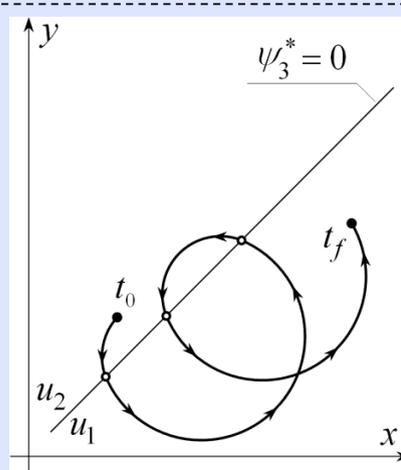
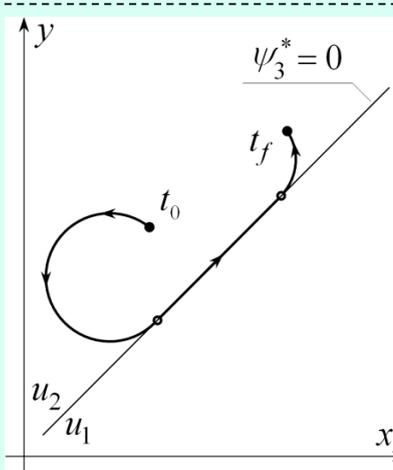
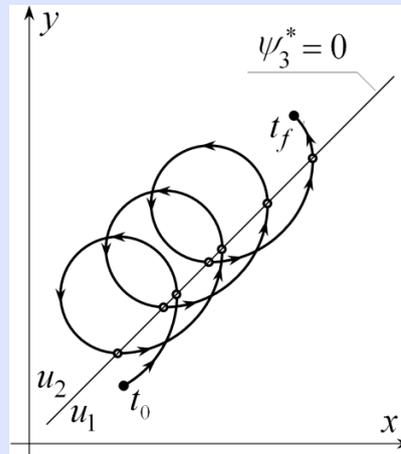
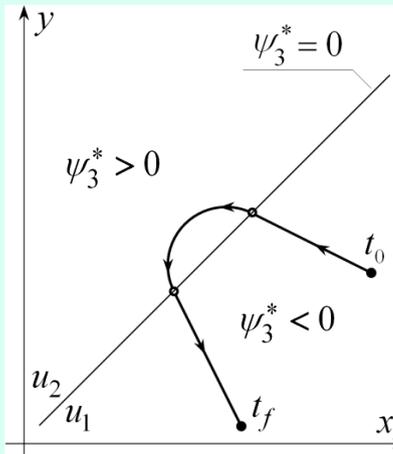
2) Let now at least one of the numbers ψ_1^* , ψ_2^* is not equal to zero. Using the equations of the initial and adjoint systems, we can write that

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Therefore, the relation $\psi_3^*(t) = 0$ is fulfilled if and only if when the point $(x^*(t), y^*(t))^T$ of the geometric position of the original system at the instant t satisfies the equation of the straight line $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0$.



The switching line is not universal :
it is individual for each extremal motion



one - sided case
($u_1 = 0$)

an example with $u_1 = 0.5$
strictly one - sided case
($0 < u_1 < 1$)

Слайд 7

Слайд показывает типы экстремальных движений, которые могут быть в случае одностороннего поворота и в случае строго одностороннего поворота. В первом случае экстремальное движение состоит из дуг окружностей при $u = 1$ и прямолинейных участков при $u = 0$. Количество переключений не превышает двух. Во втором случае экстремальное движение складывается из дуг большого радиуса при $u = u_1$ и дуг малого радиуса при $u = 1$. Количество переключений конечно, но может быть сколь угодно большим при увеличении момента t_f .

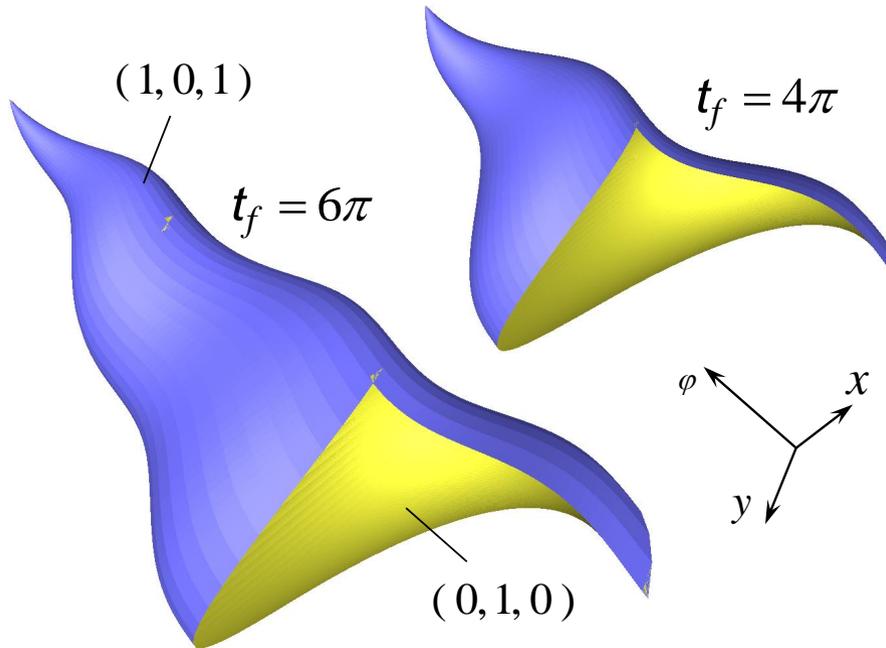
Slide 7

The slide shows the types of extreme motions that can occur in the case of a one-sided turn and in the case of a strictly one-sided turn. In the first case, the extreme motion consists of arcs of circles at $u = 1$ and straight line parts at $u = 0$. The number of switches does not exceed two. In the second case, the extreme motion consists of arcs of large radius at $u = u_1$ and arcs of small radius at $u = 1$. The number of switches is finite, but it can be arbitrarily large with an increase in the instant t_f .

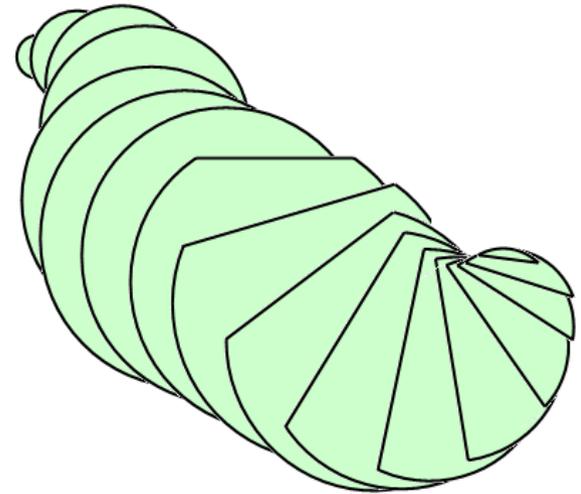
One-sided case:
types of extremal motions,
structure of the reachable set
boundary

One-sided case $u_1=0$

(it is allowed to move in a straight line)



Two variants of controls leading the motion onto the boundary



Convexity of φ -sections:
circle for $\varphi \geq 2\pi$ and
circular segment for $\varphi < 2\pi$

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2018) *Reachable set at a certain time for a Dubins car in the case of a one-sided turn*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 24, no. 1, pp. 143–155 (in Russian).

Слайд 9

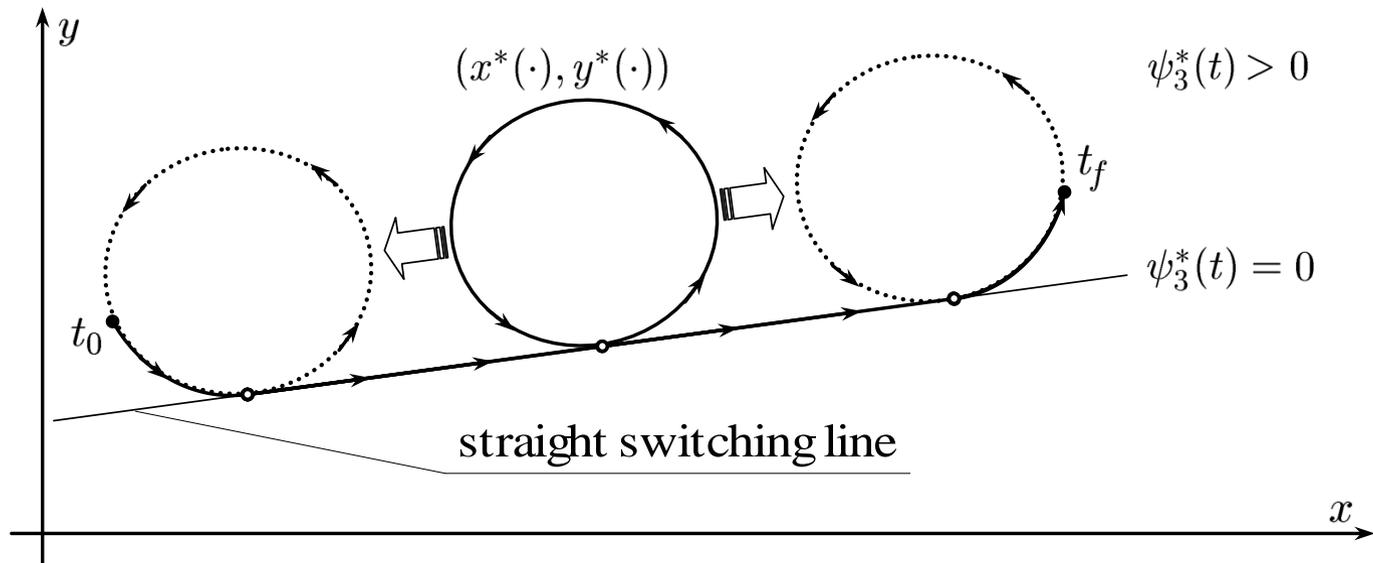
В случае одностороннего поворота граница множества достижимости разбивается на две части (синяя и жёлтая). В каждую точку синей поверхности ведёт управление вида $1, 0, 1$. Продолжительность участков постоянства управления зависит от рассматриваемой точки. В каждую точку жёлтой поверхности ведёт управление вида $0, 1, 0$. Неожиданным для нас оказалось свойство выпуклости φ -сечений. Более того, каждое φ -сечение при $\varphi \geq 2\pi$ есть круг с некоторым центром и некоторым радиусом. При $\varphi < 2\pi$ соответствующее φ -сечение представляет собой круговой сегмент. Перечисленные свойства обоснованы авторами в статье 2018 г.

