

# ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА: АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

В.С. Пацко, А.А. Федотов

Семинар отдела управляемых систем  
11 июля 2022 г.

# Машина Дубинса

$$\dot{x} = \cos\varphi,$$

$$\dot{y} = \sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = u;$$

$$u \in [u_1, u_2].$$

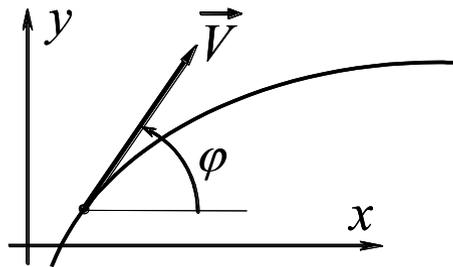
$$u_1 = -1, u_2 = +1 \quad (\text{канонический симметричный случай})$$

$$u_1 < 0 < u_2 \quad (\text{несимметричный случай})$$

$$0 = u_1 < u_2 \quad (\text{случай одностороннего поворота})$$

$$0 < u_1 < u_2 \quad (\text{случай строго одностороннего поворота})$$

А.А. Марков (1889), R. Isaacs (1951), L. Dubins (1957)



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

Множество достижимости в момент  $t_f$ :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

Множество достижимости к моменту  $t_f$ :

$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$

## Слайд 2

Под “математической машиной Дубинса” понимаем управляемый объект, кинематическое описание которого показано на слайде вверху слева. Здесь  $x, y$  – геометрические координаты объекта на двумерной плоскости,  $\varphi$  – угол наклона вектора линейной скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления горизонтальной оси  $x$ ,  $u$  – скалярное управляющее воздействие. Величина линейной скорости предполагается постоянной и равной единице. Управляющее воздействие  $u$  стеснено геометрическим ограничением. Считаем, что угол  $\varphi$  принимает значения в диапазоне  $(-\infty, \infty)$ .

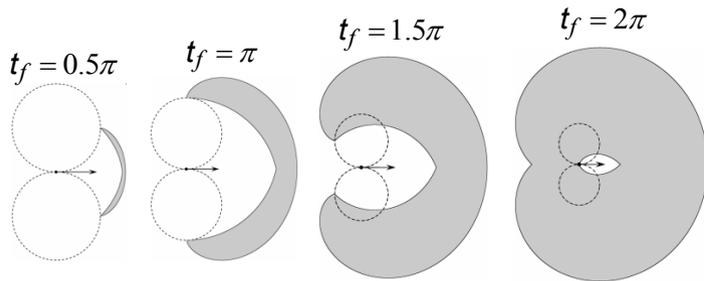
В данном докладе будем предполагать, что  $u_1 < 0 < u_2$ . Случай, когда  $u_1 = -1, u_2 = 1$  назовём каноническим.

История использования рассматриваемой модели движения связана с именами А.А. Маркова, R. Isaacs, L. Dubins.

Нас будет интересовать множество достижимости  $G(t_f)$  в заданный момент  $t_f$ . Оно определяется как совокупность трёхмерных фазовых состояний в момент  $t_f$ , которые можно получить при переборе всех измеримых допустимых программных управлений. Начальное фазовое состояние в нулевой начальный момент времени считаем равным нулю.

Главная цель доклада – исследование свойств симметрии сечений множества достижимости по угловой координате и аналитическое описание таких двумерных сечений.

# Множество достижимости в проекции на плоскость геометрических координат $x, y$



SIAM J. CONTROL  
Vol. 13, No. 1, January 1975

## PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS\*

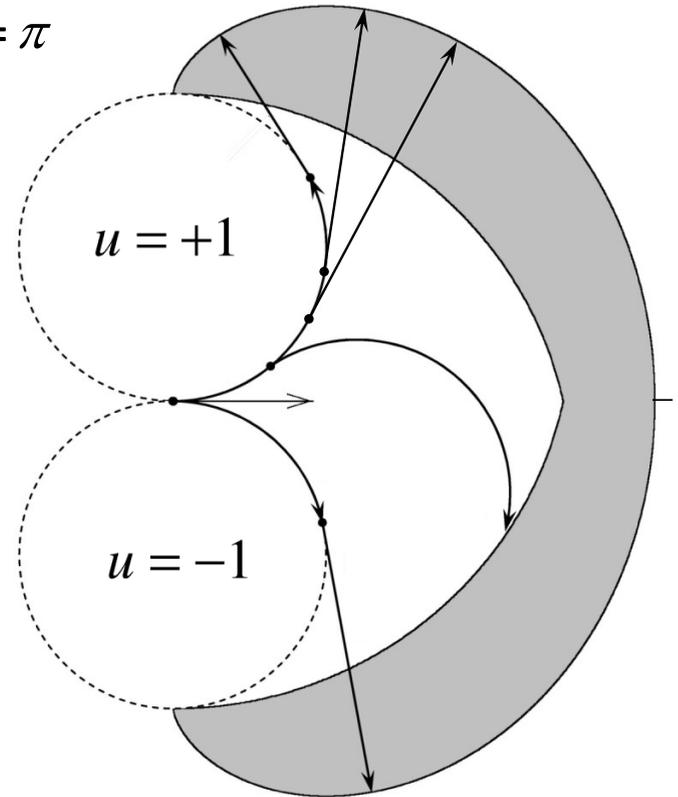
E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

**Abstract.** A particle  $P$  moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which  $P$  can reach a given point in a given direction and obtains, for all  $t$ , the set  $R(t)$  of all possible positions for  $P$  at time  $t$ , thus extending the results of several recent authors.

Ю.И.Бердышев

Нелинейные задачи последовательного  
управления и их приложение  
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015, 193 с.

$$t_f = \pi$$



Граница состоит  
из двух эвольвент круга (внешняя граница)  
и двух кардиод (внутренняя граница)

## Слайд 3

Помимо наших работ последнего времени, практически единственным известным фактом, связанным с трёхмерным множеством достижимости в момент для машины Дубинса, является описание его проекции на плоскость геометрических координат. Соответствующая работа была опубликована в 1975 г. американскими математиками E.J. Sussane, G.W.C Hall. В нашем Институте Ю.И. Бердышев также хорошо знал описание множества достижимости в геометрических координатах и использовал такое описание в своих работах.

Картинки множества достижимости в геометрических координатах для четырёх моментов времени показаны на слайде слева. Справа дано изображение траекторий, ведущих на фронтальную (внешнюю) и тыльную (внутреннюю) части границы множества достижимости. Фронтальная часть границы складывается из двух эвольвент круга, тыльная – из двух кардиоид.

**Случай несимметричных  
ограничений на управление.**

**Свойства симметрии**

## Слайд 4

Первая часть доклада будет посвящена свойствам симметрии сечений по угловой координате (кратко “ $\varphi$ -сечений”) рассматриваемого трёхмерного множества достижимости. Кроме некоторого факта геометрической симметрии, мы установим “обобщённое” свойство симметрии, заключающееся в том, что исследование  $\varphi$ -сечений при произвольных значениях  $u_1, u_2$  можно свести к изучению канонического случая, когда  $u_1 = -1, u_2 = 1$ .

# Формула соответствия $\varphi$ -сечений

Случай несимметричных ограничений на управление при построении множества достижимости сводится к каноническому симметричному случаю.

$$\dot{x} = \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = u;$$

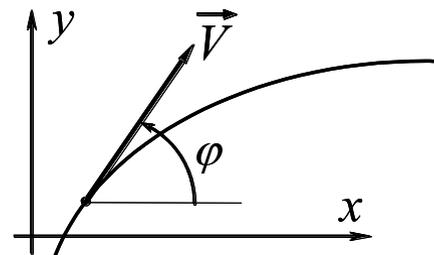
$$u \in [u_1, u_2]$$

$$u_1 = -1, u_2 = 1$$

(канонический симметричный случай)

$$u_1 < 0 < u_2$$

(несимметричный случай  
с поворотами влево и вправо)



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

Пусть в несимметричном случае надо найти  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  для некоторых значений  $t_f$  и  $\varphi$ . Вводим момент  $t_f^c$  по формуле  $t_f^c = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi$ .

Рассматриваем при том же значении  $\varphi$  сечение  $G_\varphi^c(t_f^c)$  для канонического случая. Во вспомогательной системе координат (она зависит только от  $\varphi$ ) получаем нужное сечение  $G_\varphi(t_f)$  с помощью аффинного преобразования (умножение на коэффициент и сдвиг):

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} G_\varphi^c(t_f^c) + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## Слайд 5

Сформулируем (а на следующих слайдах поясним более подробно) результат о сведении общего случая к каноническому.

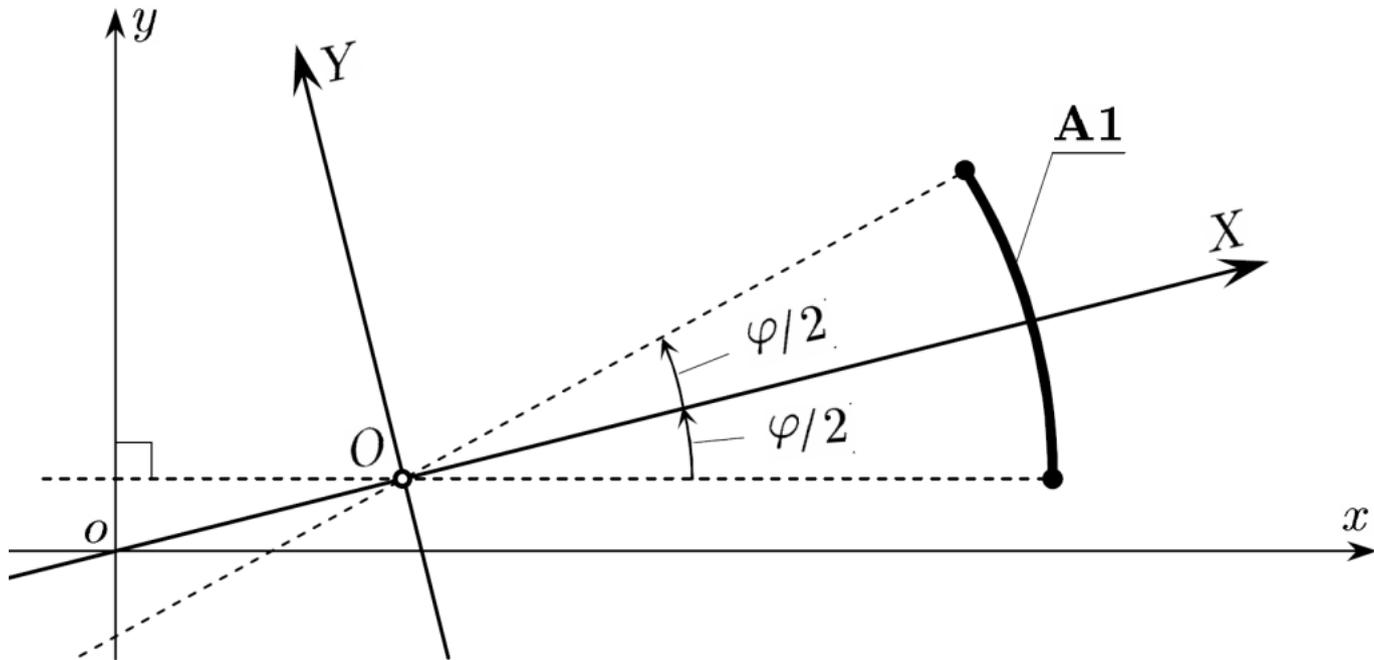
Обозначим символом  $G_\varphi(t_f)$  сечение трёхмерного множества достижимости  $G(t_f)$  при фиксированной угловой координате  $\varphi$ . Множество  $G_\varphi(t_f)$  рассматриваем на плоскости геометрических координат  $x, y$ . Для обозначений, относящихся к каноническому случаю, введём верхний индекс “с”.

