

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Дел. в ВИНИТИ
03.08.92, № 2546-В92

УДК 517.978

В.Л.Турова

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ВЗЛЕТА И ПРЕКРАЩЕНИЯ
ПОСАДКИ САМОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ ЧИСЛЕННЫХ
МЕТОДОВ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Екатеринбург - 1992

Содержание

	стр.
1. Введение.....	3
2. Нелинейная система уравнений движения.....	5
2.1. Основные обозначения.....	5
2.2. Модели микровзрыва.....	9
3. Робастная стратегия.....	10
4. Минимаксный закон управления	13
4.1. Общая схема построения.....	13
4.2. Вспомогательная линейная дифференциальная игра.....	14
4.3. Оптимальная стратегия первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре.....	17
5. Использование линий переключения в нелинейной системе ..	18
6. Результаты моделирования	22
Литература.....	36

1. Введение

Сдвиг ветра признан причиной многих авиакатастроф. Он, в частности, может быть обусловлен таким метеорологическим явлением как микровзрыв. Микровзрыв возникает при ударе нисходящего потока воздуха о поверхность земли. Попадание самолета в зону микровзрыва особенно опасно на взлете и посадке, т.к. резкое изменение скорости ветра в этом случае происходит на относительно небольшой высоте.

В течение последнего десятилетия появилось большое количество работ, посвященных задаче управления самолетом на взлете и посадке в условиях жестких ветровых возмущений. Данная статья примыкает к работам [2-7,9-13,15-18].

В [12,13,15-18] рассматривается движение в вертикальной плоскости. Изучаются задачи взлета, посадки и прекращения посадки. Для описания динамики используются уравнения одного и того же типа.

В работах [12,16,18] поле скорости ветра предполагается заранее известным. Показывается, что программные способы управления, получаемые из решения соответствующих оптимизационных задач, обеспечивают удовлетворительные траектории для достаточно жестких по интенсивности ветровых возмущений. Ясно, что на практике поле скорости ветра не может быть известным точно. Поэтому более адекватным является построение способов управления по принципу обратной связи. В частности, в [17] на основе полученных в [16] оптимальных решений конструируются стратегии обратной связи, использующие локальную информацию о сдвиге ветра.

В работе [13] применительно к задаче взлета исследуется управление обратной связи, найденное методами теории робастного управления. Основой этих методов является построение некоторой специальной функции Ляпунова. Конструирование функции Ляпунова и

технология ее использования требуют задания ряда параметров. Тщательно подбирая параметры, авторы получают траектории, сравнимые с теми, что найдены в [16] из решения программных задач.

На методы теории робастного управления опирается и построение стратегии обратной связи в работе [15], где ставится задача стабилизации скорости подъема самолета относительно некоторого номинального значения.

Различные варианты минимаксного подхода, основанного на методах теории дифференциальных игр [8], рассматривались в [2-7,9-11] применительно к задаче посадки. В работах [3,6,9,10] использовалась полная модель динамики самолета, включающая уравнения бокового и продольного движений. Характерным для минимаксного подхода является то, что помимо информации о пределах возможного отклонения вертикальной и горизонтальной составляющих скорости ветра от некоторых номинальных значений, никакая дополнительная информация о поле скорости ветра не требуется.

В данной работе делается попытка применить методы теории дифференциальных игр для построения управления в задачах о взлете и прекращении посадки самолета в постановке из работ [16,18]. Полученные результаты сравниваются с приведенными в [13]. Для задачи о посадке исследование в рамках аналогичной постановки описано в [10].

Методика построения минимаксного управления обратной связи состоит в следующем. Исходная нелинейная система линеаризуется относительно желаемого движения, за которое в данной работе принимается равномерное движение с постоянным углом атаки по прямой, составляющей заданный угол с горизонталью. Ставится вспомогательная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. Для этой дифференциальной игры при помощи эффективных программ находится оптимальный гаран-

тирующий способ управления, реализуемый посредством поверхности переключения [1,2]. Найденный способ применяется затем в исходной нелинейной системе.

При моделировании движений нелинейной системы используются различные варианты задания ветровых возмущений и, в частности, модели микровзрыва из работ [13,14,19].

2. Нелинейная система уравнений движения

Как было отмечено, нелинейная модель движения самолета на взлете и посадке заимствована из работ [16,18]. Приведем ее краткое описание.

Рассматривается движение в вертикальной плоскости. Основные предположения следующие. Самолет считается материальной точкой постоянной массы. Сила тяги не регулируемая. Поле скорости ветра стационарно.

Возмущение входит в уравнения динамики через вертикальную и горизонтальную составляющие вектора скорости ветра. Управление самолетом осуществляется при помощи изменения угла атаки.

2.1. Основные обозначения

Обозначения и размерности соответствуют работам [16,18].

V - воздушная скорость самолета, фут/сек;

γ - угол наклонения, рад;

x - горизонтальное расстояние, фут;

h - высота, фут;

W_x -горизонтальная компонента скорости ветра в точке нахождения самолета, фут/сек;

W_h -вертикальная компонента скорости ветра в точке

нахождения самолета, фут/сек;

α - угол атаки, рад;

δ - угол установки тяги, рад;

g - ускорение свободного падения, фут/сек² ;

m - масса самолета, фунт · сек²/фут;

T - сила тяги, фунт;

D - аэродинамическое сопротивление, фунт;

L - подъемная сила, фунт;

ρ - плотность воздуха, фунт · сек²/фут⁴;

S - эффективная площадь самолета, фут² .

Напомним, что 1фут = 0.3048м, 1фунт = 0.4536 кг. Смысл основных переменных поясняется на рис.1.

В нелинейную модель входят два динамических уравнения

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha + \delta) - D - mg \sin \gamma - m\dot{W}_x \cos \gamma - m\dot{W}_h \sin \gamma \\ mV\dot{\gamma} &= T \sin(\alpha + \delta) + L - mg \cos \gamma + m\dot{W}_x \sin \gamma - m\dot{W}_h \cos \gamma \end{aligned} \quad (1)$$

и два кинематических

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma + W_x \\ \dot{h} &= V \sin \gamma + W_h \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку поле скорости ветра стационарно, производные по времени от компонент скорости ветра удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{W}_x &= \frac{\partial W_x}{\partial x}(V \cos \gamma + W_x) + \frac{\partial W_x}{\partial h}(V \sin \gamma + W_h) \\ \dot{W}_h &= \frac{\partial W_h}{\partial x}(V \cos \gamma + W_x) + \frac{\partial W_h}{\partial h}(V \sin \gamma + W_h) \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение для силы тяги имеет вид

$$T = \beta(t)(A_0 + A_1 V + A_2 V^2).$$

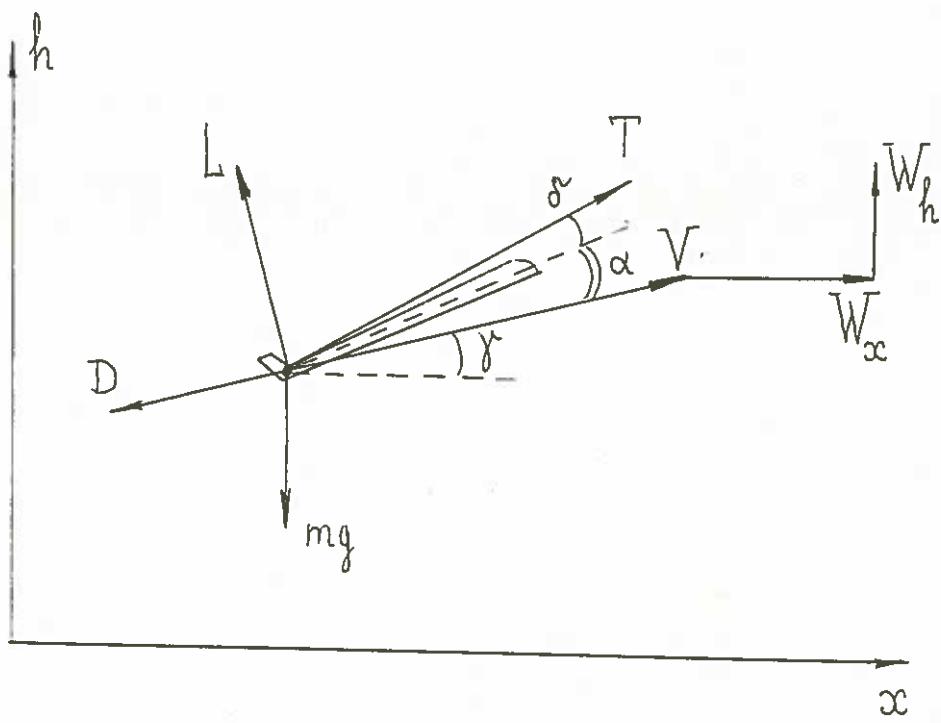


Рис.1. Пояснение основных переменных.

В задаче взлета $\beta(t) \equiv 1$, в задаче о прекращении посадки

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0 + \dot{\beta}_0 t, & t \in [0, t_0] \\ 1, & t \in [t_0, 40], \end{cases}$$

Коэффициенты A_0, A_1, A_2 зависят от высоты взлетно-посадочной полосы над уровнем моря и окружающей температуры.

Аэродинамическое сопротивление и подъемная сила задаются следующими формулами

$$D = \frac{1}{2} C_D \rho S V^2, \quad \dot{C}_D = B_0 + B_1 \alpha + B_2 \alpha^2$$

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho S V^2, \quad C_L = \begin{cases} C_0 + C_1 \alpha, & \alpha \leq \alpha_{**} \\ C_0 + C_1 \alpha + C_2 (\alpha - \alpha_{**})^2, & \alpha \in [\alpha_{**}, \alpha_*] \end{cases}$$

Коэффициенты $B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$ зависят от положения закрылков и шасси; α_* , α_{**} - заданные константы.

Единственным управляемым параметром является угол α . Будет рассмотрен как случай безинерционного, так и инерционного его изменения.

Задача управления состоит в том, чтобы реальное движение, проходящее в условиях ветрового возмущения, не соприкасалось с поверхностью земли, и в случае взлета не слишком сильно отличалось от равномерного движения по прямой, составляющей заданный угол γ с горизонталью. В случае прекращения посадки предполагаем, что при попадании в зону микровзрыва пилот принимает решение прекратить снижение и перейти к восходящему полету.