Slide 9

In the case of a one-sided turn, the boundary of the reachable set is divided into two surfaces (blue and yellow). A control of the form $1, 0, 1$ leads to each point on the blue surface. The duration of the parts with constant control depends on the point under consideration. A control of the form $0, 1, 0$ leads to each point on the yellow surface. The convexity property of φ -sections turned out to be unexpected for us. Moreover, each φ -section at $\varphi \geq 2\pi$ is a circle with some center and some radius. For $\varphi < 2\pi$, the corresponding φ -section is a circular segment. The listed properties are justified by the authors in the article of 2018.

One-sided case $u_1=0$

Lemma. Let $u_1=0$. Then any point on the boundary of the reachable set $G(t_f)$ can be reached using the piecewise constant control $u(\cdot)$, which takes the values 0 and 1 with no more than two switching instants.



The non-uniqueness of the extremal motions for $\varphi \geq 2\pi$ due to the transport of the cycle

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2018) *Reachable set at a certain time for a Dubins car in the case of a one-sided turn*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 24, no. 1, pp. 143–155 (in Russian).

Слайд 10

Здесь поясняется, за счёт чего возникает неединственность экстремального движения в случае одностороннего поворота. Причиной является «перенос» цикла при $\varphi \geq 2\pi$.

Slide 10

Here, it is explained why there is a non-uniqueness of extreme motion in the case of a one-sided turn. The reason is the “shift” of the cycle if $\varphi \geq 2\pi$.

One-sided case $u_1=0$

Properties of the reachable set boundary

1. Pontryagin maximum principle	Necessary and sufficient condition
2. φ -sections of the reachable set	Convex: circle for $\varphi \geq 2\pi$ and circular segment for $\varphi < 2\pi$
3. Controls leading to the boundary	Uniqueness for $\varphi < 2\pi$ Non-uniqueness for $\varphi \geq 2\pi$ (in the class of piecewise constant controls)

Слайд 11

В таблице отражены свойства движений, ведущих на границу множества достижимости, и свойство выпуклости его φ -сечений. В одностороннем случае ПМП становится достаточным условием перевода на границу. Это ассоциируется со свойством выпуклости φ -сечений.

Slide 11

The table shows the properties of the motions leading to the boundary of the reachable set and the convexity property of its φ -sections. In the one-sided case, the PMP becomes a sufficient condition of transition to the boundary. This is associated with the convexity property of φ -sections.

**Strictly one-sided case:
types of extremal motions,
structure of the reachable set
boundary**

Strictly one-sided case $u_1 > 0$

Variants of motions which lead onto the boundary

0 Motions with constant (in time) control :

$$u \equiv u_1 \quad \text{or} \quad u \equiv u_2$$

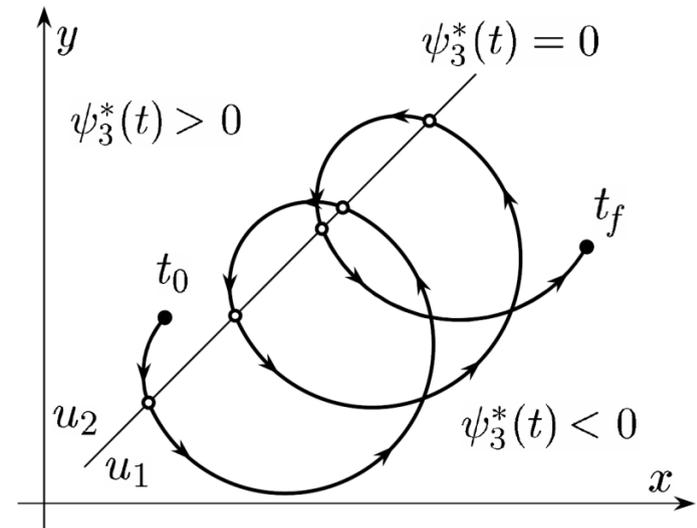
(two extreme points of reachable set)

1 Motions SB: start with control $u = u_2$
and finish with control $u = u_1$;

2 Motions SS: start with control $u = u_2$
and finish with control $u = u_2$;

3 Motions BS: start with control $u = u_1$
and finish with control $u = u_2$;

4 Motions BB: start with control $u = u_1$
and finish with control $u = u_1$.



Example of the SB-type motion

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2019) *The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 25, no. 3, pp. 171–187 (in Russian).

Слайд 13

В случае строго одностороннего поворота мы классифицируем варианты движений, ведущих на границу, исходя из значений управлений на первом и последнем участках постоянства управления. Например, символ **SB** означает, что на первом участке действует управление $u = u_2 = 1$; а на последнем реализуется управление $u = u_1$. Количество переключений управления в каждом из вариантов может быть различным.

Slide 13

In the case of a strictly one-sided case, we classify the variants of motions leading to the boundary, based on the values of controls in the first and last parts of constant control. For example, the symbol **SB** means that the control $u = u_2 = 1$ acts in the first part; and on the latter, the control $u = u_1$ is realized. The number of control switches in each of the variants can be various.

Analytical description of φ -sections of the reachable set, $\varphi > 0$

The
arc
SB

$$\begin{pmatrix} x_{\text{SB}}[t_1] \\ y_{\text{SB}}[t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1 - \cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + n \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \begin{pmatrix} \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 - T_{u_2}) \end{pmatrix}$$

$$T_{u_2} = \frac{t_1^*(n+1) - t_1}{n}, \quad n = \begin{cases} \frac{\varphi}{2\pi} - 1, & \text{if } \varphi \text{ is multiple to } 2\pi, \\ \left[\frac{\varphi}{2\pi} \right], & \text{if } \varphi \text{ is not multiple to } 2\pi. \end{cases}$$

$$t_1^* = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)},$$

The
arc
SS

$$\begin{pmatrix} x_{\text{SS}}[n, t_1] \\ y_{\text{SS}}[n, t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin \left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \\ \sin \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$T_{u_1} = \frac{t_f - \varphi}{(n+1)(1-u_1)}, \quad T_{u_2} = 2\pi - \frac{(t_f - \varphi) \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}$$

$$-2\pi < -T_{u_2} < t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1) \leq T_{u_2} < 2\pi$$

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2019) *The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 25, no. 3, pp. 171–187 (in Russian).

Слайд 14

Для каждого из четырёх вариантов управлений получены аналитические формулы параметрического представления дуг, образующих границу φ -сечений. Варианты **SB** и **BS** аналогичны друг другу. Также аналогичны друг другу варианты **SS** и **BB**.

На слайде дана формула параметрического представления дуги **SB**. В ней величина T_{u_2} является константой. Символ n означает число переключений управления. Оно определяется однозначно. Для каждого φ -сечения дуги **SB** и **BS** существуют.

Кривая **SS** есть дуга окружности. Число переключений n для неё может определяться неоднозначно, исходя из соотношений, представленных в нижней части слайда. А именно, дуга **SS** представляется либо в двух экземплярах при соседних n , либо в одном экземпляре с одним значением n , либо дуга **SS** (при рассматриваемом φ) не существует. Аналогично для дуги **BB**.

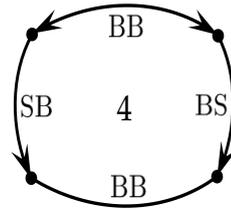
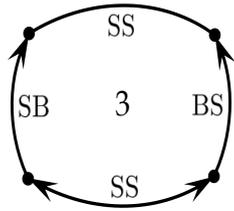
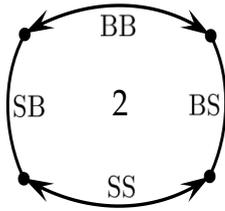
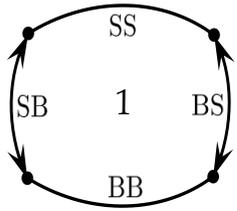
Slide 14

For each of the four control variants, analytical formulas are obtained for the parametric representation of the arcs forming the boundary of the φ -sections. The **SB** and **BS** variants are similar to each other. The **SS** and **BB** variants are also analogical.

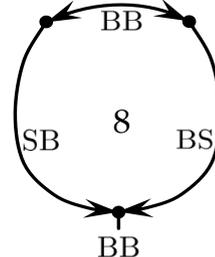
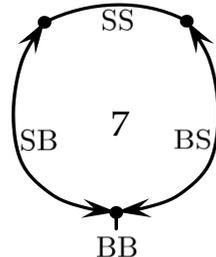
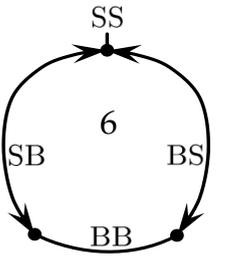
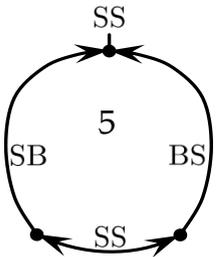
The slide shows the formula for the parametric representation of the arc **SB**. In it, the value T_{u_2} is a constant. The symbol n indicates the number of control switches. It is defined uniquely. For each φ -section, the arcs **SB** and **BS** exist.

The curve **SS** is an arc of a circle. The number of switches n for it may be not unique, based on the relations presented at the bottom of the slide. Namely, the arc **SS** is represented either in two samples for neighboring n , or in one sample with one value of n , or the arc **SS** (for the considered φ) does not exist. It is similar for the arc **BB**.

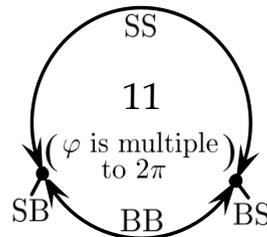
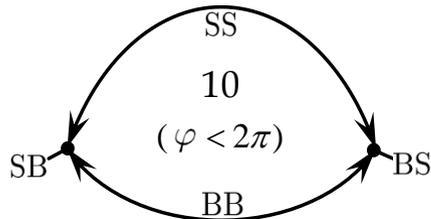
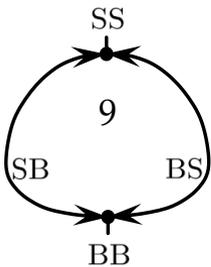
Strictly one-sided case $u_1 > 0$. Types of φ -sections



4 arcs with smooth connection



3 arcs with smooth connection



2 arcs with smooth ($\varphi \geq 2\pi$) or with nonsmooth ($\varphi < 2\pi$) connection

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2019) *The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 25, no. 3, pp. 171–187 (in Russian).

Слайд 15

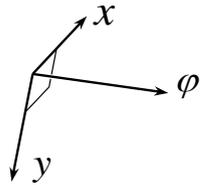
На слайде показаны 11 вариантов границы φ -сечений, которые возможны в строго одностороннем случае. Какие-либо другие варианты невозможны. Любое φ -сечение представляет собой строго выпуклое множество. Соответствующие факты установлены в статье авторов 2019 г.

