

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА

6

МОСКВА · 1987

УДК 62-50

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ НАВЕДЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

ЗАРХ М. А., ПАЦКО В. С.

Введение. Многие задачи управления при наличии помех могут быть формализованы как антагонистические дифференциальные игры [1–5]. Важным классом антагонистических дифференциальных игр являются игры с геометрическими ограничениями на управляющие воздействия, а среди них — дифференциальные игры наведения на целевое множество в фиксированный момент времени.

Цель первого игрока в игре наведения — привести управляемую систему в заданный момент θ на целевое множество M , второй игрок препятствует этому. Одно из центральных понятий игры наведения — множество W разрешимости задачи, представляющее собой совокупность всех позиций (t_*, x_*) , откуда первый игрок, используя управление, формируемое по принципу обратной связи, гарантирует перевод системы на M в момент θ при любом поведении второго игрока.

В настоящее время разрабатываются численные методы построения множества разрешимости при помощи понятных конструкций, восходящих к работам Р. Айзекса, Р. Беллмана, Л. С. Понтрягина, Б. Н. Пшеничного. Задавшись сеткой моментов t_i и пятась по времени от момента θ , последовательно строят сечения $W(t_i)$. Правило перехода от $W(t_i)$ к $W(t_{i+1})$, $t_{i+1} < t_i$, однотипно по i и составляет суть понятной конструкции. Вопросы численного построения множества W для нелинейных систем рассматривались в [6, 7], а для линейных — в [8–11].

Умение строить множество разрешимости в задачах наведения важно не только само по себе; с его помощью могут быть получены решения других типов дифференциальных игр. Так, в игре с фиксированным моментом окончания θ и терминальной платой γ множество уровня $\{(t, x) : \Gamma(t, x) \leq c\}$ функции цены Γ совпадает с множеством разрешимости W_c игры наведения, в которой целевое множество имеет вид $M_c = \{x : \gamma(x) \leq c\}$. Задав наряду с сеткой моментов t_i конечный набор значений параметра c и построив для каждого c из этого набора сечения $W_c(t_i)$, можно на их основе численно определить оптимальные стратегии первого и второго игроков в игре с платой γ .

Игра наведения с линейной динамикой обладает рядом особенностей, позволяющих существенно упростить вычислительные процедуры нахождения сечений $W(t)$ по сравнению с общим нелинейным случаем. Две главные особенности состоят в следующем. Если целевое множество M выпукло, то выпуклы и сечения $W(t)$. Если M цилиндрично по всем координатам, за исключением некоторых m координат, то размерность задачи может быть понижена до порядка m путем перехода к эквивалентной игре наведения [2, 4] без фазовой переменной в правой части. Отметим, что сечение множества разрешимости для момента t , записанное в координатах эквивалентной задачи, совпадает с альтернированным интегралом [3], построенным на промежутке $[t, \theta]$ от множества M .

Методы построения сечений множества разрешимости (в координатах эквивалентной задачи) доведены до стандартных вычислительных программ при $m=2$ [11]. В настоящей работе рассматривается случай $m=3$. Целевое множество считается выпуклым, управляющие воздействия первого и второго игроков предполагаются скалярными. На основе описываемого метода разработана стандартная программа построения сечений множества разрешимости.

Переход от исходной дифференциальной игры (она может иметь большую размерность) к эквивалентной игре третьего порядка не представляет существенной трудности. Вся сложность состоит в решении эквивалентной игры. Именно поэтому в названии работы говорится об игре третьего порядка.

В конце статьи приведены два примера, просчитанные на ЭВМ. Первый из них связан с задачей управления боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. Линеаризованная система дифференциальных уравнений имеет седьмой порядок, целевое множество зависит от трех координат фазового вектора. На втором примере демонстрируется возможность использования программы построения сечений множества разрешимости трехмерной дифференциальной игры для нахождения функции цены в двумерной игре с терминальной платой. Такая возможность опирается на результаты работы [12].

