ВИНИТИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
УРАЛЬСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УДК 517.941.92

М.А.Зарх, В.С.Пацко

ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВТОРОГО ИГРОКА В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С ФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ОКОНЧАНИЯ

Свердловск - 1985

С О Д Е Р Ж А Н И Е

стр.

Введение. 3

§ I. Постановка задачи. Условия I-4 4

§ 2. Обработка многогранников $W_c(t_e)$ I3

§ 3. Основной алгоритм. Формулировка оценок I5

§ 4. Доказательство оценок. 2I

§ 5. Выполнение условия 3 43

§ 6. Гарантия второго игрока при использовании основного алгоритма. Алгоритм с коррекцией 56

§ 7. Управление по поверхности переключения 60

§ 8. Примеры. 7I

Литература. 84

Введение

В работе рассматривается алгоритм построения управления обратной связи (стратегии) максимизирующего игрока в линейной антагонистической дифференциальной игре двух лиц с фиксированным моментом окончания и выпуклой функцией платы. При малых погрешностях счета управление гарантирует максимизирующему игроку результат, близкий к оптимальному.

Предполагается, что после подходящей аппроксимации мы можем при помощи ЭВМ построить в пространстве время X фазовая переменная для каждого числа c некоторую "трубку" W_c, которая либо совпадает, либо оценивает сверху множество всех позиций, где цена игры не превышает c. С трубки W_c затем снимается определенная информация, необходимая для построения управления максимизирующего игрока. Это управление гарантирует в момент окончания игры результат $\gamma \geq c$ для состояний, лежащих в начальный момент t_* вне внутренности сечения $W_c(t_*)$. Используя сетку значений c_m параметра c и соответственно набор трубок W_{c_m}, определяем управление, гарантирующее близкий к оптимальному результат для любой начальной позиции.

Описываемый способ управления устойчив по отношению к погрешностям измерения состояния системы в текущий момент времени. Устойчивость по отношению к погрешностям построения трубок W_c также имеет место, хотя она явно в работе не анализируется.

При решении линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания часто предварительно переходят к эквивалентной задаче, где в правой части уравнений динамики отсутствует фазовая переменная. Такой переход позволяет, в част -

ности, понизить размерность задачи, если функция платы зависит не от всех, а лишь от некоторых координат фазового вектора. В настоящей работе предполагается, что система уже приведена к эквивалентному виду без фазовой переменной в правой части.

Описываемый алгоритм ориентирован прежде всего на задачи, имеющие в эквивалентной форме второй или третий порядок. Для таких задач алгоритм реализован в виде стандартной программы.

Материал работы примыкает к исследованиям [1-4].

§ I. Постановка задачи. Условия I-4

Рассмотрим линейную антагонистическую дифференциальную игру

$$\dot{y}(t) = B^1(t)u + C^1(t)v \qquad (I.I)$$
$$y(t) \in R^n, \quad u \in P^1, \quad v \in Q$$

двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ и выпуклой, липшицевой функцией платы $\gamma^1 : R^n \to R$. Первый игрок распоряжается параметром u и минимизирует значение $\gamma^1(y(\vartheta))$. Параметр v принадлежит второму игроку, цель которого - максимизировать $\gamma^1(y(\vartheta))$. Условимся, что $\gamma^1(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Управляющие параметры u, v - конечномерные векторы, принадлежащие соответственно выпуклому компакту P^1 и выпуклому многограннику Q. Матрицы $B^1(t)$, $C^1(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными по t. Начальный момент для игры (I.I) обозначим символом t_* и будем считать, что он выбирается из заданного промежутка $T = [t_0, \vartheta]$. Фазовая переменная не входит в правую часть системы (I.I). Этого всегда можно добиться известным преобразованием [1,5].

В ДАЛЬНЕЙШЕМ СИМВОЛ T ИСПОЛЬЗУЕТСЯ НЕ ТОЛЬКО ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ПРОМЕЖУТКА $[t_0, \vartheta]$, НО И ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЕГО ДЛИНЫ.

Наряду с (I.I), рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot{y}(t) = B^2(t)u + C^2(t)v$$

$$y(t) \in R^n, \ u \in P^2, \ v \in Q, \ t \in T \tag{I.2}$$

которую можно интерпретировать как удобную для вычислений на ЭВМ аппроксимацию игры (I.I). Функцию платы в игре (I.2) обозначим γ^2. Будем считать, что она удовлетворяет таким же условиям, что и функция γ^1. Дополнительно предположим, что множества уровня $M_c^2 = \{x \in R^n : \gamma^2(x) \leq c\}$ - выпуклые многогранники. Выпуклым многогранником будем считать и ограничение P^2. Ограничение Q - то же, что и в системе (I.I). Матрицы $B^2(t)$, $C^2(t)$ - кусочно-непрерывны.

Пусть ω - разбиение промежутка T с шагом $\varkappa$, а $t_e = t_0 + e\varkappa$, $e = 0, 1, 2, \ldots$, - точки разбиения. Предположим существование такой константы χ, что

$$\left\| \int_{t_i}^{t_j} (C^2(\tau) - C^2(t_i))\, d\tau \right\| \leq \chi (t_j - t_i)^2 \tag{I.3}$$

для любых t_i, $t_j \in \omega$, $t_j > t_i$. Условие (I.3) является аналогом условия Липшица для функции C^2 и выполнено, например, если функция C^1 липшицева, а C^2 - ее кусочно постоянная с шагом $\varkappa$ аппроксимация: $C^2(t) = C^1(t_e)$, $t \in [t_e, t_{e+1})$, $e = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае χ - константа Липшица функции C^1.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\rho(\cdot, F)$ - опорная функция выпуклого множества F. Если F - выпуклый многогранник, то через $N(F)$ обозначим совокупность единичных внешних нормалей к граням размерности $n-1$. Символом $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{U}^2)$ обозначим множество измеримых функций $u(\cdot)$: $T \to P^1$ $(T \to P^2)$. Положим

$$S = \{l \in R^n : |l| = 1\}, \quad Q^2(l,t) = \arg\max_{q \in Q} l' C^2(t) q$$

Зафиксируем промежуток $[c_*, c^*]$, где $c^* > c_* \geq \min_{x \in R^n} \gamma^2(x)$. Будем считать, что при помощи ЭВМ для любого $c \in [c_*, c^*]$ мы можем построить последовательность выпуклых многогранников $W_c(t_e)$, удовлетворяющую четырем условиям, которые будут сформулированы ниже. Основным из них является условие 3. На основе информации, снятой с многогранников $W_c(t_e)$, будет построена стратегия второго игрока в игре (I.I), гарантирующая ему близкий к оптимальному результат.

Перечислим требования на многогранники $W_c(t_e)$.

Условие I. $W_c(\vartheta) = M_c^2$.

Условие 2. Существуют такие положительные числа r и $\mathcal{R}$, что в каждое множество $W_c(t_e)$ можно вписать шар радиуса r и каждый из многогранников $W_c(t_e)$ может быть помещен в некоторый шар радиуса $\mathcal{R}$. Центр шара может зависеть от c и t_e.

Условие 3. Существует такая константа $\sigma > 0$, что

$$\rho(l, W_c(t_i)) + \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}^2} l' \int_{t_i}^{t_j} (B^2(\tau) u(\tau) + C^2(\tau) q) d\tau \geq \qquad \text{(I.4)}$$

$$\geq \rho(l, W_c(t_j)) - \sigma (t_j - t_i)^2$$

для всех моментов t_i, $t_j \in \omega$, $t_j > t_i$, любых $l \in N(W_c(t_i))$ и $q \in Q^2(l, t_i)$.

Поскольку $W_c(t_e)$ - многогранник, то его опорная функ - ция $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ кусочно-линейна. Именно, каждой вершине w многогранника $W_c(t_e)$ соответствует выпуклый конус, порожденный внешними нормалями к граням размерности $n-1$, содержащим w (см. рис.I а, где $n=3$). В этом конусе функция $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ линейна. Число образующих конуса линейности (совпадающее с числом граней размерности $n-1$, со - держащих w) не меньше размерности пространства R^n. В дальнейшем условимся, что любой конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ разбит на конусы с n образующими, причем любая из них является образующей рассматриваемого конуса ли - нейности (рис. I в). Таким образом, употребляя выражение "конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ " будем подразумевать, что он имеет ровно образующих.

<u>Условие 4</u>. Существует такая константа $\beta > 0$, что для любого конуса линейности $K = con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ выполнено неравенство

$$\frac{|l_s - l_k| \, |D_{sm}|}{|D|} \leq \beta \, ; \qquad s, k, m = \overline{1,n}$$

Здесь D - определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} l_{11}, l_{12}, \ldots, l_{1n} \\ l_{21}, l_{22}, \ldots, l_{2n} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ l_{n1}, l_{n2}, \ldots, l_{nn} \end{pmatrix}$$

составленной из координат векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а D_{sm} - алгебраическое дополнение ее элемента с номерами s, m.

Поясним условия I-4. Условие I - это просто краевое условие. Условие 2 означает, что все множества $W_c(t_e)$ не вырождены и, кроме того, их вытянутость ограничена. Пусть $g_c^*(t_e)$ - центр наибольшего вписанного в $W_c(t_e)$ шара, а $\bar{g}_c(t_e)$ - наименьшего описанного. Условие 2 эквивалентно соотношению

$$l'g_c^*(t_e)+r \leq \rho(l, W_c(t_e)) \leq l'\bar{g}_c(t_e)+\mathcal{R}, \qquad l \in S \tag{1.5}$$

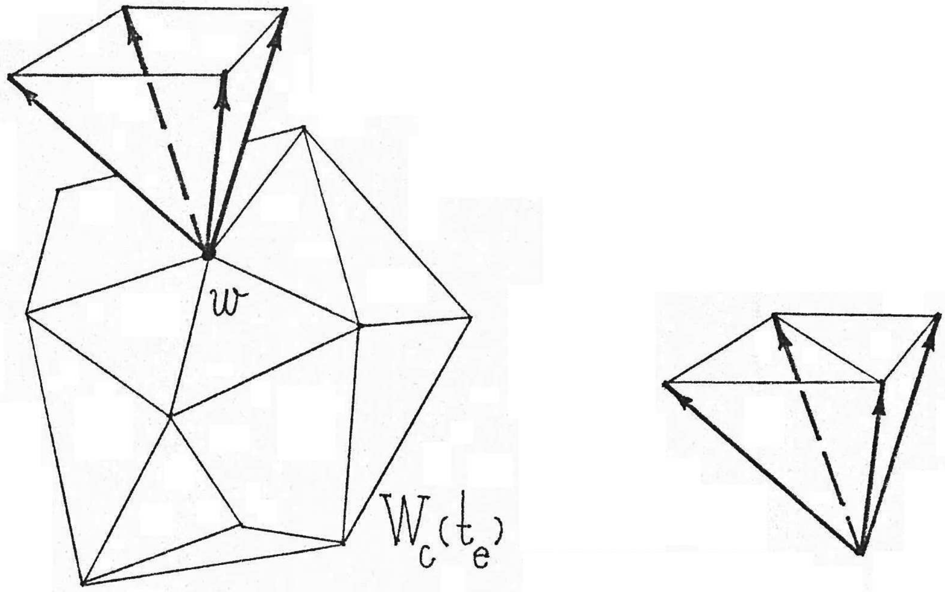
При этом $|g_c^*(t_e)-\bar{g}_c(t_e)| \leq \mathcal{R}$.

Условие 3 имеет следующий геометрический смысл. Пусть точка $\bar{x}$ принадлежит опорной гиперплоскости $l'x=\rho(l, W_c(t_i))$ к $W_c(t_i)$, где l - единичная нормаль многогранника $W_c(t_i)$ (рис.2), и пусть второй игрок держит на $[t_i, t_j]$ постоянное управление $v(t) \equiv q \in Q^2(l, t_i)$, экстремальное в момент t_i по вектору l. Тогда (в этом и состоит смысл условия 3) при любом управлении первого игрока движение системы (I.2) в момент t_j будет принадлежать полупространству $l'x \geq \rho(l, W_c(t_j)) - \sigma(t_j-t_i)^2$. На рис. 2 символом $\bar{G}$ обозначена совокупность всех возможных состояний в момент t_j при $v(t) \equiv q$.

Укажем случай, когда условие 3 выполнено. Предположим, что B^1, C^1 - липшицевы функции, а B^2, C^2 - кусочно-постоянные с шагом $\varkappa$, непрерывные справа их аппроксимации, т.е.

$$B^2(t)=B^1(t_e), \quad C^2(t)=C^1(t_e), \quad t\in[t_e, t_{e+1}), \quad e=0,1,2,\ldots$$

Определим рекуррентный способ построения последовательности $W_c(t_e)$. Примем $W_c(\vartheta)=M_c^2$. Пусть найдены множества $W_c(\vartheta), \ldots, W_c(t_{e+2}), W_c(t_{e+1})$. Положим



a в

Рис. 1 (n = 3)

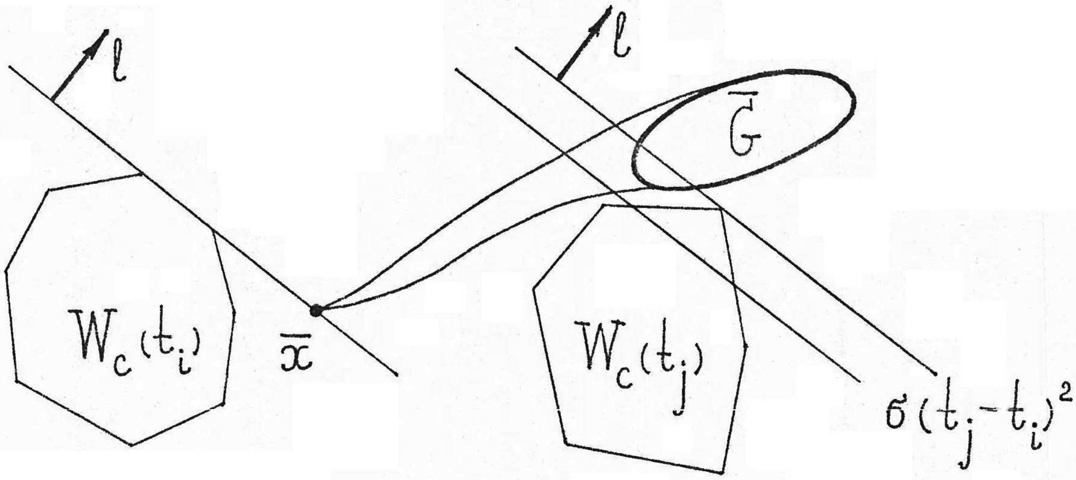


Рис. 2 (n = 2)

$$\eta_c(l,t_e)=\rho(l,W_c(t_{e+1}))+\varkappa\rho(l,-B^2(t_e)P^2)-$$
$$-\varkappa\rho(l,C^2(t_e)Q), \qquad l\in R^n \qquad (\text{I}.6)$$

Введем множество $L_c(t_e)$ - произвольный конечный набор единичных векторов, удовлетворяющий условию

$$N(W_c(t_{e+1}))\subset L_c(t_e), \qquad t_e\neq\vartheta$$

Многогранник $W_c(t_e)$ зададим по формуле

$$W_c(t_e)=\{x\in R^n: l'x\leq\eta_c(l,t_e),\ l\in L_c(t_e)\} \qquad (\text{I}.7)$$

Очевидно,что если $l\in N(W_c(t_e))$, то $\eta_c(l,t_e)=$ $=\rho(l,W_c(t_e))$. В силу определения функций B^2 , C^2 равенство (I.6) можно переписать тогда в виде

$$\rho(l,W_c(t_e))+\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} l'\int_{t_e}^{t_{e+1}}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)d\tau=\rho(l,W_c(t_{e+1}))$$

Здесь $q\in Q^2(l,t_e)$. Таким образом, условие 3 выполнено для $j=i+1$. Доказательство его выполнения при $j>i+1$, а также примеры задания наборов $L_c(t_e)$ будут даны в § 5.

Покажем, что в двумерном случае (т.е. при $n=2$) условие 4 следует из условия 2. Действительно, пусть $K=con\{l_1,l_2\}$ - некоторый конус линейности опорной функции какого-либо из многогранников $W_c(t_e)$. Символом φ обозначим угол между единичными векторами l_1 , l_2 . Имеем

$$|l_1 - l_2| = 2\sin\frac{\varphi}{2}, \quad |D_{sm}| \le 1, \qquad |D| = \sin\varphi$$

Поэтому

$$\frac{|l_1 - l_2||D_{sm}|}{|D|} \le \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Пусть w - вершина многоугольника $W_c(t_e)$, соответствующая конусу линейности $con\{l_1, l_2\}$ (рис.3). Для угла $\pi - \varphi$ при вершине w в силу условия 2 выполнено неравенство

$$\sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) \ge \frac{r}{|g_c^*(t_e) - w|} \ge \frac{r}{2R}$$

Но $\cos\frac{\varphi}{2} = \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)$ и, стало быть, в качестве константы β в записи условия 4 можно взять величину $2R/r$.

Дадим геометрическую интерпретацию условия 4 для $n = 3$. Пусть $K = con\{l_1, l_2, l_3\}$ - конус линейности. Величина $|D|$ есть объем параллелепипеда, натянутого на векторы l_1, l_2, l_3. Зафиксируем $s = 1$. Тогда D_{11}, D_{12}, D_{13} - координаты векторного произведения $[l_2, l_3]$, и ограниченность отношений $|l_1 - l_k||D_{1m}|/|D|$; $k, m = \overline{1,3}$, эквивалентна ограниченности отношений $|l_1 - l_k||[l_2, l_3]|/|D|$, $k = \overline{1,3}$. Поскольку величина $|[l_2, l_3]|$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы l_2, l_3, то $|D| = |[l_2, l_3]|h_1$, где h_1 - высота параллелепипеда, опущенная из конца вектора l_1 на плоскость векторов l_2, l_3 (рис.4). Таким образом, ограниченность $|l_1 - l_k||D_{1m}|/|D|$; $k, m = \overline{1,3}$, означает ограниченность отношений $|l_1 - l_k|/h_1$, $k = 2,3$. Анало -

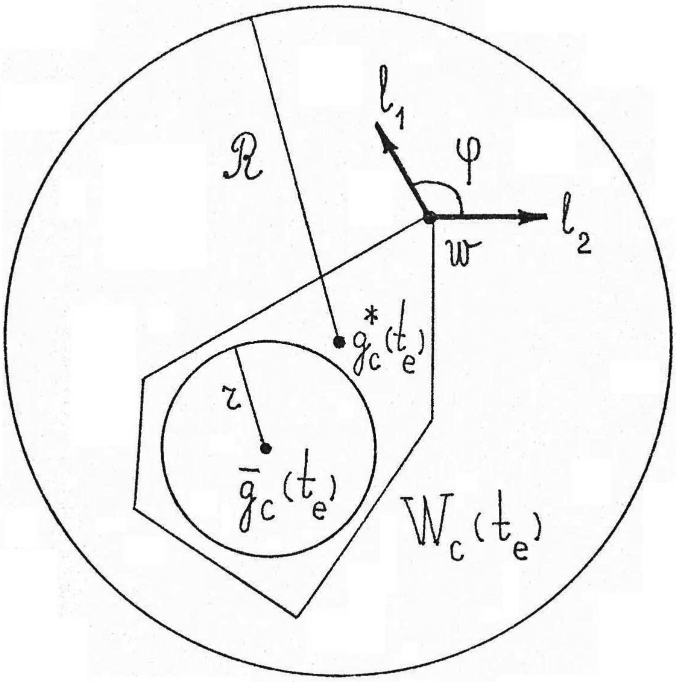


Рис. 3 (n=2)

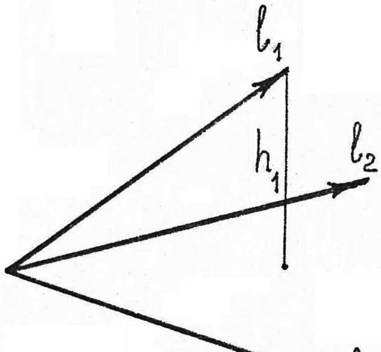


Рис. 4 (n=3)

гичное справедливо и для $s=2,3$. Итак, условие 4 ограничивает вытянутость конусов линейности.