Slide 15

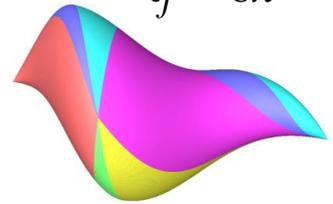
The slide shows 11 variants of the boundary of the φ -sections, which are possible in a strictly one-sided case. Any other variants are not possible. Any φ -section is a strictly convex set. The corresponding facts are established in the author article of 2019.

Reachable sets for the strictly one-sided case $u_1 > 0$

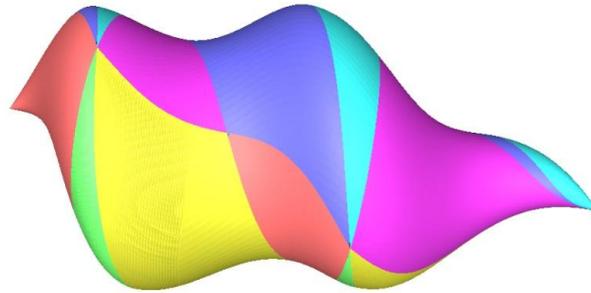
Examples for $u_1 = 0.5$, $u_2 = 1$



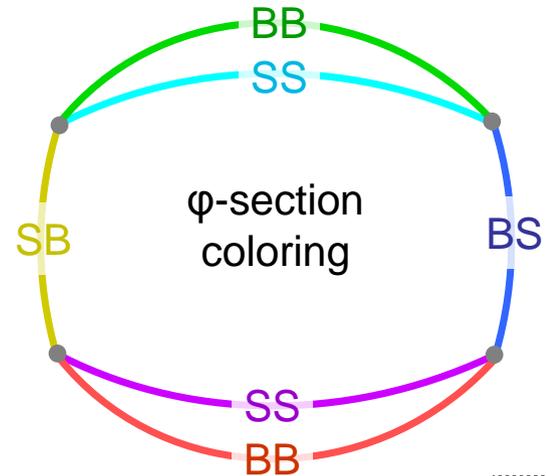
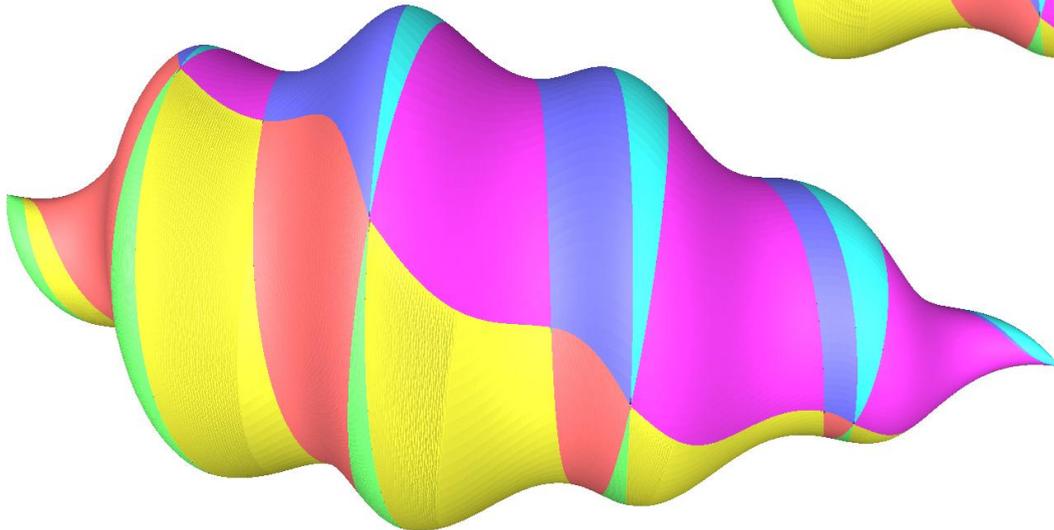
$t_f = 6\pi$



$t_f = 10\pi$



$t_f = 20\pi$



Слайд 16

Здесь представлены трёхмерные множества достижимости в строго одностороннем случае для трёх моментов времени. Раскраска частей граничной поверхности соответствует различным типам дуг (см. символический рисунок внизу справа). В пределах каждого отдельного участка поверхности число переключений управления постоянно.

Slide 16

Here, we present three-dimensional reachable sets in the strictly one-sided case for three time instants. The coloring of the parts of the boundary surface corresponds to different types of arcs (see the symbolic drawing at the bottom right). Within each individual surface part, the number of control switches is constant.

Strictly one-sided case $u_1 > 0$

Properties of the reachable set boundary

1. Pontryagin maximum principle

Necessary and sufficient condition

2. φ -sections of the reachable set

Strictly convex

3. Controls leading to the boundary

Uniqueness in the class of piecewise constant controls

Слайд 17

Данную таблицу для строго одностороннего случая можно сравнить с таблицей на слайде 11, которая была сделана для одностороннего случая. Видим, что φ -сечения стали строго выпуклыми и пропала неединственность экстремальных движений.

Slide 17

This table for the strictly one-sided case may be compared with the table in Slide 11, which was made for the one-sided case. We see that the φ -sections have become strictly convex and the non-uniqueness of extreme motions has disappeared.

Dubins car:

Pontryagin maximum principle
and properties of φ -sections,
uniqueness of motions
leading onto the boundary

Properties of the reachable set boundary. Summary table

	Pontryagin maximum principle	φ -sections of the reachable set	Piecewise constant controls leading onto the boundary
$u_1 = 0$ one - sided case	Necessary and sufficient condition	Convexity : circle for $\varphi \geq 2\pi$ and circular segment for $\varphi < 2\pi$	Uniqueness for $\varphi < 2\pi$ Non-uniqueness for $\varphi \geq 2\pi, t_f > 2\pi$
$u_1 \in (0, 1)$ strictly one - sided case		Strict convexity	Uniqueness
$u_1 = -1$ symmetric case	Only necessary condition	Non convexity	Non-uniqueness
$u_1 \in (-1, 0)$ asymmetric case			

Слайд 19

Итоговая таблица показывает соотношения ПМП и свойства границы φ -сечений для каждого из четырёх случаев, определяемых значением параметра u_1 в постановке задачи.

Slide 19

The final table shows the relations of the PMP and the properties of the boundary of the φ -sections for each of the four cases determined by the value of the parameter u_1 in the problem statement.

Dubins car:

construction of information sets

Слайд 20

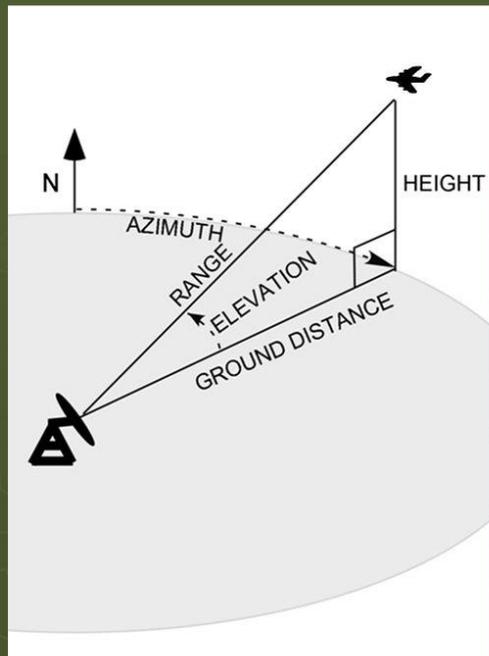
Теперь возвращаемся к построению информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости. Следующие два слайда взяты из первой лекции.

Slide 20

Now we return to the construction of information sets in the problem of observing the motion of an aircraft in a horizontal plane. The following two slides are taken from the first lecture.

An observation problem of aircraft motion

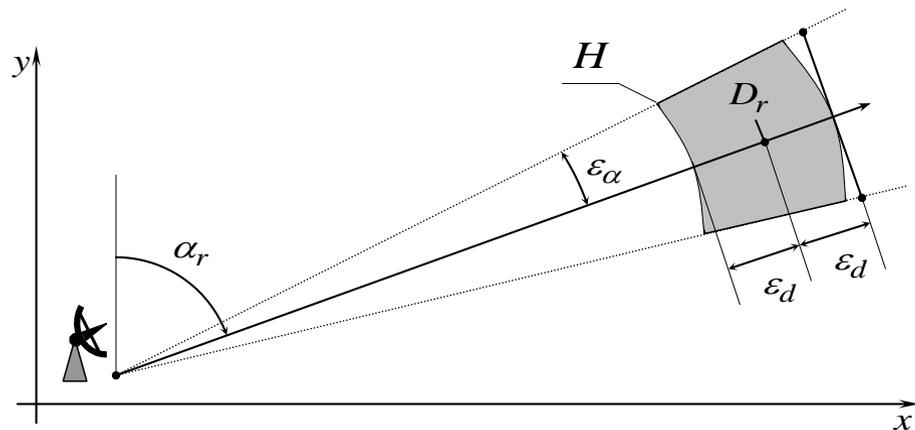
The polar coordinate system used by radars consists of azimuth (angle from north), elevation (angle up from horizontal), and slant range.



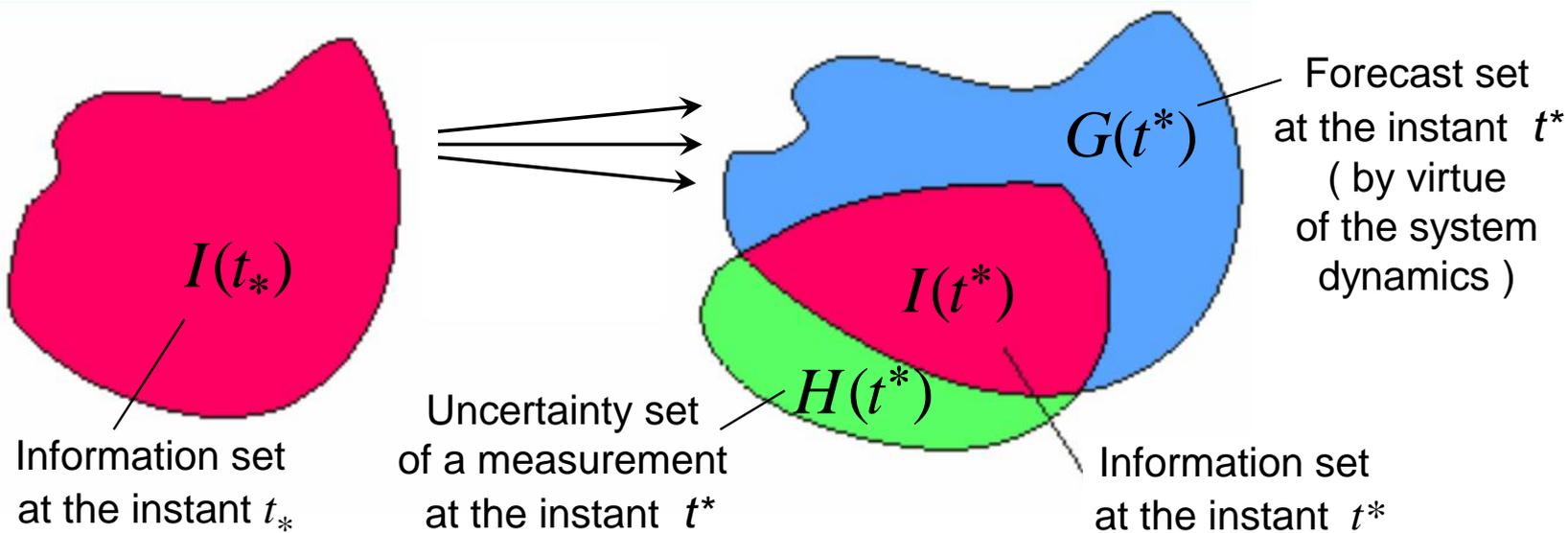
Measurement errors of a radar is restricted by geometric constraints.