Приведем численные значения используемых величин, соответствующие самолету Boeing-727 [16,18]:

$$\delta = 2^\circ, \quad \rho = 0.002203 \text{ фунт} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{фут}^{-4}, \quad S = 1560 \text{ фут}^2$$

$$mg = 180000 \text{ фунт}, \quad \alpha_{**} = 12^\circ,$$

$$A_0 = 44564 \text{ фунт}, \quad A_1 = -23.98 \text{ фунт} \cdot \text{сек} \cdot \text{фут}^{-1},$$

$$A_2 = 0.01442 \text{ фунт} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{фут}^{-2}$$

Для задачи взлета:

$$B_0 = 0.07351, B_1 = -0.08617 \text{ рад}^{-1}, B_2 = 1.996 \text{ рад}^{-2},$$

$$C_0 = 0.1667, C_1 = 6.231 \text{ рад}^{-1}, C_2 = -21.65 \text{ рад}^{-2},$$

$$\alpha_* = 16^\circ.$$

Для задачи прекращения посадки:

$$\beta_0 = 0.3895, \dot{\beta}_0 = 0.2 \text{ сек}^{-1}, t_0 = (1 - \beta_0)/\dot{\beta}_0,$$

$$B_0 = 0.1552, B_1 = 0.12369 \text{ рад}^{-1}, B_2 = 2.4203 \text{ рад}^{-2}$$

$$C_0 = 0.7125, C_1 = 6.0877 \text{ рад}^{-1}, C_2 = -9.0277 \text{ рад}^{-2},$$

$$\alpha_* = 17.2^\circ$$

2.2. Модели микровзрыва

I. Первая модель микровзрыва (назовем ее упрощенной) взята из работ A.Miele и задается формулами [13]:

$$W_x = \begin{cases} -k, & x \leq a \\ -k + 2k(x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ k, & x \geq b \end{cases}$$

$$W_h = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ -k(h/h_*)(x-a)/(c-a), & a \leq x \leq c \\ -k(h/h_*)(b-x)/(b-c), & c \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b, \end{cases}$$

где $c = (a+b)/2$, h_* - фиксированная константа. Параметр k определяет интенсивность микровзрыва.

На рис.2 показано поле скорости ветра, отвечающее упрощенной модели.

II. Вторая модель из работы [14] соответствует представлению о микровзрыве как о поле скорости с двумя вихрями (рис.3). Параметрами модели являются:

R_0 - радиус вихря,

H_0 - высота центральной части,

V_0 - скорость в центральной части микровзрыва.

Радиус ядра вихря полагается равным $0.8H_0$.

III. Третья модель заимствована из [19] и по геометрии близка к модели II. Отличие состоит в отсутствии явно выраженных круговых вихревых потоков. Отвечающее этой модели поле скорости ветра показано на рис.4.

В работе используются программы, разработанные в отделе динамических систем ИММ УрО АН СССР и основанные на формулах из работ [14,19].

В систему уравнений движения подаются не только компоненты скорости ветра вдоль движения, но и производные от этих компонент по пространственным переменным. При этом в случае модели I производные вычисляются аналитически, а в случае моделей II, III - численными методами.

3. Робастная стратегия

Приведем с некоторыми изменениями в обозначениях краткое описание робастной стратегии, взятое из работы [13].

Задано состояние $(x_R, h_R, V_R, \gamma_R)$, трактуемое как положение, в которое требуется перевести систему (1),(2) в конце процесса управления. Символом z обозначим вектор $(x - x_R, h - h_R, V - V_R, \gamma - \gamma_R)^T$. Систему уравнений (1),(2) перепишем в виде

$$\dot{z} = f(z) + B(z)g(u) + e(z, u, \omega), \quad (4)$$

II

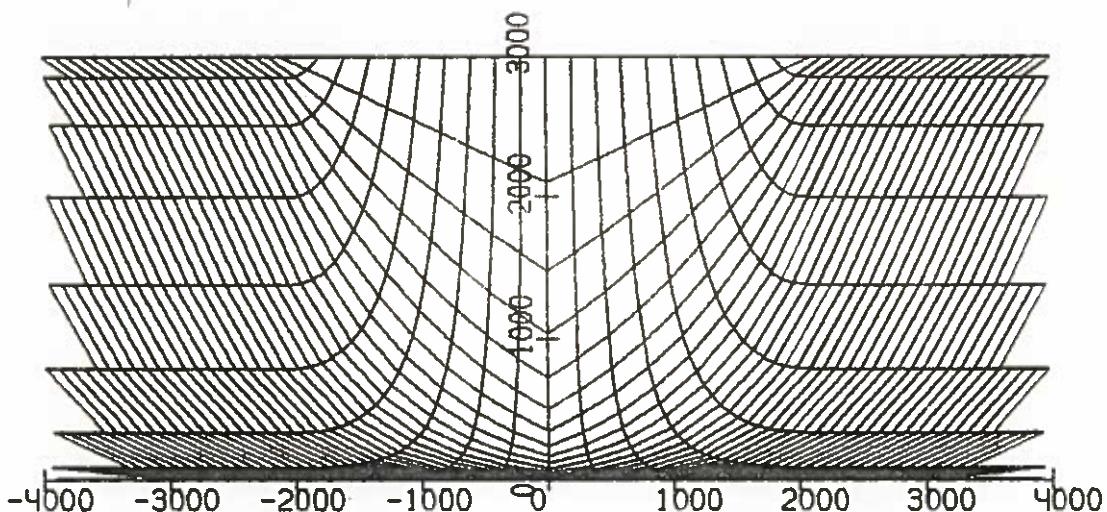


Рис.2.

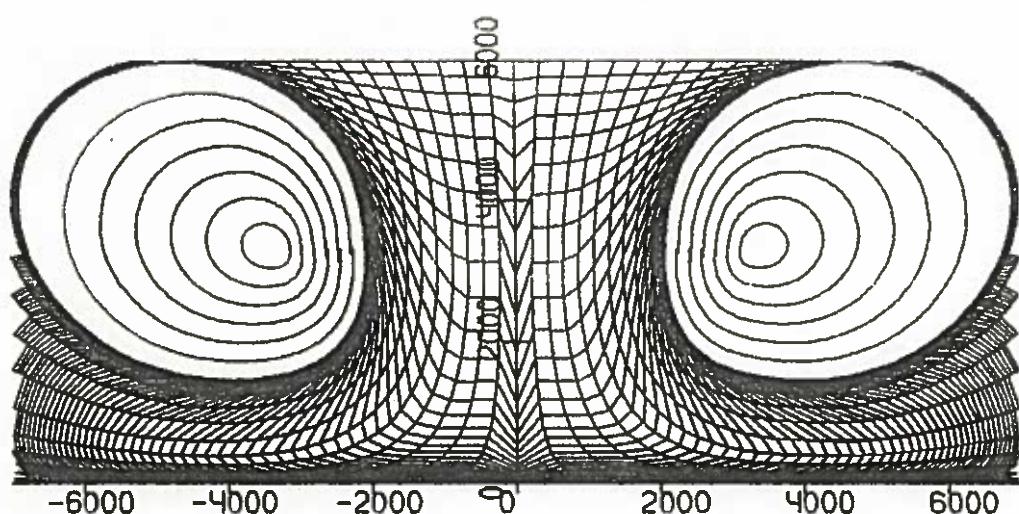


Рис.3.

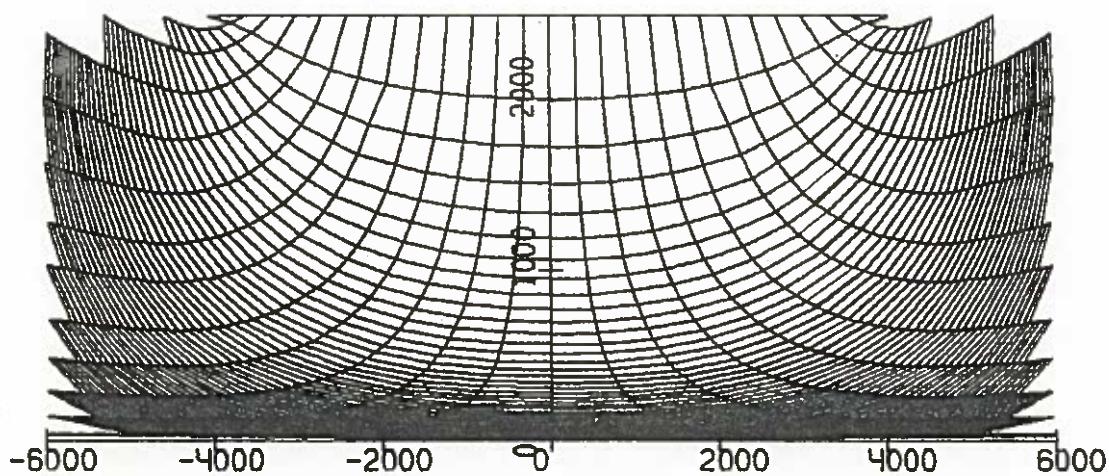


Рис.4.

Три модели микровзрыва. Поле скорости ветра.

где $u = \alpha + \delta$, $g(u) = \cos(\alpha + \delta)$, $B(z) = (0, 0, T/m, 0)^T$, $\omega = (W_x, W_h, \dot{W}_x, \dot{W}_h)$.

Пусть A -квадратная матрица 4×4 с отрицательными собственными значениями. Представим (4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} = Az + B(z)g(u) + B(z)e_m(z, u, \omega) + [f(z) - Az + e(z, u, \omega) \\ - B(z)e_m(z, u, \omega)] \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, обозначим через $\tilde{e}(z, u, \omega)$. Величина $B(z)e_m(z, u, \omega)$ трактуется как согласованная с управлением часть помехи, а величина $\tilde{e}(z, u, \omega)$ как несогласованная часть.

Рассмотрим матричное уравнение Ляпунова

$$A^T P + PA + Q = 0, \quad Q > 0.$$

Зафиксируем положительную симметрическую матрицу Q , найдем положительную симметрическую матрицу P .

Предположим, что существует функция $\varrho(\cdot) : R^4 \rightarrow R_+$, такая, что

$$\|e_m(z, p(z))\| \leq \varrho(z),$$

где

$$p(z) = \begin{cases} -\frac{B^T P z}{\|B^T P z\|} \varrho(z), & \|B^T P z\| > \varepsilon \\ -\frac{B^T P z}{\varepsilon} \varrho(z), & \|B^T P z\| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (6)$$

В работах G.Leitmann, Y.H.Chen показано, что стратегия $p(z)$ делает систему (5) практически устойчивой при условии, что величина $\|\tilde{e}(z, u, \omega)\|$ несогласованной помехи достаточно мала.

На практике, поскольку угол атаки стеснен ограничением $\alpha \in [0, \alpha_*]$, формула (6) подменяется следующим правилом:

$$p(z) = \begin{cases} -\frac{B^T P z}{\|B^T P z\|} (\alpha_* + \delta), & \|B^T P z\| > \varepsilon, \quad B^T P z \leq 0 \\ -\frac{B^T P z}{\varepsilon} (\alpha_* + \delta), & \|B^T P z\| \leq \varepsilon, \quad B^T P z \leq 0 \\ 0, & B^T P z > 0 \end{cases}$$

Основная трудность при построении робастной стратегии управления заключается в подборе параметров метода (матриц $A, Q, B(z)$) и

выделении согласованной части $e_m(z, u, \omega)$ так, чтобы сделать величину $\|\tilde{e}(z, u, \omega)\|$ по возможности малой.

4. Минимаксный закон управления

4.1. Общая схема построения

Для построения минимаксного закона управления используется та же методика, что и в задаче о посадке [3,6,9,10].

В качестве номинального (желаемого) движения самолета рассматривается движение с постоянной воздушной скоростью V_0 по прямой, составляющей угол γ_0 с осью ОХ. Считаются известными номинальные значения компонент скорости ветра W_{x0} , W_{h0} . По величинам V_0 , γ_0 , W_{x0} , W_{h0} рассчитывается номинальный угол атаки α_0 .