§ 2. Обработка многогранников $W_c(t_e)$

Опишем информацию, снимаемую с многогранников $W_c(t_e)$ и используемую для формирования стратегии второго игрока.

Символом $\Lambda_c(t_e)$ обозначим объединение всех конусов линейности $K=con\{l_1,l_2,\dots,l_n\}$ функции $\rho(\cdot,W_c(t_e))$, для каждого из которых $\bigcap\limits_{s=1}^{n} Q^2(l_s,t_e)=\varnothing$. Конусы линейности, входящие в $\Lambda_c(t_e)$, для краткости будем называть "плохими", остальные конусы линейности функции $\rho(\cdot,W_c(t_e))$ - "хорошими".

Из всей информации о многограннике $W_c(t_e)$ мы оставляем для формирования стратегии второго игрока только информацию о плохих конусах и значениях опорной функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ на образующих этих конусов, или, что то же самое,- описание плохих конусов и соответствующих им вершин многогранника $W_c(t_e)$.

На рис.5 для плоского случая изображены многоугольник $W_c(t_e)$ и плохие конусы. Плохими являются те конусы линейности функции $\rho(\cdot,W_c(t_e))$, во внутренность которых попадают нормали многоугольника $C^2(t_e)Q$. На рис.5 $C^2(t_e)Q$ - треугольник.

Если $n=3$ и Q - отрезок, то плохими являются те из конусов линейности, внутренность которых пересекается плоскостью, ортогональной отрезку $C^2(t_e)Q$ и проходящей через начало координат. На рис.6 схематично изображена часть конусов линейности опорной функции многогранника $W_c(t_e)$. Плоскость, ортогональная отрезку $C^2(t_e)Q$, показана в виде

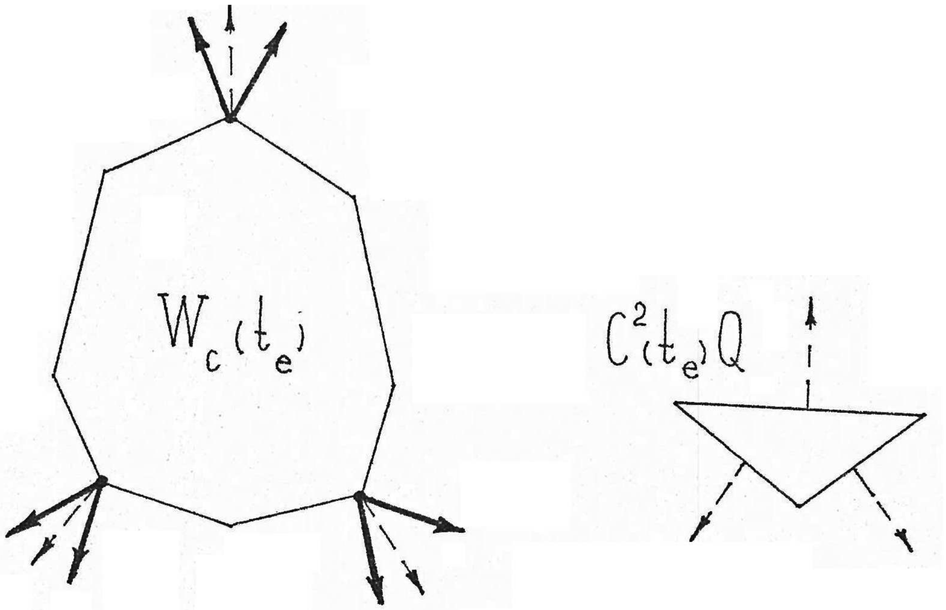


Рис. 5 (n=2)

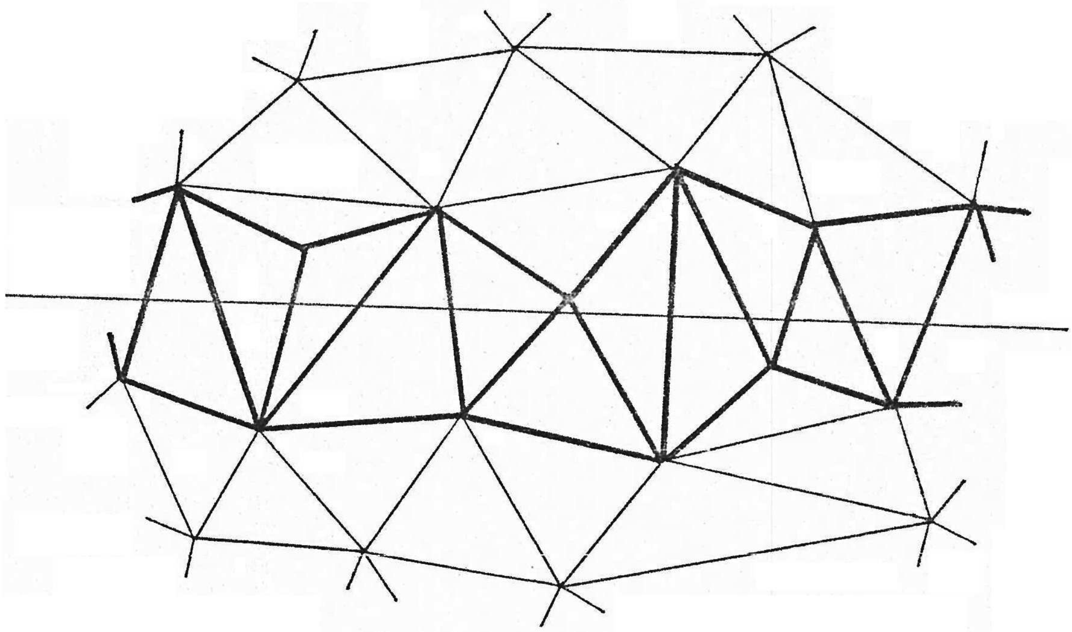


Рис. 6 (n=3)

прямой. Жирным выделены плохие конусы линейности.

В общем случае конус линейности функции $\rho(\cdot, W_c(t_e))$ относим к плохим, если его внутренность пересекается с границей хотя бы одного из конусов линейности опорной функции многогранника $C^2(t_e)Q$. Многогранник $C^2(t_e)Q$ при этом может быть вырожденным.

Для формирования стратегии второго игрока зафиксируем конечный набор $\mathcal{C}=\{c_m\}$ значений параметра $c \in [c_*, c^*]$ и для каждого t_e снимем с $W_{c_m}(t_e)$, $m=1,2,\ldots$, плохие конусы и соответствующие им вершины. На рис.7 поясняется случай, когда $n=2$ и $C^2(t_e)Q$ - отрезок.

Алгоритм, использующий всю указанную информацию, назовем алгоритмом с коррекцией. Он будет описан в § 6. Основой его служит алгоритм управления, использующий информацию, снятую с многогранников $W_c(t_e)$ при фиксированном значении параметра c. Этот алгоритм назовем основным.

§ 3. Основной алгоритм. Формулировка оценок

В параграфах 3-5 параметр c будем считать зафиксированным. Поэтому условимся опускать в обозначениях индекс c. Например, вместо $W_c(t_e)$ будем писать $W(t_e)$. Положим

$$d(t,l,x)=\rho(l,W(t))-l'x$$

$$\varepsilon(t_i,t_j)=$$

$$=\int_{t_i}^{t_j}\max_{|l|\le 1}\Big[\max_{p\in -P^1} l'B^1(\tau)p-\max_{p\in -P^2} l'B^2(\tau)p+\max_{q\in Q} l'\big(C^2(\tau)-C^1(\tau)\big)q\Big]d\tau$$

5756-85

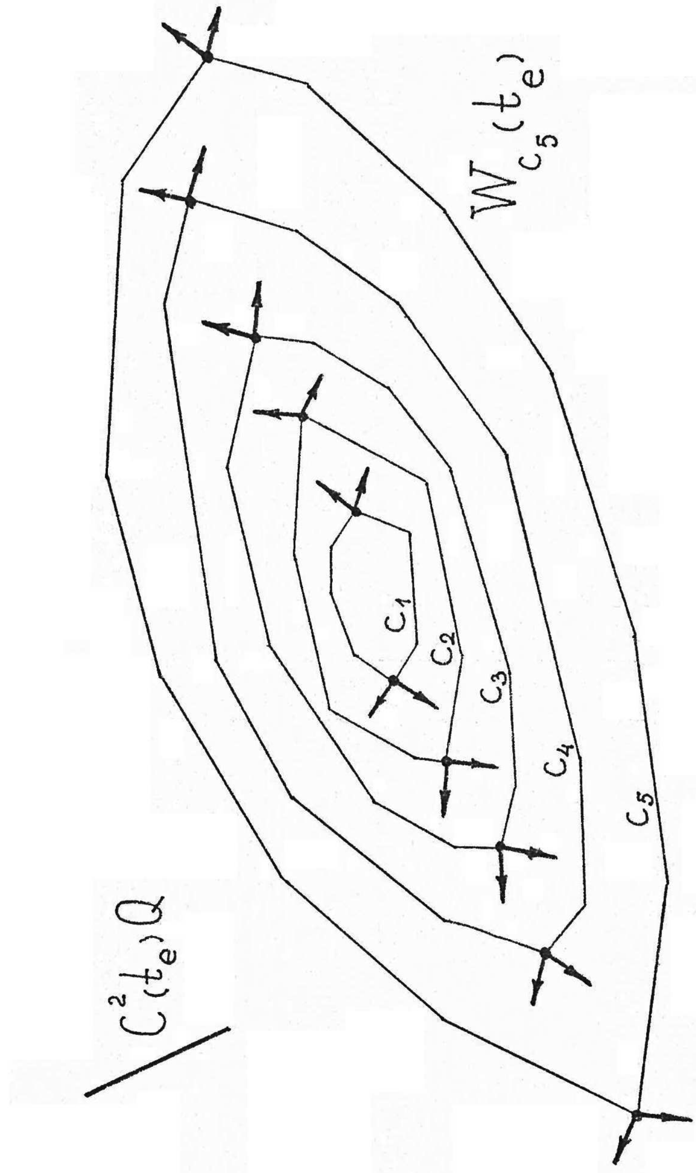


Рис. 7 (n=2)

Величина d - это расстояние от точки x до отвечающей век - тору l опорной гиперплоскости к множеству $W(t)$. Расстояние d имеет знак плюс, если x принадлежит тому же полу - пространству, что и $W(t)$, и знак минус, если x и $W(t)$ разделяются указанной гиперплоскостью. Величина $\varepsilon(t_i, t_j)$ характеризует разность динамик систем (I.I), (I.2) на проме - жутке $[t_i, t_j]$.

Опишем алгоритм управления второго игрока, обеспечиваю - щий удержание фазового вектора $y^1(t_e)$ системы (I.I) при любом t_e вблизи дополнения к множеству $\mathrm{int}\, W(t_e)$, т.е. вблизи $R^n \setminus \mathrm{int}\, W(t_e)$. Условимся считать начальный момент t_* совпадающим с одним из моментов t_e , шаг Δ дискретной схемы управления второго игрока будем полагать постоянным и кратным æ . Положим $\tau_0 = t_*$, $\tau_k = \tau_{k-1} + \Delta$, $k = 1, 2, \ldots$ В каждый момент τ_k управление второго игрока будет выбираться как экстремальное на некотором векторе. В начальный момент t_* следует задать начальный вектор l_* . Естественные варианты выбора вектора l_* будут описаны в конце этого параграфа, а также в § 6.

Алгоритм управления при фиксированном c опишем в двух вариантах: а) когда фазовый вектор $y^1(\tau_k)$ известен точно, в) когда в схему управления вместо точного фазового вектора $y^1(\tau_k)$ подается замер $z^1(\tau_k)$.

Рассмотрим алгоритм а). Пусть дана начальная позиция $(t_*, y^1(t_*))$ и некоторый начальный вектор l_* . Формирование управления на каждом шаге дискретной схемы однотипно. Опишем общий шаг. В момент τ_k имеем фазовый вектор $y^1(\tau_k)$ и век - тор $l(\tau_k)$, передаваемый с предыдущего шага (выбранный в момент τ_{k-1}). Формально считаем

$$l(t)=l(\tau_k),\quad t\in(\tau_{k-1},\tau_k],\quad k=1,2,\ldots,\quad l(\tau_0)=l_*$$

Если $l(\tau_k)\notin\Lambda(\tau_k)$, то вектор $l(\tau_k)$ не меняем, положив $l(\tau_{k+1})=l(\tau_k)$. Если $l(\tau_k)\in\Lambda(\tau_k)$, т.е. обнаружен плохой конус $K=con\{l_1,l_2,\ldots,l_n\}$, содержащий вектор $l(\tau_k)$, то в качестве $l(\tau_{k+1})$ выберем ту из образующих $l_1,l_2,\ldots,l_n$ конуса K, на которой реализуется минимум расстояний $d(\tau_k,l_s,y^1(\tau_k))$, $s=\overline{1,n}$, т.е.

$$d(\tau_k,l(\tau_{k+1}),y^1(\tau_k))=\min_{1\le s\le n} d(\tau_k,l_s,y^1(\tau_k))$$

В качестве управляющего воздействия второго игрока на промежутке $[\tau_k,\tau_{k+1})$ возьмем любой вектор из совокупности экстремальных векторов $Q^2(l(\tau_{k+1}),\tau_k)$.

Пусть на промежутке $[t_*,\vartheta]$ управление второго игрока вырабатывалось по алгоритму а). Тогда при любом $t_i\ge t_*$ справедлива оценка

$$d(t_i,l(t_i),y^1(t_i))\le$$

$$\le\max\{0,d(t_*,l_*,y^1(t_*))\}+2\frac{R}{r}\sigma(t_i-t_*)\Delta+\varepsilon(t_*,t_i)\qquad(3.1)$$

Предположим теперь, что состояние $y^1(\tau_k)$ замеряется неточно и в каждый момент τ_k в схему формирования управления вместо $y^1(\tau_k)$ подается замер $z^1(\tau_k)$. Пусть α - оценка точности, т.е. $|y^1(\tau_k)-z^1(\tau_k)|\le\alpha$ при любом k. Алгоритм в) будет отличаться от алгоритма а) лишь несколько иным выбором вектора $l(\tau_{k+1})$.

Опишем алгоритм в). Зафиксируем число μ, $0<\mu<1$.

Выбор параметра μ пока не будем связывать с числом α. В момент t_* имеем замер $z^1(t_*)$ и начальный вектор l_*. Рассмотрим общий шаг. В момент τ_k имеем замер $z^1(\tau_k)$ и вектор $l(\tau_k)$, передаваемый с предыдущего шага. Если $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$, полагаем $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. Пусть $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k)$, т.е. обнаружен плохой конус $K = \mathrm{con}\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$, содержащий вектор $l(\tau_k)$. При одновременном выполнении неравенств

$$l'(\tau_k)\, l_s \le 1-\mu, \qquad s=\overline{1,n},$$

в качестве вектора $l(\tau_{k+1})$ выберем ту из образующих $l_1, l_2, \dots, l_n$ конуса K, на которой реализуется минимум расстояний $d(\tau_k, l_s, z^1(\tau_k))$, $s=\overline{1,n}$. В случае: $l'(\tau_k)\, l_s > 1-\mu$ хотя бы для одного $s=\overline{1,n}$, примем $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$. В качестве управляющего воздействия второго игрока на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ возьмем любой вектор из $Q^2(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$.

Пусть на промежутке $[t_*, \vartheta]$ управление второго игрока вырабатывалось по алгоритму в). Тогда при любом $t_i \ge t_*$ справедлива оценка

$$d(t_i, l(t_i), y^1(t_i)) \le \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu} + 2\alpha,\ d(t_*, l_*, y^1(t_*))\right\} + \sigma_1 (t_i - t_*)\Delta + \sigma_2 (t_i - t_*)\sqrt{\mu} + \varepsilon(t_*, t_i). \tag{3.2}$$

Поскольку $d(t_*, l_*, y^1(t_*)) \le d(t_*, l_*, z^1(t_*)) + \alpha$, то правую часть оценки (3.2) можно записать через $z^1(t_*)$, а именно,

$$d(t_i, l(t_i), y^1(t_i)) \le \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu}, d(t_*, l_*, z^1(t_*))\right\} + \\ + 2\alpha + \sigma_1(t_i - t_*)\Delta + \sigma_2(t_i - t_*)\sqrt{\mu} + \varepsilon(t_*, t_i) \qquad (3.3)$$

Доказательство оценок (3.I), (3.2) приводится в § 4.

Замечание 3.I. Оценки (3.I), (3.2), (3.3) зависят от выбора начального вектора l_* . Пусть, например, начальная точка $y^1(t_*)$ принадлежит границе многогранника $W(t_*)$. Если в качестве l_* возьмем внешнюю нормаль к $W(t_*)$ в точке $y^1(t_*)$, начальное расстояние $d(t_*, l_*, y^1(t_*))$ будет равно нулю. При произвольном выборе начального вектора в правой части оценок (3.I), (3.2) будет стоять положительная величина $d(t_*, l_*, y^1(t_*))$. Когда вместо $y^1(t_*)$ известен лишь замер $z^1(t_*)$, то, как видно из (3.3), в качестве l_* целесообразно брать вектор, минимизирующий расстояние от $z^1(t_*)$ до границы $W(t_*)$.

Замечание 3.2. Пусть τ_k - произвольный момент, при котором вектор $l(\tau_k)$ заменяется на новый, отличный от него вектор $l(\tau_{k+1})$. Зная вектор $l(\tau_{k+1})$, мы в момент τ_k можем просчитать следующий момент τ_m , $m > k$, когда уже вектор $l(\tau_m) = l(\tau_{k+1})$ попадет в плохой конус и будет заменен на новый вектор. Следовательно, в момент τ_k мы можем сформировать кусочно-постоянное программное управление второго игрока на весь промежуток $[\tau_k, \tau_m)$. В момент τ_m , используя состояние $y^1(\tau_m)$ (замер $z^1(\tau_m)$), выбираем новый вектор $l(\tau_{m+1})$, определяем промежуток $[\tau_m, \tau_j)$, $j > m$, на котором он не будет меняться, формируем программное управление на промежуток $[\tau_m, \tau_j)$ и т.д. Таким образом, управление второго игрока, определяемое алгоритмами а), в), может быть реализовано, как кусочно-програмнное.

Замечание 3.3. Может оказаться, что для всех моментов τ_k множество $\Lambda(\tau_k)$, составленное из плохих конусов, пусто. Так будет, например, когда сечения $W(t_e)$ строятся по формулам (I.6), (I.7), причем $L(t_e) = N(W(t_{e+1}) - æ B^2(t_e)P^2)$, и выполнено свойство однотипности [I, 6] : $B^2 = C^2$, $P^2 = -\lambda Q$, $\lambda > 1$. В этом случае управление второго игрока, определяемое алгоритмами а), в), можно задать как функцию времени (программу) на весь промежуток $[t_*, \vartheta]$ сразу же в начальный момент t_* соотношением

$$v(t) \in Q^2(l_*, \tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

§ 4. Доказательство оценок

В основе доказательства оценок (3.I), (3.2) лежит оценка изменения величины d на одном шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ дискретной схемы управления второго игрока по алгоритмам а), в).

Существо дела состоит в следующем. Расстояние $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$, которое мы имеем на момент τ_k после k -ого шага, при замене в момент τ_k вектора $l(\tau_k)$ на вектор $l(\tau_{k+1})$ переходит в расстояние $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$. Управление второго игрока на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ постоянно и выбирается из условия экстремума на векторе $l(\tau_{k+1})$. При движении системы (I.I) из позиции $(\tau_k, y^1(\tau_k))$ получим в момент τ_{k+1} расстояние $d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$. Таким образом, просчет $d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ по $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ состоит из двух этапов: оценка расстояния $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$ по $d(\tau_k, l(\tau_k),$

$y^1(\tau_k))$ и оценка $d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ по $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$.

Для оценки величины $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$ через $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ будет использована лемма 4.2. Из нее, в частности, следует, что если вектор $l(\tau_k)$ попадает в некоторый плохой конус линейности $K = con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ и точка $y^1(\tau_k)$ принадлежит опорному полупространству $l'(\tau_k)x \leq \rho(l(\tau_k), W(\tau_k))$, то хотя бы для одного вектора l_s из совокупности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ расстояние $d(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k))$ не больше расстояния $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ (см. рис.8, где $n=2$). Если, кроме того, вектор $l(\tau_k)$ далек от образующих $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в том смысле, что

$$l'(\tau_k)l_s \leq 1-\mu, \qquad s=\overline{1,n},$$

то минимальное из расстояний $d(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k))$, $s=\overline{1,n}$, меньше $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$ по крайней мере на величину $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\mu$. При анализе алгоритма а) нужно в лемме 4.2 взять $\mu^*=0$.