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейную дифференциальную игру

$$\dot{x}=Ax+Bu+Cv, \quad (1.1)$$

$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R, \quad v \in Q \subset R$$

двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ и выпуклым, замкнутым целевым множеством $M \subset R^n$. Предположим, что множество M цилиндрично по всем координатам, за исключением трех выделенных координат вектора x . Не теряя общности, условимся, что такими координатами являются три первые координаты. Итак, множество M имеет вид $M = \{x \in R^n : (x_1, x_2, x_3)' \in M^*\}$, где M^* — выпуклый компакт из R^3 . Первый игрок стремится привести систему (1.1) на M в момент ϑ , второй препятствует этому. Пусть W — совокупность всех начальных позиций (t_*, x_*) , $t_* \leq \vartheta$, откуда разрешима за первого игрока задача наведения на M в момент ϑ в классе управлений, формируемых по принципу обратной связи [2].

Обозначим через $X^*(\vartheta, t)$ матрицу, составленную из трех первых строк фундаментальной матрицы Коши $\exp A(\vartheta-t)$. Используя замену $y(t) = X^*(\vartheta, t)x(t)$, перейдем от (1.1) к эквивалентной игре наведения

$$\dot{y} = D^*(t)u + E^*(t)v, \quad (1.2)$$

$$D^*(t) = X^*(\vartheta, t)B, \quad E^*(t) = X^*(\vartheta, t)C,$$

$$y \in R^3, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

третьего порядка с целевым множеством M^* . Множество разрешимости для игры (1.2) обозначим W^* . Сечения $W(t)$ и $W^*(t)$ связаны соотношением $W(t) = \{x \in R^n : X^*(\vartheta, t)x \in W^*(t)\}$. Требуется построить численную процедуру нахождения сечений $W^*(t)$.

2. Аппроксимирующая игра. Разбивая ось t с шагом Δ влево от ϑ точками t_i , $i=0, 1, 2, \dots$, $t_0 = \vartheta$, рассмотрим кусочно-постоянные функции $D(t) = D^*(t_i)$, $E(t) = E^*(t_i)$, $t \in (t_{i+1}, t_i]$, $i=0, 1, 2, \dots$. Выпуклый компакт M^* заменим выпуклым многогранником M , дифференциальное уравнение (1.2) — уравнением

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad (2.1)$$

$$y \in R^3, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Пусть W — множество разрешимости для аппроксимирующей игры (2.1). При любом $t \leq \theta$ сечение $W(t)$ — выпуклый многогранник [13] (если $W(t) \neq \emptyset$). Оценки близости $W(t)$ и $W^*(t)$ имеются в [8, 10].

Нас будут интересовать сечения $W(t_i)$, $i=0, 1, 2, \dots$. Положим

$$P_i = D(t_i)P, \quad Q_i = E(t_i)Q, \quad W_i = W(t_i).$$

Имеем $W_0 = M$. Пусть $F_i = W_i - \Delta P_i$. Символами q_i^* , q_i^0 обозначим крайние точки отрезка Q_i . Для любого $i=0, 1, 2, \dots$ многогранник W_{i+1} есть пересечение многогранников $F_i - \Delta q_i^*$ и $F_i - \Delta q_i^0$ [13]. Пересекаемые многогранники отличаются друг от друга лишь сдвигом, причем он мал при малом Δ . Такая специфика позволяет найти результат пересечения более экономно, чем в случае двух произвольных многогранников [14].

3. Опорная функция многогранника W_{i+1} . Будем описывать многогранники при помощи опорной функции ρ . Положим $\eta_i(l) = \rho(l, F_i) - \rho(l, \Delta Q_i)$, $l \in R^3$. Опорная функция $\rho(\cdot, W_{i+1})$ многогранника W_{i+1} совпадает с выпуклой оболочкой функции η_i [13]. Последняя выпукла в каждом из полупространств, определяемых проходящей через нуль плоскостью, ортогональной отрезку Q_i . Стало быть, локальная выпуклость функции η_i может нарушаться лишь на указанной плоскости. Отличие η_i от своей выпуклой оболочки зависит от величины шага Δ . Эти обстоятельства, представляющие собой на языке двойственного описания переформулировку указанных выше особенностей образования многогранника W_{i+1} , позволяют при помощи конечного итерационного процесса достаточно быстро построить опорную функцию $\rho(\cdot, W_{i+1})$.

Опишем способ представления произвольной непрерывной, положительно однородной, кусочно-линейной функции с выпуклыми конусами линейности. Такой функцией, в частности, является опорная функция многогранника. В терминах этого представления будет изложен алгоритм построения опорной функции $\rho(\cdot, W_{i+1})$.