Пусть надо при некоторых  $u_1 < 0, u_2 > 0$  описать  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  для момента  $t_f$ . Введём новый момент  $t_f^c$  по формуле в середине слайда и будем использовать его для выделения  $\varphi$ -сечения в каноническом случае при том же значении  $\varphi$ .

Формула внизу слайда связывает сечения  $G_\varphi(t_f)$  и  $G_\varphi^c(t_f^c)$  аффинным соотношением (умножение на скалярный коэффициент и сдвиг). Однако эта формула работает не в исходной системе координат  $x, y$ , а в некоторой вспомогательной системе координат  $X, Y$ , которая будет пояснена на следующем слайде.

## Вспомогательная система координат

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \right)$$



## Слайд 6

Здесь показана формула перехода от исходной системы координат к вспомогательной. Ось  $X$  вспомогательной системы проходит через начало координат исходной системы и повернута относительно её оси  $x$  на угол  $\varphi/2$ .

Подчеркнём, что вспомогательная система  $X, Y$  зависит только от значения  $\varphi$ .

Вспомогательная система будет играть принципиальную роль в дальнейшем изложении.

# Управления, порождающие границу трёхмерного множества достижимости в несимметричном случае

Теорема 1 (несимметричный случай). В любую точку границы множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u,$$

$$u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < 0 < u_2.$$

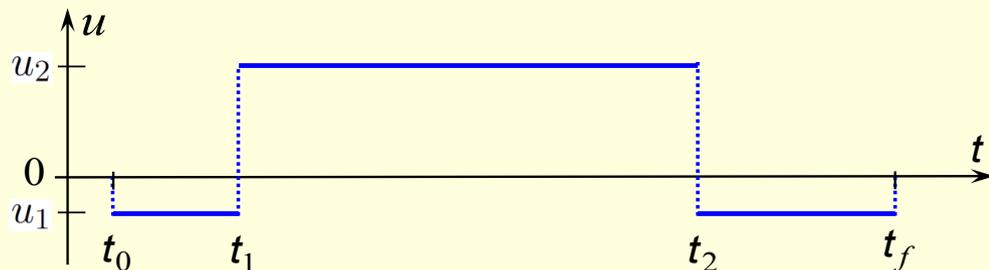
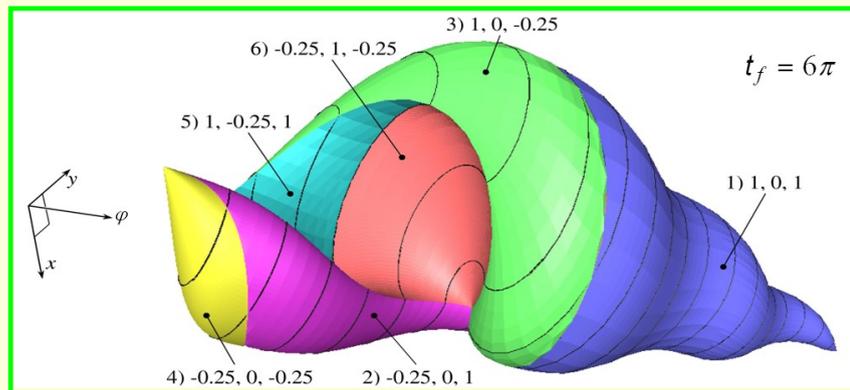
можно прийти с использованием кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

В случае двух переключений достаточно рассмотреть следующие 6 типов:

- |                     |                       |                       |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| U1) $u_2, 0, u_2$ ; | U2) $u_1, 0, u_2$ ;   | U3) $u_2, 0, u_1$ ;   |
| U4) $u_1, 0, u_1$ ; | U5) $u_2, u_1, u_2$ ; | U6) $u_1, u_2, u_1$ . |

При этом для случаев U5), U6) мы можем ограничиться управлениями, которые удовлетворяют неравенству

$$|(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2))| \leq |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|.$$



Для  $\varphi \geq 0$  оставляем 4 типа :

- |                     |                       |
|---------------------|-----------------------|
| U1) $u_2, 0, u_2$ ; | U2) $u_1, 0, u_2$ ;   |
| U3) $u_2, 0, u_1$ ; | U6) $u_1, u_2, u_1$ . |

## Слайд 7

Теорема 1 выделяет кусочно-постоянные программные управления, которыми можно ограничиться, исследуя границу трёхмерного множества достижимости. Главное: не более двух переключений; крайние и нулевые значения управляющих воздействий; всего шесть типов. Дополнительное условие внизу слайда относится к типам U5 и U6. Оно означает требование на абсолютную величину изменения угла на среднем по времени участке. При помощи этого условия доказываем, что для  $\varphi \geq 0$  можно ограничиться четырьмя типами управлений: U1, U2, U3, U6. Соответственно, при  $\varphi \leq 0$  получаем четыре типа U2, U3, U4, U5.

На рисунке справа сверху дан пример множества достижимости  $G(t_f)$  для  $u_1 = -0.25$ ,  $u_2 = 1$ ,  $t_f = 6\pi$ . Сплошными линиями отмечены границы  $\varphi$ -сечений для нескольких значений  $\varphi$ . Граница трёхмерного множества разбита на шесть участков (отмечены цветом), каждый соответствует своему типу управления.

Данные шесть типов управления соответствуют шести типам, полученным в известной статье L. Dubins (1957) для задачи быстрогодействия. Наше утверждение не вытекает из утверждения L. Dubins и наоборот.

# Управления, порождающие трёхмерное множество достижимости в несимметричном случае

## Теорема 2 (несимметричный случай).

Пусть даны некоторые непрерывные строго возрастающие функции  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ , определённые на  $[0,1]$  с крайними значениями  $f_1(0) = f_2(0) = 0$  и  $f_1(1) = f_2(1) = 1$ .

Тогда для любой точки  $z = (x, y, \varphi)^T \in G(t_f)$  найдётся такое  $\alpha^b \in (0,1]$ , что в точку  $z$  можно перейти в момент  $t_f$  при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями и со значениями в трёхэлементном множестве

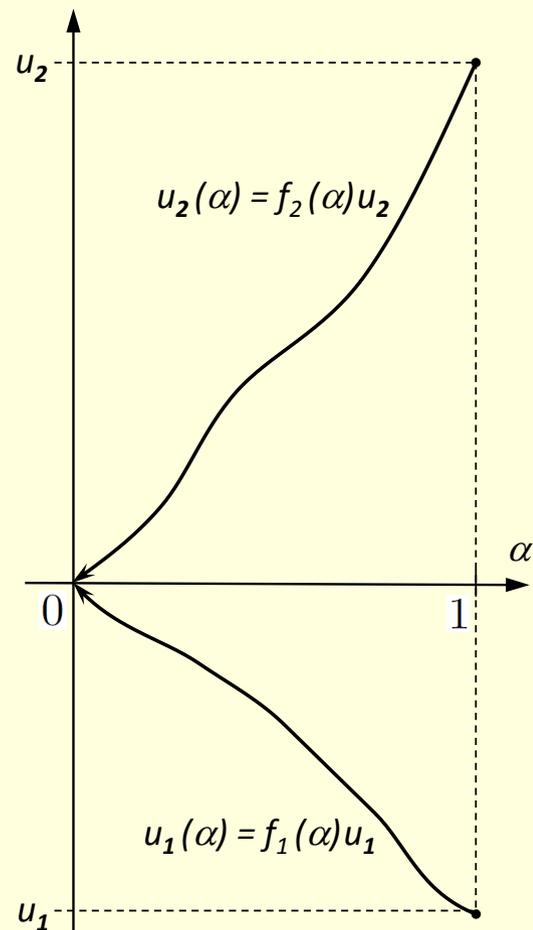
$$\{u_1^b, 0, u_2^b\}, \text{ где } u_1^b = f_1(\alpha^b)u_1, \quad u_2^b = f_2(\alpha^b)u_2.$$

При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью типами последовательности управлений:

$$\begin{aligned} U1^b) & u_2^b, 0, u_2^b; & U2^b) & u_1^b, 0, u_2^b; & U3^b) & u_2^b, 0, u_1^b; \\ U4^b) & u_1^b, 0, u_1^b; & U5^b) & u_2^b, u_1^b, u_2^b; & U6^b) & u_1^b, u_2^b, u_1^b. \end{aligned}$$

Для  $\varphi \geq 0$  оставляем 4 типа :

$$\begin{aligned} U1^b) & u_2^b, 0, u_2^b; & U2^b) & u_1^b, 0, u_2^b; \\ U3^b) & u_2^b, 0, u_1^b; & U6^b) & u_1^b, u_2^b, u_1^b. \end{aligned}$$



## Слайд 8

Теорема 2 охватывает теорему 1, но базируется на ней. Она регламентирует управления, ведущие не только на границу множества достижимости, но и в точки его внутренней. Понятно, что в любую точку внутренней множества достижимости ведёт большое число управлений. Мы сознательно оставляем те же шесть типов, что были в теореме 1. Крайние значения  $u_1^b, u_2^b$  образуются при помощи строго монотонных непрерывных функций  $f_1, f_2$ . Как и в теореме 1, для  $\varphi \geq 0$  остаются четыре типа.