Taking into account the dynamics of the aircraft motion, this allows to find an area of possible states of the aircraft during observation process

H is a set of uncertainty for a measurement in the horizontal plane



Using of reachable (forecast) sets for construction of information sets

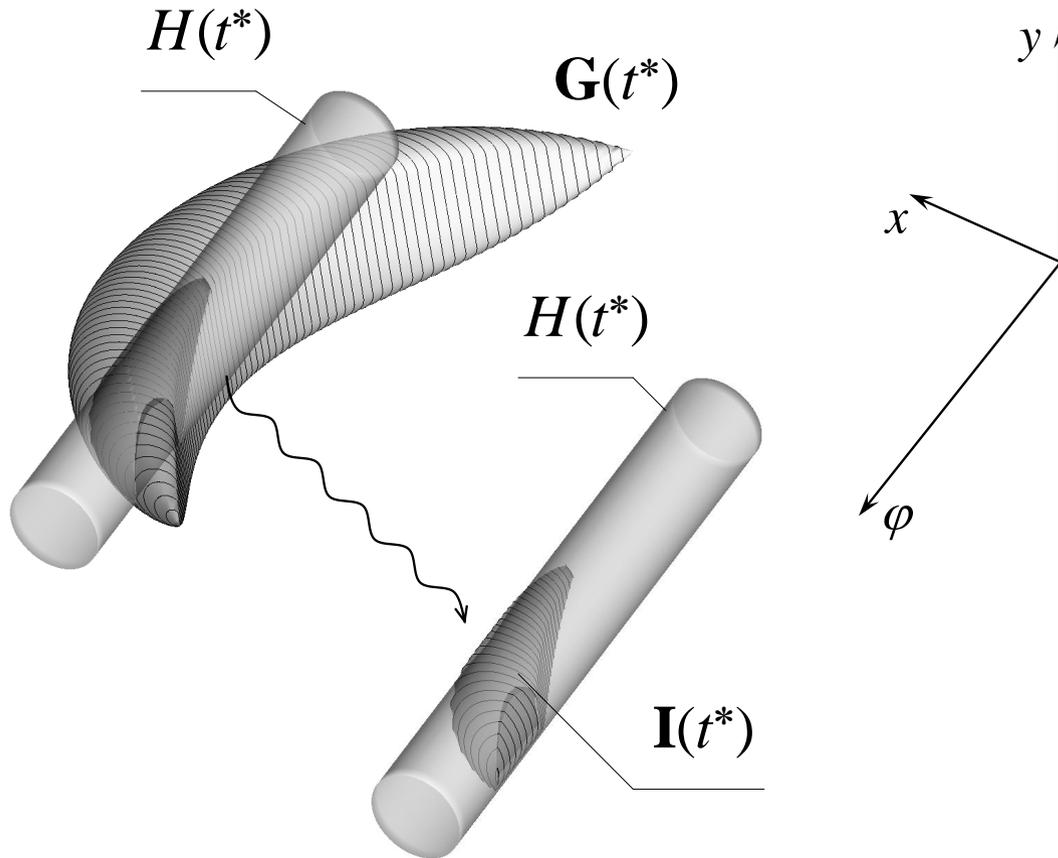


Information set at a current instant is a totality of all phase states consistent with description of the dynamics, constraints on measurement errors, and history of the observation – control process.

Terms equivalent to the term “**information set**” are “feasible set”, “membership set”, “likelihood set”.

The approach is often called the “set membership estimation” or “unknown but bounded error description (UBB approach)”

Intersection of the forecast set with a measurement uncertainty set



Convexity of φ -sections allows to construct fast procedures for intersection

Слайд 23

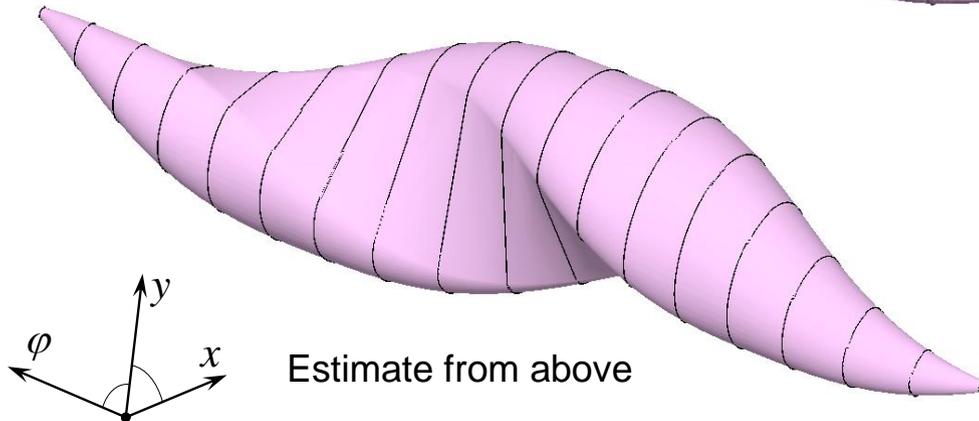
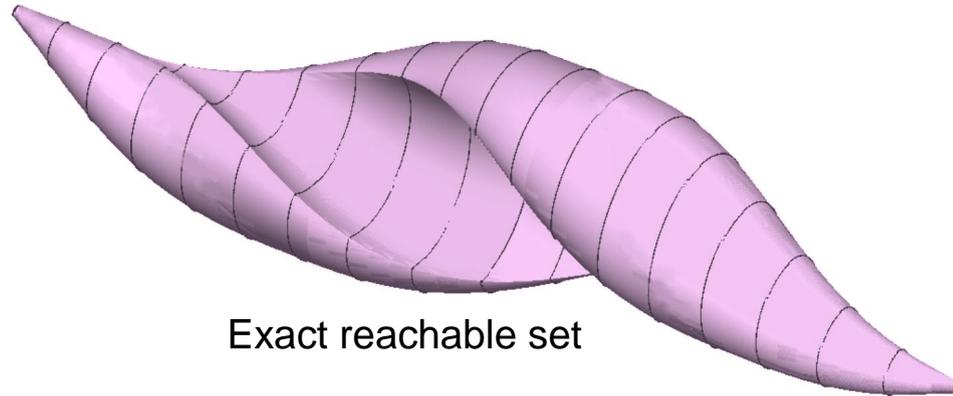
Множество неопределённости замера $H(t^*)$ естественно считать выпуклым и цилиндрическим по угловой координате. Схематичный рисунок поясняет преимущество построения информационных множеств в ситуации, когда φ -сечения трёхмерного множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ были бы выпуклыми. В таком случае можно вести построение множества прогноза на сетке значений φ и использовать простые операции для пересечения выпуклых φ -сечений множества прогноза с выпуклым φ -сечением цилиндрического множества $H(t^*)$. Полученное в результате информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ также будет задано на сетке значений φ .

Slide 23

The set $H(t^*)$ of measurement uncertainty is naturally considered convex and cylindrical on the angular coordinate. The schematic figure explains the advantage of constructing information sets in a situation where the φ -sections of the three-dimensional forecast set $\mathbf{G}(t^*)$ would be convex. In this case, it is possible to construct a forecast set on a grid of values of φ and use simple operations to intersect the convex sections of the forecast set with the convex φ -section of the cylindrical set $H(t^*)$. The resulting information set $\mathbf{I}(t^*)$ will also be defined on the grid of values of φ .

Approximation from above for the reachable set

$$t_f = 2\pi$$



Слайд 24

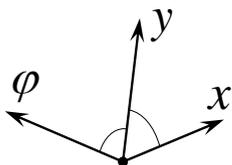
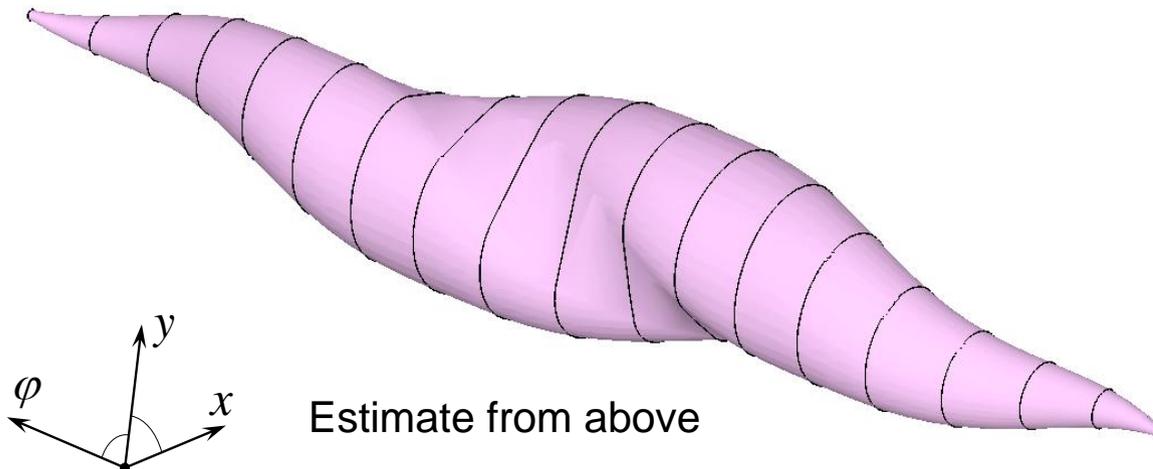
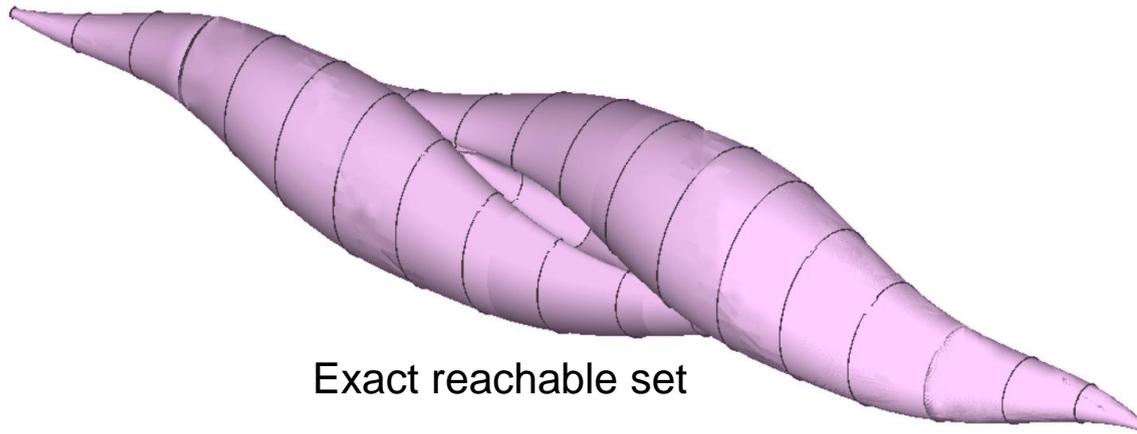
В работе 2003 г. авторы предложили способ построения оценки сверху $\mathbf{G}(t^*)$ для множества прогноза $G(t^*)$. Множество $\mathbf{G}(t^*)$ имеет выпуклые φ -сечения. При одноточечном начальном множестве построение такой оценки сверху эквивалентно овыпуклению φ -сечений идеально построенного множества достижимости, φ -сечения которого выпуклыми не являются. На слайде для момента $t_f = 2\pi$ показано идеальное множество достижимости в симметричном случае и его оценка сверху.