Опорная функция любого выпуклого многогранника есть непрерывная, положительно однородная, кусочно-линейная функция. Именно, каждой вершине \bar{y} многогранника соответствует выпуклый конус, в котором опорная функция линейна. Если многогранник невырожденный, то конус линейности является многогранным, а образующие конуса суть внешние нормали к граням многогранника, содержащим вершину \bar{y} . В дальнейшем под нормальми будем понимать единичные векторы.

Пусть ξ — непрерывная, положительно однородная (но не обязательно выпуклая), кусочно-линейная функция в R^3 с выпуклыми конусами линейности. Введем на единичной сфере S сетку $G(\xi)$, определяемую пересечением сферы с конусами линейности функции ξ . Например, если I — отрезок в R^3 и $\xi = \rho(\cdot, I)$, то $G(\xi)$ — окружность на S , лежащая в плоскости, проходящей через нуль и ортогональной отрезку I . Если I — невырожденный выпуклый многогранник, то каждому конусу линейности функции $\xi = \rho(\cdot, I)$ в сетке $G(\xi)$ соответствует многоугольный сектор на сфере.

Узлы сетки $G(\xi)$ (в случае, когда функция ξ имеет многогранные конусы линейности) обозначим l^k . Дугу сетки, соединяющую соседние узлы, назовем связью. Функция ξ с многогранными конусами линейности полностью определяется своей сеткой $G(\xi)$ и значениями $\xi(l^k)$ в узлах. В ЭВМ сетку можно хранить в виде набора $\{l^k\}$ и наборов J^k , сопоставляющих каждому узлу с номером k номера всех соседних с ним узлов. Выпуклая оболочка $\text{conv } \xi$ функции ξ есть опорная функция многогранника, получаемого пересечением полупространств $l^{k'} y \leq \xi(l^k)$ при переборе всех узлов l^k сетки $G(\xi)$.

Будем считать, что понятная процедура построения сечений множества разрешимости обрывается не только тогда, когда на некотором очередном шаге с номером $e+1$ многогранник W_{e+1} оказывается пустым (т. е.

$\text{conv } \eta_e$ не существует), но и в случае, когда многогранник W_{e+1} является вырожденным. Это естественно, поскольку в случае вырождения процесс попятного построения неустойчив. Итак, при образовании многогранника W_{i+1} многогранник W_i считаем невырожденным. Невырожденным будет тогда и многогранник F_i .

Условимся, что все конусы линейности функции $\rho(\cdot, W_i)$ — трехгранные (и, следовательно, секторы сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$ — треугольные). Для этого нужно разбить секторы начальной сетки $G(\rho(\cdot, W_0)) = G(\rho(\cdot, M))$ на треугольные и в дальнейшем при образовании новых сеток вводить в случае

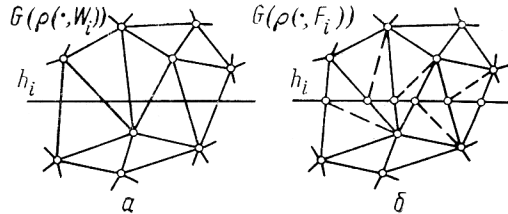


Рис. 1

необходимости дополнительное разбиение. Говоря о таком разбиении, будем подразумевать, что оно осуществляется без увеличения числа узлов в сетке. Добавляются только связи.

Сетка $G(\rho(\cdot, F_i))$ есть результат наложения сеток $G(\rho(\cdot, W_i))$ и $G(\rho(\cdot, P_i))$. Поскольку P_i — отрезок, то $G(\rho(\cdot, P_i))$ представляет собой окружность h_i на сфере S — пересечение сферы с проходящей через нуль плоскостью, ортогональной P_i . В сетке $G(\rho(\cdot, F_i))$ содержатся все узлы сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$. Новые узлы — пересечения h_i с $G(\rho(\cdot, W_i))$ (рис. 1). Начиная с произвольной связи сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$, пересекающей окружность h_i , движемся вдоль окружности, последовательно фиксируя новые узлы и новые связи. Для того, чтобы все секторы сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$ были треугольными, устанавливаем дополнительные связи (показаны на рис. 1, б штрихами). Сетка $G(\rho(\cdot, F_i))$ будет полностью сформирована, когда сделаем полный оборот вдоль окружности h_i и придем к той связи, с которой начали.