Исходная нелинейная система (1), (2) линеаризуется относительно номинальных значений. При этом вместо \dot{W}_x , \dot{W}_h подставляются соотношения

$$\begin{aligned}\dot{W}_x &= -k_v(W_x - v_1) \\ \dot{W}_h &= -k_v(W_h - v_2)\end{aligned}\tag{7}$$

Уравнения (7) подсоединяются к основной системе вместо соотношений (3). Величины W_x , W_h становятся фазовыми переменными, а новые переменные v_1 , v_2 интерпретируются как воздействия помехи (воздействия второго игрока), стесненные геометрическими ограничениями

$$|v_1| \leq \nu_1, \quad |v_2| \leq \nu_2$$

Если в начальный момент значения W_x , W_h лежат в пределах

$$|W_x| \leq \nu_1, \quad |W_h| \leq \nu_2,$$

то и дальнейшем они остаются в этих пределах. Отметим также, что соотношения (7) учитывают инерционный характер изменения скорости ветра (коэффициент k_v выбирается исходя из наших представлений об этой инерционности).

Для полученной линейной системы ставится вспомогательная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания t_f , геометрическими ограничениями на управляющее воздействие и помеху, выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора в момент t_f . Цель первого игрока, распоряжающегося управляющим параметром, состоит в минимизации функции платы в момент времени t_f . Цель второго игрока, ведающего помехой, противоположна.

Для вспомогательной дифференциальной игры находится оптимальное гарантирующее управление обратной связи, реализуемое посредством поверхности переключения.

Полученный закон управления (называемый ниже минимаксным) используется при моделировании движений исходной нелинейной системы.

4.2. Вспомогательная линейная дифференциальная игра

Динамика вспомогательной дифференциальной игры для задачи взлета описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [(A_1 + 2A_2 V_0) \cos(\alpha + \delta)/m - \rho S V_0 (B_0 + B_1 \alpha_0 + B_2 \alpha_0^2)/m] x_1 \\ &\quad - g \cos \gamma_0 x_2 + [-(A_0 + A_1 V_0 + A_2 V_0^2) \sin(\alpha_0 + \delta)/m - \rho S V_0^2 (B_1 + 2B_2 \alpha_0)/(2m)] u + \\ &\quad k_v \cos \gamma_0 (x_3 - v_1) + k_v \sin \gamma_0 (x_4 - v_2) \\ \dot{x}_2 &= [(A_1 + 2A_2 V_0) \sin(\alpha_0 + \delta)/(m V_0) + (C_0 + C_1 \alpha_0) \rho S/m] x_1 + \\ &\quad g \sin \gamma_0 / V_0 x_2 + [(A_0 + A_1 V_0 + A_2 V_0^2) \cos(\alpha_0 + \delta)/(m V_0) + C_1 \rho S V_0/(2m)] u - \end{aligned}$$

$$k_v \sin \gamma_0 (x_3 - v_1) / V_0 + k_v \cos \gamma_0 (x_4 - v_2) / V_0$$

$$\dot{x}_3 = -k_v (x_3 - v_1)$$

$$\dot{x}_4 = -k_v (x_4 - v_2) \quad (8)$$

Здесь $x_1 = \Delta V$, $x_2 = \Delta \gamma$, $x_3 = \Delta W_x$, $x_4 = \Delta W_h$ - отклонения величин воздушной скорости, угла наклонения, компонент скорости ветра от номинальных значений $V_0 = 276.8$ фут/сек, $\gamma_0 = 6.989^\circ$, $W_{x0} = 0$, $W_{h0} = 0$. Управляющий параметр $u = \Delta \alpha$ - отклонение угла атаки от номинального значения $\alpha_0 = 10.367^\circ$. Параметры v_1 , v_2 интерпретируются как компоненты помехи.

Первые два уравнения получены линеаризацией динамических нелинейных уравнений (1) относительно номинальных значений. Правые части указанных уравнений не зависят ни от высоты положения самолета, ни от проходимого расстояния. Функция платы, которая будет введена ниже, также не зависит от этих величин. Поэтому в систему (8) не включены линеаризованные кинематические уравнения (2).

Последние два слагаемых в первом и втором уравнениях есть результат подстановки вместо $\Delta \dot{W}_x$, $\Delta \dot{W}_h$ их выражений в силу третьего и четвертого уравнений. Приведем значения констант и численный вид уравнений (8) для задачи взлета:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + Cv, \quad \mathbf{x} \in R^4, \quad u \in R^1, \quad v \in R^2 \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.023751 & -31.946111 & 0.198515 & 0.024323 \\ 0.000793 & 0.014141 & -0.000088 & 0.000717 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}$$

$$B = (-16.460542, 0.554554, 0, 0)^T$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.188515 & 0.000088 & 0.2 & 0 \\ -0.024323 & -0.00071 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, \quad u = \Delta \alpha, \quad v = (v_1, v_2)^T$$

Ограничения на управление $u = \Delta\alpha$ возьмем в виде

$$|u| \leq \mu, \quad \mu = 5.633^\circ \quad (10)$$

Выберем из соображений здравого смысла ограничения на помеху

$$|v_1| \leq \nu_1, \quad \nu_1 = 50 \text{ фут/сек}$$

$$|v_2| \leq \nu_2, \quad \nu_2 = 7 \text{ фут/сек} \quad (11)$$

Введем функцию платы, зависящую от координат $x_1 = \Delta V$, $x_2 = \Delta\gamma$.

Для этого рассмотрим выпуклый четырехугольник M с вершинами $(-30, 0)$, $(-0.9, 0.02)$, $(10, 0)$, $(0.9, -0.02)$. Положим

$$\varphi(x_1, x_2) = \min\{c > 0 : (x_1, x_2) \in cM\} \quad (12)$$

Зафиксируем момент t_f . Будем считать, что цель первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре (9)-(11) - минимизация значений функции φ в момент t_f , интересы второго игрока противоположны. Мы не придаем моменту t_f какой-либо физический смысл.

Естественно, что описанное выше введение вспомогательной дифференциальной игры не является единственным возможным. Например, можно было при тех же фазовых координатах вспомогательной игры иначе определить функцию платы. Мы могли бы ввести в число фазовых переменных Δh , $\dot{\Delta h}$ и рассмотреть плату, зависящую от этих координат. Описанный вариант вспомогательной дифференциальной игры выбран по результатам моделирования из нескольких вариантов.

Приведем постановку вспомогательной дифференциальной игры для задачи о прекращении посадки. Как и в [12], считаем, что скорость изменения угла атаки не превышает 0.3 град/сек. Чтобы соблюсти это ограничение, в систему уравнений движения было введено дополнительное уравнение

$$\dot{\alpha} = -0.3(\alpha - u)$$

Тем самым угол атаки считался фазовой переменной, а параметр u рассматривался в дальнейшем как управляющий. Численный вид вспомогательной дифференциальной игры следующий:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + Cv, \quad \mathbf{x} \in R^5, \quad u \in R^1, \quad v \in R^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -0.03929 & -32.08073 & 0.19935 & 0.01609 & -18.18064 \\ 0.00107 & 0.0108 & -0.00007 & 0.00083 & 0.4773 \\ 0 & 0 & -0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3 \end{pmatrix}$$

$$B = (0, 0, 0, 0, 0.3)^T$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.19935 & 0.00007 & 0.15 & 0 & 0 \\ -0.01609 & -0.00083 & 0 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T, \quad x_1 = \Delta V, \quad x_2 = \Delta \gamma, \quad x_3 = \Delta W_x, \quad x_4 = \Delta W_h, \quad x_5 = \Delta \alpha$$

$$|u| \leq \mu, \quad \mu = 7.447^\circ$$

$$|v_1| \leq \nu_1, \quad \nu_1 = 50 \text{ фут/сек}$$

$$|v_2| \leq \nu_2, \quad \nu_2 = 20 \text{ фут/сек}$$

Линеаризация проведена относительно номинальных значений

$$V_0 = 239.7 \text{ фут/сек}, \quad \gamma_0 = 4.6^\circ, \quad \alpha_0 = 9.753^\circ, \quad W_{x0} = 0, \quad W_{h0} = 0$$

в предположении $\beta(t) \equiv 1$.

Множество M - прямоугольник на плоскости (x_1, x_2) с вершинами: $(-50, -0.06), (-50, 0.1), (50, 0.1), (50, -0.06)$.

4.3. Оптимальная стратегия первого игрока во вспомогательной дифференциальной игре

В работе [1] показано, что оптимальная стратегия первого игрока в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы, зависящей от двух координат фазового вектора, реализуется при помощи поверхности переключения в

пространстве переменных t, y_1, y_2 . В нашем случае вектор $y = (y_1, y_2)$ связан с фазовым вектором \mathbf{x} системы (9) соотношением

$$y(t) = X(t_f, t)\mathbf{x}(t),$$

где $X(t_f, t)$ матрица, составленная из первой и второй строк фундаментальной матрицы Коши однородной части системы (9). По одну сторону от поверхности переключения оптимальное управление принимает экстремальное значение одного знака, по другую сторону - противоположного знака.

Поскольку при моделировании управление применяется в дискретной схеме, необходим лишь набор линий переключения на сетке моментов времени. Алгоритм построения линий переключения основан на обработке сечений множеств уровня функции цены игры. На рис.5 показано сечение множества уровня функции цены в задаче взлета для момента обратного времени $\tau = t_f - t = 4$. Пример линий переключения для задачи взлета приведен на рис.6. Линии соответствуют моментам обратного времени $\tau = 4, 8, 10$. Поскольку множество M не симметрично относительно начала координат, не являются симметричными и линии переключения.

Рассмотрим линию переключения $\Pi(t_i)$. Если в момент t_i точка $y(t_i) = X(t_f, t_i)\mathbf{x}(t_i)$ расположена относительно линии переключения в направлении, определяемом вектором $D(t_i) = X(t_f, t_i)B$, то на следующем шаге дискретной схемы управления полагаем $u_0 = -\mu$. Если точка $y(t_i)$ находится в противоположном направлении относительно линии переключения, то $u_0 = \mu$.

5. Использование линий переключения в нелинейной системе

Во вспомогательной линейной дифференциальной игре было взято $t_f = 15$ сек и построен набор линий переключения $\Pi(t_i)$ на сетке моментов времени $t_i = i\Delta, \Delta = 0.1, i \in \overline{0, 150}$. При моделировании

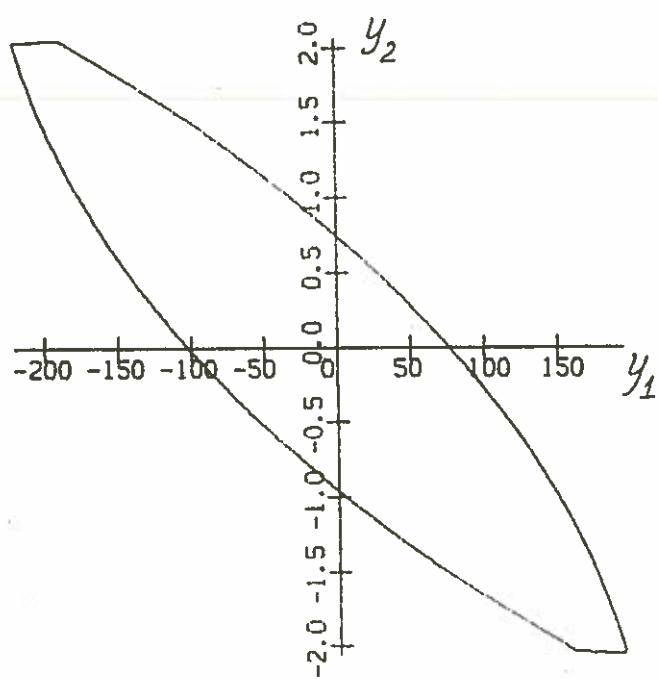


Рис.5. Сечение множества уровня функции цены игры.