Лемма 4.I переносит свойство "отталкивания", оговоренное условием 3 для нормалей многогранника $W(t_i)$, на векторы $l \notin \Lambda(t_i)$, т.е. на векторы из хороших конусов линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i))$. Лемма 4.3 дает оценку отталкивания по вектору l, когда он попадает в $\Lambda(t_i)$, но близок к одной из образующих конуса линейности, которому он принадлежит. Леммы 4.1, 4.3 используются для оценки величины $d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1}))$ через $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k))$. При анализе алгоритма а) лемма 4.3 не нужна.

Отметим, что при анализе алгоритма в) мы оцениваем, как

5756-85

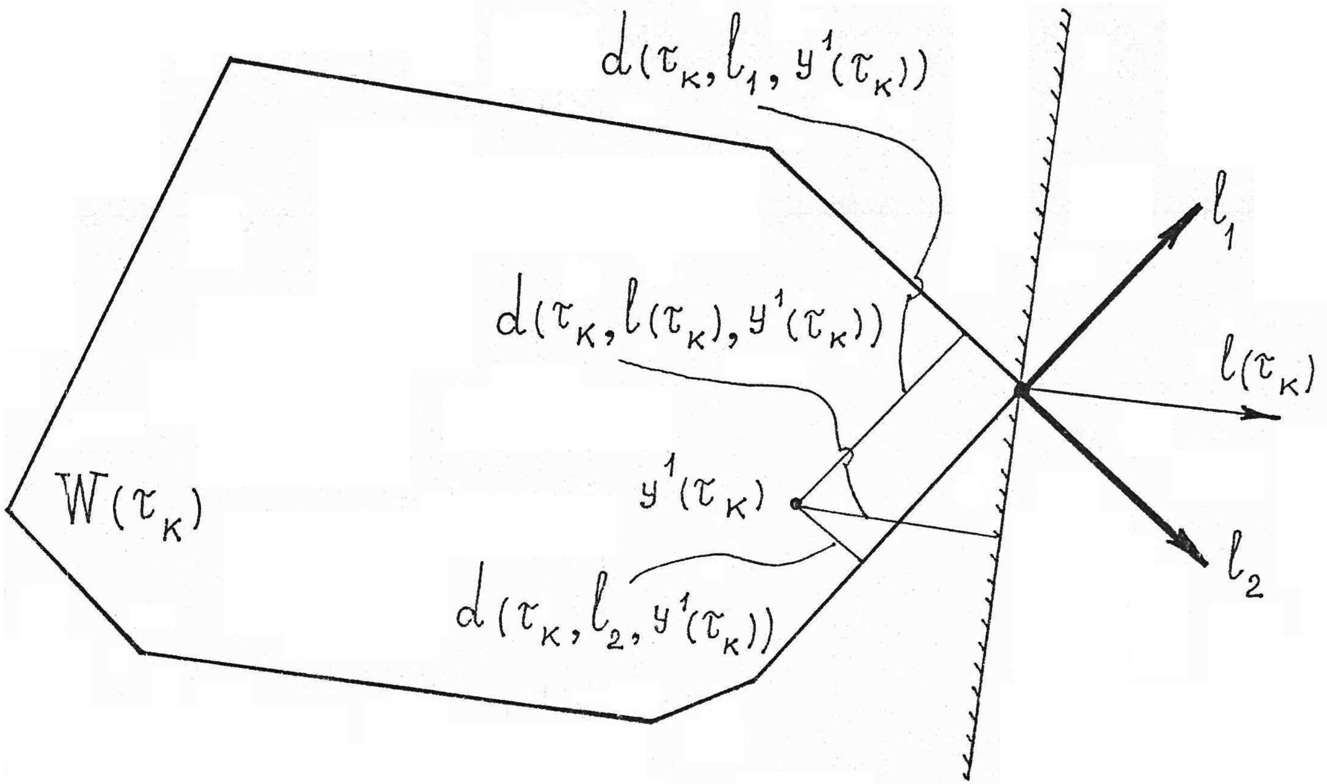


Рис. 8 $(n=2)$

и в случае алгоритма а), расстояние d, определяемое истинным (но не известным нам) состоянием $y^1(t)$ системы (I.I), в то время, как управление второго игрока согласно алгоритму в) формируется по замеру $z^1(t)$.

Пусть $y^2(t;t_i,x,u(\cdot),v(\cdot))$ – положение фазового вектора системы (I.2) в момент t при движении из позиции (t_i,x) под действием программных управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Символом $G_q(t_i,t_j)$ обозначим совокупность всех состояний x в момент t_i, для каждого из которых в системе (I.2) при $v(t)\equiv q\in Q$ существует программное управление $u(\cdot)$ первого игрока, такое, что $y^2(t_j;t_i,x,u(\cdot),q)\in W(t_j)$, т.е. управление, переводящее систему (I.2) в момент t_j на $W(t_j)$. Опорная функция множества $G_q(t_i,t_j)$ описывается соотношением

$$\rho(l,G_q(t_i,t_j))=$$

$$=\rho(l,W(t_j))+\max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2}\Big[-l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)d\tau\Big]=$$

$$=\rho(l,W(t_j))-\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2}l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)d\tau$$

Из этого соотношения и определения расстояния d вытекает эквивалентность следующих неравенств

$$\rho(l,W(t_i))+\min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2}l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)d\tau\geq \tag{4.I}$$

$$\geq\rho(l,W(t_j))-a$$

$$\rho(l, W(t_i)) \geq \rho(l, G_q(t_i, t_j)) - a, \qquad (4.2)$$

$$\max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} d(t_j, l, y^2(t_j; t_i, x, u(\cdot), q)) \leq d(t_i, l, x) + a, \quad x \in R^n \qquad (4.3)$$

Здесь a - произвольное число, q - любой элемент из Q. Эквивалентность неравенств (4.1)-(4.3) будет использована в доказательствах этого и следующего параграфов. Нам понадобится также следующее

Утверждение 4.I. Пусть векторы $l_1, l_2, \ldots, l_m$, $m \leq n$, принадлежат единичной сфере S в R^n и линейно-независимы. Пусть далее $g^*, \bar{g} \in R^n$; $a_s \in R$, $s = \overline{1,m}$; $b > 0$, $\bar{\mathcal{R}} \geq r^* > 0$

$$\Pi = \{x \in R^n : l_s' x \leq a_s, \ s = \overline{1,m}\},$$

$$\Gamma = \{x \in R^n : l_s' x \leq a_s + b, \ s = \overline{1,m}\},$$

$$E = con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$$

Тогда, если

$$l' g^* + r^* \leq \rho(l, \Pi) \leq l' \bar{g} + \bar{\mathcal{R}}, \quad l \in E \cap S, \qquad (4.4)$$

$$|g^* - \bar{g}| \leq \bar{\mathcal{R}}$$

то

$$\rho(l, \Gamma) \leq \rho(l, \Pi) + 2\frac{\bar{\mathcal{R}}}{r^*} b, \quad l \in E \cap S$$

Доказательство. Поскольку векторы $l_1, l_2, \ldots, l_m$ линейно-независимы, то функции $\rho(\cdot, \Pi)$, $\rho(\cdot, \Gamma)$ линейны на E.

Пусть l – произвольный вектор из $E \cap S$. Представим его в виде $l=\sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s,\ \lambda_s \geq 0$. Учитывая (4.4), имеем

$$l'g^* + r^*\sum_{s=1}^{m} \lambda_s = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s (l_s'g^* + r^*) \leq \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \rho(l_s, \Pi) = \rho(l, \Pi) \leq l'\bar{g} + \bar{\mathcal{R}}$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \leq [l'(\bar{g} - g^*) + \bar{\mathcal{R}}]/r^* \leq 2\,\bar{\mathcal{R}}/r^*$$

Следовательно,

$$\rho(l, \Gamma) = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s \rho(l_s, \Gamma) = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s (\rho(l_s, \Pi) + b) =$$

$$= \rho(l, \Pi) + b\sum_{s=1}^{m} \lambda_s \leq \rho(l, \Pi) + 2\,\frac{\bar{\mathcal{R}}}{r^*}\, b$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4.I. Пусть $t_i \in \omega$ и $\bar{l}$ – единичный вектор, не принадлежащий $\Lambda(t_i)$. Тогда для всех $t_j \in \omega$ $(t_j > t_i)$, $x \in R^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}^2$ и любого $q \in Q^2(\bar{l}, t_i)$ справедливо неравенство

$$d(t_j, \bar{l}, y^2(t_j; t_i, x, u(\cdot), q)) \leq d(t_i, \bar{l}, x) + 2\frac{\mathcal{R}}{r}\sigma(t_j - t_i)^2 \tag{4.5}$$

Доказательство. Если $\bar{l} \in N(W(t_i))$, то неравенство (4.5) выполнено в силу условия 3, неравенства $\mathcal{R}/r \geq 1$, эквивалентности соотношений (4.I) и (4.3) (полагаем в них $a = \sigma(t_j - t_i)^2$).

Пусть $\bar{l}$ не является нормалью многогранника $W(t_i)$. Выделим хороший конус линейности K, содержащий $\bar{l}$, а в нем грань $K^* \overset{(con)}{=} \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, $1 < m \le n$, минимальной размерности (считаем грань размерности n совпадающей с K), во внутренности которой лежит $\bar{l}$.

Покажем, что $Q^2(\bar{l}, t_i) \subset \bigcap\limits_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$. Представим вектор $\bar{l}$ в виде

$$\bar{l} = \sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s, \quad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, m}$$

Пусть $\bar{q}$, q^* - произвольные элементы из $Q^2(\bar{l}, t_i)$ и $\bigcap\limits_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$ соответственно. Имеем $\bar{l}' C^2(t_i) \bar{q} \ge \bar{l}' C^2(t_i) q^*$, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s' C^2(t_i) \bar{q} \ge \sum_{s=1}^{m} \lambda_s l_s' C^2(t_i) q^* \tag{4.6}$$

С другой стороны,

$$l_s' C^2(t_i) \bar{q} \le l_s' C^2(t_i) q^*, \quad s = \overline{1, m} \tag{4.7}$$

Так как $\lambda_s > 0$ при всех s, то из неравенств (4.6), (4.7) получаем

$$l_s' C^2(t_i) \bar{q} = l_s' C^2(t_i) q^*, \quad s = \overline{1, m}$$

Отсюда $\bar{q} \in \bigcap\limits_{s=1}^{m} Q^2(l_s, t_i)$.

Пусть $q \in Q^2(\bar{l}, t_i)$. Поскольку $l_s \in N(W(t_i))$ и $q \in Q^2(l_s, t_i)$ для всех $s = \overline{1, m}$, то из условия 3 с учетом эквивалентности соотношений (4.I), (4.2) (положив в них $\alpha = \sigma (t_j - t_i)^2$) вытекает

$$\rho(l_s, G_q(t_i,t_j)) \le \rho(l_s, W(t_i)) + \sigma(t_j-t_i)^2, \quad s=\overline{1,m}$$

Эти неравенства означают, что $G_q(t_i,t_j)$ принадлежит множеству

$$\Gamma = \{x \in R^n : l_s' x \le \rho(l_s, W(t_i)) + \sigma(t_j-t_i)^2, \ s=\overline{1,m}\}$$

Положим

$$\Pi = \{x \in R^n : l_s' x \le \rho(l_s, W(t_i)), \ s=\overline{1,m}\}$$

Имеем $\rho(l,\Pi) = \rho(l, W(t_i)), \quad l \in K^*$. Учитывая (I.5), применяем утверждение 4.I при $E=K^*$, $g^* = g^*(t_i)$, $\bar g = \bar g(t_i)$, $r^* = r$, $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$. Получаем неравенство

$$\rho(\bar l, G_q(t_i,t_j)) \le \rho(\bar l, W(t_i)) + 2\frac{\mathcal{R}}{r}\sigma(t_j-t_i)^2$$

равносильное в силу эквивалентности соотношений (4.2), (4.3) (полагаем $\alpha = 2\frac{\mathcal{R}}{r}\sigma(t_j-t_i)^2$) неравенству (4.5). Доказательство закончено.

<u>Лемма 4.2</u>. Пусть $\mu^* \in [0,1)$ и единичные векторы $\bar l$, $l_1, l_2, \dots, l_n$ таковы, что

$$\bar l = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s l_s, \quad \lambda_s \ge 0, \quad \bar l' l_s \le 1-\mu^*, \quad s=\overline{1,n}$$

Если при некоторых $x \in R^n$ и $h \ge 0$ выполнено неравенство $\bar l' x \ge -h$, то

$$\max_{1\le s\le n} l_s' x \ge -h + h\mu^*$$

<u>Доказательство</u>. Предположим противное: $l_s' x < -h + h\mu^*$

для всех $1 \le s \le n$. Тогда

$$\bar{l}'x = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s l_s' x < -h(1-\mu^*)\sum_{s=1}^{n} \lambda_s \tag{4.8}$$

Оценим величину $\sum\limits_{s=1}^{n} \lambda_s$:

$$1 = \bar{l}'\bar{l} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s \bar{l}' l_s \le (1-\mu^*)\sum_{s=1}^{n} \lambda_s ,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s \ge \frac{1}{1-\mu^*} \tag{4.9}$$

Из неравенств (4.8), (4.9) получаем $\bar{l}'x < -h$, что противоречит условию леммы.

Положим

$$\nu = \max_{q \in Q} |q| , \qquad \xi = \sup_{t \in T} \| C^2(t) \| ,$$

$$\sigma_1 = 2\chi\nu + \frac{2}{\tau}(\mathcal{R} + 4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T)(2\chi\nu + \sigma), \quad \sigma_2 = 2\sqrt{2}\,\xi\nu(1+\beta n\sqrt{n})$$

Лемма 4.3. Пусть $\mu^* \in [0,1)$, $t_i \in \omega$ и единичный вектор $\bar{l}$ принадлежит конусу линейности $K = con\{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ функции $\rho(\cdot, W(t_i))$. Пусть $\bar{l}' l_k \ge 1-\mu^*$ при некотором k , $1 \le k \le n$. Тогда для всех $t_j \in \omega$ $(t_j > t_i)$, $x \in R^n$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}^2$ и любого $q \in Q^2(\bar{l}, t_i)$ справедливо неравенство

$$d(t_j, \bar{l}, y^2(t_j; t_i, x, u(\cdot), q)) \le$$

$$\le d(t_i, \bar{l}, x) + \sigma_1 (t_j - t_i)^2 + \sigma_2 \sqrt{\mu^*}(t_j - t_i) \qquad (4.10)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть q_s , $s=\overline{1,n}$, означает произвольный вектор из $Q^2(l_s, t_i)$. В силу условия 3 и эквивалентности неравенств (4.I), (4.2) (полагаем в них $\alpha = \sigma(t_j - t_i)^2$) имеем

$$\rho(l_s, G_{q_s}(t_i, t_j)) \le \rho(l_s, W(t_i)) + \sigma(t_j - t_i)^2 . \qquad (4.11)$$

Оценим величину $\rho(l_s, G_{q_k}(t_i, t_j))$, $s=\overline{1,n}$. Используя (4.II), запишем

$$\rho(l_s, G_{q_k}(t_i, t_j)) \le$$

$$\le \rho(l_s, W(t_i)) + \rho(l_s, G_{q_k}(t_i, t_j)) - \rho(l_s, G_{q_s}(t_i, t_j)) + \sigma(t_j - t_i)^2 \qquad (4.12)$$

Сформулируем вспомогательное утверждение. Пусть $\tilde{\varphi}$, φ_* - произвольные единичные векторы и $\tilde{q} \in Q^2(\tilde{\varphi}, t_i)$, $q_* \in Q^2(\varphi_*, t_i)$. Тогда

$$|\rho(\tilde{\varphi}, G_{q_*}(t_i, t_j)) - \rho(\tilde{\varphi}, G_{\tilde{q}}(t_i, t_j))| \le$$

$$\le 2\xi\nu|\tilde{\varphi} - \varphi_*|(t_j - t_i) + 2\chi\nu(t_j - t_i)^2 \qquad (4.13)$$

Справедливость оценки (4.I3) будет показана в конце доказательства леммы.

Применяя оценку (4.I3) к разности $\rho(l_s, G_{q_k}(t_i, t_j)) - \rho(l_s, G_{q_s}(t_i, t_j))$, стоящей в правой части неравенства (4.I2), получим

$$\rho(l_s, G_{q_k}(t_i, t_j)) \le$$

$$\le \rho(l_s, W(t_i)) + 2\xi\nu|l_s - l_k|(t_j - t_i) + (2\chi\nu + \sigma)(t_j - t_i)^2, \quad s=\overline{1,n} \qquad (4.14)$$

Из неравенства (4.14) следует, что множество $G_{q_k}(t_i, t_j)$ принадлежит конусу $\Gamma = \{x \in R^n : l_s' x \le a_s + b,\ s = 1, n\}$, где

$$a_s = \rho(l_s, W(t_i)) + 2\xi\nu|l_s - l_k|(t_j - t_i), \quad s=\overline{1,n}$$

$$b = (2\chi\nu + \sigma)(t_j - t_i)^2.$$

Положим $\Pi = \{x \in R^n : l_s' x \le a_s,\ s = \overline{1,n}\}$. Очевидно $l' g^*(t_i) + r \le \rho(l, \Pi)$ при любом $l \in K \cap S$. Ниже, используя утверждение 4.1, оценим сверху опорную функцию $\rho(\cdot, \Gamma)$ на $K \cap S$, а через нее затем и опорную функцию $\rho(\cdot, G_{q_k}(t_i, t_j))$. Предварительно найдем оценку сверху для $\rho(\cdot, \Pi)$ на $K \cap S$.

Из определения множества Π и линейности функции $\rho(\cdot, W(t_i))$ на конусе K получаем, что

$$\rho(l, \Pi) - \rho(l, W(t_i)) = l' f, \quad l \in K$$

где вектор f есть решение системы уравнений

$$l_s' f = 2\xi\nu|l_s - l_k|(t_j - t_i), \quad s = \overline{1,n} \qquad (4.15)$$

Компонента с номером m вектора f записывается по формуле

$$f^{(m)} = 2\xi\nu(t_j - t_i)\sum_{s=1}^{n} \frac{|l_s - l_k| D_{sm}}{D}$$

Здесь D – определитель матрицы, составленной из компонент векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, а D_{sm} – алгебраическое дополнение элемента матрицы с номерами s, m. Учитывая условие 4, заключаем, что $|f^{(m)}| \le 2\beta\xi\nu n\,(t_j - t_i)$. Отсюда

$$|f| \le 2\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,(t_j - t_i)$$

Таким образом,

$$\rho(l, \Pi) - \rho(l, W(t_i)) = l'f = (l - l_k)'f \le$$

$$\le |l - l_k||f| \le 2\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,|l - l_k|(t_j - t_i), \qquad l \in K$$

Поэтому

$$\rho(l, \Pi) \le$$

$$\le \rho(l, W(t_i)) + 2\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,|l - l_k|(t_j - t_i), \quad l \in K \cap S, \tag{4.I6}$$

и более грубо, используя (I.5),

$$\rho(l, \Pi) \le l'\bar{g}(t_i) + \mathcal{R} + 4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T, \quad l \in K \cap S \tag{4.I7}$$

Применим утверждение 4.I для оценки $\rho(l, \Gamma)$, $l \in K \cap S$. Положим $E = K$, $g^* = g^*(t_i)$, $\bar{g} = \bar{g}(t_i)$, $r^* = r$, $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R} + 4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T$. Имеем

$$\rho(l, \Gamma) \le \rho(l, \Pi) + \frac{2}{r}(\mathcal{R} + 4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T)(2\gamma\nu + \sigma)(t_j - t_i)^2$$

Вспоминая вложение $G_{q_k}(t_i, t_j) \subset \Gamma$ и оценивая $\rho(l, \Pi)$ при помощи (4.I6), получаем

$$\rho(l, G_{q_k}(t_i, t_j)) \le \rho(l, W(t_i)) + 2\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,|l - l_k|(t_j - t_i) +$$

$$+\frac{2}{\tau}(\mathcal{R}+4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T)(2\chi\nu+\sigma)(t_j-t_i)^2, \qquad l\in K\cap S \tag{4.18}$$

Обратимся теперь к вектору $\bar{l}$, о котором говорится в условии леммы. Пусть $q\in Q^2(\bar{l},t_i)$. Применив оценку (4.13) к разности $\rho(\bar{l},G_q(t_i,t_j))-\rho(\bar{l},G_{q_k}(t_i,t_j))$, получим

$$\rho(\bar{l},G_q(t_i,t_j))\leq$$

$$\leq\rho(\bar{l},G_{q_k}(t_i,t_j))+2\xi\nu|\bar{l}-l_k|(t_j-t_i)+2\chi\nu(t_j-t_i)^2$$

Оценим $\rho(\bar{l},G_{q_k}(t_i,t_j))$ по формуле (4.18). Учтем также, что соотношение $\bar{l}'l_k\geq 1-\mu^*$ влечет за собой неравенство $|\bar{l}-l_k|\leq\sqrt{2\mu^*}$. Окончательно придем к неравенству

$$\rho(\bar{l},G_q(t_i,t_j))\leq\rho(\bar{l},W(t_i))+2\xi\nu\sqrt{2\mu^*}(1+\beta n\sqrt{n})(t_j-t_i)+$$

$$+[2\chi\nu+\frac{2}{\tau}(\mathcal{R}+4\beta\xi\nu n\sqrt{n}\,T)(2\chi\nu+\sigma)](t_j-t_i)^2=$$

$$=\rho(\bar{l},W(t_i))+\sigma_1(t_j-t_i)^2+\sigma_2\sqrt{\mu^*}(t_j-t_i)$$

из которого в силу эквивалентности соотношений (4.2), (4.3) (полагаем в них $a=\sigma_1(t_j-t_i)^2+\sigma_2\sqrt{\mu^*}(t_j-t_i)$) вытекает требуемое неравенство (4.10).