Slide 24

In 2003, the authors proposed a method for constructing an estimate from above $\mathbf{G}(t^*)$ for the forecast set $G(t^*)$. The set $\mathbf{G}(t^*)$ has convex φ -sections. For a single-point initial set, the construction of such an estimate from above is equivalent to the convexification of the φ -sections of an ideally constructed reachable set whose φ -sections are not convex. The slide shows the ideal reachable set in the symmetric case for the instant $t_f = 2\pi$ and its upper estimate.

Approximation from above for the reachable set

$$t_f = 3\pi$$



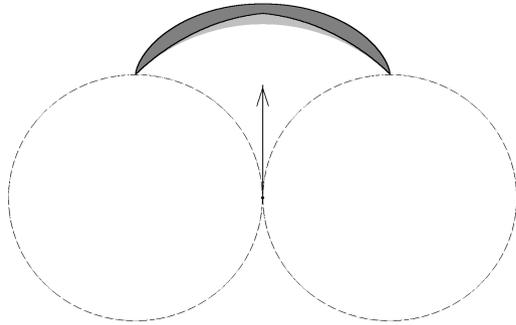
Слайд 25

Здесь идеальное множество достижимости и его оценка сверху показаны для момента $t_f = 3\pi$.

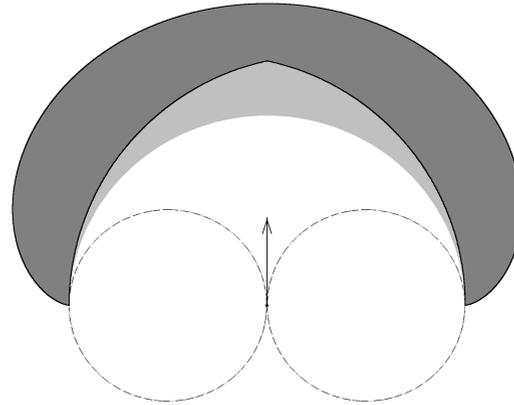
Slide 25

Here, the ideal reachable set and its upper estimate are shown for the instant $t_f = 3\pi$.

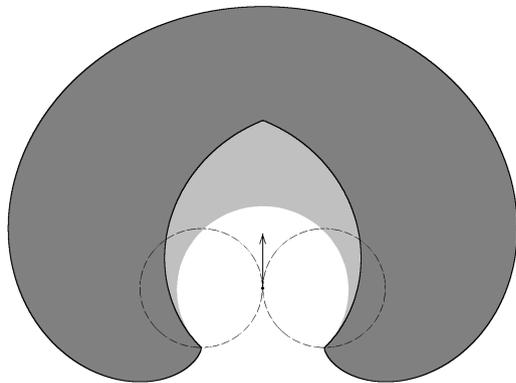
Comparison with exact reachable sets (projection onto the plane x,y)



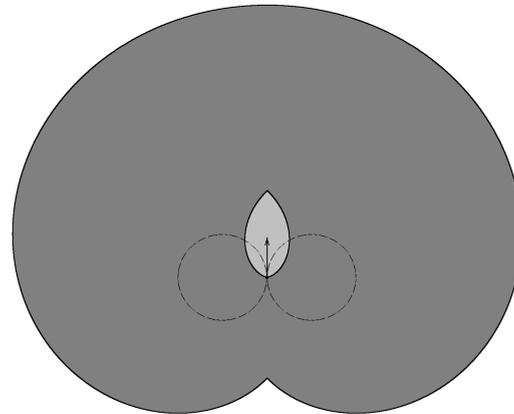
$$t_f = 0.5\pi$$



$$t_f = \pi$$



$$t_f = 1.5\pi$$



$$t_f = 2\pi$$

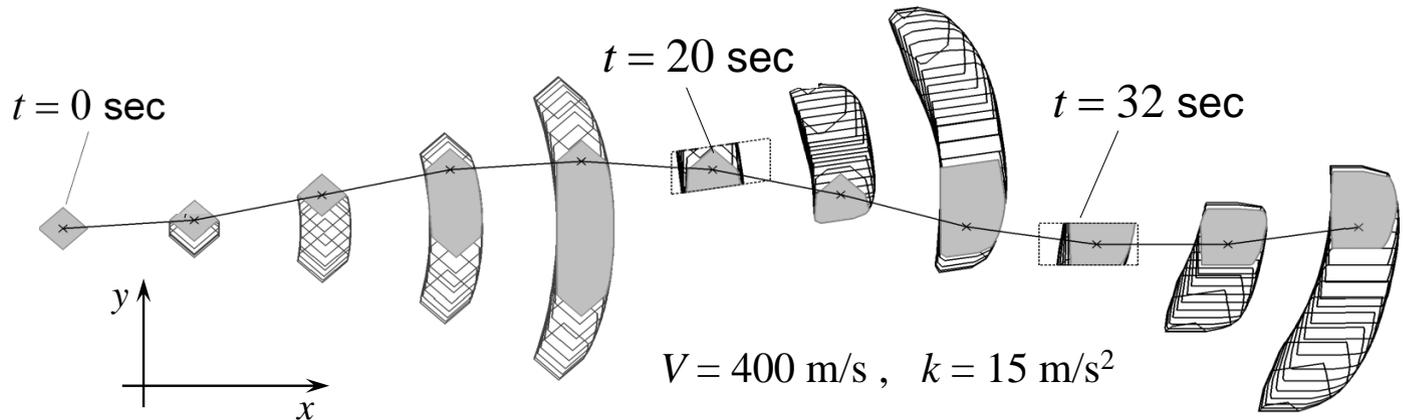
Слайд 26

Слайд поясняет различие проекций точного множества достижимости и аппроксимирующего множества на плоскость x, y . Проекция аппроксимирующего множества показана светло-серой заливкой. Построения сделаны для четырёх моментов времени.

Slide 26

The slide explains the difference between the projections of the exact reachable set and the approximating set into the x, y plane. The projection of the approximating set is shown by a light gray fill. The constructions are made for four time instants.

Motion of the information set, example 1



Measurement instants: 0, 20, 32 sec

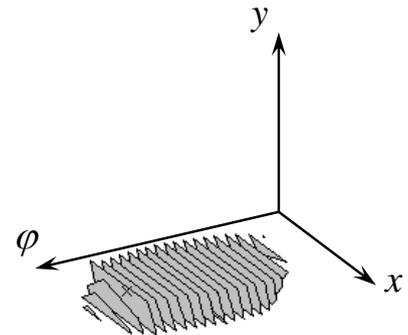
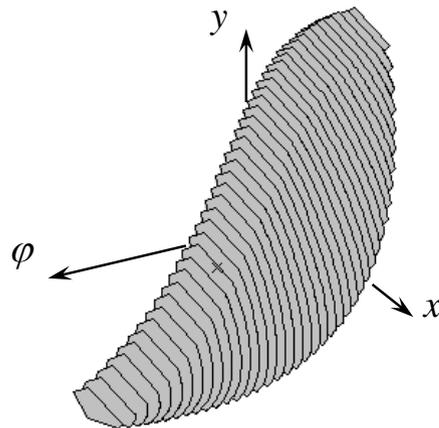
$$\dot{x} = V \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = V \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \frac{k}{V} u; \quad |u| \leq 1,$$

$$k = \text{const} > 0,$$

$$V = \text{const} > 0$$



Structure of the information set at $t = 20$ sec:
Before the measurement (at the left) and after (at the right)

Слайд 27

Приведём модельный пример развития информационного множества во времени. Рассматриваются ненормированные кинематические уравнения, в которых скорость V и коэффициент k являются константами. В начальный момент $t = 0$ предполагаем заданным направление движения (угол φ). Относительно геометрического положения в начальный момент считаем, что оно принадлежит заданному параллелограмму.

Первый замер приходит в момент $t = 20$, второй — в момент $t = 32$. На промежутке $[0, 20)$ информационное множество растёт: увеличивается количество его φ -сечений (выпуклых по построению); некоторые из сечений становятся большими. Слабой заливкой показано сечение, которому принадлежит истинная точка.

Цилиндрическое множество неопределённости, соответствующее замеру в момент $t = 20$, в проекции на плоскость геометрических координат представляет собой параллелограмм. Многие φ -сечения информационного множества «до замера» дают пустое пересечение с этим параллелограммом. В информационное множество «после замера» включаем результаты непустых пересечений. Таким образом, информационное множество после замера также задано на некоторой сетке по координате φ и каждое φ -сечение представляет собой выпуклый многоугольник.

Далее информационное множество вновь растёт до момента $t = 32$ и уменьшается после этого момента.

Slide 27

Here is a model example of evolution in time of an information set. We consider non-normalized kinematic equations, in which the velocity V and the coefficient k are constants. At the initial instant $t = 0$, we assume that the direction of motion (the angle φ) is given. Also, we assume that the geometric position at the initial instant belongs to the given parallelogram.