Пусть p_i^* , p_i^0 — вершины отрезка P_i . Значения опорной функции многогранника F_i на узлах сетки $G(\rho(\cdot, F_i))$ вычисляются по следующему правилу. Если l — узел сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$, то

$$\rho(l, F_i) = \rho(l, W_i) + \Delta \max \{-l' p_i^*, -l' p_i^0\}.$$

Если узел l новый, то он является пересечением окружности h_i с некоторой связью $l_1 l_2$ сетки $G(\rho(\cdot, W_i))$. Поэтому $l' p_i^* = l' p_i^0$ и $l = \alpha l_1 + \beta l_2$ при некоторых $\alpha, \beta > 0$. Имеем

$$\rho(l, F_i) = \alpha \rho(l_1, W_i) + \beta \rho(l_2, W_i) - \Delta l' p_i^*.$$

Символом φ_i обозначим непрерывную, положительно однородную, кусочно-линейную функцию такую, что $G(\varphi_i) = G(\rho(\cdot, F_i))$ и $\varphi_i(l^k) = \eta_i(l^k)$ на каждом узле l^k . Справедливо соотношение $\text{conv } \varphi_i = \text{conv } \eta_i = \rho(\cdot, W_{i+1})$. Итерационный процесс построения $\rho(\cdot, W_{i+1})$ удобно начать не с функции η_i , а с функции φ_i , поскольку она устроена проще: ее сетка совпадает с $G(\rho(\cdot, F_i))$.

4. Алгоритм выпукления. В основе алгоритма лежит проверка локальной выпуклости. Чтобы дать соответствующее определение, рассмотрим функцию ξ с указанными ранее свойствами. Все конусы линейности функции ξ считаем трехгранным. Пусть $l_1 l_2 l_3$, $l_1 l_2 l_4$ — два сектора сетки $G(\xi)$ с

общей связью l_1l_2 . Скажем, что функция ξ локально-выпукла на связи l_1l_2 , если склейка линейных на сепе $\{l_1, l_2, l_3\}$ и сепе $\{l_1, l_2, l_4\}$ кусков ее выпукла на любом малом отрезке, пересекающем сепе $\{l_1, l_2\}$. Здесь сепе — символ выпуклой конической оболочки. Эквивалентное определение, пригодное для вычислений, следующее. Пусть κ_0 — решение системы $l_s'y = \xi(l_s)$, $s=1, 2, 3$, и κ^0 — решение системы $l_s'y = \xi(l_s)$, $s=1, 2, 4$. Тогда каждое из неравенств

$$l_4'\kappa_0 \leq \xi(l_4), \quad l_3'\kappa^0 \leq \xi(l_3)$$

равносильно локальной выпуклости функции ξ на связи l_1l_2 . Ниже в качестве критерия локальной выпуклости будем использовать первое неравенство. Отметим, что если функция ξ локально-выпукла на любой связи своей сетки, то она выпукла в целом на R^3 .

Приведем итерационный алгоритм построения выпуклой оболочки функции φ_i . Символом Z_i обозначим проходящую через нуль плоскость, ортогональную отрезку Q_i . Пусть Z_i^+ , Z_i^- — полупространства, определяемые Z_i . Одно считаем замкнутым, другое — открытым. Как отмечалось, функция η_i выпукла в каждом из полупространств Z_i^+ , Z_i^- . Отсюда, учитывая соотношение между функциями η_i и φ_i , заключаем, что локальная выпуклость функции φ_i может нарушаться только на связях, пересекающих Z_i , либо на связях, у которых оба узла принадлежат одному и тому же полупространству относительно Z_i и связаны с узлом, находящимся в другом полупространстве. Все связи сетки $G(\varphi_i)$ указанного типа заносим в специальный набор Π .

Полагаем $\varphi^{(1)} = \varphi_i$ и проводим локальный анализ связей из Π . В случае локальной выпуклости связь из набора Π выводится и проверяется следующая связь. При обнаружении невыпуклости делаем переход к функции $\varphi^{(2)}$, затем к $\varphi^{(3)}$ и т. д.