## Аналитическое описание экстремальных кривых ( $\varphi \geq 0$ )

$$A_1(s_1) = \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[ \theta \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_1}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2), \quad \xi_\varphi(u_2) = 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(s_2) = \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[ \left( \theta + s_2 \right) \begin{pmatrix} \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} - 2 \sin\left(\frac{s_2}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$A_3(s_3) = \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[ \left( \theta - s_3 \right) \begin{pmatrix} \cos\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 2 \sin\left(\frac{s_3}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$A_6(s_6) = \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[ - \begin{pmatrix} 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{-s_6}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{-s_6}{2}\right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$s_1 \in [-\varphi, \varphi], \quad s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [0, \theta], \quad s_6 \in [-\theta, \theta], \quad \theta = \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{u_2 - u_1}.$$

## Слайд 9

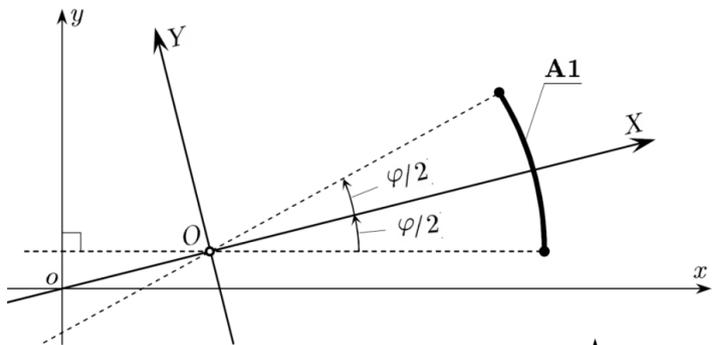
Каждый из указанных в теореме 1 для  $\varphi \geq 0$  четырёх типов управления при фиксированном значении  $\varphi$  порождает однопараметрическую кривую на плоскости геометрических координат. Такие кривые обозначим  $A_1, A_2, A_3, A_6$ . Соответствующие формулы однопараметрического представления во вспомогательной системе координат приведены на слайде.

Формулы получены непосредственным интегрированием исходных кинематических уравнений. Диапазоны изменения параметров указаны внизу слайда. Диапазоны зависят от конкретного характера кусочно-постоянного управления для каждого типа на промежутке  $[t_0, t_f]$ .

Для нас важно, что все четыре формулы похожи: в каждой формуле есть квадратная скобка; перед ней один и тот же скалярный коэффициент; сдвиг вдоль оси  $X$  также одинаковый. Отметим, что квадратная скобка зависит при фиксированном  $\varphi$  только от вспомогательной переменной  $\theta$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что рассматриваемые кривые, взятые в последовательности  $A_1, A_3, A_6, A_2$ , образуют замкнутую кривую.

# Составная кривая при ограничениях $u_1, u_2$ на управление



$\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$  -- замкнутая кривая,  
составленная из кривых A1, A3, A6, A2

4 типа кривых :

A1 :  $u_2, 0, u_2$

A2 :  $u_1, 0, u_2$

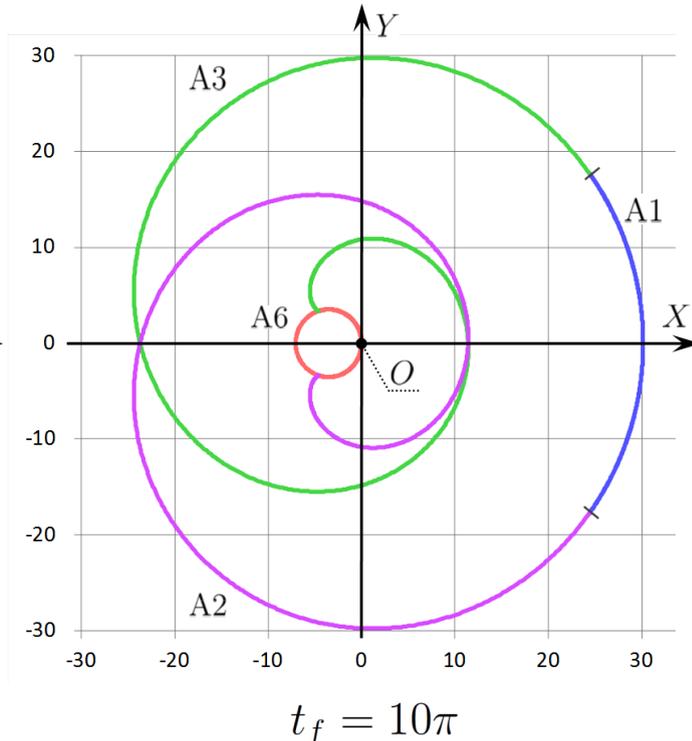
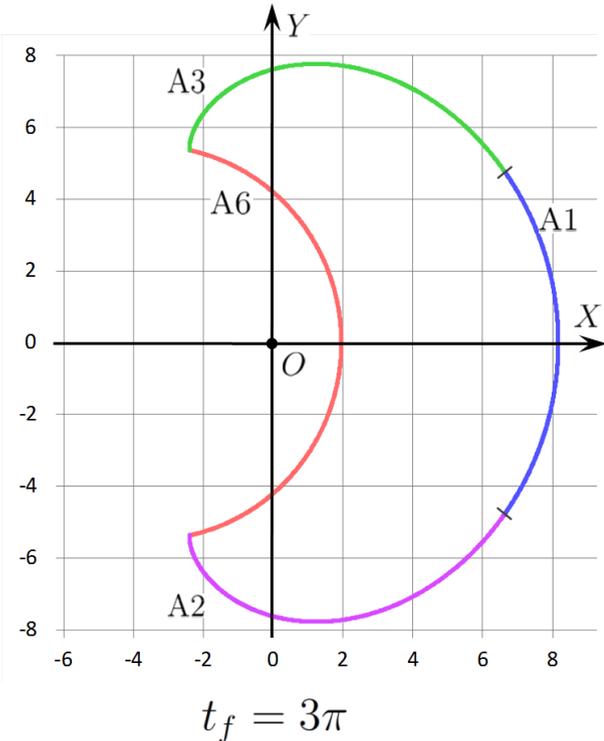
A3 :  $u_2, 0, u_1$

A6 :  $u_1, u_2, u_1$

$$u_1 = -0.5$$

$$u_2 = 1$$

$$\varphi = 0.4\pi$$



## Слайд 10

Замкнутую кривую последовательного соединения кривых A1, A3, A6, A2 будем называть составной и обозначим  $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ .

На слайде показаны примеры составной кривой для двух моментов времени во вспомогательной системе координат. Характер составной кривой значительно усложняется с ростом момента  $t_f$ .

При любых значениях  $u_1 < 0$ ,  $u_2 > 0$ ,  $t_f > 0$ ,  $\varphi \geq 0$  составная кривая  $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$  симметрична относительно оси  $X$ . Обоснование этого факта опирается на то, что кривые A1 и A6 представляют собой дуги окружностей с центром на оси  $X$ , а кривые A2 и A3 взаимно симметричны относительно оси  $X$ .

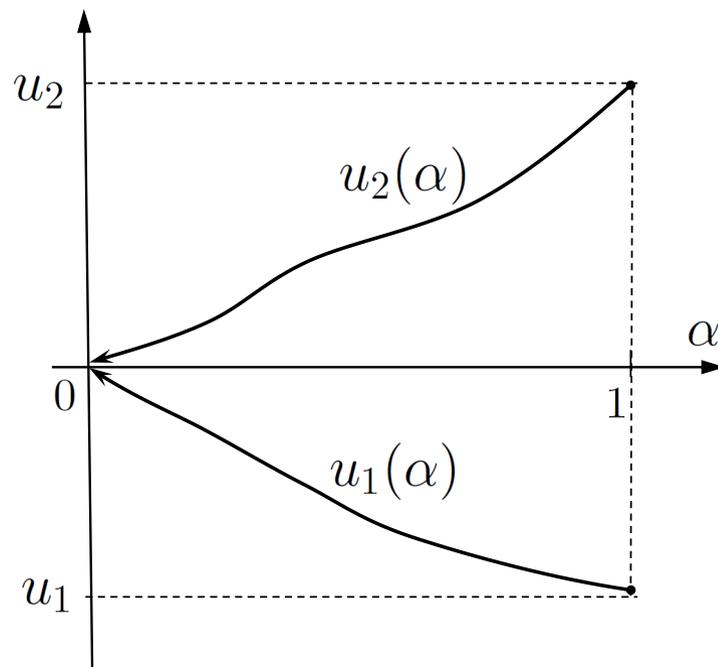
## Составные кривые при «уменьшенных» ограничениях на управление

$$u_1(\alpha) = f_1(\alpha)u_1, \quad u_2(\alpha) = f_2(\alpha)u_2$$

$\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$  -- замкнутая

составная кривая, соответствующая  $\alpha \in (0, 1]$

В силу Теоремы 2 через каждую точку  $\varphi$ -сечения проходит по крайней мере одна из таких кривых.  $\Rightarrow$  Объединение кривых  $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$  совпадает с  $\varphi$ -сечением в целом :



$$G_\varphi(t_f) = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \{ \mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f) \}$$

## Слайд 11

Используя теорему 2, делаем вывод, что через каждую точку  $\varphi$ -сечения проходит по крайней мере одна составная кривая  $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$ , где значения  $u_1(\alpha)$  и  $u_2(\alpha)$  задаются при помощи функций  $f_1$  и  $f_2$  для некоторого  $\alpha \in (0, 1]$ .

Четыре дуги, образующие составную кривую  $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$ , рассчитываются по тем же формулам, что и на слайде 9, с заменой  $u_1$  на  $u_1(\alpha)$  и  $u_2$  на  $u_2(\alpha)$ .