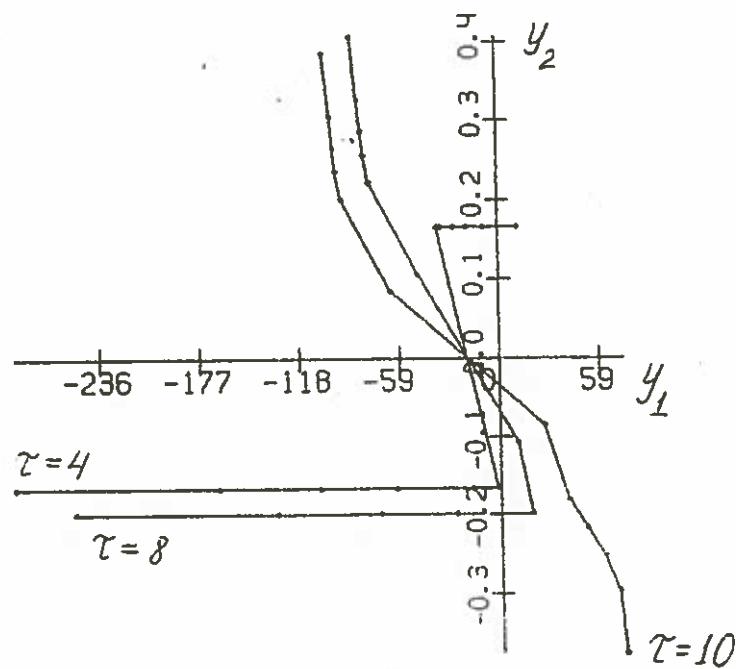


Рис.6. Линии переключения.

движений нелинейной системы построенные линии переключения использовались двумя способами.

1. Пусть $x(t)$ - пройденное за время t расстояние по оси x , $V_{x0} = V_0 \cos \gamma_0$ - проекция номинальной воздушной скорости на ось x . Тогда $t' = x(t)/V_{x0}$ - номинальное время прохождения расстояния $x(t)$.

Зафиксируем $t_* \in (0, t_f)$ и рассмотрим промежуток $[t_*, t_f]$. Первый способ использует набор линий переключения, соответствующий промежутку $[t_*, t_f]$. Число t_* можно рассматривать как параметр предла- гаемого закона управления. Уменьшая t_* , мы расширяем используемый набор, и наоборот.

В момент времени t берется линия переключения $\Pi(t_j)$ с номером

$$j = [t_*/\Delta] + \text{mod}([t'/\Delta], [(t_f - t_*)/\Delta]), \quad (13)$$

Здесь символ $[]$ означает целую часть числа, $\text{mod}(a, b)$ - остаток от деления a на b .

Далее вычисляются векторы $y(t) = X(t_f, t_j)\mathbf{x}(t)$ и $B(t_j) = X(t_f, t_j)B$, где

$$\mathbf{x}(t) = (V(t) - V_0, \gamma(t) - \gamma_0, W_x(t) - W_{x0}, W_h(t) - W_{h0})^T.$$

Анализируя положение точки $y(t)$ относительно линии переключения $\Pi(t_j)$, с использованием вектора $B(t_j)$, выбираем управляющее воздействи-е.

При описанном варианте использования линий переключения мы фактически задаем на оси времени моменты $t_f - t_*$, $2(t_f - t_*)$ и т.д. и стараемся уменьшить значения функции φ в эти моменты времени на движениях нелинейной системы. Таким образом, мы пытаемся осуществить стабилизацию движений нелинейной системы относительно выбранного номинального движения, но не непрерывно, а лишь в ука- занные моменты времени.

2. Недостатком первого способа управления является возможность

"разбалтывания" системы за счет цикличности интервалов стабилизации. Чтобы устранить этот недостаток, рассмотрим другой способ управления. Будем применять лишь одну линию переключения из имеющегося набора. А именно, зафиксируем некоторый момент времени $\tilde{t} \in [0, t_f]$. В каждый текущий момент времени t выбора управляющего воздействия имеем состояние $x(t) = (V(t) - V_0, \gamma(t) - \gamma_0, W_x(t) - W_{x0}, W_h(t) - W_{h0})^T$. Вычисляем вектор $y(t) = X(t_f, \tilde{t})x(t)$ и вектор $B(\tilde{t}) = X(t_f, \tilde{t})B$. Анализируем положение точки $y(t)$ относительно линии переключения $\Pi(\tilde{t})$, используя вектор $B(\tilde{t})$. Выбираем управляющее воздействие.

Таким образом, мы используем всего лишь одну линию переключения. Тем самым в каждый текущий момент t предполагаем, что момент окончания процесса управления наступит через $t_f - \tilde{t}$. В результатах моделирования, которые будут приведены ниже, было взято $t_f - \tilde{t} = 3$. Это значение выбрано путем анализа результатов моделирования при различных \tilde{t} .

Идея использования второго способа возникла в процессе обсуждения работы с В.М.Кейном и А.И.Красовым.

При использовании закона управления при помощи поверхности переключения возможны частые перекладки управления с одного крайнего значения на другое (в том случае, когда движение $y(t)$ идет в окрестности поверхности переключения). С целью уменьшения количества переключений введено следующее правило вычисления управляющего воздействия. Пусть d - расстояние по направлению вектора $B(t_j)(B(\tilde{t})$ в случае 2) от точки $y(t)$ до поверхности переключения. Положим

$$u^\varepsilon = \begin{cases} u_0, & d > \varepsilon \\ \frac{u_0 d}{\varepsilon}, & d \leq \varepsilon \end{cases}$$

Здесь u_0 - значение, найденное в соответствии с описанными выше правилами 1 или 2, ε - заданное положительное число. В нелинейную

систему при моделировании движений подается $\alpha = \alpha_0 + u^\varepsilon$.

6. Результаты моделирования

Рассмотрим задачу взлета. Начальное состояние, как и в [13], возьмем в виде

$$x = 0, h = 50 \text{ фут}, V = 276.8 \text{ фут/сек}, \gamma = 6.989^\circ.$$

Изложение результатов моделирования начнем с тех вариантов, в которых ветровое возмущение формируется при помощи первой модели микровзрыва. Центр микровзрыва, как и в [13], находится в начале движения, а именно $a = 300$ фут, $b = 4300$ фут. Интенсивность $k = 50$.

Метод из [13] был запрограммирован и использовался при тех же, что и в [13], значениях параметров. Графики, соответствующие первому способу управления, представлены на рис.7. По горизонтальной оси откладывается время в секундах. Маркером выделены кривые, отвечающие способу управления из [13]. Сравнивая графики изменения высоты, отметим, что методу управления из [13] соответствует более плавная кривая. На графике, характеризующем изменение управления в силу первого способа, видны скачки управления. С целью получения более плавной реализации управления можно ввести дополнительное уравнение

$$\Delta\dot{\alpha} = k_u(\Delta\alpha - u^\varepsilon)$$

В этом случае получаемое при помощи линий переключения управляющее воздействие u^ε пропускается через инерционное звено первого порядка. Соответствующие графики показаны на рис.8. Коэффициент k_u был взят равным 1. Схема использования робастной стратегии оставалась прежней.

На рис.9 представлены графики, отвечающие второму способу управления. Сравнение проводится с той же, что и в предыдущих вариан-

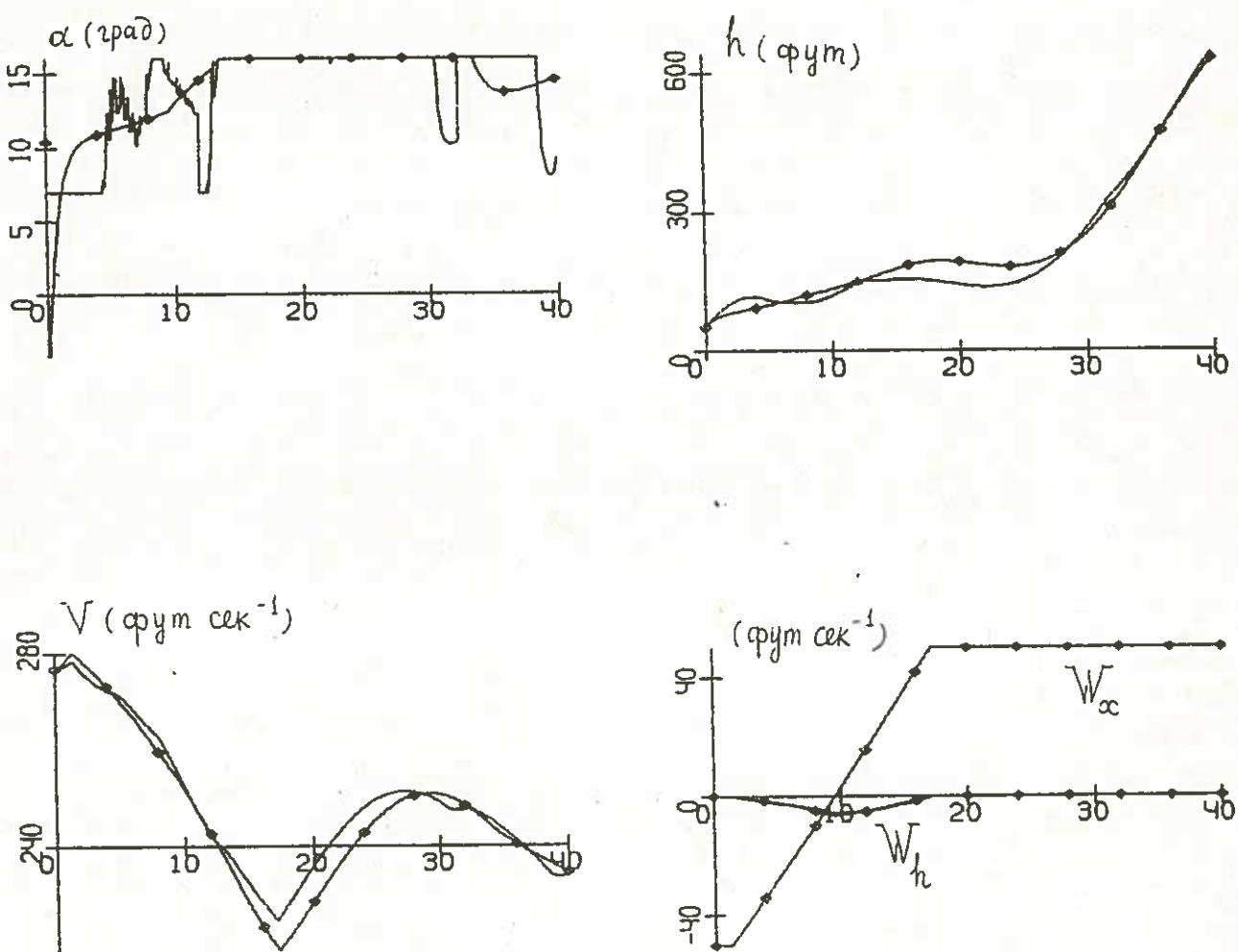


Рис.7. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 1. Микровзрыв I.