Переход от функции $\varphi^{(j)}$ к функции $\varphi^{(j+1)}$ заключается в локальном изменении сетки $G(\varphi^{(j)})$. При этом корректируется и набор Π . В результате в наборе Π будут содержаться все связи сетки $G(\varphi^{(j+1)})$, на которых может отсутствовать локальная выпуклость функции $\varphi^{(j+1)}$.

Опишем переход от функции $\varphi^{(j)}$ к функции $\varphi^{(j+1)}$ и корректировку набора Π при обнаружении локальной невыпуклости. Пусть функция $\varphi^{(j)}$ невыпуклая на связи $q_* = l_1l_2$ из Π , т. е. $l_4'\kappa > \varphi^{(j)}(l_4)$, где κ — решение системы $l_s'y = \varphi^{(j)}(l_s)$, $s=1, 2, 3$, а l_3 и l_4 — отличные от l_1, l_2 узлы смежных по связи l_1l_2 треугольных секторов сетки $G(\varphi^{(j)})$. Выразим вектор l_4 через l_1, l_2, l_3 :

$$l_4 = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3.$$

Поскольку секторы $l_1l_2l_3$ и $l_1l_2l_4$ — смежные, то $\lambda_3 < 0$. Дальнейшие действия зависят от знаков коэффициентов λ_1, λ_2 .

1) Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \leq 0$ ($\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 > 0$), то узел $l_1(l_2)$ удаляем из сетки $G(\varphi^{(j)})$. Из сетки, а также из набора Π удаляем все связи, содержащие $l_1(l_2)$. На сфере S получаем сектор K_* , ограниченный связями сетки $G(\varphi^{(j)})$, оба узла которых соединились с $l_1(l_2)$ при помощи выкинутых связей. Разбиваем K_* новыми связями на треугольные секторы, не добавляя при этом новых узлов. Пусть G^* — новая сетка. В ней на один узел меньше, чем в $G(\varphi^{(j)})$. Определяем $\varphi^{(j+1)}$ как функцию, для которой $G(\varphi^{(j+1)}) = G^*$ и $\varphi^{(j+1)}(l^k) = \varphi^{(j)}(l^k)$ на каждом узле сетки G^* . После заполнения сектора K_* новыми связями заносим их в набор Π . В набор Π заносим также те из граничных связей сектора K_* , которых нет в нем.

2) В случае $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ связь $q_* = l_1l_2$ заменяем на новую связь $q^* = l_3l_4$. Получаем сетку G^* , отличающуюся от $G(\varphi^{(j)})$ только сделанной заменой. Функцию $\varphi^{(j+1)}$ определяем как в случае 1). Связь l_1l_2 из набора Π выводим и заносим в множество Π те из связей $l_1l_3, l_3l_2, l_2l_4, l_4l_1$, которых ранее в нем не было.

3) Если $\lambda_1 \leq 0, \lambda_2 \leq 0$, то пересечение полупространств $l_s' y \leq \varphi^{(j)}(l_s), s = \overline{1, 4}$, пусто. Следовательно, $W_{i+1} = \emptyset$. Построения прекращаются.

Итак, в случаях 1), 2) переход к новой функции есть просто изменение сетки. Имеем $\text{conv } \varphi^{(j+1)} = \text{conv } \varphi^{(j)}$.

Если в итерационном процессе случай 3) не реализуется, то процесс закончится на некотором номере r , когда набор Π исчерпается. При этом функция $\varphi^{(r)}$ будет локально-выпуклой на всех связях своей сетки. Она совпадает с $\text{conv } \varphi$.

При численной реализации процедур, связанных с проверкой неравенства локальной выпуклости и анализом знаков коэффициентов λ_1, λ_2 , в них вводятся малые добавки. Эти добавки обеспечивают прекращение вычислений, когда множество W_{i+1} вырождено или близко к вырождению.

В [15] описан другой алгоритм овыпукления функции φ . В основе его лежит сложная логика обхода связей, на которых может не быть локальной выпуклости.