Формула внизу слайда говорит о том, что  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  есть геометрическое объединение составных кривых по  $\alpha \in (0, 1]$ .

# Формула соответствия частей составных кривых в несимметричном и каноническом случаях

несимметричный случай

$$u_1(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)},$$

$$u_2(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)},$$

$t_f$

$$u_1^C(\alpha) = -\alpha,$$

$$u_2^C(\alpha) = -u_1^C(\alpha) = \alpha,$$

$$t_f^C = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi$$

канонический случай

Для указанных функций  $u_1(\alpha)$ ,  $u_2(\alpha)$ ,  $u_1^C(\alpha)$ ,  $u_2^C(\alpha)$  и момента  $t_f^C$  справедлива формула соответствия частей составных кривых :

$$\begin{aligned} & \overbrace{\left( \frac{1}{u_2(\alpha)} - \frac{1}{u_1(\alpha)} \right) \left[ \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right]_{A_{n,\alpha}} + \xi_\varphi(u_2(\alpha))}^{A_{n,\alpha}} = \\ & = \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} \left( \overbrace{\left( \frac{1}{u_2^C(\alpha)} - \frac{1}{u_1^C(\alpha)} \right) \left[ \begin{array}{c} \dots \\ \dots \end{array} \right]_{A_{n,\alpha}^C} + \xi_\varphi(u_2^C(\alpha))}^{A_{n,\alpha}^C} \right) + \xi_\varphi(u_2) \end{aligned} \quad (*)$$

## Слайд 12

В несимметричном случае функции  $f_1$  и  $f_2$  выберем так, чтобы функции  $u_1(\alpha)$ ,  $u_2(\alpha)$  имели вид, показанный сверху слева. В каноническом случае (который также рассматриваем) функции  $f_1$ ,  $f_2$  возьмём более простыми:  $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = \alpha$ . Соответствующие значения  $u_1^C(\alpha)$ ,  $u_2^C(\alpha)$  показаны сверху справа. Для канонического случая момент окончания  $t_f^C$  отличается от момента  $t_f$ , взятого для исходного несимметричного случая.

В равенстве (\*) (в нижней части слайда) при помощи символа  $n = 1, 2, 3, 6$  обозначены дуги  $A_{n,\alpha}$  и  $A_{n,\alpha}^C$ , входящие при  $\alpha \in (0, 1]$  в состав кривых  $\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$  в несимметричном случае и  $\mathcal{A}_\varphi(u_1^C(\alpha), u_2^C(\alpha), t_f^C)$  в каноническом случае. Равенство (\*) справедливо для любых указанных  $n$  и  $\alpha$ . Оно даёт формулу соответствия между несимметричным и каноническим случаями на уровне частей составных кривых.

Доказывая равенство (\*), отмечаем вначале, что квадратные скобки, записанные слева для кривой  $A_{n,\alpha}$  и справа для кривой  $A_{n,\alpha}^C$ , совпадают в силу специального выбора момента  $t_f^C$ . Привлекая далее формулы для функций  $u_1(\alpha)$ ,  $u_2(\alpha)$ ,  $u_1^C(\alpha)$  и  $u_2^C(\alpha)$ , устанавливаем равенство слагаемых слева и справа, содержащих квадратные скобки. Наконец проверяем совпадение сдвига слева и итогового сдвига справа.



## Слайд 13

Таким образом, при любом  $\alpha \in (0, 1]$  справедлива формула соответствия составных кривых для несимметричного и канонического случаев, показанная в верхней части слайда.

Поскольку  $\varphi$ -сечения представляются в виде объединения по  $\alpha$ , то аналогичная формула (имеющая вид аффинного преобразования) справедлива и для самих  $\varphi$ -сечений.

Подчеркнём ещё раз, что эта формула записана в координатах  $X, Y$  вспомогательной системы. Момент  $t_f^c$  в скобке аргумента канонического  $\varphi$ -сечения вычисляется через параметры  $u_1, u_2$  несимметричного случая с учётом значений  $t_f$  и  $\varphi$ . Сдвиг  $\xi_\varphi(u_2)$  осуществляется вдоль оси  $X$  и зависит от значений  $u_2, \varphi$ .

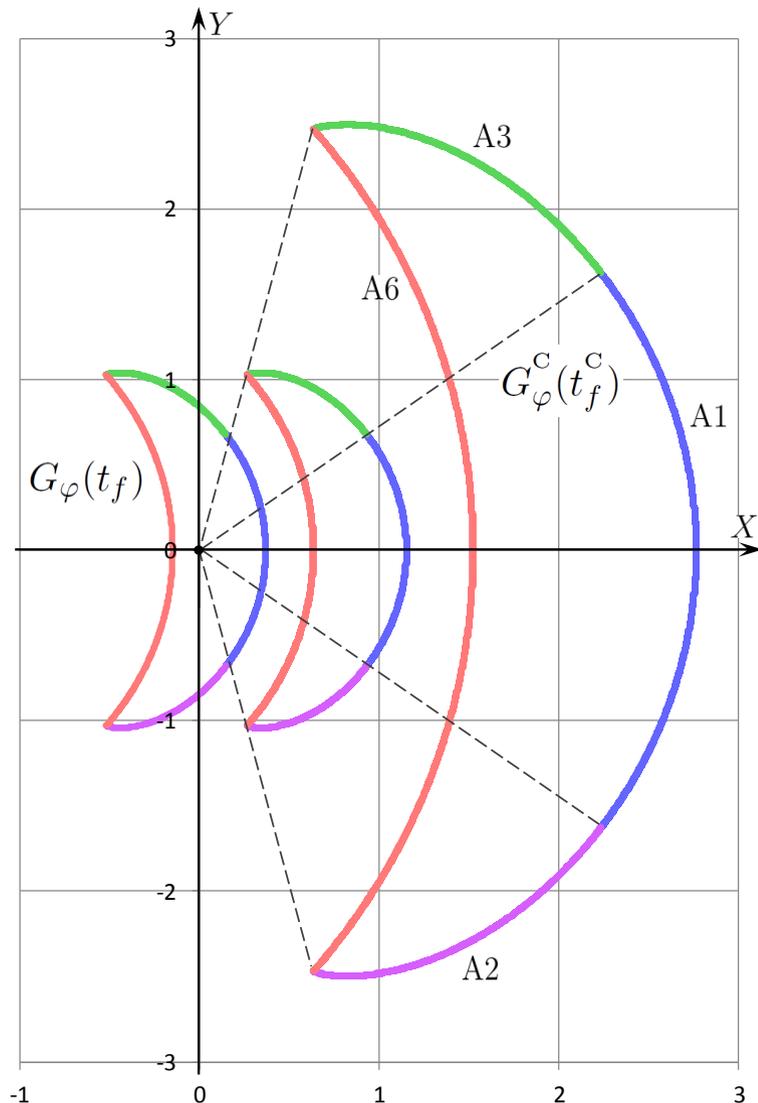
# Расчёт $\varphi$ -сечений на основе канонического случая

Формула соответствия  $\varphi$ -сечений:

$$G_\varphi(t_f) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) G_\varphi^c(t_f^c) + \xi_\varphi(u_2),$$

$$t_f^c = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi,$$

$$\xi_\varphi(u_2) = 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

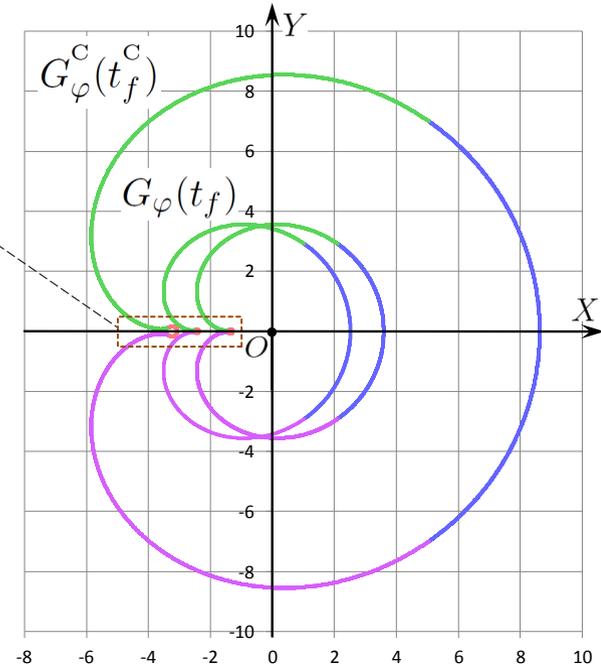
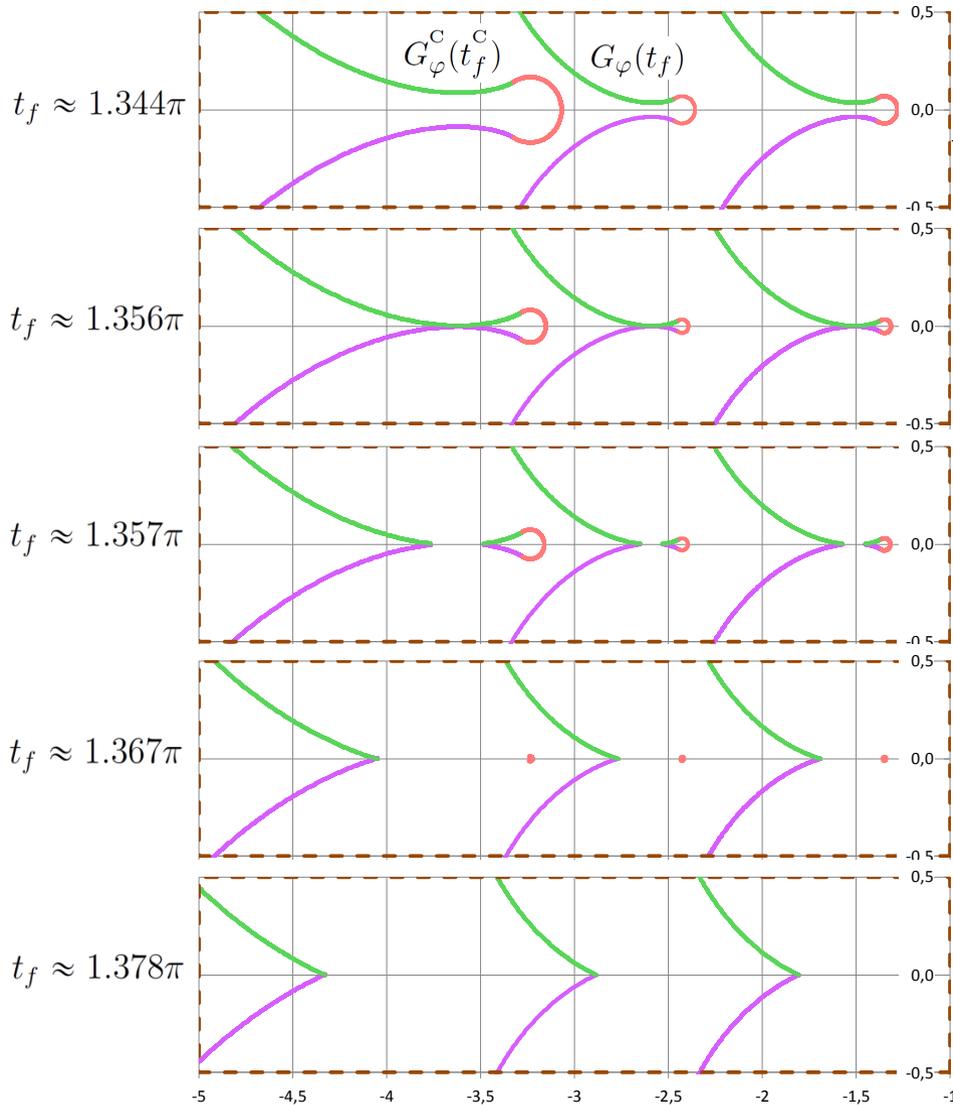