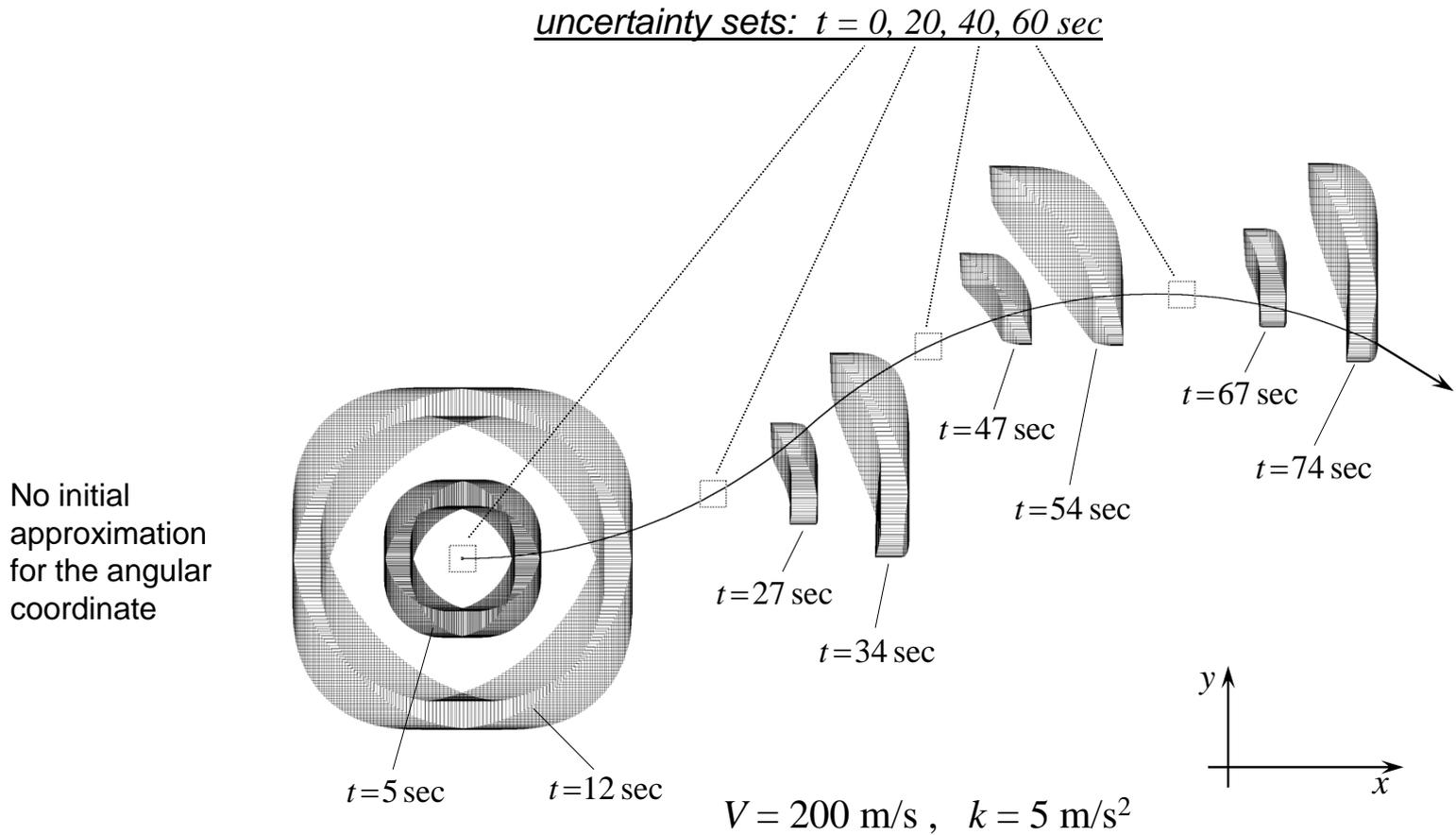
The first measurement comes at the instant $t = 20$ and the second one at the instant $t = 32$. In the interval $[0, 20)$, the information set grows: the number of its φ -sections (convex by construction) increases. Some of the sections become large. A weak fill shows the φ -section, to which the true point belongs.

(to be continued in the next page)

The cylindrical uncertainty set corresponding to the measurement at the instant $t = 20$ is a parallelogram in the projection to the plane of geometric coordinates. Many φ -sections of the information set “before the measurement” give empty intersection with this parallelogram. We include the results of non-empty intersections into the information set “after the measurement”. Thus, the information set after the measurement is also a set in some grid of the coordinate φ and each φ -section is a convex polygon.

Further, the information set grows again until the instant $t = 32$ and contracts after this instant.

Motion of the information set, example 2



Case with the sections approximation by rectangles

Слайд 28

Отличие второго примера в том, что в начальный момент считается неизвестным направление движения. Геометрическое положение в начальный момент принадлежит небольшому квадрату. Замеры приходят с шагом 20 с. Множества неопределённости, соответствующие замерам, являются цилиндрическими по координате φ и в проекции на плоскость геометрических координат представляют собой небольшой квадрат, стороны которого параллельны осям x , y . Снова информационное множество растёт до прихода очередного замера и уменьшается после замера.

При моделировании считали, что при построении множества прогноза φ -сечения аппроксимируются прямоугольниками со сторонами, параллельными осям x , y .

Slide 28

The difference of the second example is that at the initial instant the direction of motion is considered to be unknown. The geometric position at the initial instant belongs to a small square. Measurements come with the time step 20 sec. The uncertainty sets corresponding to the measurements are cylindrical by the coordinate φ and (in projection onto the plane of geometric coordinates) represent a small square, the sides of which are parallel to the x , y axes. Again, the information set grows before the arrival of each next measurement and decreases after the measurement.

During modeling, it was assumed that the φ -sections are approximated by rectangles with sides parallel to the x , y axes when constructing the forecast set.

References

Dubins car :

A. Markov, R. Isaacs, L. Dubins,

E. J. Cockayne, G. W. C. Hall, T. Pecsvaradi, Yu. I. Berdyshev,
J.-P. Laumond, P. Souères, S.M. LaValle, T. Shima, P. Tsiotras, E. Bakolas, M. Pachter,
H. Choi, ...

Information sets :

N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin, A.B.Kurzhanski, M.I. Gusev, Yu.S. Osipov,
A.V. Kryazhimskiy, F.L. Chernousko, B.T. Polyak, V.M. Kuntsevich

D.P. Bertsecas, F.C. Schweppe, H.S. Witsenhausen,
M. Milanese, E. Walter, ...

Last papers of the authors :

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2019) *Reachable set for Dubins car and its application to observation problem with incomplete information*. Control and Automation: 27th Mediterranean Conf., Akko, Israel, 2019: preprints. P. 483–488.

Patsko V.S., Fedotov A.A. (2019) *The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn*. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN, vol. 25, no. 3, pp. 171–187 (in Russian).

Слайд 29

В первой группе ссылок мы отмечаем авторов, которые использовали модель Дубинса в своих работах. Безусловно, указано лишь небольшое число исследователей.

Теория информационных множеств и модельные прикладные задачи, связанные с их построением, интенсивно исследовались в 1970-е и 1980-е гг. в Екатеринбурге, Москве и Киеве. Возник термин «минимаксная фильтрация». На слайде также отмечены фамилии западных исследователей, внесших значительный вклад в развитие теории и соответствующих методов аппроксимации.

В конце слайда приведены две работы авторов 2019 г., связанные с построением и описанием множеств достижимости для машины Дубинса.

Slide 29

In the first group of references, we note the authors who used the Dubins model in their works. Of course, only a small number of researchers are indicated.

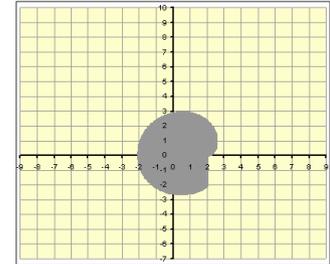
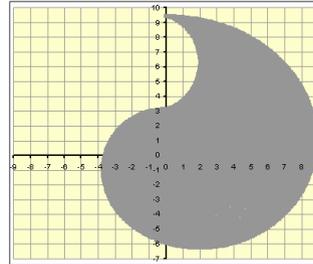
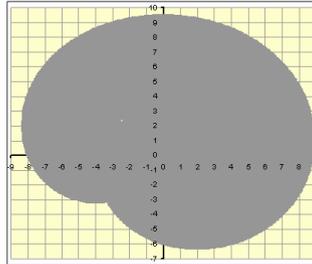
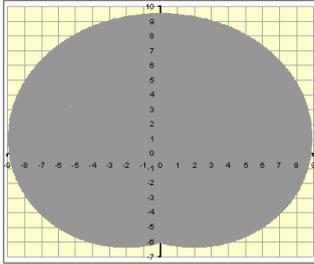
The theory of information sets and model applied problems related to their construction were intensively studied in the 1970s and 1980s in Yekaterinburg, Moscow, and Kiev. The term “minimax filtering” appeared. The names of Western researchers who have made a significant contribution to the development of the theory and the corresponding approximation methods are also indicated on the slide.

At the end of the slide, two works by the authors of 2019 are shown, which relate to the construction and description of reachable sets for the Dubins car.

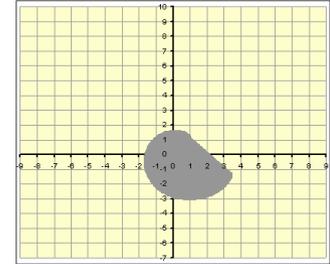
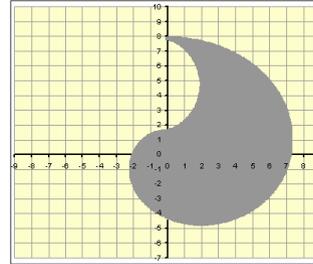
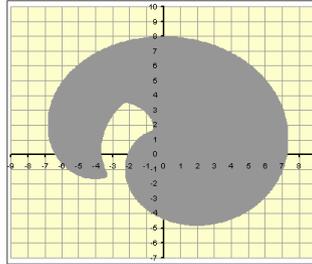
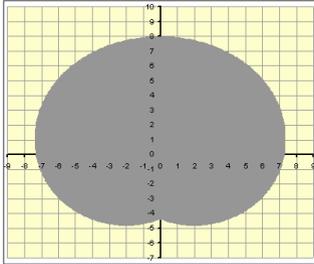
**Some additional
slides and movie**

Reachable sets in the projection onto a geometric plane

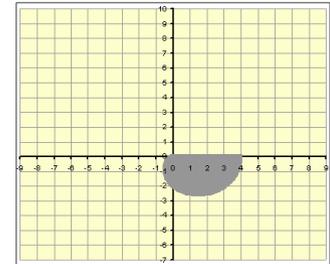
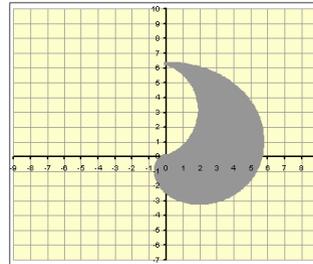
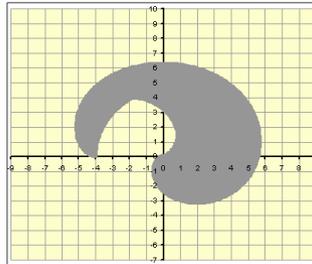
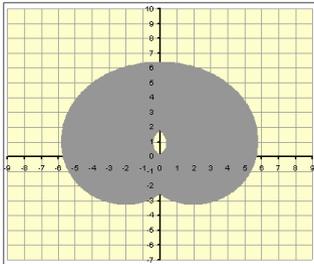
$t_f = 3\pi$