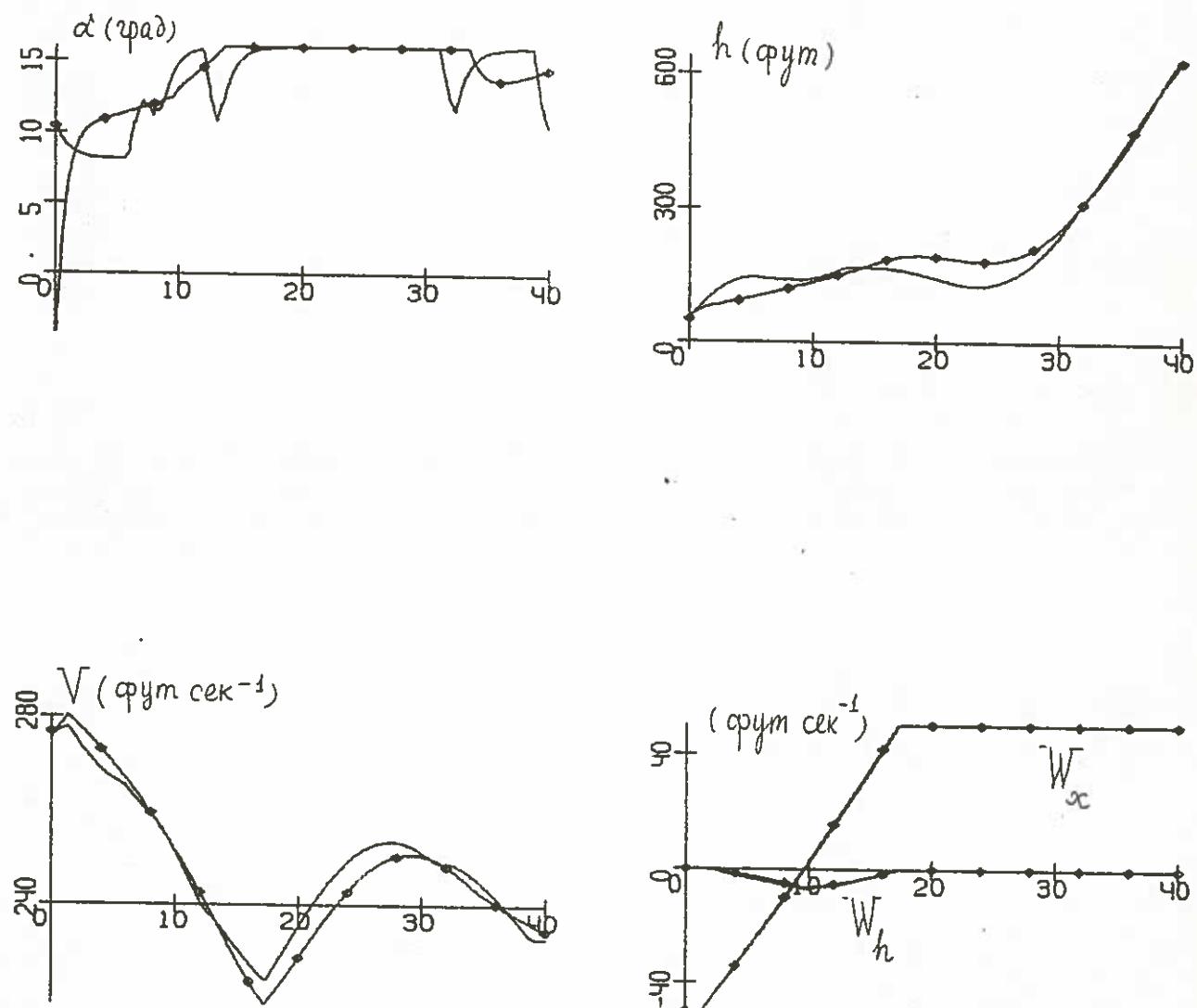


Рис.8. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Инерционное изменение угла атаки.
Микровзрыв I.

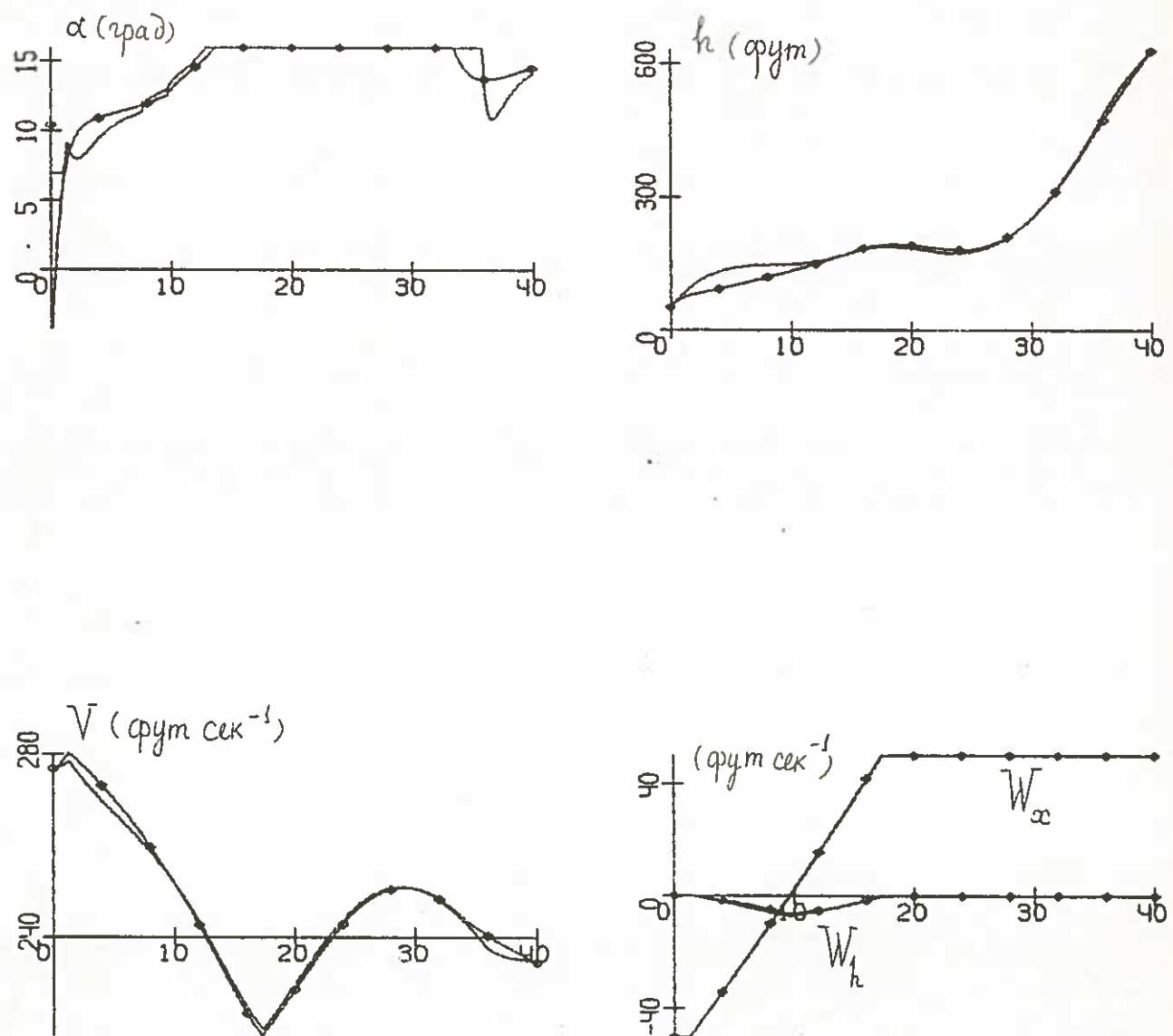


Рис.9. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 2. Микровзрыв I.

так, траекторией. В результате устранения эффекта "разбалтывания" (за счет использования лишь одной линии переключения) мы получаем более плавный, чем при первом способе управления, график изменения высоты. Отметим, что несмотря на различие минимаксного способа управления и способа управления из [13], графики изменения управления близки. Соответственно близкими получаются также графики изменения высоты и воздушной скорости.

Рассмотрим случай, когда $a = 2300$ фут, $b = 6300$ фут, т.е. центр микровзрыва сдвинут вправо. Интенсивность $k = 40$. Графики, отвечающие второму способу управления, в сравнении с графиками, полученными при робастном управлении, в условиях той же ветровой помехи, показаны на рис.10.

Приведем результаты моделирования, полученные при использовании второй модели микровзрыва [14]. Центр микровзрыва находится в начале движения ($a = 300$ фут, $b = 4300$ фут). Значения параметров, задающих положение "ядра" и интенсивность микровзрыва следующие:

$$R_0 = H_0 = 330 \text{ фут}, V_0 = 10 \text{ фут/сек}$$

На рис.11 показаны графики, отвечающие первому способу управления, на рис.12 - второму способу управления.

Рассмотрим третий вариант формирования ветровых возмущений: при помощи модели из [19]. Параметры модели таковы, что горизонтальная составляющая скорости ветра лежит в пределах $[-40, 40]$ фут/сек. Центр микровзрыва - в начале движения. Графики на рис.13 соответствуют первому способу управления, на рис.14 - второму способу управления.