$u_1 = -2,$	$\varphi = 0.4\pi,$	
$u_2 = 3,$	$t_f = 0.5\pi,$	$t_f^c = 1.28\pi$

## Слайд 14

Поясним формулу соответствия  $\varphi$ -сечений при помощи картинки. Пусть требуется найти  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi(t_f)$  в несимметричном случае для параметров  $u_1, u_2$ , указанных внизу слайда, и некоторых значений  $t_f$  и  $\varphi$ . По этим данным просчитываем момент  $t_\varphi^c$ , и для канонического случая строим во вспомогательной системе координат  $\varphi$ -сечение  $G_\varphi^c(t_\varphi^c)$ . Умножаем это множество (относительно нуля вспомогательной системы  $X, Y$ ) на коэффициент  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right)$ , а затем добавляем сдвиг  $\xi_\varphi(u_2)$  вдоль оси  $X$ . Получаем искомое множество  $G_\varphi(t_f)$ .

# Процедура пересчёта. Исследование потери односвязности



$u_1 = -2,$	$\varphi = 0.6\pi$
$u_2 = 3,$	$t_f \approx 1.344\pi$

*Промежуток времени, на котором теряется односвязность, очень мал*

## Слайд 15

На этом слайде преобразование, задаваемое формулой соответствия, демонстрируется для более сложного случая, когда искомое  $\varphi$ -сечение теряет односвязность. При этом потеря односвязности происходит и для соответствующего  $\varphi$ -сечения в каноническом случае. По аналогии с предыдущим слайдом на правом рисунке показаны для момента  $t_f \approx 1.344\pi$  три множества, поясняющие формулу соответствия. Увеличенный фрагмент выделенного прямоугольника показан слева вверху.

При небольшом увеличении момента  $t_f$  происходит возникновение “дырки” в  $\varphi$ -сечении, затем уменьшение её до полного исчезновения. Соответствующие увеличенные фрагменты также показаны слева.

\*\*\*\*\*

Поскольку формула соответствия является взаимно-однозначной, то в качестве “эталонного” необязательно брать канонический случай. Фактически доказан результат о том, что если мы умеем описывать  $\varphi$ -сечения для некоторых значений  $u_1^* < 0$ ,  $u_2^* > 0$  при любых  $t_f$  и  $\varphi$ , то нам становятся известными  $\varphi$ -сечения и для произвольного другого случая  $u_1 < 0$ ,  $u_2 > 0$ .

# Канонический случай

## Слайд 16

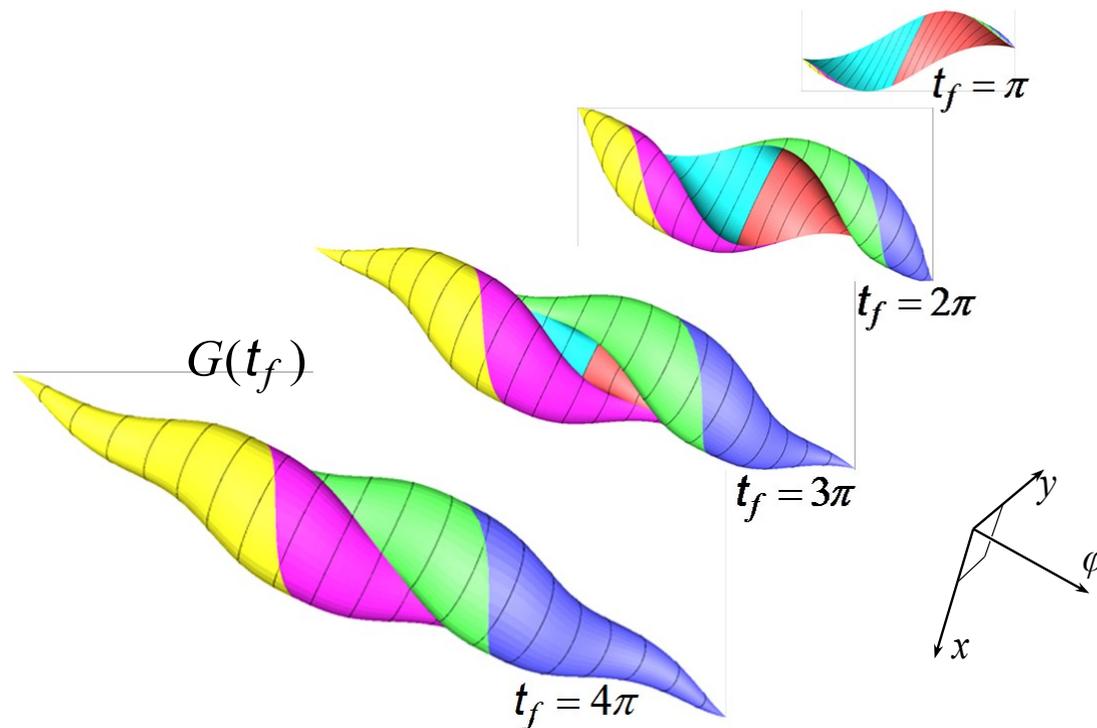
Поскольку всё может быть сведено к каноническому случаю, то опишем структуру его  $\varphi$ -сечений.

# Трёхмерное множество достижимости «В МОМЕНТ»

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$$

(+1, 0, +1)
(-1, 0, +1)
(+1, 0, -1)
(-1, 0, -1)
(+1, -1, +1)
(-1, +1, -1)

$G_\varphi(t_f)$  –  $\varphi$ -сечение



Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.

Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы

// Известия РАН. ТуСУ. 2003. № 3. С. 8 – 16.

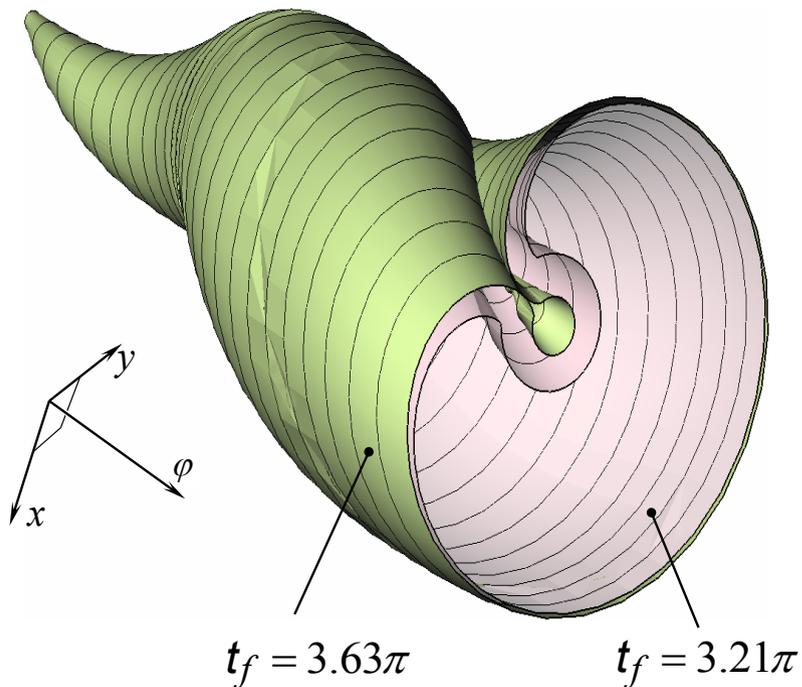
## Слайд 17

В нашей первой работе 2003 г. по исследованию трёхмерного множества достижимости  $G(t_f)$  для канонического случая было доказано утверждение о шести типах программного управления, которыми можно ограничиться при построении границы этого множества.

На основе этого утверждения множества достижимости  $G(t_f)$  были построены численно. На слайде показана их эволюция с ростом момента  $t_f$ . Каждому из шести типов управления соответствует свой участок на границе (отмечен цветом). Тонкими линиями выделены  $\varphi$ -сечения.