В завершение доказательства леммы покажем справедливость оценки (4.13). Имеем

$$|\rho(\tilde{\varphi}, G_{q_*}(t_i,t_j)) - \rho(\tilde{\varphi}, G_{\tilde{q}}(t_i,t_j))| =$$

$$= |\tilde{\varphi}' \int_{t_i}^{t_j} C^2(\tau)\tilde{q}\, d\tau - \tilde{\varphi}' \int_{t_i}^{t_j} C^2(\tau) q_*\, d\tau| \qquad (4.19)$$

Прибавляя и вычитая числа $\tilde{\varphi}' \int_{t_i}^{t_j} C^2(t_i)\tilde{q}\, d\tau$, $\tilde{\varphi}' \int_{t_i}^{t_j} C^2(t_i) q_*\, d\tau$, оценим сверху правую часть равенства (4.19) суммой

$$|\tilde{\varphi}' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*)(t_j - t_i)| + |\int_{t_i}^{t_j} (C^2(\tau) - \quad t_i))\tilde{q}\, d\tau +$$

$$+ |\int_{t_i}^{t_j} (C^2(t_i) - C^2(\tau)) q_*\, d\tau| \qquad (4.20)$$

Второе и третье слагаемое в (4.20) не превышают величины $\chi\nu(t_j - t_i)^2$. Рассмотрим первое слагаемое. Воспользуемся тем, что $\tilde{\varphi}' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) \geq 0$, $\varphi_*' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) \leq 0$. Имеем

$$|\tilde{\varphi}' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*)| = \tilde{\varphi}' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) =$$

$$= \tilde{\varphi}' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) - \varphi_*' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) + \varphi_*' C^2(t_i)(\tilde{q} - q_*) \leq$$

$$\leq |\tilde{\varphi} - \varphi_*|\, \xi\, 2\nu$$

Таким образом, первое слагаемое в (4.20) оценивается величи - ной $2\xi\nu|\tilde{\varphi} - \varphi_*|(t_j - t_i)$, а все выражение (4.20) - суммой $2\xi\nu|\tilde{\varphi} - \varphi_*|(t_j - t_i) + 2\chi\nu(t_j - t_i)^2$. Отсюда следует оценка (4.I3). Доказательство леммы закончено.

Приступим к доказательству оценки (3.I). Зафиксируем начальную позицию (t_*, x_*) и программное управление $u(\cdot) \in \mathcal{U}^1$. Символом $y^1(\cdot)$ обозначим движение системы (I.I) из начальной позиции (t_*, x_*), когда второй игрок применяет алгоритм а), а первый – управление $u(\cdot)$. Пусть $v^*(\cdot)$ – реализация управления второго игрока вдоль $y^1(\cdot)$.

Зафиксируем момент $t_i \in \omega$. Пусть $\tau_{\bar{k}}$ – ближайший слева к t_i момент из набора $\{\tau_k\}$. Покажем, что для любого k, $0 \le k \le \bar{k}-1$ выполнено соотношение

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1})) \le$$

$$\le \max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\} + 2\frac{\mathcal{R}}{\tau}\sigma\Delta^2 + \varepsilon(\tau_k, \tau_{k+1}) \qquad (4.2\mathrm{I})$$

Кроме того,

$$d(t_i, l(\tau_{\bar{k}+1}), y^1(t_i)) \le$$

$$\le \max\{0, d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}}))\} + 2\frac{\mathcal{R}}{\tau}\sigma(t_i - \tau_{\bar{k}})^2 + \varepsilon(\tau_{\bar{k}}, t_i) \qquad (4.22)$$

Вначале докажем неравенство

$$d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) \le \max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\}, \quad 0 \le k \le \bar{k} \qquad (4.23)$$

Если $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$, то $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$ и соотношение (4.23) реализуется в виде $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) = d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$. Пусть $l(\tau_k) \in K = \mathrm{con}\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$. Обозначим через w вершину многогранника $W(\tau_k)$, соответствующую конусу K , т.е. $l'w=\rho(l, W(\tau_k))$ при $l\in K$. Обращаясь к лемме 4.2, положим

$$\mu^*=0, \quad \bar{l}=l(\tau_k), \quad x=y^1(\tau_k)-w,$$

$$h=\max\{0, -\bar{l}'x\}=\max\{0, l'(\tau_k)(w-y^1(\tau_k))\}$$

Получим

$$\max_{1\le s\le n} l_s'(y^1(\tau_k)-w)\ge -\max\{0, l'(\tau_k)(w-y^1(\tau_k))\} \tag{4.24}$$

Учитывая, что $l'(w-y^1(\tau_k))=d(\tau_k, l, y^1(\tau_k))$ при $l\in K$, перепишем (4.24) в виде

$$\min_{1\le s\le n} d(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k))\le \max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\}$$

Отсюда по правилу выбора вектора $l(\tau_{k+1})$ в алгоритме а) следует неравенство (4.23).

Пусть $0\le k\le \bar{k}-1$. Обозначим через $u_k(\cdot)$ програм - мное управление первого игрока на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$, удовлетворяющее условию

$$l'(\tau_{k+1})B^2(t)u_k(t)=\min_{p\in P^2} l'(\tau_{k+1})B^2(t)p$$

На промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ управление $v^*(t)$ есть постоянный вектор из $Q^2(l(\tau_{k+1}), \tau_k)$. В силу леммы 4.I и нера - венства (4.23) имеем

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^2(\tau_{k+1}; \tau_k, y^1(\tau_k), u_k(\cdot), v^*(\cdot)))\le$$

$$\leq max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\} + 2\frac{\mathcal{R}}{\gamma}\sigma(\tau_{k+1} - \tau_k)^2 \qquad (4.25)$$

Отсюда

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1})) \leq max\{0, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\} +$$

$$+ 2\frac{\mathcal{R}}{\gamma}\sigma(\tau_{k+1} - \tau_k)^2 + l'(\tau_{k+1})[y^2(\tau_{k+1}; \tau_k, y^1(\tau_k), u_k(\cdot), v^*(\cdot)) - y^1(\tau_{k+1})] \qquad (4.26)$$

Расписывая последнее слагаемое, получим

$$l'(\tau_{k+1})[y^2(\tau_{k+1}; \tau_k, y^1(\tau_k), u_k(\cdot), v^*(\cdot)) - y^1(\tau_{k+1})] =$$

$$= l'(\tau_{k+1})\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}[B^2(\tau)u_k(\tau) - B^1(\tau)u(\tau) + C^2(\tau)v^*(\tau) - C^1(\tau)v^*(\tau)]d\tau \leq \qquad (4.27)$$

$$\leq \mathcal{E}(\tau_k, \tau_{k+1})$$

Поскольку $\tau_{k+1} - \tau_k = \Delta$, то из (4.26), (4.27) следует (4.2I). Для получения (4.22) нужно рассмотреть промежуток $[\tau_{\bar{k}}, t_i]$ и в формулах (4.25)-(4.27) заменить τ_k на $\tau_{\bar{k}}$, τ_{k+1} на t_i , $l(\tau_{k+1})$ на $l(\tau_{\bar{k}+1})$

Осуществляя в (4.2I) последовательную подстановку при $k = \bar{k}-1, \bar{k}-2, \ldots, 1, 0$, получим

$$d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}})) \leq$$

$$\le \max\{0, d(t_*, l_*, y^1(t_*))\} + 2\frac{R}{r}6\Delta^2\bar{k} + \varepsilon(t_*, \tau_{\bar{k}}) =$$

$$= \max\{0, d(t_*, l_*, y^1(t_*))\} + 2\frac{R}{r}6\Delta(\tau_{\bar{k}} - t_*) + \varepsilon(t_*, \tau_{\bar{k}}) \qquad (4.28)$$

Оценка (3.I) вытекает из неравенств (4.22), (4.28) с учетом того, что $l(t_i) = l(\tau_{\bar{k}+1})$ и $(t_i - \tau_{\bar{k}}) < \Delta$.

Докажем оценку (3.2). Зафиксируем (t_*, x_*), t_i, $u(\cdot) \in \mathcal{U}^1$. Символ $y^1(\cdot)$ будет означать движение системы (I.I) из (t_*, x_*), когда второй игрок применяет алгоритм в), а первый – управление $u(\cdot)$. Как и раньше, пусть $\tau_{\bar{k}}$ – ближайший слева к t_i момент из набора $\{\tau_k\}$.

Покажем, что при любом k, $0 \le k \le \bar{k}$, справедливо неравенство

$$d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) \le \max\{\frac{2\alpha}{\mu} + 2\alpha, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\} \qquad (4.29)$$

соответствующее неравенству (4.23), когда речь шла об алгоритме а).

Если $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$ или же $l(\tau_k) \in con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$, но при этом $l'(\tau_k)l_s > 1-\mu$ для некоторого s, $1 \le s \le n$, то $l(\tau_{k+1}) = l(\tau_k)$ и соотношение (4.29) реализуется в виде $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) = d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$.

Пусть $l(\tau_k) \in K = con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$, причем $l'(\tau_k)l_s \le 1-\mu$, $s = \overline{1,n}$. Обозначим через w вершину многогранника $W(\tau_k)$, соответствующую конусу K. Рассмотрим два подслучая.

I). Предположим, что $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k)) \leq \frac{2\alpha}{\mu}$. Перепишем это неравенство в виде $l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) \geq -\frac{2\alpha}{\mu}$. Положив в лемме 4.2

$$\mu^* = 0, \quad \bar{l} = l(\tau_k), \quad x = y^1(\tau_k) - w, \quad h = \frac{2\alpha}{\mu}$$

получим

$$\max_{1 \leq s \leq n} l_s'(y^1(\tau_k) - w) \geq -\frac{2\alpha}{\mu}$$

или, что то же самое,

$$\min_{1 \leq s \leq n} d(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k)) \leq \frac{2\alpha}{\mu}$$

Поэтому

$$d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), z^1(\tau_k)) = \min_{1 \leq s \leq n} d(\tau_k, l_s, z^1(\tau_k)) \leq \frac{2\alpha}{\mu} + \alpha$$

и значит $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) \leq \frac{2\alpha}{\mu} + 2\alpha$

2). Пусть $d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k)) > \frac{2\alpha}{\mu}$. Перепишем это неравенство в виде $l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) < -\frac{2\alpha}{\mu}$. Положив в лемме 4.2

$$\mu^* = \mu, \quad \bar{l} = l(\tau_k), \quad x = y^1(\tau_k) - w, \quad h = -l'(\tau_k)x$$

получим

$$\max_{1 \leq s \leq n} l_s'(y^1(\tau_k) - w) \geq l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) - l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w)\mu \geq$$

$$\geq l'(\tau_k)(y^1(\tau_k) - w) + 2\alpha$$

или, что то же самое

$$\min_{1\le s\le n} d(\tau_k, l_s, y^1(\tau_k)) \le d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k)) - 2\alpha$$

Поэтому

$$d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), z^1(\tau_k)) =$$

$$= \min_{1\le s\le n} d(\tau_k, l_s, z^1(\tau_k)) \le d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k)) - \alpha$$

и значит $d(\tau_k, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_k)) \le d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))$.
Неравенство (4.29) доказано.

Пусть $0 \le k \le \bar{k} - 1$. Рассуждая, как при доказательстве оценки (4.21), но используя вместо (4.23) неравенство (4.29), получим при $l(\tau_k) \notin \Lambda(\tau_k)$, а также в случае $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k)$, $l(\tau_{k+1}) \in N(W(\tau_k))$ соотношение

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1})) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu} + 2\alpha,\ d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\right\} + 2\frac{R}{r}\sigma\Delta^2 + \varepsilon(\tau_k, \tau_{k+1}) \tag{4.30}$$

При этом мы применяем лемму 4.1. Если же $l(\tau_k) \in \Lambda(\tau_k)$ и $l(\tau_{k+1}) \notin N(W(\tau_k))$ (в алгоритме в) это может быть лишь тогда, когда $l(\tau_k) \in \mathrm{con}\{l_1, l_2, \dots, l_n\} \subset \Lambda(\tau_k)$ и $l'(\tau_k) l_s > 1 - \mu$ для некоторого s, $1 \le s \le n$), то нужно применить лемму 4.3. Получим

$$d(\tau_{k+1}, l(\tau_{k+1}), y^1(\tau_{k+1})) \le$$

$$\leq \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu}+2\alpha, d(\tau_k, l(\tau_k), y^1(\tau_k))\right\}+\sigma_1\Delta^2+\sigma_2\sqrt{\mu}\,\Delta+\varepsilon(\tau_k,\tau_{k+1}) \quad (4.31)$$

Правая часть (4.31) не меньше правой части неравенства (4.30). Поэтому во всех случаях мы можем для оценки изменения величины d на промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1})$ опираться на формулу (4.31).

Оценивая изменение величины d на промежутке $[\tau_{\bar{k}}, t_i)$, имеем

$$d(t_i, l(\tau_{\bar{k}+1}), y^1(t_i)) \leq \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu}+2\alpha, d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}}))\right\}+$$
$$+\sigma_1(t_i-\tau_{\bar{k}})^2+\sigma_2\sqrt{\mu}(t_i-\tau_{\bar{k}}) + \varepsilon(\tau_{\bar{k}}, t_i) \quad (4.32)$$

Осуществляя в (4.31) последовательную подстановку при $k=\bar{k}-1, \bar{k}-2, \dots, 1, 0$, получим

$$d(\tau_{\bar{k}}, l(\tau_{\bar{k}}), y^1(\tau_{\bar{k}})) \leq \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu}+2\alpha, d(t_*, l_*, y^1(t_*))\right\}+$$
$$+\sigma_1\Delta(\tau_{\bar{k}}-t_*)+\sigma_2\sqrt{\mu}(\tau_{\bar{k}}-t_*)+\varepsilon(t_*, \tau_{\bar{k}}) \quad (4.33)$$

Оценка (3.2) вытекает из неравенств (4.32), (4.33) с учетом того, что $l(t_i)=l(\tau_{\bar{k}+1})$ и $(t_i-\tau_{\bar{k}})<\Delta$.

<u>Замечание 4.1</u>. В алгоритмах а), в) управление второго игрока в системе (1.1) на каждом шаге $[\tau_k, \tau_{k+1})$ дискретной схемы выбирается из множества

$$Q^2(l(\tau_{k+1}), \tau_k) = \arg\max_{q\in Q} l'(\tau_{k+1})C^2(\tau_k)q$$

т.е. на основе условия максимума, в записи которого стоит матрица $C^2(\tau_k)$ системы (1.2). Предположим, что функция C^1

удовлетворяет условию Липшица с константой χ^1. Тогда управление второго игрока в системе (I.I) на каждом шаге дискретной схемы можно выбирать из множества

$$Q^1(l(\tau_{k+1}),\tau_k)=\arg\max_{q\in Q} l'(\tau_{k+1})C^1(\tau_k)q$$

и будут справедливы оценки, аналогичные оценкам (3.I), (3.2). Отличие лишь в том, что в правую часть каждой из оценок добавится слагаемое $2\chi^1\vartheta(t_i-t_*)\Delta$.

Поясним изменение в доказательстве оценок. Пусть $v^*(\cdot)$ - кусочно-постоянная функция, значение которой на каждом шаге дискретной схемы принадлежит $Q^2(l(\tau_{k+1}),\tau_k)$. В разобранном случае такой функцией является реализация управления второго игрока вдоль движения $y^1(\cdot)$. В новом варианте реализацию управления второго игрока в системе (I.I) вдоль $y^1(\cdot)$ обозначим $\bar v(\cdot)$. На каждом шаге дискретной схемы $\bar v(\tau)$ - постоянный вектор из $Q^1(l(\tau_{k+1}),\tau_k)$. Отличие в доказательстве новых оценок появляется только при оценке скалярного произведения

$$l'(\tau_{k+1})[y^2(\tau_{k+1};\tau_k,y^1(\tau_k),u_k(\cdot),v^*(\cdot))-y^1(\tau_{k+1})]=$$
$$=l'(\tau_{k+1})\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}[B^2(\tau)u_k(\tau)-B^1(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)v^*(\tau)-C^1(\tau)\bar v(\tau)]d\tau \tag{4.34}$$

при $0\le k\le \bar k-1$ и аналогичного ему выражения

$$l'(\tau_{\bar k+1})[y^2(t_i;\tau_{\bar k},y^1(\tau_{\bar k}),u_{\bar k}(\cdot),v^*(\cdot))-y^1(t_i)] \tag{4.35}$$

Добавим в подынтегральное выражение правой части (4.34) члены

$\pm(C^1(\tau)v^*(\tau)+C^1(\tau_k)v^*(\tau)+C^1(\tau_k)\bar{v}(\tau))$. Поскольку

$$l'(\tau_{k+1})\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} C^1(\tau_k)(v^*(\tau)-\bar{v}(\tau))\,d\tau \le 0$$

и функция C^1 удовлетворяет условию Липшица с константой χ^1, то правая часть (4.34) оценивается сверху величиной $\varepsilon(\tau_k, \tau_{k+1})+2\chi^1\nu(\tau_{k+1}-\tau_k)^2$ (см. для сравнения (4.27)). Соответственно (4.35) оценивается сверху числом $\varepsilon(\tau_{\bar{k}}, t_i)+2\chi^1\nu(t_i-\tau_{\bar{k}})^2$. Суммирование по k и приводит к добавочному члену $2\chi^1\nu(t_i-t_*)\Delta$ по сравнению с оценками (3.I), (3.2).

§ 5. Выполнение условия 3

В § I был описан способ попятного построения множеств $W(t_e)$, в основе которого лежат формулы (I.6), (I.7). В этом параграфе докажем выполнение условия 3 для такого способа. Напомним, что функции B^1, C^1 предполагались липшицевыми, а функции B^2 , C^2 их кусочно-постоянными аппроксимациями с шагом $\varkappa$.

Существенную роль в алгоритме попятного построения играет набор векторов $L(t_e)$, $t_e \ne \vartheta$. Для него должно быть выполнено ограничение $N(W(t_{e+1})) \subset L(t_e)$. Приведем естественные примеры задания набора $L(t_e)$.

I) $L(t_e)=L$ для любого e , $L \supset N(M^2)$, т.е. набор L зафиксирован и не меняется от шага к шагу. Очевидно, что вложение $N(W(t_{e+1}))\subset L$ выполнено.

2) $L(t_e)=N(W(t_{e+1})-\varkappa B^2(t_e)P^2)$. В этом

случае набор $L(t_e)$ - совокупность всех нормалей многогран - ника $W(t_{e+1})-æB^2(t_e)P^2$. Его опорная функция есть сумма первых двух слагаемых в формуле (I.6).