Приведем результаты моделирования для задачи о прекращении посадки. Начальное состояние, как и в [12], бралось в виде

$$x = 0, h = 600 \text{ фут}, V = 239.7 \text{ фут/сек}, \gamma = -2.249^\circ.$$

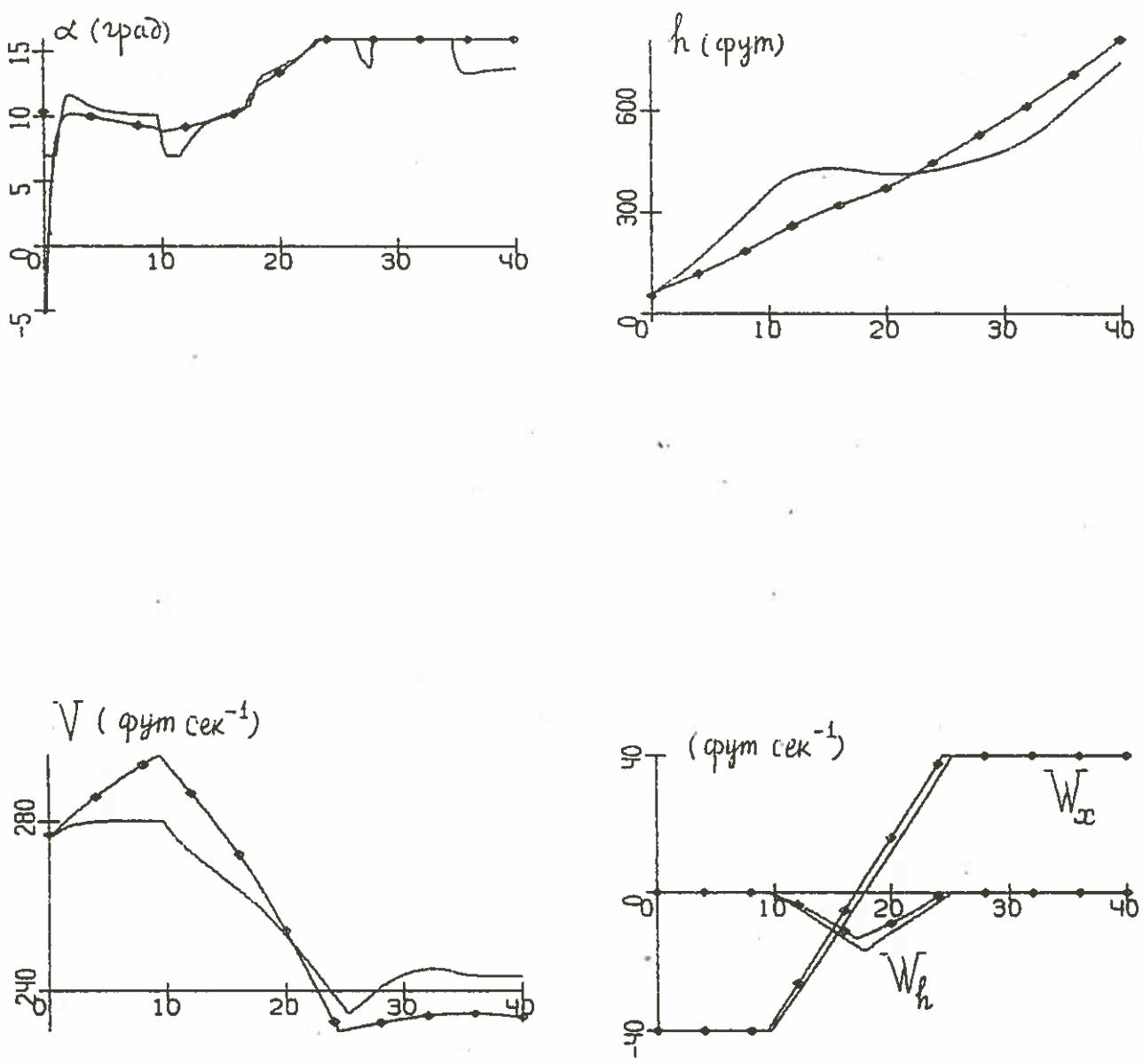


Рис.10. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 2. Микровзрыв I, центр микровзрыва – в середине движения.

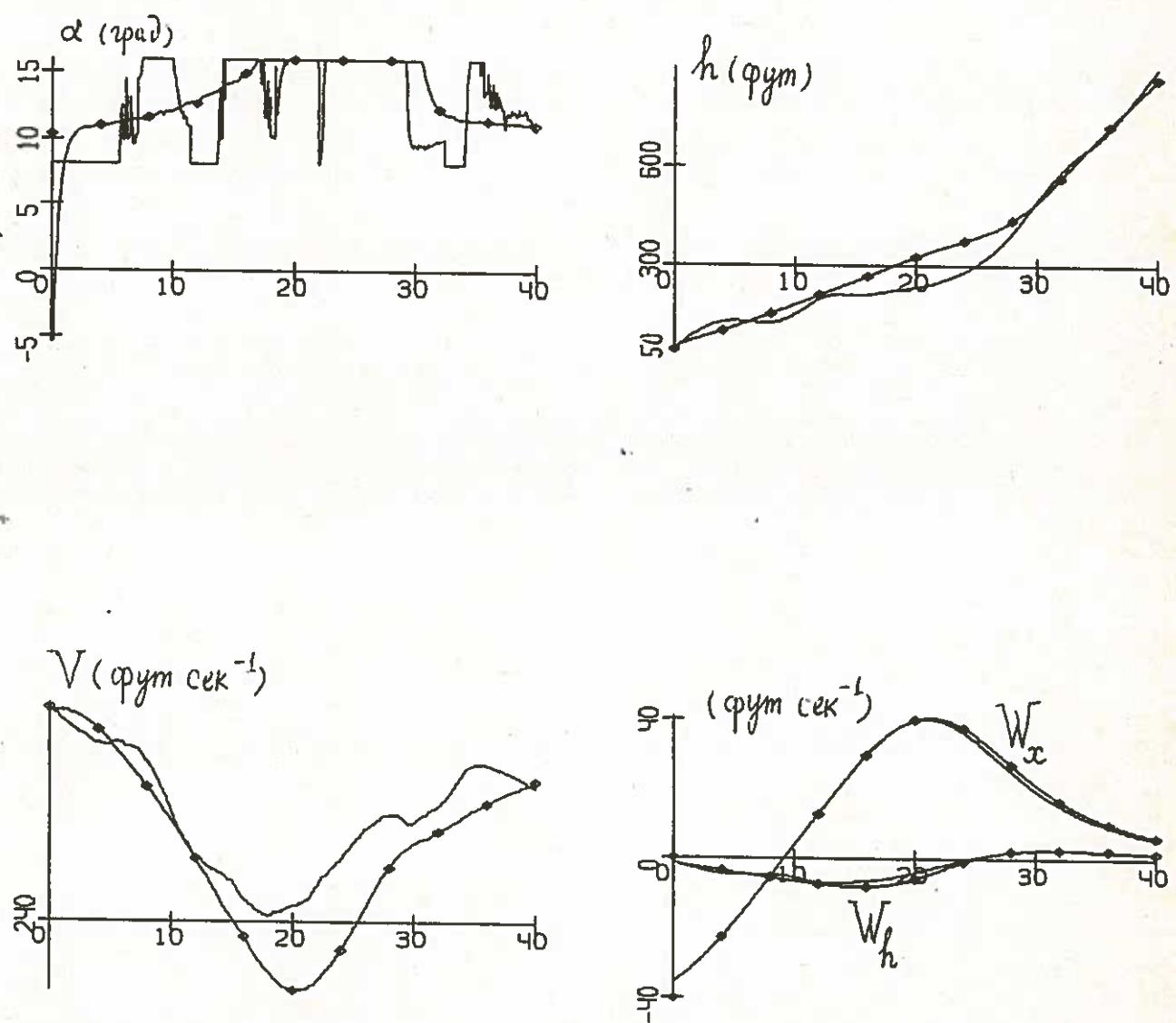


Рис.11. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 1. Микровзрыв II.

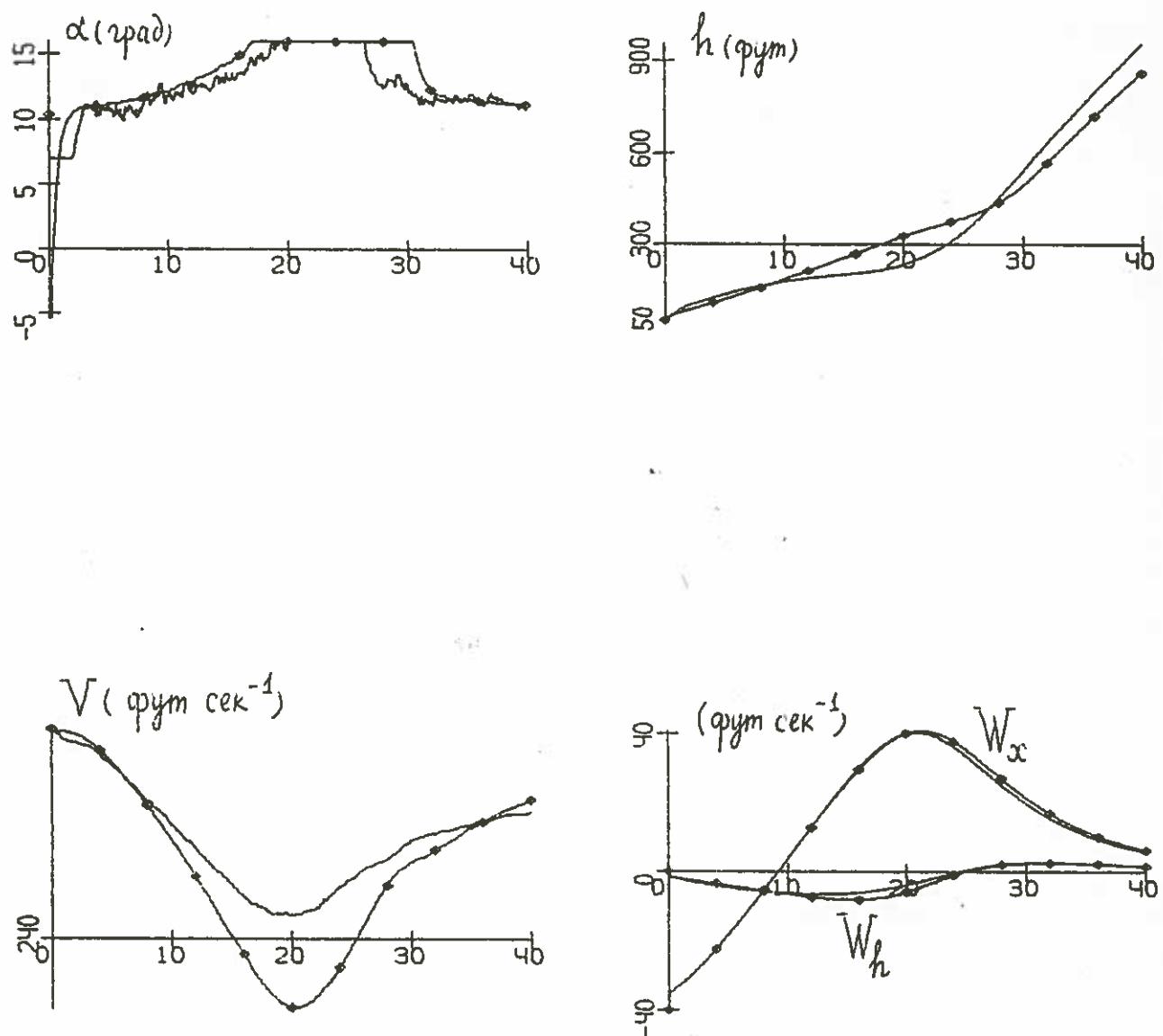


Рис.12. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 2. Микровзрыв II.