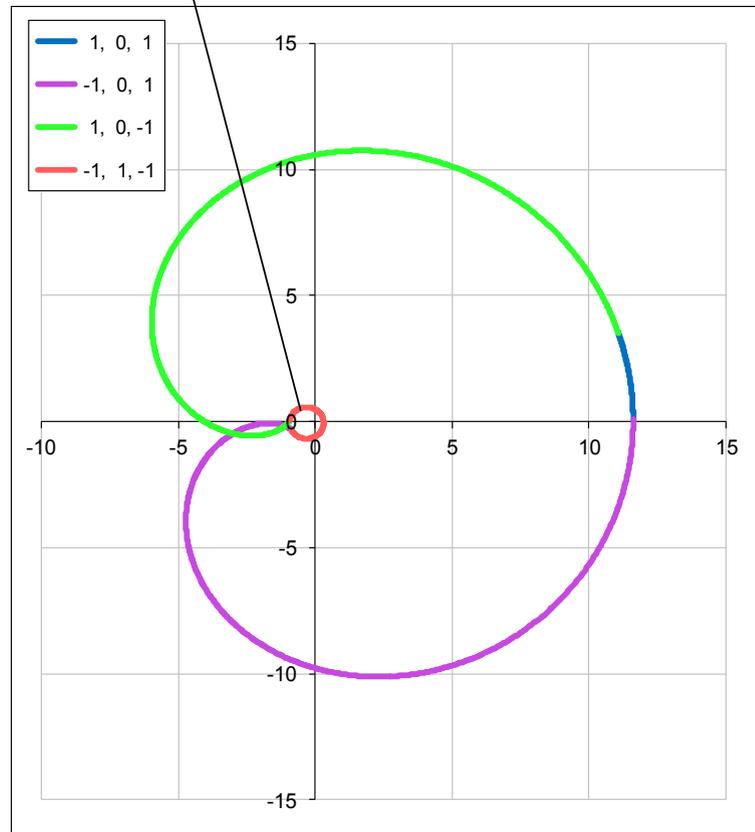
В настоящей работе утверждение о шести типах управлений, ведущих на границу множества достижимости, доказано заново для общего несимметричного случая (слайд 7).

# Нарушение односвязности множества достижимости



Плоскость сечения соответствует  $\varphi = 0$

Это множество не принадлежит  $\varphi$ -сечению



$\varphi$ -сечение множества достижимости  
для  $\varphi = 0.1\pi$  и  $t_f = 3.7\pi$

## Слайд 18

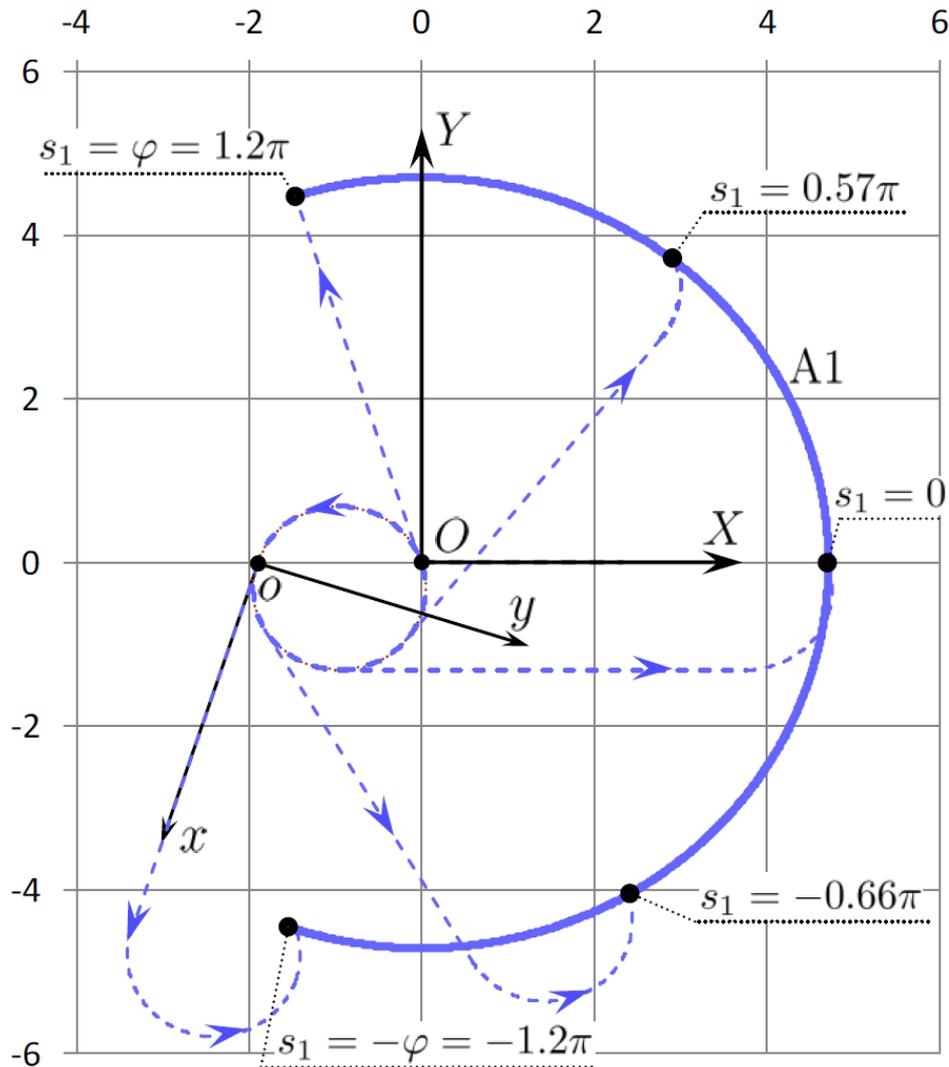
При помощи численных построений нами было обнаружено свойство потери односвязности трёхмерного множества достижимости. Такой эффект проявляется на весьма коротком промежутке времени.

На слайде граничная поверхность (точнее, её половина, вторая откинута) показана для двух моментов  $t_f$ . В момент  $t_f = 3.21\pi$  множество  $G(t_f)$  ещё является односвязным, в момент  $t_f = 3.63\pi$  односвязность теряется. “Дырка” сохраняется до момента  $t_f = 4\pi$ . При  $t_f \geq 4\pi$  она исчезает, и множество вновь становится односвязным.

Потеря односвязности проявляется и в  $\varphi$ -сечениях (картинка справа).

Далее речь пойдёт о результатах аналитического описания  $\varphi$ -сечений в каноническом случае. При этом будем говорить о  $\varphi$ -сечениях для  $\varphi \geq 0$ . Мы последовательно опишем свойства кривых A1, A2, A3, A6, опираясь на способ их формирования.

# Формирование кривой A1



$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1,$$

$$\varphi = 1.2\pi,$$

$$t_f = 2.7\pi,$$

$$s_1 \in [-\varphi, \varphi]$$

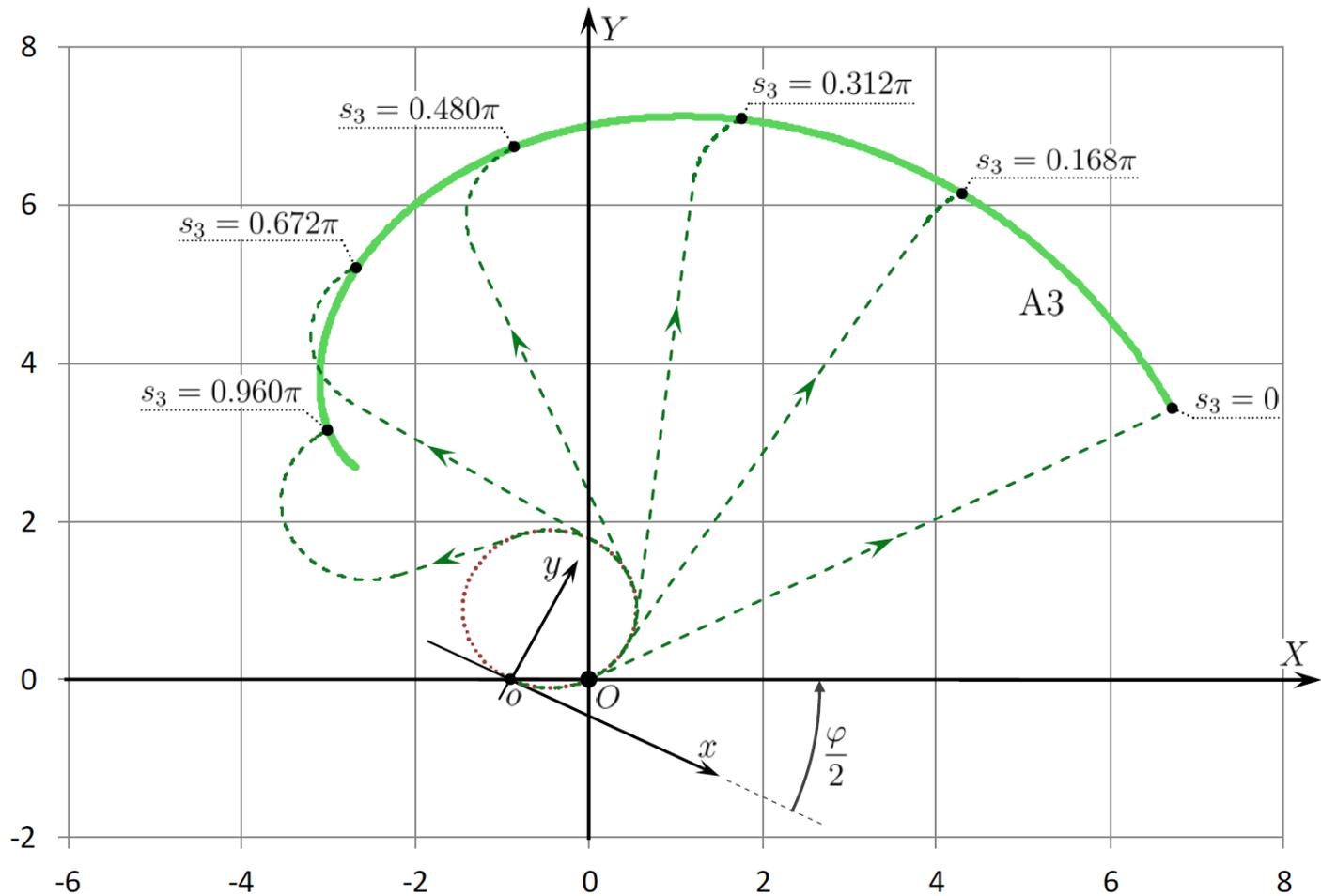
## Слайд 19

Начнём с движений, формирующих кривую A1. Каждая траектория начинается в нуле исходной системы координат, порождается последовательно управлениями  $+1, 0, +1$  и приходит в момент  $t_f$  с заданным значением  $\varphi$ . Для любой такой траектории длина прямолинейного среднего участка одна и та же. Получаем однопараметрическую кривую, состоящую из последних точек указанных траекторий.