3) $N(W(t_{e+1}))\subset L(t_e)\subset N(W(t_{e+1})-æB^2(t_e)P^2)$. Этот случай соответствует ситуации, когда мы при построении $W(t_e)$ на основе $W(t_{e+1})$ в качестве промежуточного действия, как и в случае 2), находим опорную функцию многогранника $W(t_{e+1})-$ $-æB^2(t_e)P^2$, но определяем ее не точно, а приближенно, "склеивая" очень близкие образующие конусов линейности опор - ной функции и "ликвидируя" "вытянутые" конусы линейности (последнее при размерности $n\geq 3$), оставляя, однако, все обра - зующие, принадлежащие $N(W(t_{e+1}))$.

В случаях I), 3) многогранники $W(t_e)$, определяемые формулами (I.6), (I.7), оценивают сверху сечения максимального u -стабильного моста для игры (I.2). В случае 2) вычисления по формулам (I.6), (I.7) дают точные сечения максимального u -стабильного моста.

В § I было пояснено выполнение условия 3 в алгоритме попятного построения множеств $W(t_e)$ при $j=i+1$. Перейдем к случаю $j>i+1$. Восстановим формулу (I.7) для $W(t_e)$:

$$W(t_e)=\{x\in R^n: l'x\leq\eta(l,t_e),\quad l\in L(t_e)\},$$

где

$$\eta(l,t_e)=\rho(l,W(t_{e+1}))+\varphi(l,t_e),$$

$$\varphi(l,t_e)=æ[\rho(l,-B^2(t_e)P^2)-\rho(l,C^2(t_e)Q)]$$

Пусть ψ^1 и χ^1 - константы Липшица функций B^1 и C^1 соответственно. Положим

$$\nu^2 = \max_{p\in P^2} |p|, \qquad \xi^2 = \max_{t\in T} \|B^2(t)\|$$

Будем считать, что шаг $\varkappa$ попятных построений достаточно мал, а именно,

$$\varkappa \le \tau \big/ 2((\xi^2\nu)^2 + \xi\nu)) \tag{5.I}$$

Тогда для любого e и всех $l \in S$ выполнено неравенство

$$|\varphi(l,t_e)| \le \tau/2 \tag{5.2}$$

Обозначим

$$d^*(l,t_e) = \eta(l,t_e) - \rho(l, W(t_e)),$$

$$\sigma^* = (1+6\tfrac{R}{\tau})((\psi^1\nu)^2 + \gamma^1\nu))$$

<u>Лемма 5.I</u>. Пусть шаг $\varkappa$ удовлетворяет соотношению (5.I) и попятная процедура построения множеств $W(t_e)$ описывается формулами (I.6), (I.7). Тогда для всех моментов $t_e \in \omega$ $(t_e \ne \vartheta,\ t_e \ne \vartheta - \varkappa)$ и любого единичного вектора $\bar{l}$ справедливо неравенство

$$d^*(\bar{l}, t_{e+1}) \le d^*(\bar{l}, t_e) + \sigma^* \varkappa^2$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим

$$\tilde{\eta}(l,t_e) = \rho(l, W(t_{e+1})) + \varphi(l, t_{e+1}),$$

$$\tilde{W}(t_e) = \{x \in R^n : l'x \le \tilde{\eta}(l,t_e),\ l \in L(t_e)\},$$

$$\tilde{d}(l,t_e)=\tilde{\eta}(l,t_e)-\rho(l,\tilde{W}(t_e))$$

По условию 2 множество $W(t_{e+1})$ содержит в себе шар радиуса r. Поэтому из неравенства (5.2) следует, что $\tilde{W}(t_e)$ содержит шар радиуса $r/2$. Более точно

$$l'g^*(t_{e+1})+\frac{r}{2}\le\rho(l,\tilde{W}(t_e)),$$
$$e=0,1,2,\dots;\ t_e\ne\vartheta;\quad l\in S \tag{5.3}$$

Справедлива также оценка сверху

$$\rho(l,\tilde{W}(t_e))\le l'g(t_{e+1})+2R,\ e=0,1,2,\dots;\ t_e\ne\vartheta;\ l\in S \tag{5.4}$$

Докажем ее при помощи утверждения 4.I. Зафиксируем момент t_e и произвольный конус линейности K функции $\rho(\cdot,W(t_{e+1}))$. Пусть l_s, $s=\overline{1,n}$,- его образующие. Векторы $l_1,l_2,\dots,l_n$ - нормали многогранника $W(t_{e+1})$. В силу вложения $N(W(t_{e+1}))\subset L(t_e)$ они принадлежат $L(t_e)$. Отсюда и из неравенства (5.2) вытекает, что многогранник $\tilde{W}(t_e)$ содержится в множестве

$$\Gamma=\{x\in R^n: l_s'x\le\rho(l_s,W(t_{e+1}))+\frac{r}{2},\ s=\overline{1,n}\}$$

Пусть

$$\Pi=\{x\in R^n: l_s'x\le\rho(l_s,W(t_{e+1})),\ s=\overline{1,n}\}$$

Имеем $\rho(l,\Pi)=\rho(l,W(t_{e+1}))$ при $l\in K$. Используя утверждение 4.I при

$$E = K,\quad g^* = g^*(t_{e+1}),\quad \bar{g} = \bar{g}(t_{e+1}),$$
$$r^* = r,\quad \bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R},\quad b = r/2$$

получим

$$\rho(l, \Gamma) \le \rho(l, W(t_{e+1})) + 2\frac{\mathcal{R}}{r}\frac{r}{2},\quad l \in K \cap S$$

Отсюда, учитывая неравенство $\rho(l, W(t_{e+1})) \le l'\bar{g}(t_{e+1}) + \mathcal{R}$ и произвольность выбора момента t_e и конуса K, приходим к оценке (5.4).

Запишем разность $d^*(l, t_{e+1}) - d^*(l, t_e)$ в виде

$$d^*(l, t_{e+1}) - d^*(l, t_e) = [d^*(l, t_{e+1}) - \tilde{d}(l, t_e)] + [\tilde{d}(l, t_e) - d^*(l, t_e)] \qquad (5.5)$$

Зафиксируем момент t_e и единичный вектор $\bar{l}$. Оценим первую разность в правой части равенства (5.5). Расписывая ее, получим

$$d^*(\bar{l}, t_{e+1}) - \tilde{d}(\bar{l}, t_e) =$$

$$= \rho(\bar{l}, W(t_{e+2})) + \varphi(\bar{l}, t_{e+1}) - \rho(\bar{l}, W(t_{e+1})) - \rho(\bar{l}, W(t_{e+1})) -$$
$$- \varphi(\bar{l}, t_{e+1}) + \rho(\bar{l}, \tilde{W}(t_e)) = \rho(\bar{l}, W(t_{e+2})) - 2\rho(\bar{l}, W(t_{e+1})) + \rho(\bar{l}, \tilde{W}(t_e)) \qquad (5.6)$$

Пусть $\bar{K} = con\{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ - конус линейности функции $\rho(\cdot, W(t_{e+1}))$, содержащий $\bar{l}$. Подберем неотрицательные коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ так, что $\bar{l} = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s l_s$. В силу вложения $N(W(t_{e+1})) \subset L(t_e)$ векторы $l_1, l_2, \ldots,$

l_n принадлежат $L(t_e)$. Поэтому

$$\rho(l_s,\tilde{W}(t_e))\le\tilde{\eta}(l_s,t_e)=\rho(l_s,W(t_{e+1}))+\varphi(l_s,t_{e+1}),\quad s=\overline{1,n} \tag{5.7}$$

Очевидно также

$$\rho(l_s,W(t_{e+1}))=\eta(l_s,t_{e+1}),\quad s=\overline{1,n} \tag{5.8}$$

Из соотношений (5.7), (5.8) имеем

$$\rho(l_s,\tilde{W}(t_e))\le\eta(l_s,t_{e+1})+\varphi(l_s,t_{e+1}),\quad s=\overline{1,n}$$

Стало быть

$$\rho(\bar{l},\tilde{W}(t_e))\le\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,\tilde{W}(t_e))\le$$

$$\le\sum_{s=1}^{n}\lambda_s[\eta(l_s,t_{e+1})+\varphi(l_s,t_{e+1})]$$

Подставим эту оценку, а также соотношения

$$\rho(\bar{l},W(t_{e+2}))\le\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,W(t_{e+2})),$$

$$\rho(\bar{l},W(t_{e+1}))=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\rho(l_s,W(t_{e+1}))=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s\eta(l_s,t_{e+1})$$

в формулу (5.6). Получим

$$d^*(\bar{l},t_{e+1})-\tilde{d}(\bar{l},t_e)\le$$

$$\le\sum_{s=1}^{n}\lambda_s[\rho(l_s,W(t_{e+2}))-2\eta(l_s,t_{e+1})+\eta(l_s,t_{e+1})+\varphi(l_s,t_{e+1})]$$

Сумма в квадратных скобках равна нулю. Таким образом,

$$d^*(\bar l, t_{e+1}) - \tilde d(\bar l, t_e) \leq 0 \tag{5.9}$$

Оценим вторую разность в правой части равенства (5.5). Расписывая ее, получим

$$\tilde d(\bar l, t_e) - d^*(\bar l, t_e) = \rho(\bar l, W(t_{e+1})) + \varphi(\bar l, t_{e+1}) - \rho(\bar l, \tilde W(t_e)) -$$

$$- \rho(\bar l, W(t_{e+1})) - \varphi(\bar l, t_e) + \rho(\bar l, W(t_e)) =$$

$$= \varphi(\bar l, t_{e+1}) - \varphi(\bar l, t_e) + \rho(\bar l, W(t_e)) - \rho(\bar l, \tilde W(t_e)) \tag{5.10}$$

Зафиксированный нами вектор $\bar l$ принадлежит некоторому конусу линейности $\tilde K$ функции $\rho(\cdot, \tilde W(t_e))$. Образующие конуса - нормали к граням многогранника $\tilde W(t_e)$. Отобрав должным образом n образующих $\tilde l_1, \tilde l_2, \ldots, \tilde l_n$, представим вектор $\bar l$ в виде $\bar l = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \tilde l_s$, где коэффициенты γ_s неотрицательны.

Учитывая неравенства (5.3), (5.4), запишем

$$\bar l' g^*(t_{e+1}) + \frac{r}{2} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \tilde l_s' g^*(t_{e+1}) + \frac{r}{2} \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \leq \sum_{s=1}^{n} \gamma_s \rho(\tilde l_s, \tilde W(t_e)) =$$

$$= \rho(\bar l, \tilde W(t_e)) \leq \bar l' g(t_{e+1}) + 2\mathcal{R}$$

Отсюда

$$\sum_{s=1}^{n}\gamma_s \le 2[\bar{l}'(\bar{g}(t_{e+1})-g^*(t_{e+1}))+2\mathcal{R}]/r \le 6\mathcal{R}/r \qquad (5.11)$$

Поскольку $\tilde{l}_s$, $s=\overline{1,n}$, - нормали к граням $\tilde{\tilde{W}}(t_e)$, то $\rho(\tilde{l}_s,\tilde{\tilde{W}}(t_e))=\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,t_e)$, $s=\overline{1,n}$, и поэтому

$$\rho(\bar{l},\tilde{\tilde{W}}(t_e))=\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\rho(\tilde{l}_s,W(t_e))=\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,t_e) \qquad (5.12)$$

Каждый из векторов $\tilde{l}_s$, $s=\overline{1,n}$, принадлежит набору $L(t_e)$. Следовательно, $\rho(\tilde{l}_s,W(t_e))\le\eta(\tilde{l}_s,t_e)$, $s=\overline{1,n}$. Отсюда

$$\rho(\bar{l},W(t_e))\le\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\rho(\tilde{l}_s,W(t_e))\le\sum_{s=1}^{n}\gamma_s\eta(\tilde{l}_s,t_e) \qquad (5.13)$$

Подставим (5.12), (5.13) в (5.10). Учитывая (5.11), получим

$$\tilde{d}(\bar{l},t_e)-d^*(\bar{l},t_e)\le$$

$$\le\varphi(\bar{l},t_{e+1})-\varphi(\bar{l},t_e)+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s[\eta(\tilde{l}_s,t_e)-\tilde{\eta}(\tilde{l}_s,t_e)]\le$$

$$\le\varphi(\bar{l},t_{e+1})+\varphi(\bar{l},t_e)+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s[\varphi(\tilde{l}_s,t_e)-\varphi(\tilde{l}_s,t_{e+1})]\le$$

$$\le(1+\sum_{s=1}^{n}\gamma_s)\max_{l\in S}|\varphi(l,t_e)-\varphi(l,t_{e+1})|\le$$

$$\leq \left(1+6\frac{\mathcal{R}}{\tau}\right) \max_{l \in S} |\varphi(l, t_e) - \varphi(l, t_{e+1})| \tag{5.I4}$$

Оценим величину максимума в правой части этого неравенства. Имеем

$$\max_{l \in S} |\varphi(l, t_s) - \varphi(l, t_{s+1})| \leq$$

$$\leq \varkappa \Big[\max_{l \in S} |\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2)| +$$

$$+ \max_{l \in S} |\rho(l, C^2(t_e)Q) - \rho(l, C^2(t_{e+1})Q)| \Big] \tag{5.I5}$$

Зафиксируем произвольный единичный вектор l . Предположим, что $\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2) \geq 0$. Пусть p^* - элемент из P^2 , для которого $-l'B^2(t_e)p^* = \max_{p \in P^2} (-l'B^2(t_e)p)$. Тогда

$$|\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2)| =$$

$$= \rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2) \leq$$

$$\leq -l'B^2(t_e)p^* + l'B^2(t_{e+1})p^* \leq \|B^2(t_{e+1}) - B^2(t_e)\| |p^*| \leq \psi^1 \nu)^2 \varkappa$$

Такое же неравенство получается и в случае $\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2) < 0$. Поэтому

$$\max_{l \in S} |\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, -B^2(t_{e+1})P^2)| \leq \psi^1 \nu)^2 \varkappa$$

Аналогичным образом

$$\max_{l\in S} |\rho(l, C^2(t_e)Q) - \rho(l, C^2(t_{e+1})Q)| \le \chi^1\nu\varkappa$$

Подставляя полученные оценки в (5.15), запишем

$$\max_{l\in S} |\varphi(l,t_e) - \varphi(l,t_{e+1})| \le (\psi^1\nu)^2 + \chi^1\nu)\varkappa^2$$

Возвращаясь к (5.14), получим

$$\tilde{d}(\bar{l},t_e) - d^*(\bar{l},t_e) \le (1+6\frac{R}{r})(\psi^1\nu)^2+\chi^1\nu)\varkappa^2 \tag{5.16}$$

Утверждение леммы вытекает из (5.5), (5.9), (5.16).

Опираясь на лемму 5.1, докажем выполнение условия 3.

<u>Лемма 5.2</u>. Пусть шаг $\varkappa$ удовлетворяет соотношению (5.1) и попятная процедура построения множеств $W(t_e)$ описывается формулами (1.6), (1.7). Пусть $t_i,\ t_j \in \omega$ $(t_j > t_i)$ и l - произвольный единичный вектор нормали многогранника $W(t_i)$. Тогда при любом $q \in Q^2(l,t_i)$ выполнено неравенство

$$\rho(l,W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)q)d\tau \ge$$

$$\ge \rho(l,W(t_j)) - \sigma(t_j-t_i)^2 \tag{5.17}$$

где $\sigma = \sigma^*/2 + 2\chi^1\nu$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим вспомогательное экстремальное по вектору l кусочно-постоянное программное управление $\bar{v}(\cdot)$, заданное на промежутке $[t_i,t_j)$ соотношением

$$l'C^2(t)\bar{v}(t) = \max_{q\in Q} l'C^2(t)q, \qquad t\in[t_i, t_j)$$

Докажем неравенство

$$\rho(l, W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau)+C^2(\tau)\bar{v}(\tau))d\tau \geq$$

$$\geq \rho(l, W(t_j)) - \frac{\sigma^*}{2}(t_j - t_i)^2 \tag{5.18}$$

Пусть $\bar{u}(\cdot)$ - экстремальное по вектору l программное управление первого игрока:

$$l'B^2(t)\bar{u}(t) = \min_{p\in P^2} l'B^2(t)p, \qquad t\in[t_i, t_j)$$

Символ $y^2(\cdot)$ будет означать движение $y^2(\cdot\,; t_i, x, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ системы (I.2) в силу управлений $\bar{u}(\cdot)$, $\bar{v}(\cdot)$ из позиции (t_i, x), где точка x произвольна, но фиксирована. Имеем

$$\eta(l, t_e) = \rho(l, W(t_{e+1})) + æ[\rho(l, -B^2(t_e)P^2) - \rho(l, C^2(t_e)Q)] =$$

$$= \rho(l, W(t_{e+1})) - l'\int_{t_e}^{t_{e+1}}(B^2(\tau)\bar{u}(\tau)+C^2(\tau)\bar{v}(\tau))d\tau =$$

$$= \rho(l, W(t_{e+1})) - l'y^2(t_{e+1}) + l'y^2(t_e), \qquad e = \overline{i, j-1}$$

Отсюда, учитывая определение $d^*(l, t_e)$, получаем

$$d(t_{e+1}, l, y^2(t_{e+1})) = \rho(l, W(t_{e+1})) - l' y^2(t_{e+1}) =$$

$$= \eta(l, t_e) - l' y^2(t_e) = d^*(l, t_e) + \rho(l, W(t_e)) - l' y^2(t_e) =$$

$$= d^*(l, t_e) + d(t_e, l, y^2(t_e)), \qquad e = \overline{i, j-1} \tag{5.19}$$

Осуществляя в (5.19) последовательную подстановку при $e = j-1, j-2, \ldots, i$ и применяя одновременно лемму 5.1, приходим к цепочке неравенств

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) = d(t_{j-1}, l, y^2(t_{j-1})) + d^*(l, t_{j-1}),$$

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) \le d(t_{j-2}, l, y^2(t_{j-2})) + 2d^*(l, t_{j-2}) + \sigma^* \varkappa^2,$$

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) \le d(t_{j-3}, l, y^2(t_{j-3})) + 3d^*(l, t_{j-3}) + 2\sigma^* \varkappa^2 + \sigma^* \varkappa^2,$$

$$\cdots$$

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) \le d(t_i, l, y^2(t_i)) + (j-i) d^*(l, t_i) +$$

$$+ [(j-i-1) + (j-i-2) + \ldots + 2 + 1] \sigma^* \varkappa^2$$

Так как l - нормаль многогранника $W(t_i)$, то величина $d^*(l, t_i)$ равна нулю. Поэтому

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) \le d(t_i, l, y^2(t_i)) + \frac{(j-i)(j-i-1)}{2} \sigma^* \varkappa^2$$

Учитывая, что $(j-i)\varkappa = t_j - t_i$, получаем неравенство

$$d(t_j, l, y^2(t_j)) \le d(t_i, l, y^2(t_i)) + \frac{\sigma^*}{2}(t_j - t_i)^2$$

которое эквивалентно (5.18).

Пусть $q \in Q(l, t_i)$. Используя (5.18), запишем соот - ношение

$$\rho(l, W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau) + C^2(\tau)q)\,d\tau =$$

$$= \rho(l, W(t_i)) + \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^2} l'\int_{t_i}^{t_j}(B^2(\tau)u(\tau) + C^2(\tau)\bar{v}(\tau))\,d\tau + l'\int_{t_i}^{t_j}C^2(\tau)(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau \ge$$

$$\ge \rho(l, W(t_j)) - \frac{\sigma^*}{2}(t_j - t_i)^2 + \int_{t_i}^{t_j} l'C^2(\tau)(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau$$

Поскольку

$$\int_{t_i}^{t_j} l'C^2(\tau)(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau =$$

$$= \int_{t_i}^{t_j} l'(C^2(\tau) - C^2(t_i))(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau + \int_{t_i}^{t_j} l'C^2(t_i)(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau \ge$$

$$\ge -\left|\int_{t_i}^{t_j} l'(C^2(\tau) - C^2(t_i))(q - \bar{v}(\tau))\,d\tau\right| \ge -2\gamma'\nu(t_j - t_i)^2$$

то тем самым неравенство (5.17) доказано.