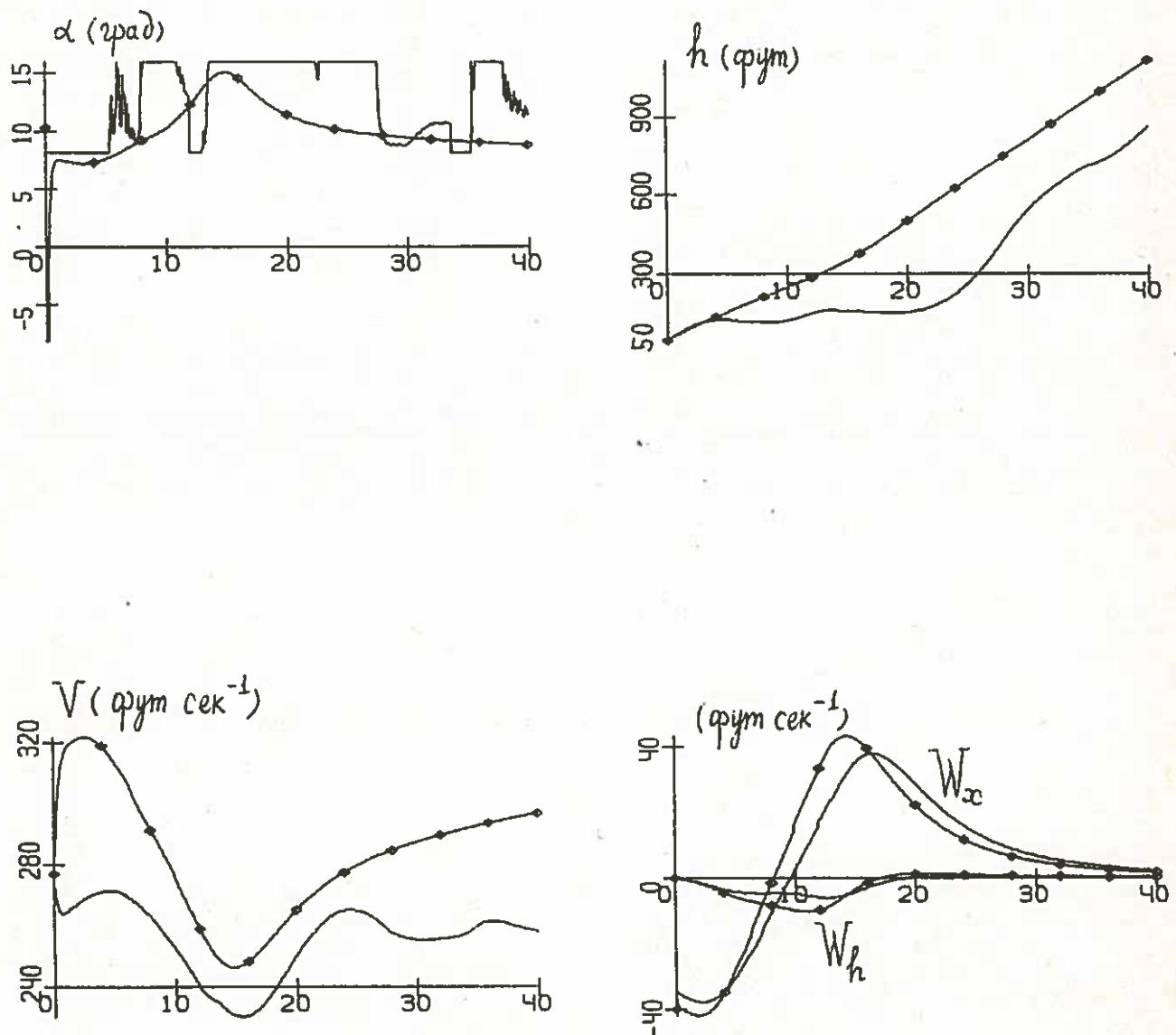


Рис.13. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 1. Микровзрыв III.

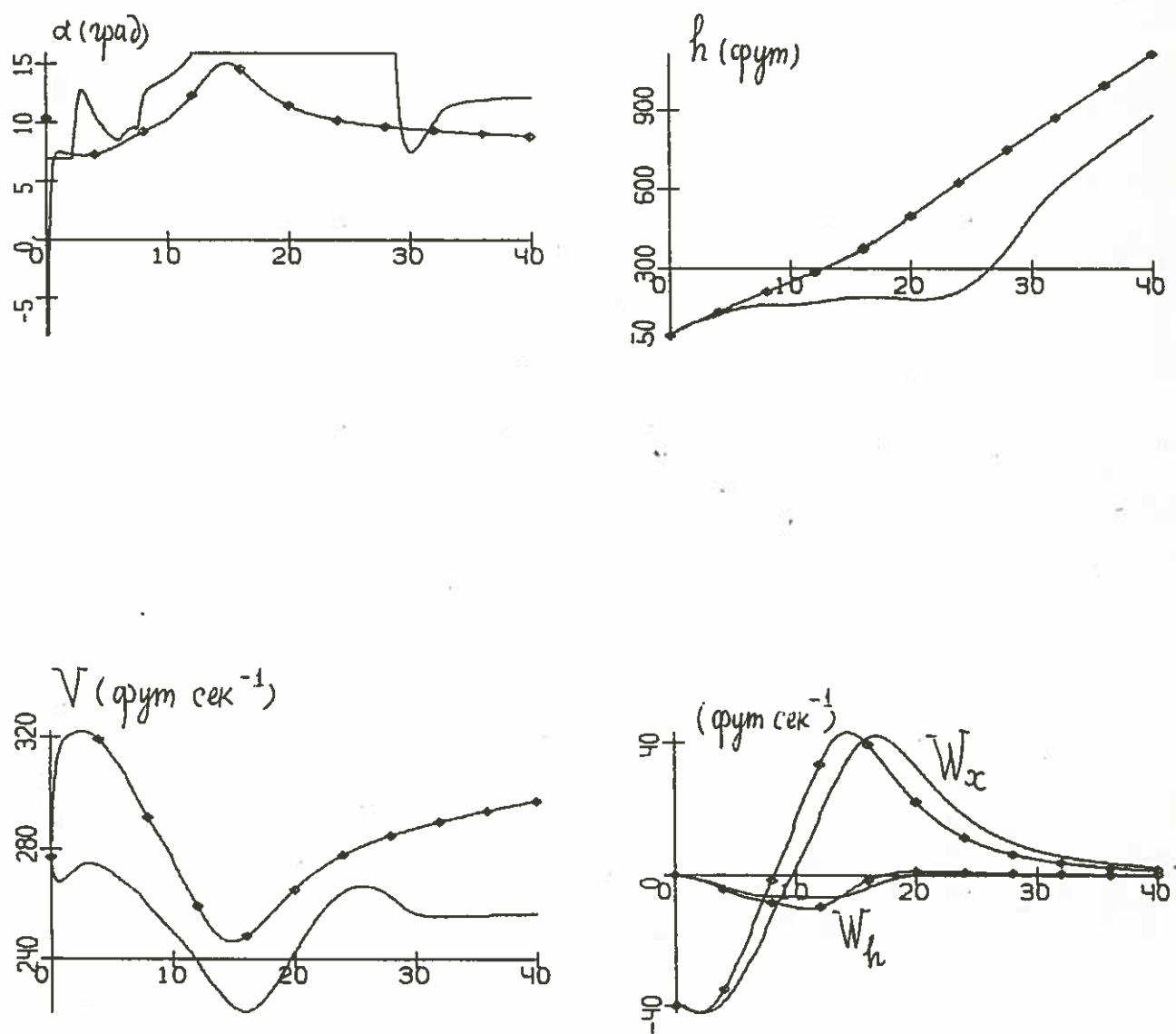


Рис.14. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче взлета. Способ управления 2. Микровзрыв III.

Использовался первый способ управления с $t_f = 40, t_* = 18$. На рис.15-17 показаны графики изменения высоты и угла атаки, отвечающие первой, второй и третьей моделям микровзрыва соответственно. Центр микровзрыва находился в начале движения.

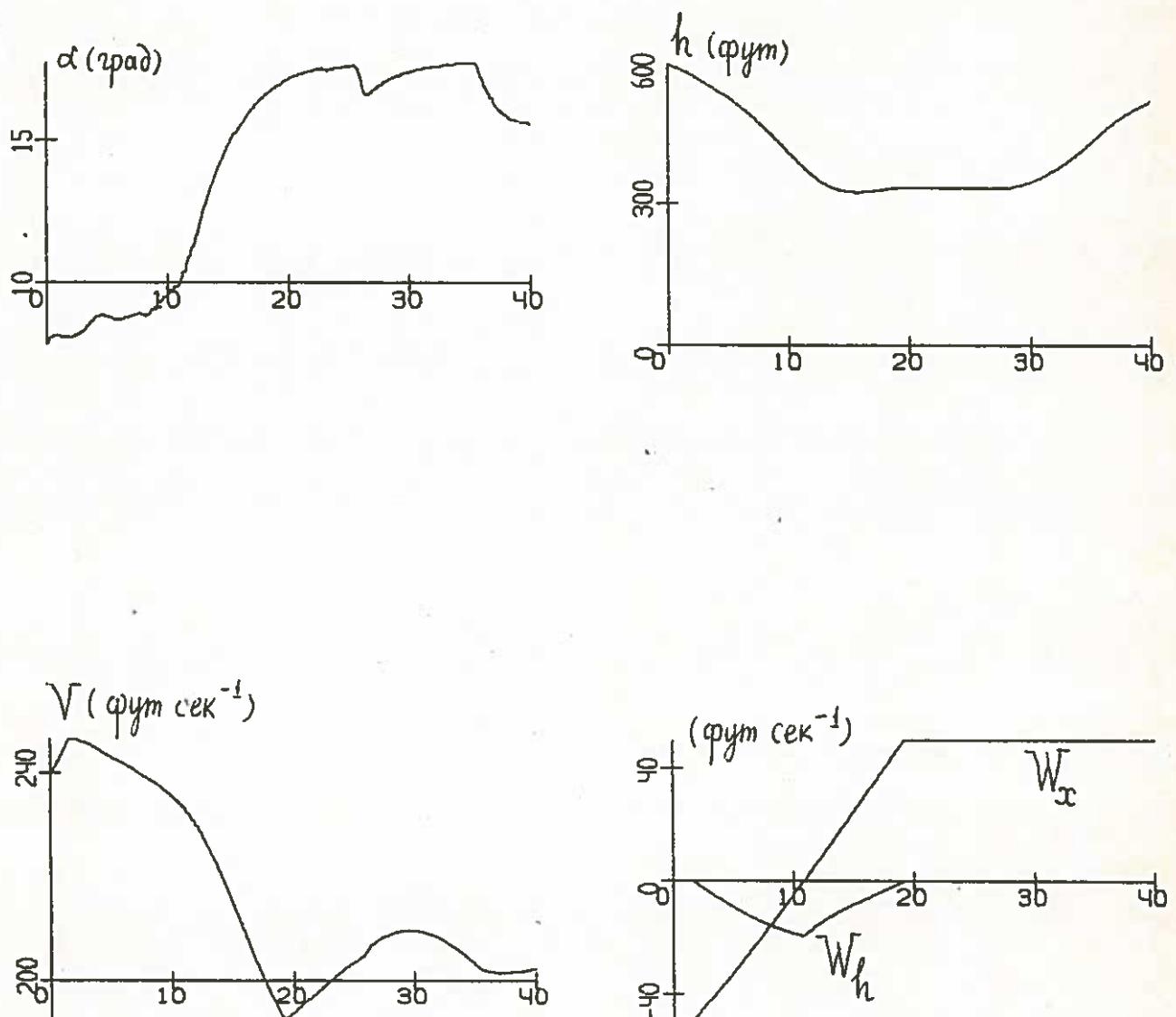


Рис.15. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче о прекращении посадки. Микровзрыв I.