Установлено, что кривая A1 является дугой окружности. Центр её расположен в центре  $O$  вспомогательной системы координат, радиус равен величине  $t_f - \varphi$ .

На слайде приведён пример кривой A1, а также несколько характерных траекторий, ведущих на неё. Для крайних значений параметра  $s_1$  вырождается один из двух участков постоянного управления  $u = 1$ .

# Формирование кривых А2 и А3



$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1, \quad \varphi = 0.3\pi, \quad t_f = 2.7\pi; \quad s_3 \in [0, \theta], \quad \theta = (t_f - \varphi)/2 = 1.2\pi$$

## Слайд 20

Кривая АЗ представляет собой кончики движений в силу управлений вида  $+1, 0, -1$ . Свойство, характеризующее кривую, состоит в том, что разность времён первого (с управлением  $u = +1$ ) и третьего (с управлением  $u = -1$ ) участков одна и та же.

Пример кривой АЗ и нескольких траекторий, ведущих на неё, показаны на слайде.

Кривая А2 симметрична кривой АЗ относительно оси  $X$  вспомогательной системы координат.

# Кривые A2 и A3 – эвольвенты

$$s_2 = -t_1 \quad s_2 \in [-\theta, 0] \quad \theta = (t_f - \varphi)/2$$

$$s_3 = t_1 - \varphi \quad s_3 \in [0, \theta]$$

$$A2(s_2) = \begin{pmatrix} X_{U2}(s_2) \\ Y_{U2}(s_2) \end{pmatrix} = 2(\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos(s_2 - \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(s_2 - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} - 4\sin(\frac{s_2}{2}) \begin{pmatrix} \cos(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$A3(s_3) = \begin{pmatrix} X_{U3}(s_3) \\ Y_{U3}(s_3) \end{pmatrix} = 2(\theta - s_3) \begin{pmatrix} \cos(s_3 + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(s_3 + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} + 4\sin(\frac{s_3}{2}) \begin{pmatrix} \cos(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

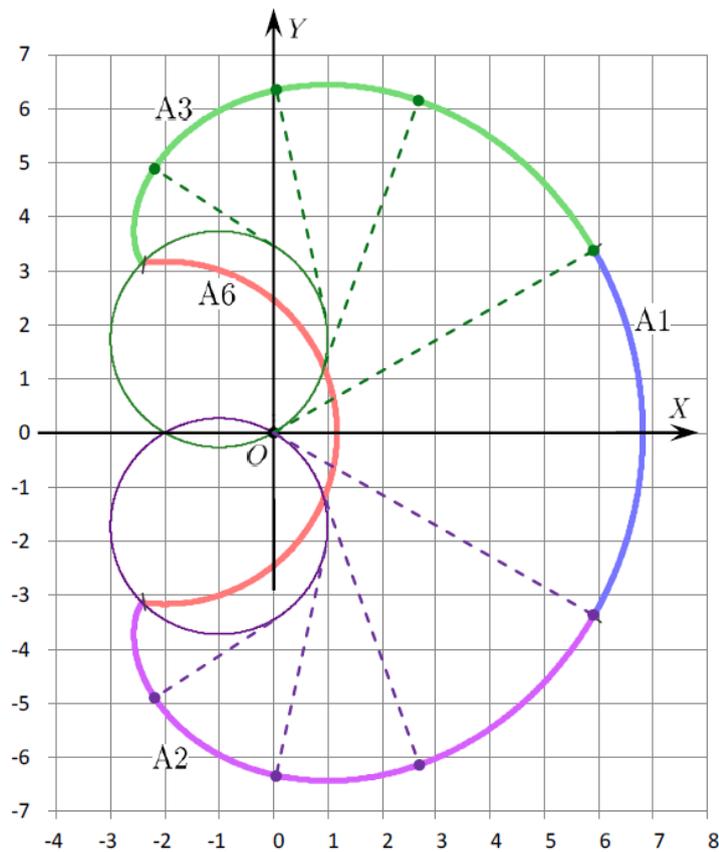
После тригонометрических преобразований получаем каноническое параметрическое представление каждой из кривых A2 и A3 в виде эвольвенты круга:

$$X(\tau) = r \cos \tau + r\tau \sin \tau,$$

$$Y(\tau) = r \sin \tau + r\tau \cos \tau.$$

Здесь  $r$  – радиус круга,  $\tau$  – параметр (угол поворота производящей прямой).

Для кривой A2 имеем  $\tau = \theta + s_2$



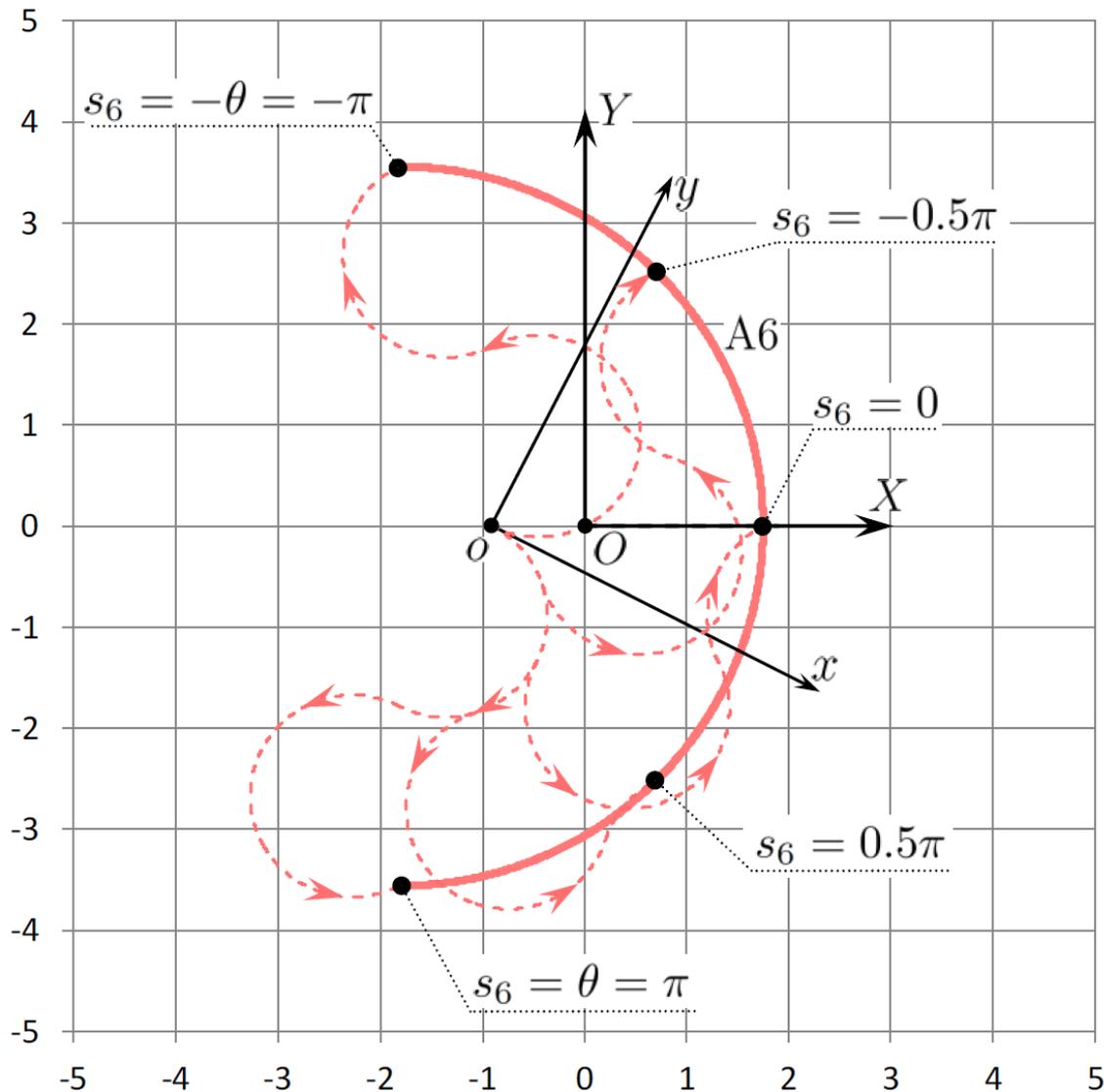
$$t_f = 2.5\pi \quad \varphi = \pi/3$$

## Слайд 21

Мы долго пытались показать, что кривая  $A_3$  (и, соответственно,  $A_2$ ) представляет собой некоторую известную кривую. При этом опирались на аналитическое представление кривых  $A_2$  и  $A_3$ , представленное на слайде. Показанные формулы совпадают с формулами на слайде 9 при  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 1$ .

Но потом придумали тригонометрическое преобразование, после которого представленные формулы переходят в классические формулы эвольвент круга. Таким образом, так же, как и в статье E.J. Cosaune, G.W.C Hall, 1975 г. (см. слайд 3), появились эвольвенты. Каждая из двух эвольвент  $A_2$  и  $A_3$  представляет собой кончик нити определённой длины, наматывающейся из точки  $O$  на свою базовую окружность. Несколько положений нити показано пунктиром. Отличие от статьи E.J. Cosaune, G.W.C Hall в том, что пунктирные линии не являются траекториями системы, а точка  $O$  не совпадает с её начальным положением.

# Формирование кривой A6



$$u_1 = -1, \quad u_2 = 1,$$

$$\varphi = 0.3\pi,$$

$$t_f = 2.3\pi,$$

$$s_6 \in [-\theta, \theta],$$

$$\theta = (t_f - \varphi)/2 = 1.2\pi$$

## Слайд 22

Кривая А6 формируется при помощи управлений вида  $-1, +1, -1$ . Здесь так же, как и для кривой А1, длительность среднего участка одна и та же для всех движений, ведущих на кривую А6 (при заданных  $t_f$  и  $\varphi$ ). Кривая А6 является дугой окружности с некоторым центром (лежит на оси  $X$  и зависит от  $\varphi$ ) и некоторым радиусом (зависит от  $t_f$  и  $\varphi$ ).