§ 6. Гарантия второго игрока при использовании основного алгоритма. Алгоритм с коррекцией

При фиксированном параметре c основной алгоритм обеспечивает удержание фазового вектора $y^1(t_e)$ системы (I.I) в любой момент t_e вблизи множества $R^n \setminus \mathrm{int}\, W_c(t_e)$. Это видно из оценки (3.1), (3.2). Сделаем некоторые дополнительные выводы из этих оценок. Для определенности будем говорить об оценке (3.2). Положим

$$d_c(t, l, x) = \rho(l, W_c(t)) - l'x$$

Из оценки (3.2) для момента ϑ получаем

$$d_c(\vartheta, l(\vartheta), y^1(\vartheta)) \le$$

$$\le \max\left\{\frac{2\alpha}{\mu} + 2\alpha,\ d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))\right\} + \sigma_1 T\Delta + \sigma_2 T\sqrt{\mu} + \varepsilon(t_*, \vartheta) \qquad (6.1)$$

Таким образом, расстояние от точки $y^1(\vartheta)$ до множества $R^n \setminus \mathrm{int}\, W_c(\vartheta) = \{x \in R^n : \gamma^2(x) \ge c\}$ не превышает величины, стоящей в правой части неравенства (6.1). Пусть ζ - константа Липшица функции γ^2 , $\mathcal{E}$ - компактное множество, оценивающее сверху возможные положения $y^1(\vartheta)$, $\|\gamma^1 - \gamma^2\|_{\mathcal{E}} = \max\limits_{x \in \mathcal{E}} |\gamma^1(x) - \gamma^2(x)|$. Символом F обозначим правую часть (6.1). Имеем

$$\gamma^1(y^1(\vartheta)) \ge c - \zeta F - \|\gamma^1 - \gamma^2\|_{\mathcal{E}} \qquad (6.2)$$

Неравенство (6.2) характеризует гарантию второго игрока в игре (I.I), когда он использует основной алгоритм. Второе и третье слагаемые в правой части (6.2) малы, если обеспечена достаточная близость исходной и аппроксимирующих игр, если малы шаг Δ и начальное расстояние $d_c(t_*, l_*, y^1(t_*))$, величины α и μ (параметр μ можно выбирать по заданному α, например, $\mu = \sqrt{\alpha}$). Гарантия второго игрока при этом будет близка к числу c. Выбираемое нами число c в определенных случаях можно рассматривать как приближенное значе - ние цены $\Gamma^1(t_*, y^1(t_*))$ игры (I.I) в позиции $(t_*, y^1(t_*))$. Если c близко к $\Gamma^1(t_*, y^1(t_*))$, то гарантия второго игрока близка к оптимальной.

Опишем алгоритм с коррекцией, использующий информацию, снятую с многогранников

$$W_{c_m}(t_e), \quad e = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots$$

Здесь индексы e и m пробегают конечные наборы значений, $c_m \in [c_*, c^*]$ при любом m. Будем считать, что значения па - раметра c упорядочены: $c_1 < c_2 < \ldots < c_m < c_{m+1} < \ldots$.

Для упрощения обозначений в этом параграфе везде вместо индекса c_m условимся писать индекс m. Например, $W_m(t_e)$ вместо $W_{c_m}(t_e)$. Напомним, что информация, которую мы имеем в любой момент t_e, состоит из описания плохих конусов и значений опорных функций $\rho(l, W_m(t_e))$ на образующих этих конусов. Как и ранее, будем считать, что начальный момент t_* совпадает с одним из моментов t_e, шаг Δ дискретной схемы управления второго игрока кратен $\varkappa$, а τ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\tau_0 = t_*$, - моменты выбора управления. Пусть $\mathcal{N}_m(t_e) = N(W_m(t_e)) \cap \Lambda_m(t_e)$ - набор образующих плохих конусов, соответствующий моменту t_e и параметру $c = c_m$.

Алгоритм с коррекцией опишем для случая, когда его основой является алгоритм в), ориентированный на неточные замеры $z^1(\tau_k)$. Для алгоритма с коррекцией, в основе которого лежит алгоритм а), все написанное остается в силе: следует лишь символ z^1 заменить на y^1 .

Общая схема такова. В момент $\tau_0 = t_*$, используя начальный замер $z^1(t_*)$, мы каким-либо способом фиксируем некоторое значение c_{m_1} параметра c , начальный вектор l_* и формируем управление второго игрока по алгоритму в) на промежутке $[t_*, \tau_{k_1})$, где $\tau_{k_1} > t_*$ - момент первой коррекции. Коррекция в момент τ_{k_1} заключается в перенастройке алгоритма в) на новое значение $c_{m_2} \geq c_{m_1}$ параметра c . При этом меняется и текущий вектор $l(\tau_{k_1})$. Управление по алгоритму в) при фиксированном значении c_{m_2} параметра c осуществляем на промежутке $[\tau_{k_1}, \tau_{k_2})$, где τ_{k_2} - момент второй коррекции и т.д.

Выбор значения c_{m_1} , начального вектора l_* , моментов коррекции $\{\tau_{k_i}\}$ и сама коррекция в моменты τ_{k_i} могут быть определены различными способами. Опишем некоторые из возможных вариантов.

Моменты коррекции могут задаваться при помощи шага коррекции δ , кратного шагу Δ : $\tau_{k_i} = \tau_0 + i\delta, \ i = 1, 2, \ldots$. В этом случае все моменты коррекции известны заранее. Другим способом момент коррекции τ_{k_i} можно определить как первый момент, в который текущий вектор $l(\tau_k)$, $\tau_k > \tau_{k_{i-1}}$, попадает в множество $\Lambda_{m_i}(\tau_k)$.

Предположим, что начальный момент t_* в задаче всегда один и тот же. В этом случае естественно для момента t_* (и только для этого момента) сохранить целиком всю информацию о многогранниках $W_m(t_*)$, $m=1,2,\ldots$. Начальное значение c_{m_1} и начальный вектор l_* определим по формулам:

$$m_1 = \max\{m: \min_{l\in N(W_m(t_*))} d_m(t_*, l, z^1(t_*)) \le 0\}$$

при $z^1(t_*) \notin W_1(t_*)$ и $m_1 = 1$ при $z^1(t_*) \in W_1(t_*)$,

$$l_* = \arg\min_{l\in N(W_{m_1}(t_*))} d_{m_1}(t_*, l, z^1(t_*))$$

Выбор m_1 и l_* поясняется для $n=2$ на рис.9.

В момент коррекции τ_{k_i} имеем замер $z^1(\tau_{k_i})$, текущий вектор $l(\tau_{k_i})$, значение c_{m_i}. Если

$$\min_{l\in\mathcal{N}_m(\tau_{k_i})} d_m(\tau_{k_i}, l, z^1(\tau_{k_i})) > 0$$

при любом $m > m_i$, то уровень $c = c_{m_i}$ не меняем, положив $c_{m_{i+1}} = c_{m_i}$, и выполняем далее все действия, предусмот - ренные алгоритмом в). В противном случае новое значение $c_{m_{i+1}}$ и новый текущий вектор $l(\tau_{k_i+1})$ выберем при помощи формул

$$m_{i+1} = \max\{m: m>m_i,\ \min_{l\in\mathcal{N}_m(\tau_{k_i})} d_m(\tau_{k_i}, l, z^1(\tau_{k_i})) \le 0\} \qquad (6.1)$$

$$l(\tau_{k_i+1}) = \arg\min_{l\in\mathcal{N}_{m_{i+1}}(\tau_{k_i})} d_{m_{i+1}}(\tau_{k_i}, l, z^1(\tau_{k_i})) \qquad (6.2)$$

Продолжаем работу по алгоритму в) при $c = c_{m_{i+1}}$ до следую - щего момента коррекции $\tau_{k_{i+1}}$.

Пусть начальный момент t_* не является постоянным. Начальное значение c_{m_1} параметра c и начальный вектор l_* в этом случае определим по формулам:

$$m_1 = max\{m: \min_{l \in \mathcal{N}_m(t_*)} d_m(t_*, l, z^1(t_*)) \leq 0\} \qquad (6.3)$$

если множество в фигурной скобке не пусто, $m_1 = 1$, когда оно пусто,

$$l_* = arg \min_{l \in \mathcal{N}_{m_1}(t_*)} d_{m_1}(t_*, l, z^1(t_*)) \qquad (6.4)$$

Формула (6.3) отличается от (6.I) лишь тем, что максимум берется по всем $m = 1, 2, \ldots$. Формула (6.4) аналогична формуле (6.2). Выбор числа m_1 и вектора l_* для $n = 2$ в разбираемом случае поясняется на рис.IO. Множества $W_m(t_*)$ показаны пунктиром.

§ 7. Управление по поверхности переключения

В работах [3,4,7] для случая скалярного управления первого игрока предложен способ построения оптимальной стратегии первого игрока при помощи поверхности переключения. Именно, рассматривался частный случай исходной системы, когда множество $P^1 = [-\mu, \mu]$ - отрезок на прямой. Поверхность переключения строилась с привлечением аппроксимирующей задачи, в которой полагалось $P^2 = P^1$. Поверхность разбивает пространство игры на две части. В одной из них следует выбирать управление $u = \mu$, в другой $u = -\mu$. На самой поверхности выбираемое управление может быть любым из отрезка $[-\mu, \mu]$. При достаточной близости исходной и аппроксимирующей систем, а также при хорошей точности построения поверхности переключения, гарантированный результат первого игрока в ли-

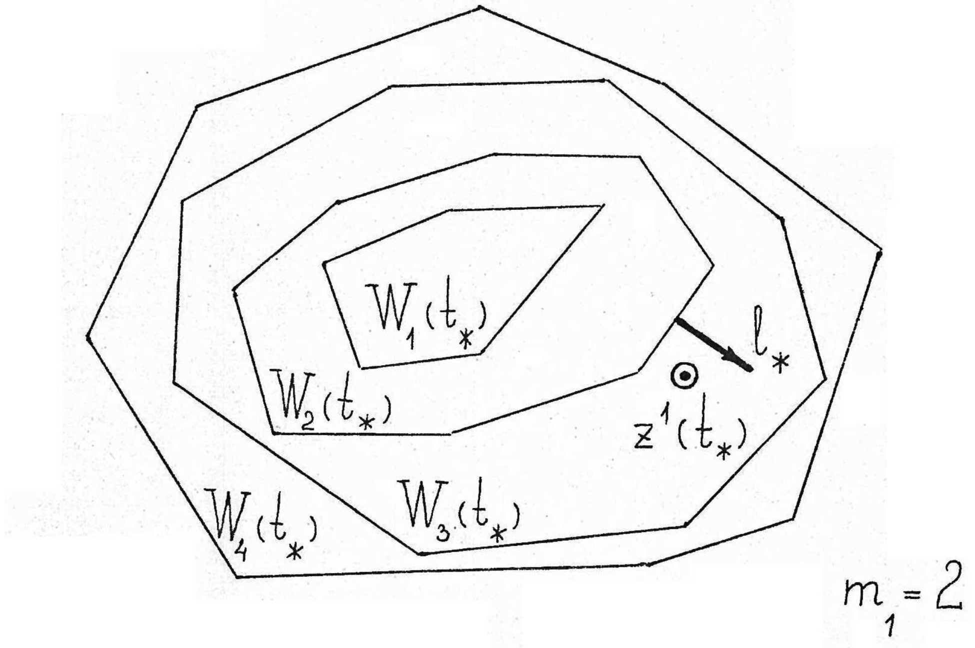


Рис. 9 $(n=2)$

5756-85

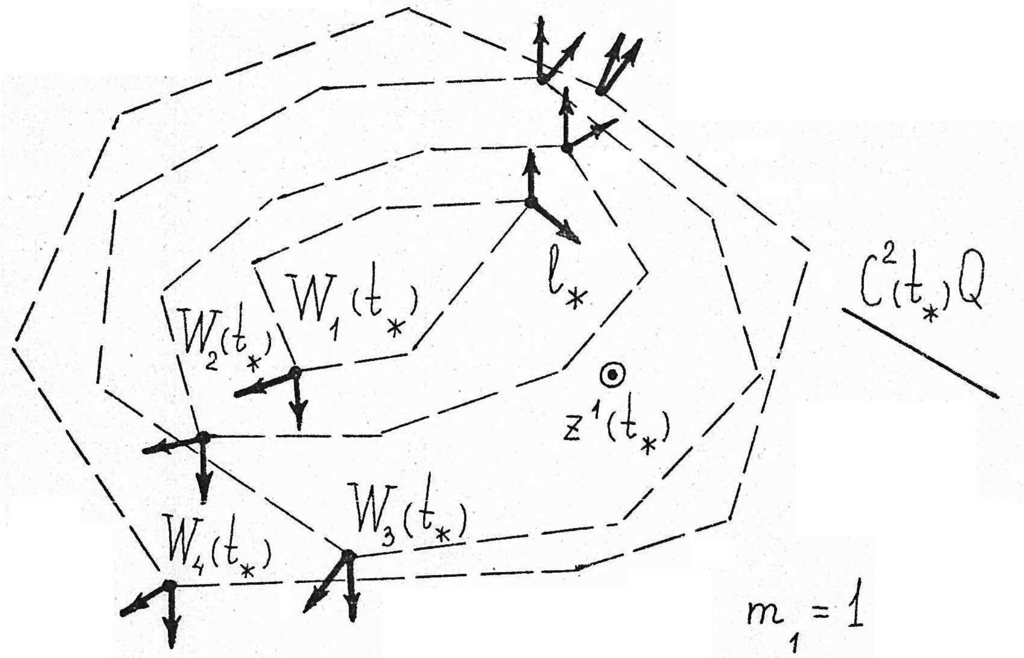


Рис. 10 $(n=2)$

нейной игре с выпуклой терминальной платой близок к оптимальному и в пределе переходит в оптимальный. Способ управления устойчив по отношению к погрешностям измерения состояния системы, погрешностям построения поверхности переключения и т. д. Практически нужно строить не всю поверхность переключения, а лишь ее сечения для моментов, в которые в дискретной схеме происходит выбор управляющего воздействия. В случае $n=2$, например, эти сечения есть линии и, таким образом, для каждого момента выбора управления следует задать свою линию переключения.

В этом параграфе рассмотрим случай скалярного управления второго игрока. Будем считать, что $Q=[-\nu, \nu]$ - отрезок на прямой. Определим и обсудим способ управления второго игрока при помощи поверхности переключения.

Поверхность переключения Π , а точнее ее сечения $\Pi(t_e)$ для моментов t_e будут определены в терминах аппроксимирующей задачи (I.2). В отличие от предыдущих параграфов условимся считать, что $W_c(t_e)$ есть точно построенные сечения максимального u-стабильного моста для игры (I.2). Сечения $\Pi(t_e)$ получаются в результате обработки множеств $W_c(t_e)$, при этом параметр c пробегает все значения в промежутке $[c_*, c^*]$.

Принципиальное отличие при формировании управления второго игрока на основе поверхности переключения от случая первого игрока состоит в том, что на самой поверхности допускается выбирать любое из крайних значений $\pm\nu$, но нельзя брать промежуточные.

Будет показано, что при управлении в условиях точного замера состояний $y^1(\tau_k)$ для второго игрока гарантируется результат, близкий к оптимальному. Наличие же хотя бы и небольших неточностей в построении поверхности переключения или неточностей в определении состояния системы может существенно ухудшить результат для второго игрока. Такой факт неустойчивости подтверждается численным экспериментом, описанном в § 8. Разрушение схемы управления происходит именно потому, что при попадании на поверхность переключения нельзя выбирать промежуточные значения управляющего воздействия между $-\nu$ и ν. При наличии же погрешностей может возникнуть скольжение по поверхности и вдоль такого движения "в среднем" реализуются промежуточные значения между $-\nu$ и ν, что и приводит к падению цены игры вдоль движения.

Таким образом, в отличие от случая первого игрока, способ управления второго игрока по поверхности переключения дает желаемый результат только в "идеале" и в практических вычислениях может применяться лишь с большой осторожностью в силу своей неустойчивости. На примерах § 8 дается сравнение способа управления по поверхности переключения со способом, предлагаемым в настоящей работе.

Итак, пусть $Q=[-\nu,\nu]$ - отрезок на прямой и $C^2(t)$ при любом t - вектор из R^n. Предположим, что для каждого $c \geq c_*$ многогранники $W_c(t_e)$, $e=0,1,2,\ldots$, есть сечения максимального u -стабильного моста в игре (I.2), обрывающегося в момент ϑ на множестве $M_c^2=\{x\in R^n: \gamma^2(x)\leq c\}$. Другими словами, $W_c(t_e)$ - множество уровня $\{x\in R^n: \Gamma^2(t_e,x)\leq c\}$ функции цены Γ^2 игры (I.2) для момента $t=t_e$. Считаем, что для многогранников $W_c(t_e)$ выполнено условие 3. Символом ζ обозначим константу Липшица функции γ^2. Функция $\Gamma^2(t_e,\cdot)$ липшицева с этой же константой ζ [8].

При фиксированном $t = t_e$ для любого $x \notin int W_{c_*}(t_e)$ существует единственный многогранник $W_c(t_e)$, на границе которого лежит точка x. А именно, таким многогранником является многогранник с индексом $c = \Gamma^2(t_e, x)$. Пусть $N^*(t_e, x)$ – совокупность всех единичных внешних нормалей к содержащим точку x граням размерности $n-1$ многогранника $W_{\Gamma^2(t_e,x)}(t_e)$. При любом $c \geq c_*$ через $\mathcal{X}_c(t_e)$ обозначим множество всех x на границе многогранника $W_c(t_e)$, для каждого из которых среди нормалей совокупности $N^*(t_e, x)$ имеются как нормали l, удовлетворяющие соотношению

$$\nu = \arg\max_{q \in Q} l' C^2(t_e) q$$

так и нормали, удовлетворяющие соотношению

$$-\nu = \arg\max_{q \in Q} l' C^2(t_e) q$$

На рис.II для $n = 2$ показаны многоугольник $W_c(t_e)$ и вектор $C^2(t_e)$. Соответствующее им множество $\mathcal{X}_c(t_e)$ состоит из отрезка и точки.

Как и ранее, помимо числа c_* считаем заданным $c^* > c_*$. В случае $C^2(t_e) \neq 0$ пусть $E(t_e)$ – совокупность всех $x \in R^n$, для каждого из которых существует $\lambda \in R$ такое, что $x + \lambda C^2(t_e) \in W_{c^*}(t_e)$. В случае $C^2(t_e) = 0$ положим $E(t_e) = R^n$. При $n=2$ и $C^2(t_e) \neq 0$ множество $E(t_e)$ – полоса из прямых, параллельных вектору $C^2(t_e)$ и проходящих через $W_{c^*}(t_e)$ (рис.I2).