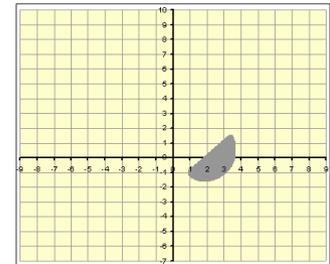
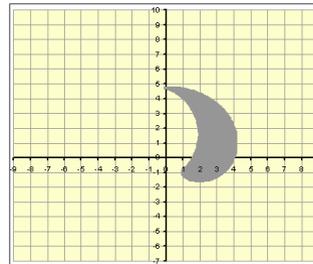
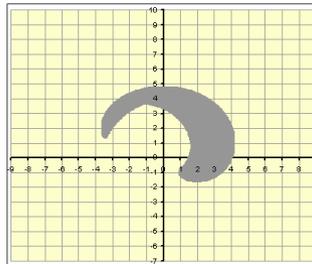
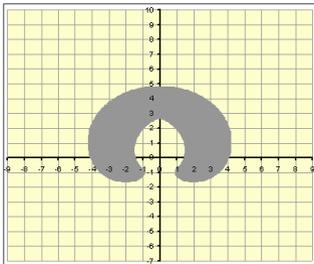
$t_f = 2.5\pi$



$t_f = 2\pi$



$t_f = 1.5\pi$



$u_1 = -1$
(symmetric case)

$u_1 = -0.5$
(asymmetric case)

$u_1 = 0$
(one-side case)

$u_1 = +0.5$
(strict one-side case)

Слайд 31

На слайде представлены результаты численных построений множества достижимости в проекции на плоскость геометрических координат. Левая колонка соответствует симметричному случаю. Здесь результаты численных построений соответствуют аналитическим формулам, полученным в работе E.J. Cockayne, G.W.C. Hall (1975).

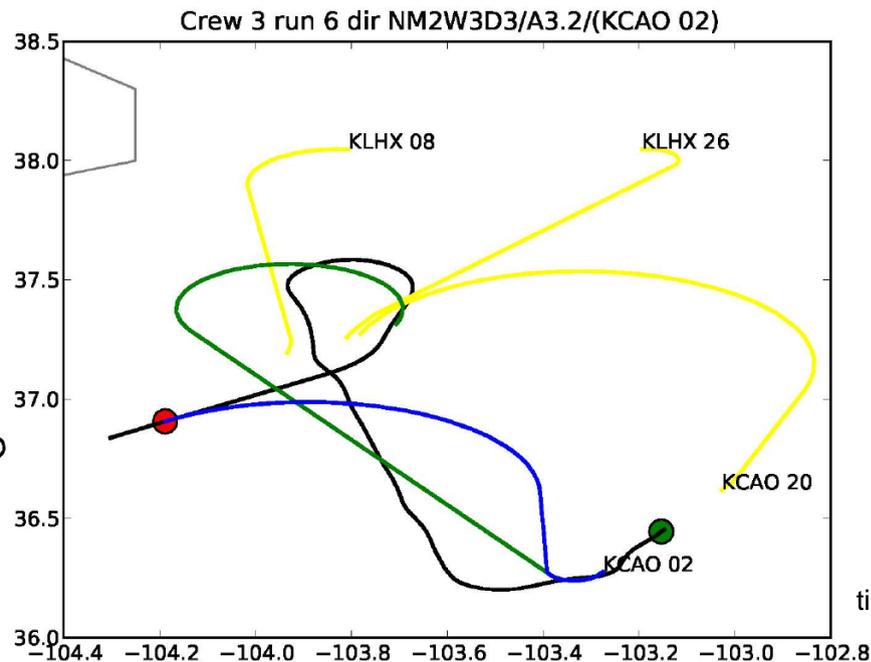
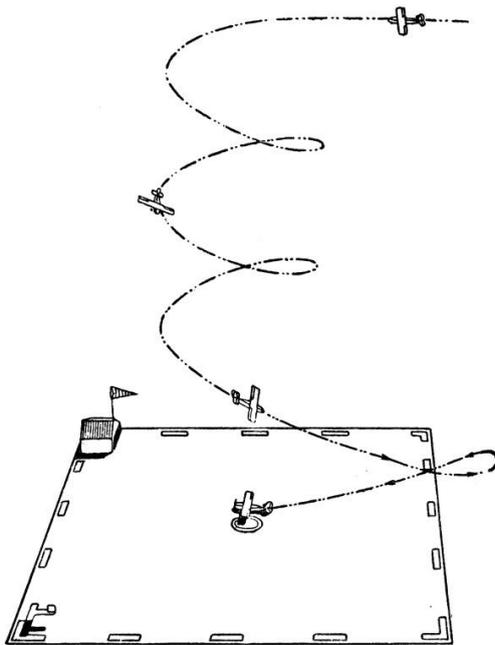
Slide 31

The slide shows the results of numerical constructions of the reachable set in the projection on the plane of geometric coordinates. The left column corresponds to the symmetric case. Here, the results of numerical constructions correspond to the analytical formulas obtained in the work of E.J. Cockayne and G.W.C. Hall (1975).

Cases $u_1=0$ and $u_1>0$. Applications?

We don't know about it surely.

But there are investigations concerning aircraft landing problems with failed engines and ailerons. May be there?



The Emergency Landing Planner Experiment
(2011)

N. Meuleau,
C. Neukom,
C. Plaunt,
D.E. Smith, and
T. Smithy

Intelligent Systems
Division
NASA Ames
Research Center,
California

ti.arc.nasa.gov/publications

Choi H. Time-Optimal Paths for a Dubins Car and Dubins Airplane with a Unidirectional Turning Constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan, 2014. 134 p.

Слайд 32

У авторов нет пока примеров, показывающих возможность использования случаев одностороннего поворота и строго одностороннего поворота. Тем не менее, можно указать работы по прикладной авиационной тематике, в которых моделируется процесс посадки самолёта при отказавших двигателях.

На левом рисунке показан пример, когда самолёт совершает петлеобразные движения с поворотом в одну и ту же сторону. На правом рисунке дан ещё один пример, где возникает нарушение возможности поворота в правую сторону (здесь исходная траектория — синий цвет, планируемая траектория с односторонним поворотом — зелёный цвет, реализованная пилотом траектория — чёрный цвет).

Slide 32

So far, the authors have no examples showing the possibility of using cases of one-sided turn and strictly one-sided turn. Nevertheless, it is possible to specify works on applied aviation topics, in which the process of landing an aircraft with failed engines is simulated.

The figure on the left shows an example when an airplane makes loop-like motions with a turn to the same side. The right figure shows another example where there is a violation of the possibility of turning to the right (here the initial trajectory is blue, the planned trajectory with a one-side turn is green, the trajectory implemented by the pilot is black).

Information sets in four-dimensional space

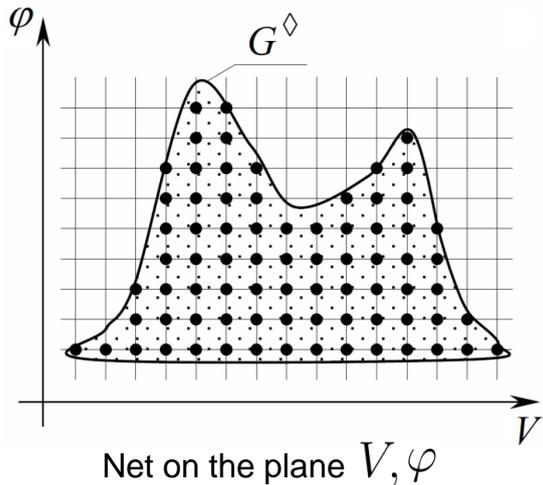
$$\dot{x} = V \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = V \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = ku/V, \quad |u| \leq 1,$$

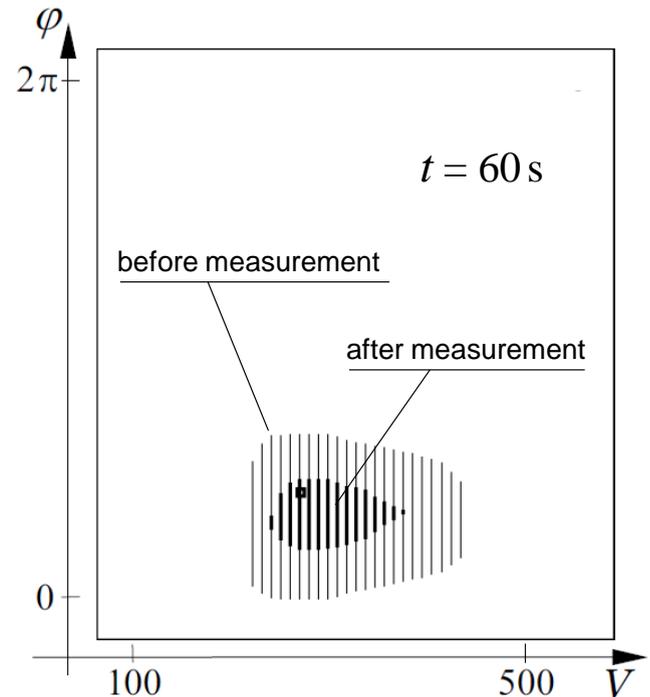
$$\dot{V} = w, \quad k = \text{const} > 0,$$

$$V \geq \text{const} > 0, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2$$



Each node of the grid contains
a convex set in the plane x, y

Filtration of the non-observed coordinates



Слайд 33

У авторов есть некоторый опыт построения информационных множеств в четырёхмерном фазовом пространстве, когда величина линейной скорости является переменной. В этом случае к трём уравнениям машины Дубинса добавляется ещё одно уравнение, описывающее изменение величины линейной скорости. Предполагается, что в процессе движения измеряются с ошибкой геометрические координаты x, y .

Для численного представления четырёхмерного информационного множества используем сетку по ненаблюдаемым координатам φ, V . В каждом узле хранится выпуклое множество по координатам x, y . На рисунке слева показана построенная при помощи сетки проекция G^\diamond четырёхмерного множества прогноза на плоскость φ, V . На рисунке справа показаны непустые узлы сетки до очередного замера и после замера. Количество таких узлов сокращается. В этом и состоит фильтрация ненаблюдаемых координат φ, V .