Овыпуклив функцию φ , получаем опорную функцию $\rho(\cdot, W_{i+1})$ многогранника W_{i+1} . Информация об опорной функции хранится в виде сетки $G(\rho(\cdot, W_{i+1}))$ и значений $\rho(l^k, W_{i+1})$ в узлах сетки. Каждый узел l^k — вектор внешней нормали к одной из граней многогранника W_{i+1} . Поскольку многогранник полностью определяется набором своих нормалей и значениями на них опорной функции, то информация о сетке $G(\rho(\cdot, W_{i+1}))$ — избыточная. Однако, помимо того, что эта информация необходима при используемом алгоритме для построения многогранника W_{i+2} на следующем шаге попятной процедуры, наличие ее позволяет быстро получить графическое представление о многограннике W_{i+1} .

5. Примеры. Рассмотрим в линеаризованной форме задачу об управлении боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения [5, 16]. Динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением $\dot{x} = Ax + Bu + Cv, x \in R^7, u \in P, v \in Q$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0762 & -5.34 & 0 & 9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0056 & -0.392 & -0.0889 & -0.0378 & -0.17 & 0.0378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0129 & -0.9016 & -0.2045 & -0.0869 & -0.89 & 0.0869 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)', C = (0, 0.0762, 0, 0.0056, 0, 0.0129, 0)'$$

$$P = \{u \in R : |u| \leq 0.14\}, Q = \{v \in R : |v| \leq 10\}.$$

Координата x_1 — боковое отклонение центра масс самолета от оси взлетно-посадочной полосы (ВПП), x_2 — скорость бокового отклонения, x_3 — угол рысканья, x_4 — скорость изменения угла рысканья, x_5 — угол крена, x_6, x_7 — вспомогательные переменные. Боковое отклонение измеряется в метрах, углы — в радианах, время — в секундах. Управляющий параметр u — «заданный» угол крена (рад), параметр v — боковая составляющая скорости ветра (м/с). Пусть M^* — параллелепипед в пространстве x_1, x_2, x_3 с вершинами $(20, 0, 0), (20, -10, 0), (20, -10, 0.26), (20, 0, 0.26), (-20, 0, 0), (-20, 10, 0), (-20, 10, -0.26), (-20, 0, -0.26)$. Необходимо выбором управления u привести три первые координаты вектора x в фиксированный момент $\theta = 15$ с на множество M^* . Момент θ трактуем как момент пролета торца ВПП. Перевод на M^* содержательно означает попадание

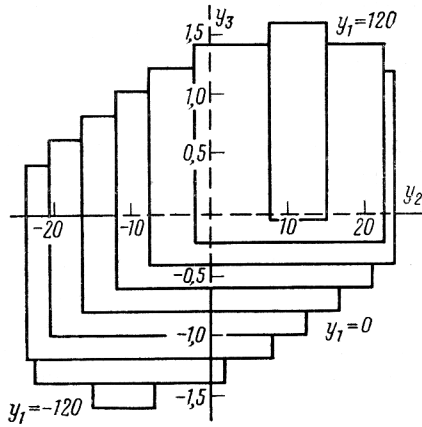


Рис. 2

В качестве второго примера рассмотрим модельную игру с фиксированным моментом окончания ϑ и терминальной функцией платы γ [17]:

$$\dot{x}_1 = x_2 + v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1, \quad \gamma(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Эквивалентная игра без фазовой переменной в правой части имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (\vartheta - t)u + v, \\ \dot{y}_2 &= u, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1, \\ \gamma^*(y) &= \max\{|y_1|, |y_2|\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Добавим к уравнениям (5.1) уравнение $\dot{c} = 0$. Получим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (\vartheta - t)u + v, \\ \dot{y}_2 &= u, \\ \dot{c} &= 0, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Зафиксируем число $\bar{c} > 0$. Пусть $M^* = \{(y_1, y_2, c) : \gamma^*(y) \leq c \leq \bar{c}\}$. Множество M^* — часть надграфика функции γ^* , лежащая ниже уровня \bar{c} . Задав