Для любого момента t_e положим

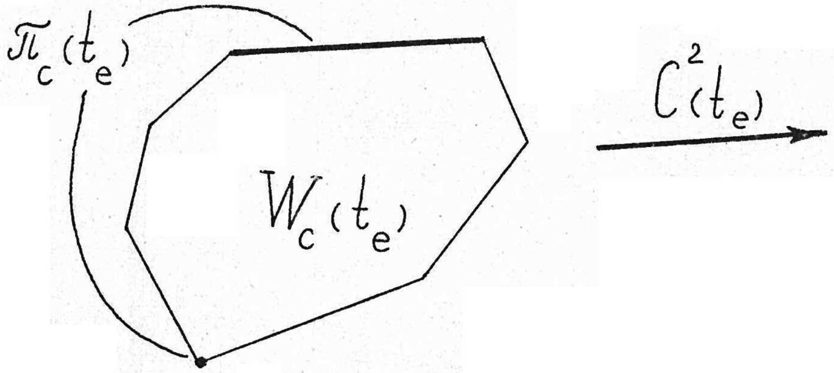


Рис. 11 (n=2)

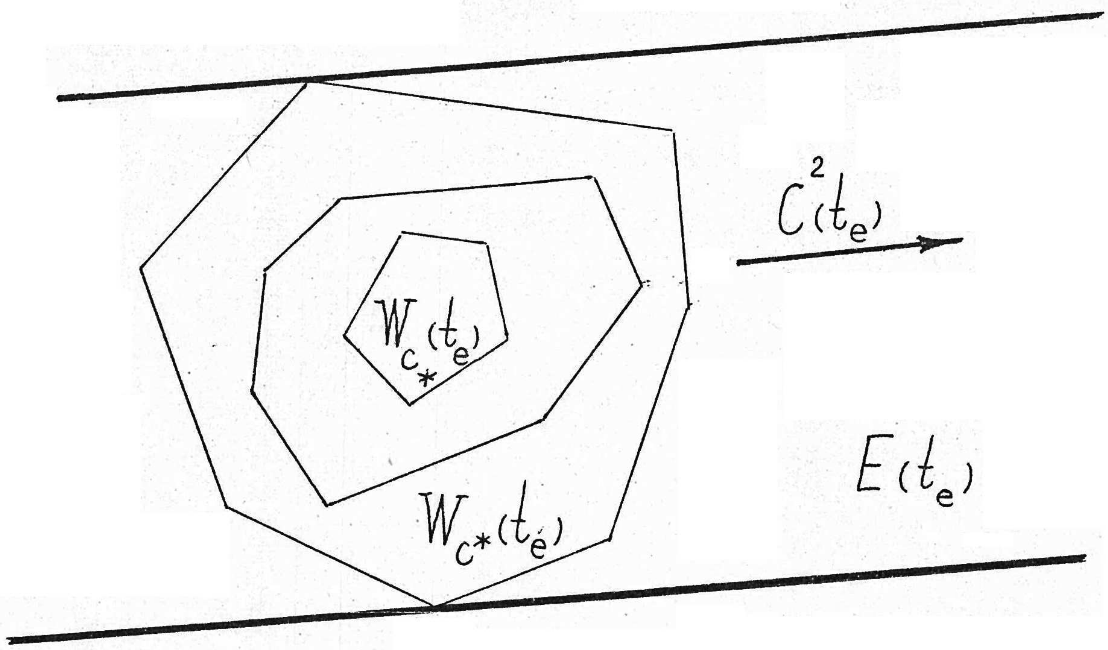


Рис. 12 (n=2)

$$\Pi(t_e)=\begin{cases}\Big(\bigcup\limits_{c\in(c_*,c^*]}\pi_c(t_e)\Big)\cup W_{c_*}(t_e), & C^2(t_e)\neq 0,\\ E(t_e) & , C^2(t_e)=0\end{cases} \tag{7.I}$$

$$\Pi_1(t_e)=\{x\in E(t_e):\ x+\lambda C^2(t_e)\notin \Pi(t_e),\ \forall\lambda\geq 0\}, \tag{7.2}$$

$$\Pi_2(t_e)=\{x\in E(t_e):\ x+\lambda C^2(t_e)\notin \Pi(t_e),\ \forall\lambda\leq 0\} \tag{7.3}$$

Введенные множества для $n=2$ поясняются на рис.I3.

Нетрудно видеть, что при любом $x\in\Pi_1(t_e)$ $(x\in \Pi_2(t_e))$ для всех $l\in N^*(t_e,x)$ имеет место неравенство $l'C^2(t_e)>0$ $\quad(l'C^2(t_e)<0)$.

Определим многозначное отображение

$$\mathbf{V}(t_e,x)=\begin{cases}\nu, & x\in\Pi_1(t_e),\\ -\nu, & x\in\Pi_2(t_e),\\ \{-\nu,\nu\}, & x\in\Pi(t_e)\end{cases}$$

$$x\in E(t_e),\quad e=0,1,2,\dots$$

Пусть $V(t_e,x)$ - однозначная выборка из $\mathbf{V}(t_e,x)$

Предположим, что второй игрок использует в системе (I.I) стратегию V в дискретной схеме управления с шагом Δ. Зафиксируем начальную позицию $(t_*, y^1(t_*))$, функцию $u(\cdot)\in\mathcal{U}^1$. Как и ранее, считаем t_* совпадающим с одним из моментов t_e, шаг Δ кратен шагу $\varkappa$. Пусть $y^1(\cdot)$ -

5756-85

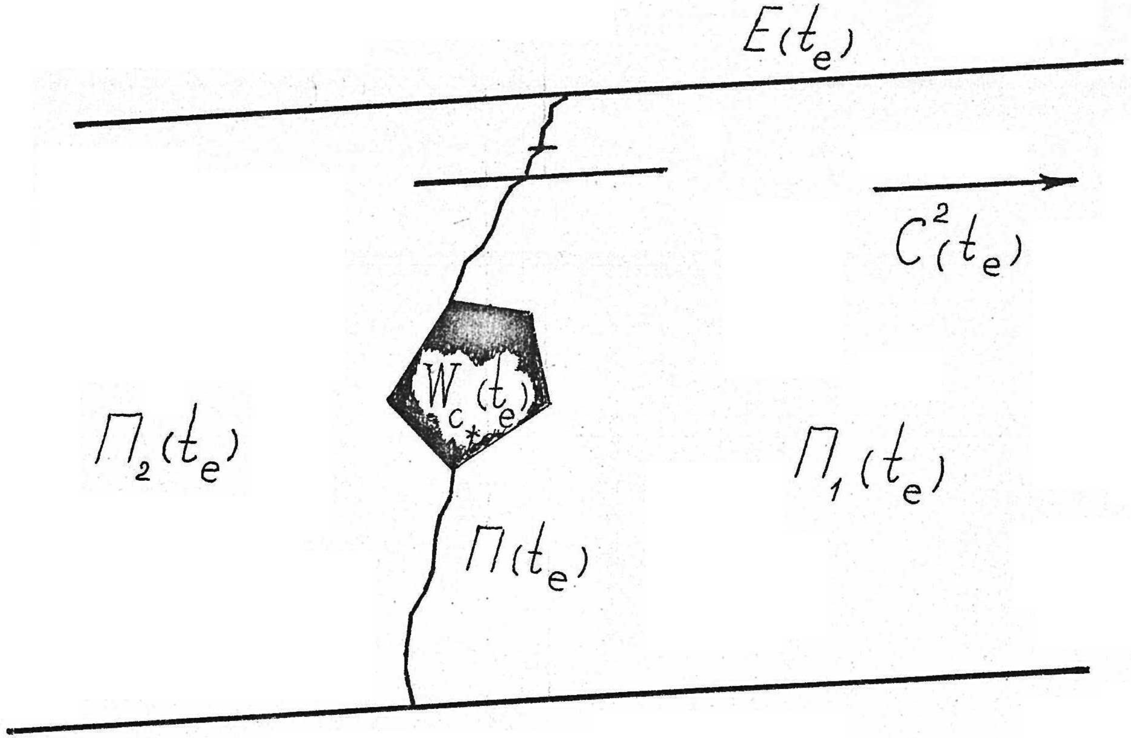


Рис. 13 (n=2)

движение системы (I.I). Условимся, что в любой момент $\tau_K = t_* + K\Delta$, $K=0,1,2,\dots$, состояние $y^1(\tau_K)$ замеряется точно и принадлежит множеству $E(\tau_K)\setminus W_{c_*}(\tau_K)$. Оценим изменение функции Γ^2 вдоль движения $y^1(\cdot)$.

Выберем произвольный момент τ_K и пусть $t_e \in (\tau_K, \tau_K+\Delta]$, $t_e \le \vartheta$. Докажем справедливость оценки

$$\Gamma^2(t_e, y^1(t_e)) \ge \Gamma^2(\tau_K, y^1(\tau_K)) - \zeta\sigma(t_e-\tau_K)^2 - \zeta\varepsilon(\tau_K, t_e) \quad (7.4)$$

Пусть $y^1(\tau_K)\in\Pi_1(\tau_K)$ $(y^1(\tau_K)\in\Pi_2(\tau_K))$. Зафиксируем любой вектор l из совокупности $N^*(\tau_K, y^1(\tau_K))$. Поскольку $l'C^2(\tau_K)>0$ $(l'C^2(\tau_K)<0)$, то

$$V(\tau_K, y^1(\tau_K)) = \nu = \arg\max_{q\in Q} l'C^2(\tau_K)q$$

$$\left(V(\tau_K, y^1(\tau_K)) = -\nu = \arg\max_{q\in Q} l'C^2(\tau_K)q\right)$$

Пусть $y^1(\tau_K)\in\Pi(\tau_K)\setminus W_{c_*}(\tau_K)$. Тогда для любого из крайних значений $-\nu$, ν отрезка Q найдется нормаль $l\in N^*(t_e, y^1(\tau_K))$, на которой выбранное значение является экстремальным, т.е. мы можем подобрать нормаль l так, что

$$V(\tau_K, y^1(\tau_K)) = \arg\max_{q\in Q} l'C^2(\tau_K)q$$

Таким образом, по состоянию $y^1(\tau_K)\in E(\tau_K)\setminus W_{c_*}(\tau_K)$ можно подобрать нормаль $\bar{l}$ к многограннику $W_{\bar{c}}(\tau_K)$, $\bar{c} = \Gamma^2(\tau_K, y^1(\tau_K))$, в точке $y^1(\tau_K)$, на которой управляю -

щее воздействие $V(\tau_\kappa, y^1(\tau_\kappa))$ является экстремальным. Такой факт позволяет воспользоваться условием 3.

Пусть $u_\kappa(\cdot)$ - программное управление первого игрока на промежутке $[\tau_\kappa, t_e)$, удовлетворяющее условию

$$\bar{l}'B^2(t)u_\kappa(t) = \min_{p \in P^2} \bar{l}'B^2(t)p$$

Положим для краткости $\bar{q} = V(\tau_\kappa, y^1(\tau_\kappa))$ и $y^2(t_e) = y^2(t_e; \tau_\kappa, y^1(\tau_\kappa), u_\kappa(\cdot), \bar{q})$. В силу условия 3 получим

$$d_{\bar{c}}(t_e, \bar{l}, y^2(t_e)) \leq \sigma(t_e - \tau_\kappa)^2 \tag{7.5}$$

или

$$d_{\bar{c}}(t_e, \bar{l}, y^1(t_e)) \leq \sigma(t_e - \tau_\kappa)^2 + \varepsilon(\tau_\kappa, t_e) \tag{7.6}$$

Переход от (7.5) к (7.6) аналогичен переходу от неравенства (4.25) к (4.2I). Неравенство (7.6) означает, что расстояние от точки $y^1(t_e)$ до множества

$$\{x \in R^n : \Gamma^2(t_e, x) \geq \bar{c}\} = R^n \setminus int W_{\bar{c}}(t_e)$$

не превосходит величины $\sigma(t_e - \tau_\kappa)^2 + \varepsilon(\tau_\kappa, t_e)$. Используя условие Липшица для функции $\Gamma^2(t_e, \cdot)$, придем к неравенству (7.4).

Пусть t_i - произвольный момент разбиения ω , принадлежащий промежутку $[t_*, \vartheta]$. В силу (7.4) получаем

$$\Gamma^2(t_i, y^1(t_i)) \geq \Gamma^2(t_*, y^1(t_*)) - \zeta\sigma(t_i - t_*)\Delta - \zeta\,\varepsilon(t_*, t_i)$$

В частности,

$$\Gamma^2(\vartheta, y^1(\vartheta)) \geq \Gamma^2(t_*, y^1(t_*)) - \zeta\sigma T\Delta - \zeta\,\varepsilon(t_*, \vartheta) \tag{7.7}$$

Если начальные состояния $y^1(t_*)$ берутся из некоторого компакта $\mathcal{E}_*$, то конечные состояния $y^1(\vartheta)$ принадлежат некоторому компакту $\mathcal{E}$. Поскольку $\Gamma^2(t_*, y^1(t_*)) = \gamma^2(y^1(\vartheta))$, из неравенства (7.7) следует

$$\gamma^1(y^1(\vartheta)) \geq \Gamma^2(t_*, y^1(t_*)) - \zeta\sigma T\Delta - \zeta\varepsilon(t_*, \vartheta) - \|\gamma^1 - \gamma^2\|_{\mathcal{E}} \tag{7.8}$$

При достаточно хорошей аппроксимации игры (I.1) игрой (I.2) величины $\varepsilon(t_*, \vartheta)$, $\|\gamma^1 - \gamma^2\|_{\mathcal{E}}$ малы, а величина $\Gamma^2(t_*, y^1(t_*))$ близка к величине $\Gamma^1(t_*, y^1(t_*))$ - цене игры (I.I) в позиции $(t_*, y^1(t_*))$. Оценка (7.8) показывает, таким образом, что стратегия V обеспечивает второму игроку результат, близкий к оптимальному.

Отметим еще раз допущения, использованные при доказательстве оценки (7.8): стратегия V определена на основе точных построений множеств $\Pi(t_e), \Pi_1(t_e), \Pi_2(t_e), e = 0, 1, 2, \ldots$; состояния $y^1(\tau_k)$ замеряются точно; при любом k состояние $y^1(\tau_k)$ принадлежит множеству $E(\tau_k) \setminus W_{c_*}(\tau_k)$.

Последнее условие обеспечивается выбором чисел c_*, c^* и соответствующим заданием множества $\mathcal{E}_*$ начальных состояний. Первые два условия являются существенными.

Стратегия V не зависит от конкретной начальной позиции, но зато зависит от выбора аппроксимирующей системы (I.2). Стратегия V есть выборка из многозначной функции $\mathbf{V}$. Последняя определяется при помощи множеств $\Pi(t_e)$, $\Pi_1(t_e)$, $\Pi_2(t_e)$. В множествах $\Pi_1(t_e)$, $\Pi_2(t_e)$ значения $\mathbf{V}(t_e, x)$, а значит и $V(t_e, x)$, не зависят от x и равны соответственно ν и $-\nu$. Множество $\Pi(t_e)$ играет роль множества, разделяющего $\Pi_1(t_e)$ и $\Pi_2(t_e)$. Поэтому мы и называем (используя терминологию задач управления) набор множеств $\Pi(t_e)$, $e=0,1,2,\ldots$, поверхностью переключения второго игрока, а каждое из множеств $\Pi(t_e)$ сечением поверхности переключения.

§ 8. Примеры

Рассмотрим два примера, на которых продемонстрируем работоспособность стратегии второго игрока, описанной в параграфах 3, 6. На этих примерах будет также экспериментально подтвержден факт неустойчивости стратегии второго игрока, опирающейся на поверхность переключения. Излагаемые в этом параграфе результаты численного эксперимента получены на машине БЭСМ-6. Результаты счета округлены до второго знака после запятой.

Пример I. Пусть дифференциальная игра второго порядка описывается соотношениями

$$\begin{aligned} &\dot{\xi}_1 = \xi_2 + v && |u| \le 1, \quad |v| \le 1 \\ &\dot{\xi}_2 = u && T=[0,6], \quad \gamma(\xi) = |\xi| \end{aligned} \tag{8.I}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 - координаты фазового вектора ξ, T - промежуток времени игры, γ - функция платы. Значения платы в момент окончания $\vartheta = 6$ минимизирует первый игрок и максимизирует второй.

При помощи замены $y(t) = X(6-t)\xi(t)$, где

$$X(6-t) = \begin{pmatrix} 1 & 6-t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

фундаментальная матрица Коши однородной системы

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$
$$\dot{\xi}_2 = 0$$

игра (8.I) сводится к эквивалентной игре

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = (6-t)u + v \qquad &|u| \le 1, \quad |v| \le 1 \\ &\dot{y}_2 = u \qquad &T = [0,6], \quad \gamma^1 = \gamma \end{aligned} \tag{8.2}$$

имеющей вид (I.I).

Определим аппроксимирующую игру. Положим

$$\varkappa = 0.01\,; \quad t_e = 0.01e, \quad e = \overline{0,600}\,;$$

$$B^2(t) = B^1(t_e) = \begin{pmatrix} 6-t_e \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [t_e, t_{e+1}); \; C^2(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Обозначим через M^2 правильный IOO-угольник, вписанный в круг единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть $\gamma^2(x) = \min\{c \ge 0 : x \in cM^2\}, \quad x \in R^2.$

Зафиксируем конечный набор $c_m = 1.1 + 0.1m, \quad m = \overline{0,9}$, значений параметра c. Для каждого значения c_m при помощи попятной конструкции построим сечения $W_{c_m}(t_e)$ максимального u -стабильного моста W_{c_m} в аппроксимирующей игре. Обрабатывая полученную совокупность сечений, зададим поверхности переключения игроков, а также наборы плохих конусов и соответствующих точек для стратегии с коррекцией второго игрока.

Поверхности переключения представляют собой набор линий переключения для моментов t_e. Алгоритм построения линий пе -

реключения подробно описан в [4,7]. Стратегии первого и второго игроков, основанные на численно построенных поверхностях переключения, обозначим U_*, V_*. Стратегия U_* является численной реализацией оптимальной (в ограниченной области) и устойчивой по отношению к возмущениям стратегии первого игрока в игре (8.2). Стратегия V_* гарантирует второму игроку близкий к оптимальному результат лишь при отсутствии скольжения по поверхности переключения. Эффект возникновения скользящих режимов будет смоделирован при помощи датчика случайных чисел, задающего ошибку "замера" состояния системы (8.2).

Стратегию с коррекцией второго игрока обозначим V_0. В качестве моментов коррекции τ_{k_i} брались моменты попадания текущего вектора $l(\tau_{k_i})$ в множество $\Lambda_{c_{m_i}}(\tau_{k_i})$ (см. § 6). Используемый при формировании стратегии V_0 набор точек, снятый для каждого момента t_e с многоугольников $W_{c_m}(t_e)$, $m=\overline{0,9}$, и соответствующий набору плохих конусов, совпадает с набором точек, задающим линию переключения для момента t_e в схеме реализации стратегии V_*.

Время работы программы, строящей совокупность многоугольников $W_{c_m}(t_e)$ и обрабатывающей их, в целом составляет примерно 50 минут.

Помимо стратегии U_*, за первого игрока будет использована стратегия $\widetilde{U}$, в которой управление первого игрока выбирается из условия прицеливания на начало координат.

Шаг дискретной схемы управления первого игрока во всех экспериментах равен 0.01. Управление первого игрока вырабатывается на основе точной информации о состоянии системы.

Зафиксируем начальную позицию $t_*=0$, $y^1(t_*)$ = (4.43, 2.6I). Начальная позиция подобрана так, что точка $y^1(t_*) = y^1(0)$ принадлежит границе многоугольника $W_{1.7}(0)$. Следовательно, цена $\Gamma^2(t_*, y^1(t_*))$ аппроксимирующей игры равна I.70. Поскольку шаг $\varkappa$ мал и функция платы γ^2 хорошо приближает функцию γ^1, то можно считать, что в начальной позиции цена игры (8.2) также примерно равна I.70. Начальный вектор l_* для стратегии V_0 выберем как вектор внешней нормали к многоугольнику $W_{1.7}(0)$ в точке $y^1(0)$.

Приведем результаты экспериментов.

а). Оба игрока применяют стратегии U_*, V_* управления по поверхности переключения. Шаг Δ дискретной схемы второго игрока равен 0.0I. При этом в схему выбора управления в каждый момент τ_k подается точное состояние $y^1(\tau_k)$. Значение платы в момент $\vartheta = 6$ равно I.70. Таким образом, значение платы на реализовавшемся движении совпадает с ценой игры в начальной позиции.

в). Игроки по-прежнему применяют стратегии U_*, V_*, но в отличие от предыдущего случая в каждый момент τ_k в схему управления второго игрока вместо вектора $y^1(\tau_k)$ подается "замер" $z^1(\tau_k) = y^1(\tau_k) + \beta(\tau_k)$, где $\beta(\tau_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ - случайные векторы, каждая координата которых не превосходит заданной величины α, т.е. $|\beta_1(\tau_k)| \le \alpha$, $|\beta_2(\tau_k)| \le \alpha$. Последовательности $\{\beta_1(\tau_k)\}$, $\{\beta_2(\tau_k)\}$ снимались с датчика случайных чисел, реализующего равномерное распределение на отрезке.