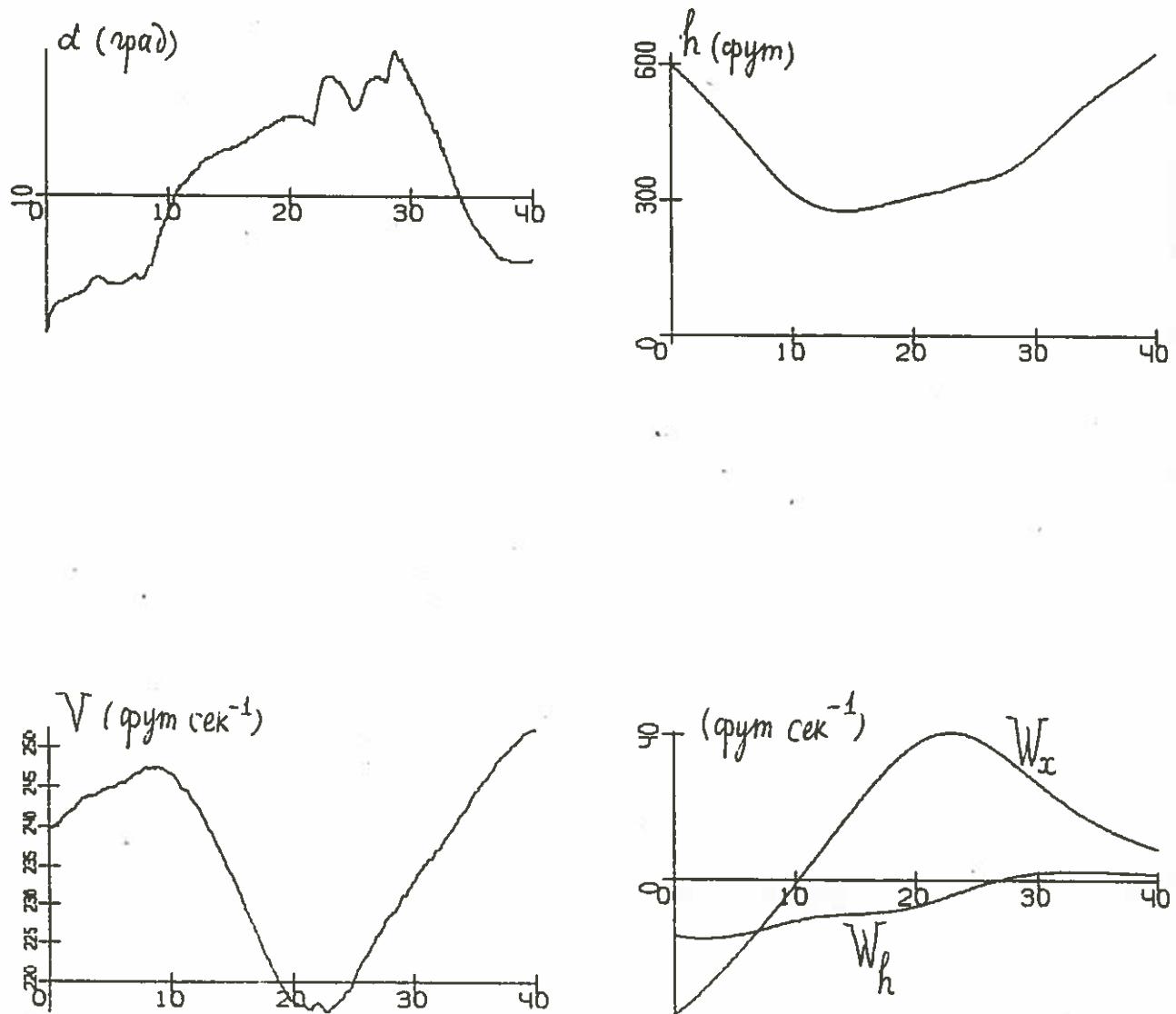


Рис.16. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче о прекращении посадки. Микровзрыв II.

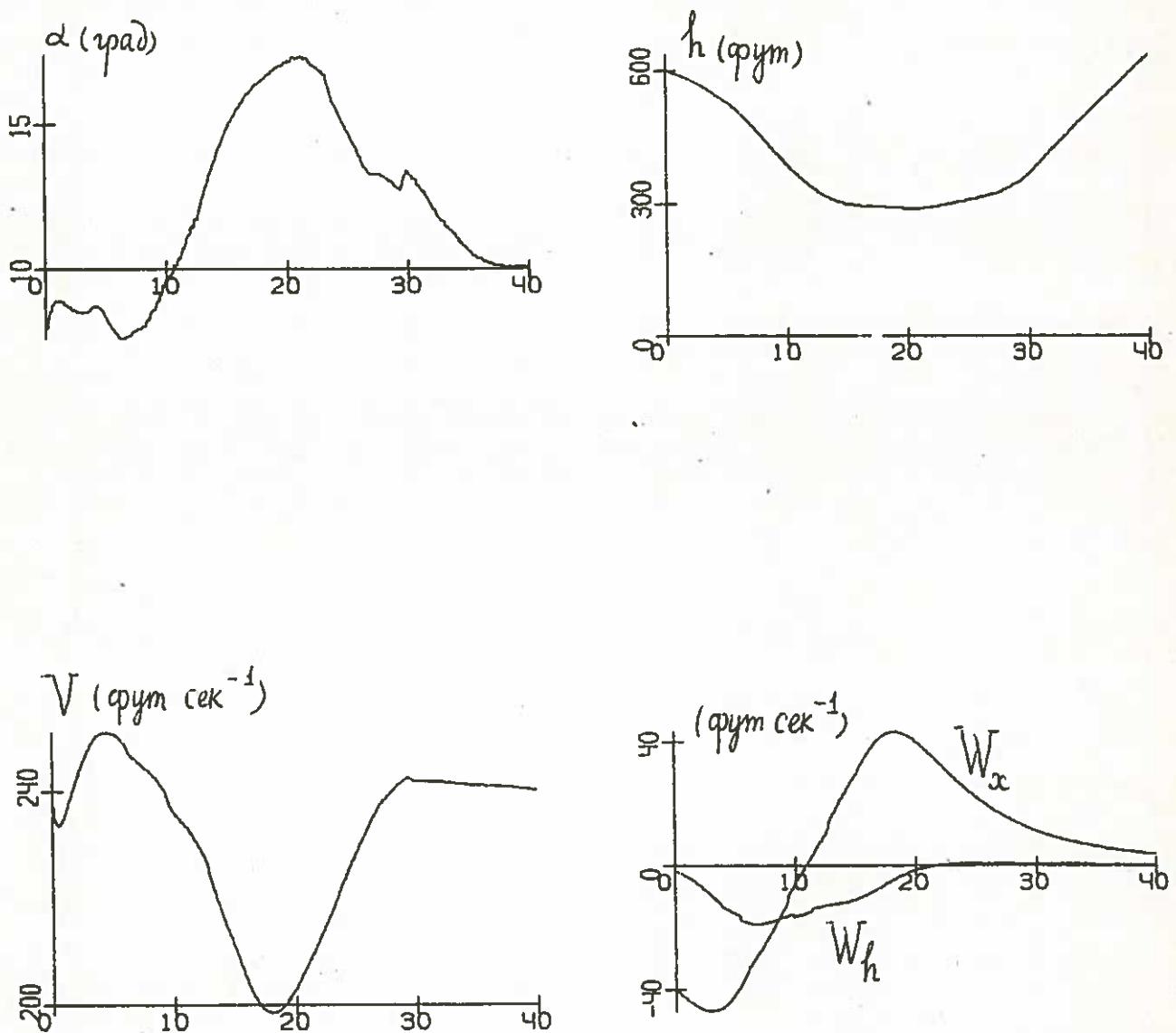


Рис.17. Изменение фазовых координат и составляющих скорости ветра в задаче о прекращении посадки. Микровзрыв III.

Литература

1. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.- 1983.- N 4.- С.78-85.
2. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке// ПММ.- 1984.-Т.48, N 4.-С.560-567 .
3. Боткин Н.Д., Жуков С.П., Красов А.И. Комбинированный способ управления самолетом на посадке//Управление в динамических системах. Сб. научных трудов. УрО АН СССР, Свердловск, 1990.- С.18-30.
4. Исследование по совершенствованию бортовых и наземных автоматизированных систем управления воздушными судами. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения: Отчет о НИР / АН СССР. УНЦ ИММ; Исполн. В.М.Кейн, А.И.Красов, В.С.Пацко, Н.Д.Боткин. N ГР81104592, И nv. N 02830078880.- Ленинград- Свердловск, 1983.- 78 с.
- 5.Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания// ПММ.- 1980.- Т.44, N 3.- С.434-440.
6. Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Задача о посадке самолета в условиях сдвига ветра//Управление в динамических системах. Сб. научных трудов. УрО АН СССР, Свердловск, 1990.- С.52-64.
7. Корнеев В.А., Меликян А.А., Титовский И.Н. Стабилизация глиссады самолета при ветровых возмущениях в минимаксной постановке// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.-1985.- N 3.- С.132-139.
8. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. - М.: Наука, 1974.
9. Разработка численных методов построения экстремальных ве-

тровых возмущений, действующих на самолет на этапе посадки. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений: Отчет о НИР (промежуточ.) / АН СССР. УрО ИММ. Исполн. В.С.Пацко, Н.Д.Боткин, В.Л.Турова. Н ГР 01880003467, И nv. N 02880054701.- Свердловск, 1987.- 58 с.

10. Разработка численных методов построения экстремальных ветровых возмущений, действующих на самолет на этапе посадки. Рекомендации по имитации экстремальных ветровых вомущений: Отчет о НИР (заключит.) / АН СССР. УрО ИММ Исполн. Н.Д.Боткин, В.Л.Турова, А.Г.Иванов. Н ГР 01880003467, И nv. N 02890045178.- Свердловск, 1988.- 51 с.

11. Титовский И.Н. Игровой подход к задаче синтеза управления самолетом при заходе на посадку// Ученые записки ЦАГИ.- 1981.-Т.XII, N 1.- C.85-92 .

12. Bulirsch, R., Montrone, F., and Pesch, H.J. Abort landing in the presence of a windshear as a minimax optimal control problem/ Munich University of Technology, Germany, Report No. 210.

13. Chen, Y.H. and Pandey, S. Robust control strategy for take-off performance in a windshear// Optimal Control Applications & Methods.- 1989.- V.10.- P.65-79.

14. Ivan M. A ring-vortex downburst model for real time flight simulation of severe wind shears // AIAA Flight simulation technologies conf., 1985, July 22-24. St. Louis, Miss., P.57-61 (1985).

15. Leitmann, G. and Pandey, S. Aircraft control for flight in an uncertain environment: takeoff in windshear//J. Opt. Theory and Appl.- 1991.- V.70, N 1.-P.25-55.

16. Miele, A., Wang, T. and Melvin, W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear// J. Opt. Theory and Appl. -1986.- V.49, N 1.- P.1-45.

17. Miele, A., Wang, T. and Melvin, W.W. Guidance strategies for near-optimum take-off performance in a windshear//J. Opt. Theory and Appl.- 1986.- V.50, N 1.- P.1-47.
18. Miele, A., Wang, T., Tzeng, C.Y., Melvin, W.W. Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear//J. Opt. Theory and Appl.- 1987.- V.55, N 2.- P.165-202.
19. Zhy S., Etkin B. Model of wind field in a downburst// J. Aircraft.-1985.- Vol.22, No.7.- P.595-601.