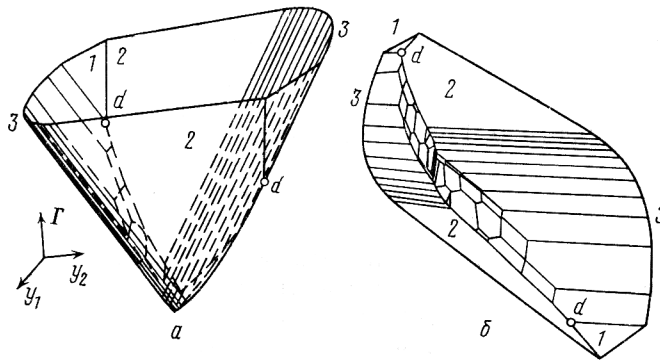


Рис. 3

момент $t \leq \vartheta$ и построив для него сечение множества разрешимости трехмерной игры (5.2) с целевым множеством M^* , получим тем самым срезку надграфика функции цены в игре (5.1) на уровне \bar{c} [12].

На рис. 3 показаны результаты счета на ЭВМ для $t = \vartheta - 2$, $\bar{c} = 2.5$, $\Delta = 0.1$. При помощи центрального проектирования получены вид сбоку

управляемой системы в «допуск». Начальный момент времени положим равным нулю.

Пусть y_1, y_2, y_3 — координаты эквивалентной дифференциальной игры вида (1.2). На рис. 2 приведены результаты построения множества $W^*(0)$ на ЭВМ. Показаны сечения множества $W^*(0)$ плоскостями, ортогональными оси y_1 , с шагом 30 на этой оси. При проведении вычислений шаг Δ попятной процедуры полагался равным 0.1.

Из смысла множества $W^*(0)$ вытекает, что если точка $y(0) = X^*(15, 0)x(0)$ принадлежит $W^*(0)$, то выбором u систему можно привести на M^* в момент $\vartheta = 15$. Если $y(0) \notin W^*(0)$, такой гарантии нет.

(рис. 3, а) на график функции цены Γ^* и вид снизу (рис. 3, б). Цифрами 1, 2 отмечены плоские участки поверхности функции цены, цифрой 3 — линейчатые участки. В пределе, при увеличении точности построений, линейчатые многогранные участки переходят в гладкие. В области координат y_1, y_2 , соответствующей плоским и линейчатым участкам, цена $\Gamma^*(t, y)$ совпадает с программным максимумом. В остальной части пространства переменных y_1, y_2 цена отлична от программного максимума. Точка d соответствует значению $\Gamma^*=2$. Наименьшее значение численно построенной функции цены Γ^* равно 0.6415 и достигается в точке $y=0$. Просчитанное теоретически [17] значение цены в точке $y=0$ равно 0.6518. На рис. 3, б точке $y=0$ соответствует центр симметрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования.— Матем. сб., 1980, т. 112(154), № 3(7).
4. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.
5. Кейн В. М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985.
6. Ушаков В. Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения — уклонения.— Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1980, № 4.
7. Остапенко В. В. Методы решения одного класса задач сближения — уклонения.— Автоматика и телемеханика, 1984, № 6.
8. Пономарев А. П. Оценка погрешности численного метода построения альтернированного интеграла Понтрягина.— Вестник МГУ, сер. 15. Вычисл. Матем. и Кибернет., 1978, № 4.
9. Никольский М. С. Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина.— Матем. сб., 1981, т. 116(158), № 1(9).
10. Боткин Н. Д. Оценка погрешности численных построений в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания.— Проблемы управления и теории информации, 1982, т. 11. № 4.
11. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Свердловск: АН СССР, УНЦ, ИММ, 1984. (Материалы по математическому обеспечению ЭВМ).
12. Субботин А. И., Тарасьев А. М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры.— Докл. АН СССР, 1985, т. 283, № 3.
13. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем.— Кибернетика, 1970, № 2.
14. Маллер Д., Препарата Ф. Нахождение пересечения двух выпуклых многогранников.— В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. Вып. 20. М.: Мир, 1983.
15. Зарх М. А., Пацко В. С. Численное решение трехмерных линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания. Рук. деп. в ВИНТИ № 7509-В-85. М.: ВИНТИ, 1985.
16. Боткин Н. Д., Кейн В. М., Пацко В. С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке.— Прикладная матем. и механ., 1984, т. 48, вып. 4.
17. Тарасьев А. М. Об одной нерегулярной дифференциальной игре.— Прикладная матем. и механ., 1985, т. 49, вып. 4.

Свердловск

Поступила в редакцию
5.1.1986