На рис.I4 и в табл.I приведены результаты для четырех пар значений Δ, α. Для каждой пары было просчитано 200 движений при разных реализациях последовательностей $\{\beta_1(\tau_k)\}$, $\{\beta_2(\tau_k)\}$. На рис.I4 изображены четыре графика

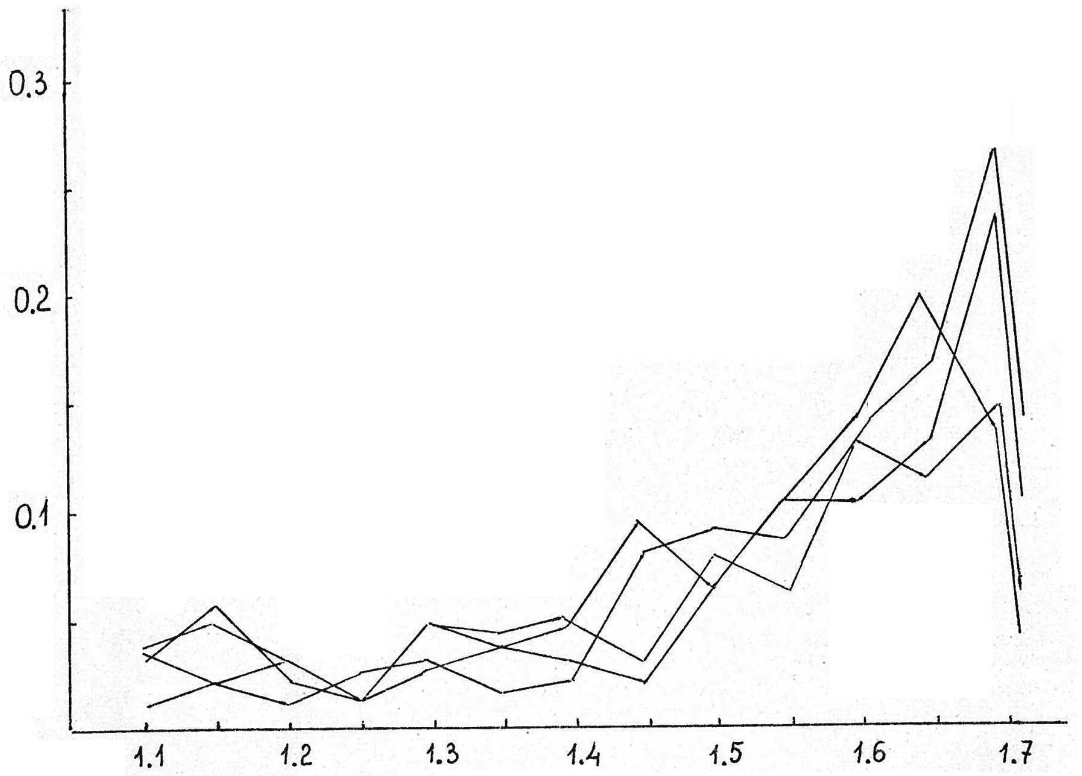


Рис. 14

5756-85

Δ	0.01	0.02	0.04	0.06
α	0.09	0.11	0.12	0.13
$\gamma_{ср.}$	1.49	1.45	1.53	1.58

Табл. 1

плотности случайной величины $\gamma^1(y^1(6)) = |y^1(6)|$. Для всех движений $\gamma^1(y^1(6)) \leq$ I.75. В каждой из четырех серий около 30 движений таковы, что $\gamma^1(y^1(6)) \leq$ I.I. В третьей строке табл.I указаны средние значения платы в каждой серии (если величина $\gamma^1(y^1(6))$ для какого-либо движения была меньше I.I, то при подсчете среднего значения она заменялась на I.I). Видно, что для выбранных пар Δ , α среднее значение платы мало меняется и меньше цены игры в начальной позиции. Приведенные результаты говорят о неустойчивости стратегии V_* .

с). Игроки применяют стратегии U_* , V_o . Шаг Δ и параметр α равны соответственно 0.04 и 0.I2. В схему управления второго игрока подаются векторы $z^1(\tau_k)$, формирующиеся при помощи датчика случайных чисел так же, как и в случае в). Была просчитана серия из I00 движений. Для всех движений этой серии I.67 $\leq \gamma^1(y^1(6)) \leq$ I.76. Среднее значение платы равно I.72. Эти результаты подтверждают устойчивость стратегии V_o.

d). В этом эксперименте демонстрируется эффект коррекции при применении стратегии V_o , когда первый игрок действует неоптимально, используя стратегию $\tilde{U}$. Было взято Δ = 0.04, α = 0.I2. В схему управления второго игрока подавались векторы $z^1(\tau_k)$, формирующиеся при помощи датчика случайных чисел. Было просчитано одно движение. Значение платы $\gamma^1(y^1(6))$ для него равно 4.I4.

На рис.I5 представлены фазовые траектории трех движений. Полагалось Δ = 0.04, α = 0.I2. Для всех движений использовались одни и те же реализации с датчика случайных чисел. Первая траектория взята из эксперимента в), вторая и третья - из экспериментов с) и d) соответственно. Траектории изобра -

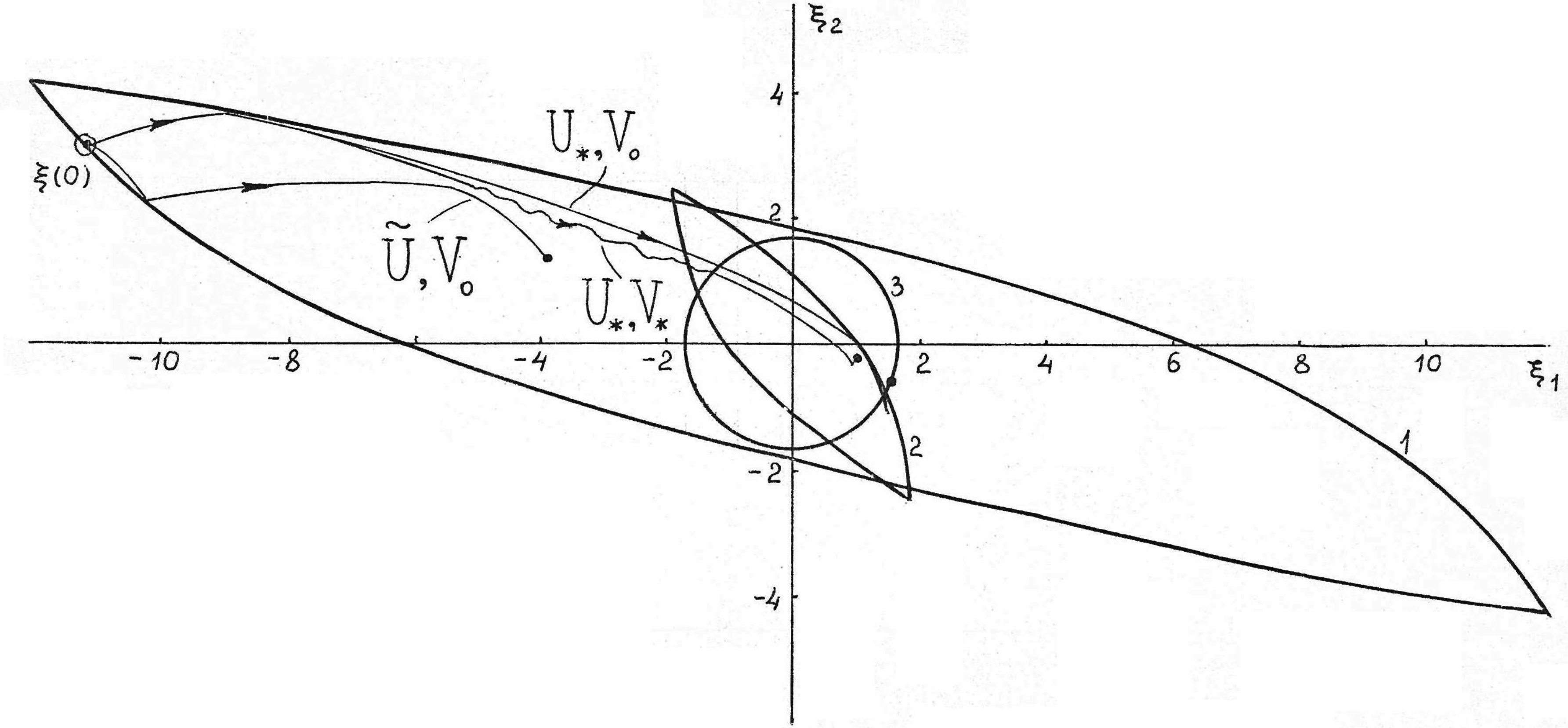


Рис. 15

жены в координатах ξ_1, ξ_2 системы (8.I). Напомним, что координаты ξ, y связаны соотношением $y = X(6-t)\xi$, зависящем от t. На рис.I5 для моментов t = 0,5 показаны множества $\mathcal{W}_{1.7}(t) = X^{-1}(6-t)W_{1.7}(t)$ – численно построенные сечения множества уровня $\Gamma(t,\xi) \leq$ I.7 функции цены в игре (8.I) или, что то же самое, сечения максимального u - стабильного моста в игре (8.I), обрывающегося в момент $\vartheta = 6$ на множестве $\{\xi \in R^2 : \gamma(\xi) \leq 1.7\} = \{\xi \in R^2 : |\xi| \leq 1.7\}$. Сечения обозначены цифрами I и 2 соответственно. Цифрой 3 обозначен круг радиуса I.7.

<u>Пример 2</u>. Рассмотрим дифференциальную игру из работы [7]. Динамика игры описывается векторным уравнением

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + Cv, \qquad \xi \in R^7 \tag{8.3}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0762 & -5.34 & 0 & 9.8\mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0056 & -0.392 & -0.0889 & -0.0378 & -0.\mathrm{I}7 & 0.0378 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{I} & 0 & -\mathrm{I} \\ 0 & -0.0\mathrm{I}29 & -0.90\mathrm{I}6 & -0.2045 & -0.0869 & -0.89 & 0.0869 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

$$B = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \mathrm{I})',$$

$$C = (0,\ 0.0762,\ 0,\ 0.0056,\ 0,\ 0.0\mathrm{I}29,\ 0)'$$

$$|u| \leq \mu(t) = 0.2613 - 0.0116t, \qquad |v| \leq \nu = 10, \qquad T = [0, 15]$$

Первая координата ξ_1 фазового вектора ξ имеет смысл бокового отклонения центра масс самолета от оси взлетно-посадочной полосы, вторая координата ξ_2 - скорость отклонения.

Размерности - м и м/сек. Управляющее воздействие u - "заданный" угол крена (рад), помеха v - боковая составляющая скорости ветра (м/сек). Цель первого игрока - минимизация значений функции платы γ в момент окончания ϑ = I5 сек, интересы второго игрока противоположны. Функция γ зависит только от первых двух координат фазового вектора и описывается формулой $\gamma(\xi_1, \xi_2) = \min\{c \geq 0 : (\xi_1, \xi_2) \in cM\}$, где

$$M = \{(\xi_1, \xi_2) : \frac{\xi_1^2}{216} - \frac{2\xi_1}{9} - \frac{3}{2} \leq \xi_2 \leq -\frac{\xi_1^2}{216} - \frac{2\xi_1}{9} + \frac{3}{2}\}$$

Пусть $X_{1,2}(15-t)$ - матрица из первых двух строк фундаментальной матрицы Коши $\exp A(15-t)$. При помощи замены $y(t) = X_{1,2}(15-t)\xi(t)$ игра (8.3) сводится к эквивалентной игре

$$\dot{y} = B^1(t)u + C^1(t)v \tag{8.4}$$

$$B^1(t) = \mu(t)X_{1,2}(15-t)B, \qquad C^1(t) = \nu X_{1,2}(15-t)C$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1, \quad \gamma^1 = \gamma, \quad T = [0, 15].$$

Определим аппроксимирующую игру. Положим

$$\varkappa = 0.05; \quad t_e = 0.05e, \quad e = \overline{0, 300};$$

$$B^2(t) = B^1(t_e), \quad C^2(t) = C^1(t_e), \quad t \in [t_e, t_{e+1}).$$

Обозначим через M^2 выпуклый 200-угольник, вписанный в M. Пусть $\gamma^2(x) = \min\{c \geq 0 : x \in cM^2\}$, $x \in R^2$.

Зафиксируем конечный набор $c_m = 0.7 + 0.1m$, $m = \overline{0, 20}$, значений параметра c . Пусть U_* , V_* - стратегии в игре (8.4), опирающиеся на поверхности переключения, V_0 -стратегия с коррекцией второго игрока. Помимо стратегии U_* , за первого игрока будет использована комбинированная [7] стратегия U_*^{λ} , значения $U_*^{\lambda}(t_e, x)$ которой совпадают с $U_*(t_e, x)$ вне круга радиуса λ с центром в начале координат. В круге радиуса λ значение $U_*^{\lambda}(t_e, x)$ выбирается по "линейному" закону, формула которого приведена в [7]. В целом стратегия U_*^{λ} , в отличие от U_* , не является оптимальной.

Шаг дискретной схемы управления первого игрока во всех экспериментах равен 0.05. Управление первого игрока вырабатывается на основе точной информации о состоянии системы.

Зафиксируем в системе (8.3) начальную позицию $t_* = 0$, $\xi(t_*)$ = (95, 0, 0, 0, 0, 0, 0). В игре (8.4) ей соответствует позиция $t_* = 0,\ y(t_*) = X_{1,2}(15 - t_*)\xi(t_*)$. Точка $y^1(t_*) = y^1(0)$ принадлежит границе многоугольника $W_{1.6}(0)$ Следовательно, цена $\Gamma^2(t_*, y^1(t_*))$ аппроксимирующей игры равна 1.60. Примерно этому же числу равна цена игр (8.3), (8.4) в начальной позиции. Начальный вектор l_* для стратегии V_0 выберем как вектор внешней нормали к многоугольнику $W_{1.6}(0)$ в точке $y^1(0)$.

В табл.2 приведены значения платы на движениях, отвечающих различным способам управления. Первый столбец соответствует случаю, когда управление второго игрока вырабатывается на основе точной информации о состоянии системы. Во втором и третьем столбцах указаны результаты, когда управление строится на основе "замеров" так, как это описано в первом примере. При этом во всех вариантах использовались одни и те же реализации $\{\beta_1(\tau_k)\}$, $\{\beta_2(\tau_k)\}$ с датчика случайных чисел.

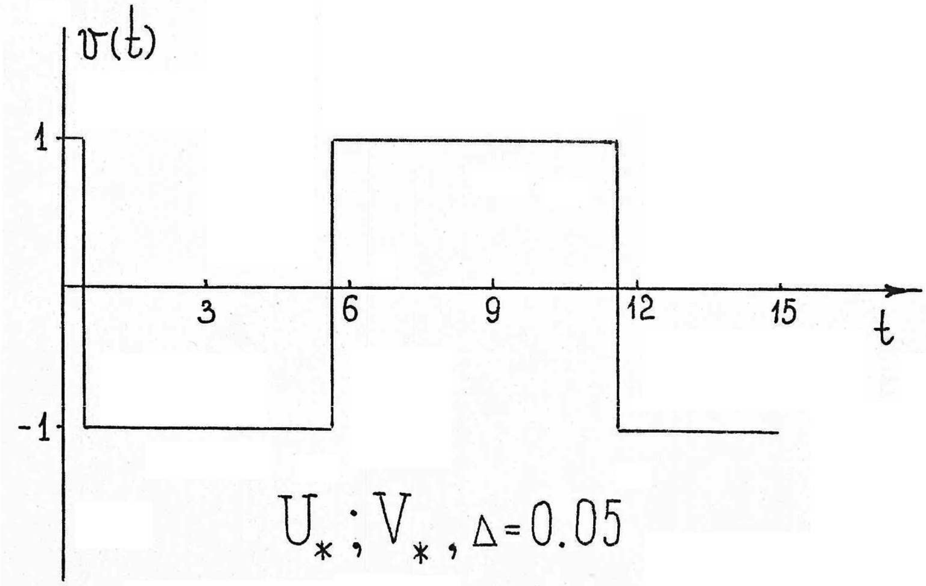
На рис.16-18 показаны реализации управления второго игрока вдоль движений, соответствующих первой строке таблицы. При использовании вторым игроком стратегии V_* и наличии ошибки "замера" возникает скользящий режим по поверхности переключения (рис.17).

Как в первом, так и во втором примерах параметр μ , участвующий в задании стратегии V_0 , полагался равным 0.01 .

	$V_*, \Delta=0.05$	$\alpha=2$ $V_*, \Delta=0,2$	$\alpha=2$ $V_o, \Delta=0.2$
U_*	1.60	1.02	1.58
U_*^{10}	1.70	1.30	1.71
U_*^{15}	1.82	1.42	1.71
U_*^{25}	2.01	1.67	2.03

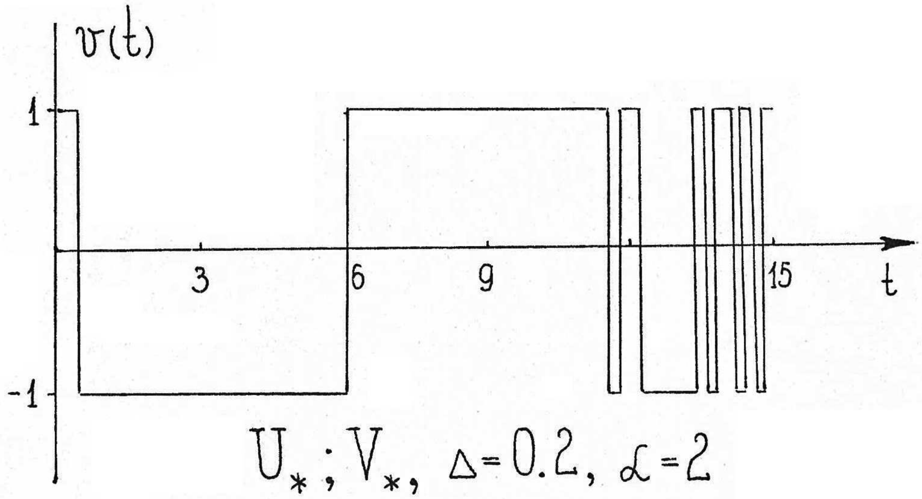
Табл. 2

5756-85



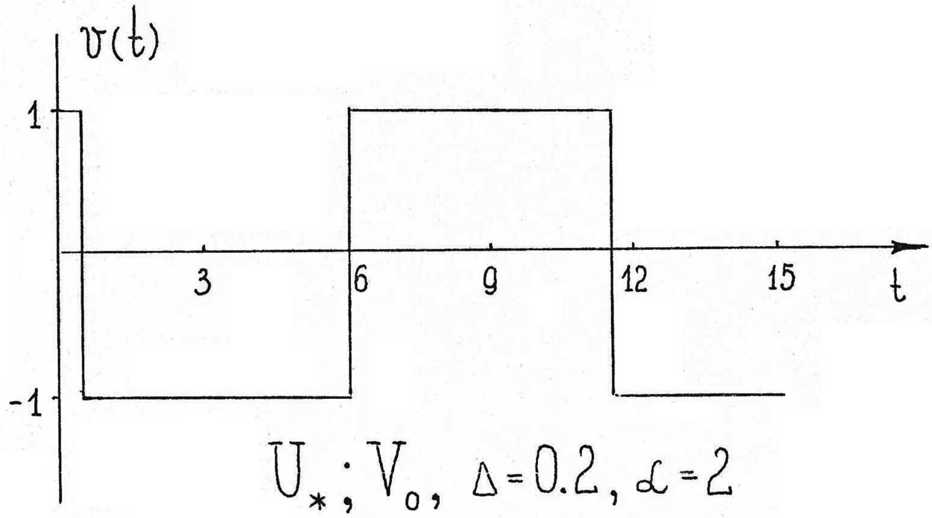
$U_*; V_*, \Delta=0.05$

Рис. 16



$U_*; V_*, \ \Delta = 0.2, \ \alpha = 2$

Рис. 17



$U_*; V_0, \ \Delta = 0.2, \ \alpha = 2$

Рис. 18

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциаль - ные игры. М.: Наука, 1974, 456 с.
2. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ).- Свердловск: АН СССР, УНЦ, ИММ, 1984, 295 с.
3. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Универсальная стратегия в дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания.- Пробл. управления и теории информ., 1982, т.11, № 6, с.419-432.
4. Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре.- Изв. АН СССР, Техн.кибернетика, 1983, № 4, с.78-85.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
7. Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке.- Прикл. матем. и механ., 1984, т.48, № 4, с.560-567.
8. Полищук Е.Г. Оценка отклонения цены линейной дифференциальной игры от последовательного программного максимина.- Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 6, с.195-198.

5756-85

Печатается в соответствии с решением Ученого Совета
Института математики и механики УНЦ АН СССР от 20 июня 1985 г.

печать от 10.7.85.
ир.1 Цена 8-50 Зак. 32792
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403

ПИК ВИНИТИ Зак.9141 Тир.140 000