Slide 33

The authors have some experience in constructing information sets in a four-dimensional phase space, when the value of the linear velocity may vary. In this case, an equation is added to the three equations of the Dubins car. They describe the change of the linear velocity value. It is assumed that during the motion, the geometric coordinates x, y are measured with an error.

For the numerical representation of a four-dimensional information set, we use a grid on unobservable coordinates φ, V . Each node stores a convex set at the x, y coordinates. The figure on the left shows the projection G^\diamond of the four-dimensional forecast set onto the plane φ, V , constructed using a grid. The figure on the right shows non-empty grid nodes before the next measurement and after the measurement. The number of such nodes is reduced. This is what it is the filtering of the unobservable coordinates φ, V .

The task of flying an aircraft through the given sets

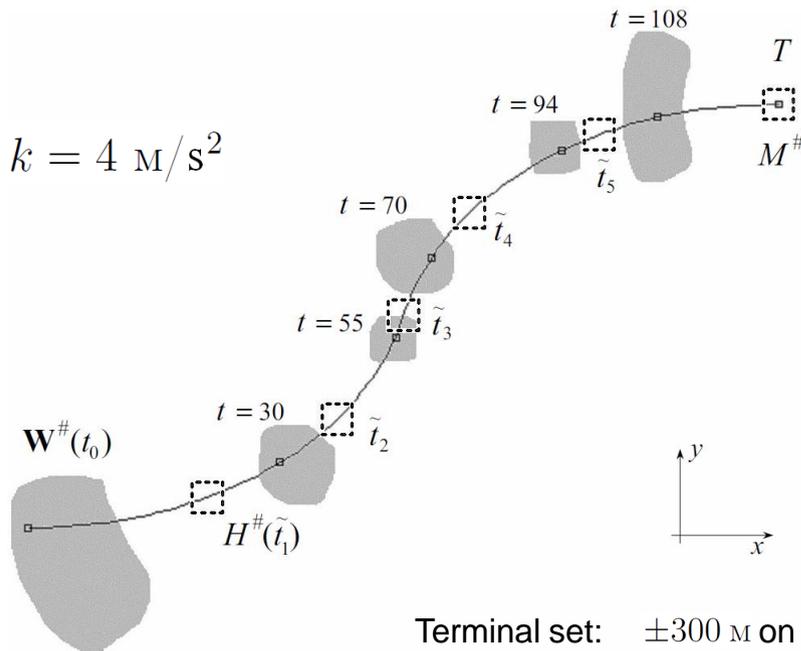
$$\dot{x} = V \cos \varphi + v_1, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq \nu$$

$$\dot{y} = V \sin \varphi + v_2, \quad |w| \leq \mu$$

$$\dot{\varphi} = ku/V, \quad |u| \leq 1$$

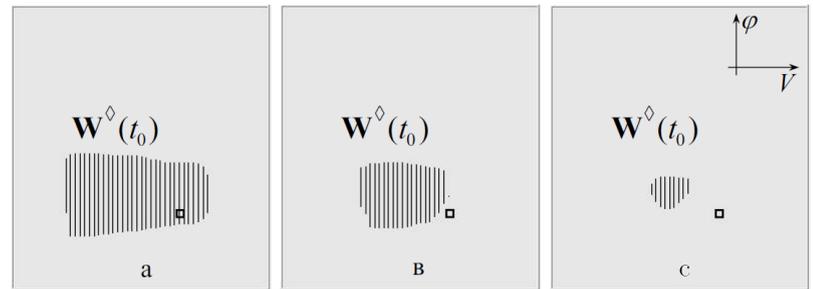
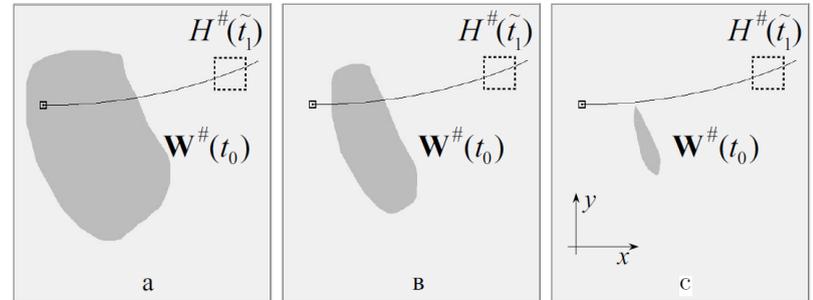
$$\dot{V} = w, \quad V \geq \text{const} > 0$$

$$k = \text{const} > 0$$



The impact of wind constraints on results

a) $\nu = 16 \text{ M/s}$, B) $\nu = 20 \text{ M/s}$, c) $\nu = 21 \text{ M/s}$.



Слайд 34

На слайде представлен результат моделирования четырёхмерной задачи проводки самолёта, где в описании динамики присутствует ветровое возмущение $v = (v_1, v_2)^\top$. Цель управления – привести фазовый вектор на выпуклое множество $M^\#$ в заданный момент T . При этом траектория системы по геометрическим координатам в оговоренные моменты времени \tilde{t}_i должна проходить через заданные множества $H^\#(\tilde{t}_i)$. Такие множества аналогичны множествам неопределённости в задаче фильтрации.

Применяя попятные процедуры из теории дифференциальных игр (попятные процедуры построения максимальных стабильных мостов), мы строим множества гарантированной разрешимости задачи в четырёхмерном фазовом пространстве. Их проекции $\mathbf{W}^\#(t)$ на плоскость геометрических координат для некоторых моментов t отмечены серой заливкой (рисунок слева).

На рисунке справа показана зависимость проекций $\mathbf{W}^\#(t_0)$ множеств разрешимости для трёх вариантов ограничений на ветровую помеху. Видно, что при сильной ветровой помехе начальная точка нашей системы по геометрическим координатам не попадает в множество $\mathbf{W}^\#(t_0)$. Аналогичная картинка для проекций $\mathbf{W}^\diamond(t_0)$ множества разрешимости на плоскость координат φ, V показана на правом рисунке внизу.

Slide 34

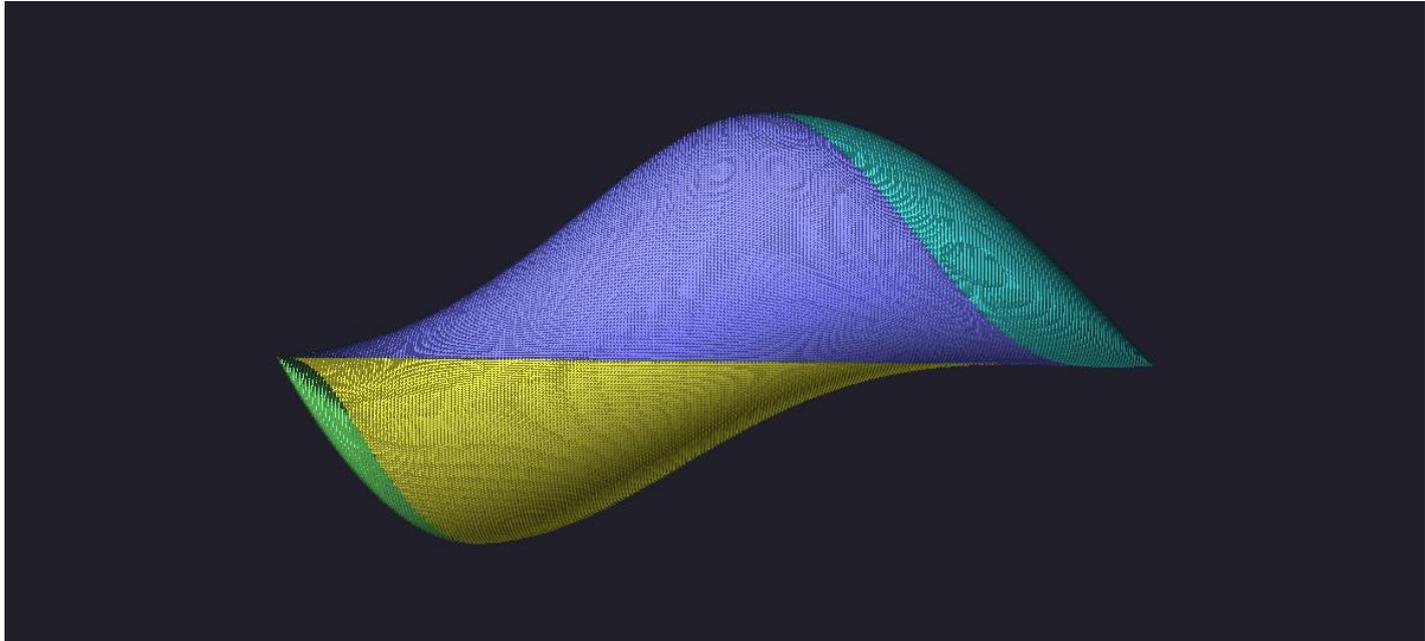
The slide shows the simulation result for a four-dimensional problem of flying an aircraft where the wind perturbation $v = (v_1, v_2)^\top$ presents in the description of the dynamics. The purpose of the control is to bring the phase vector to the convex set $M^\#$ at a given instant T . In this case, the trajectory of the system on the geometric coordinates at the specified time instants \tilde{t}_i must pass through the given sets $H^\#(\tilde{t}_i)$. Such sets are analogous to the uncertainty sets in the filtering problem.

(to be continued in the next page)

Applying backward procedures from the theory of differential games (backward procedures for constructing maximal stable bridges), we construct sets of guaranteed solvability of the problem in a four-dimensional phase space. Their projections $\mathbf{W}^\#(t)$ on the plane of geometric coordinates for some instants t are marked with a gray fill (the figure on the left).

The figure on the right shows the dependence of the projections $\mathbf{W}^\#(t_0)$ of the solvability sets for three variants of restrictions on wind disturbance. It can be seen that with a strong wind disturbance, the initial position of our system on geometric coordinates does not fall into the set $\mathbf{W}^\#(t_0)$. A similar picture for projections $\mathbf{W}^\diamond(t_0)$ of the solvability set onto the coordinate plane φ, V is shown in the right lower figure.

Strictly one-sided turn (case $u_1 > 0$), animation of the reachable set



Here is the reachable set for $u_1=0.5$
when it develops over time in the interval from 4π to 24π .

The video is available here:

http://sector3.imm.uran.ru/POP_LECTURES/SoProMat2020/SoProMat2020_Patsko2020_animation00.html

Слайд 35

П.А. Васёв (лаборатория компьютерной визуализации ИММ УрО РАН) разработал программу, позволяющую смотреть развитие трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса. Представленная здесь анимация показывает развитие множества достижимости во времени для случая строго одностороннего поворота.

Slide 35

P.A. Vasev (Computer Visualization Laboratory of the IMM UB RAS) has developed a program that allows one to watch the evolution of a three-dimensional reachable set for the Dubins car. The animation presented here shows the motion in time of the reachable set for the case of a strictly one-sided turn.