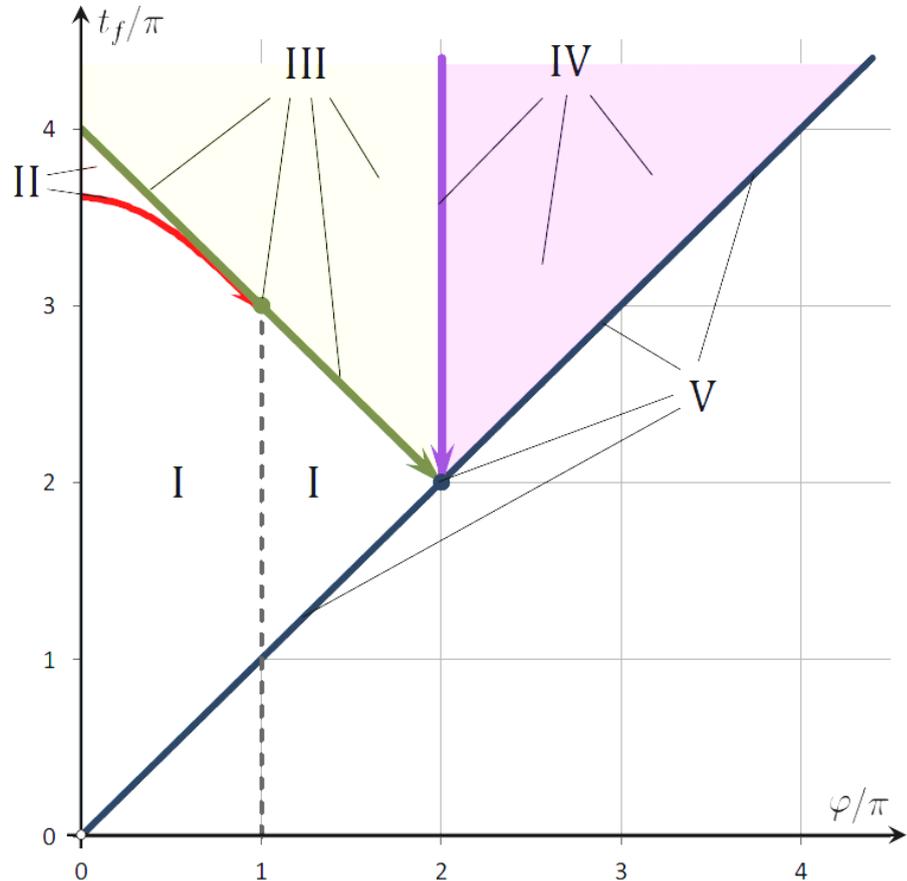
# Классификация $\varphi$ -сечений трёхмерного множества достижимости

- I.  $0 \leq \varphi < t_f$ ,  $t_f < 4\pi - \varphi$ ,  $t_f < 3\pi + 2 \cos(\varphi/2)$ .
- II.  $0 \leq \varphi < \pi$ ,  $t_f < 4\pi - \varphi$ ,  $t_f \geq 3\pi + 2 \cos(\varphi/2)$ .
- III.  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $t_f \geq 4\pi - \varphi$ .
- IV.  $2\pi \leq \varphi < t_f$ .
- V.  $\varphi = t_f$ .

*Свойство симметрии:*

Если  $u_*(t) = -u^*(t)$ ,

то  $x_*(t_f) = x^*(t_f)$ ,  
 $y_*(t_f) = -y^*(t_f)$ ,  
 $\varphi_*(t_f) = -\varphi^*(t_f)$ .



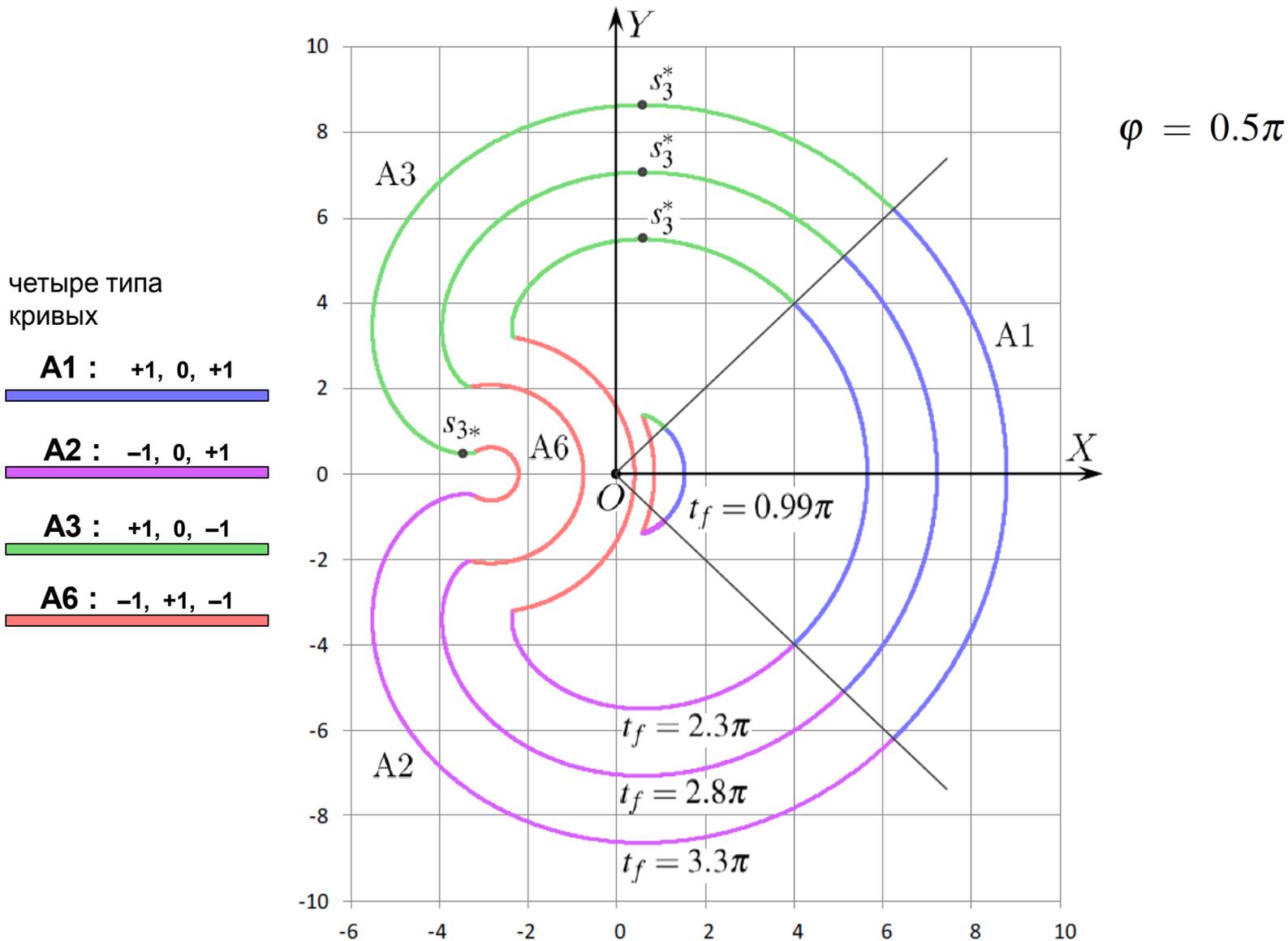
## Слайд 23

На слайде для неотрицательных значений  $\varphi$  представлена классификация структуры  $\varphi$ -сечений. Всего имеем пять вариантов структуры. Они показаны при помощи формул, а также графически на плоскости нормированных переменных  $\varphi$  и  $t_f$ . Для отрицательных значений  $\varphi$  картина классификации симметрична относительно вертикальной оси  $t_f/\pi$ .

Вариант V соответствует вырожденному одноточечному сечению, которое реализуется для заданного  $t_f$  при максимальном значении  $\varphi$ .

На дальнейших слайдах будут пояснены варианты I, II, III, IV. Здесь отметим только, что самым простым из них является вариант I, а наиболее сложным – вариант II, для которого  $\varphi$ -сечение теряет односвязность.

# Эволюция $\varphi$ -сечения во времени для варианта I ( $\varphi$ закреплено)

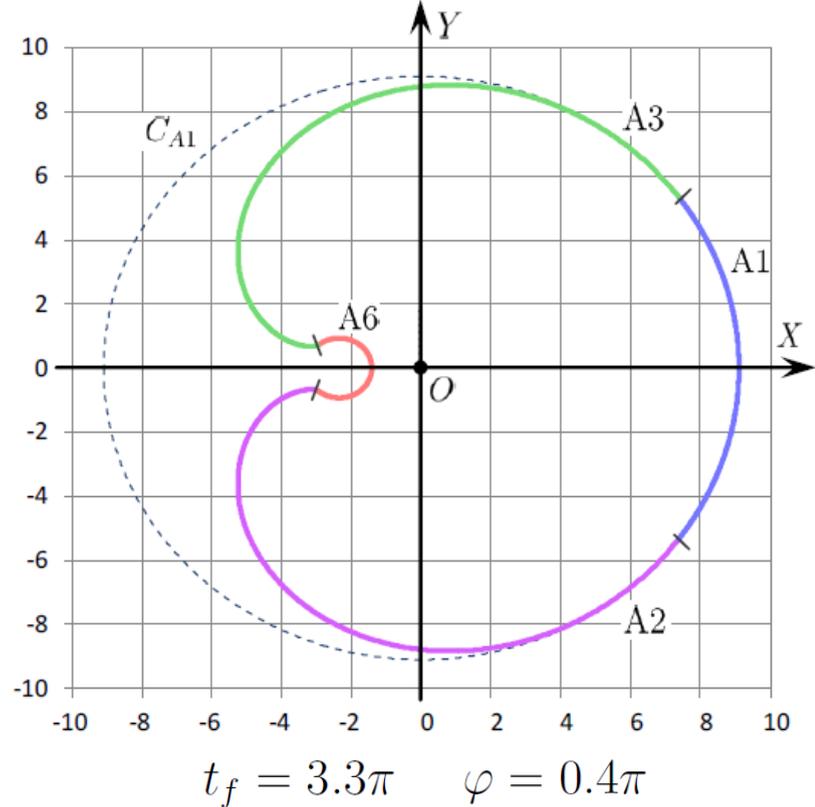
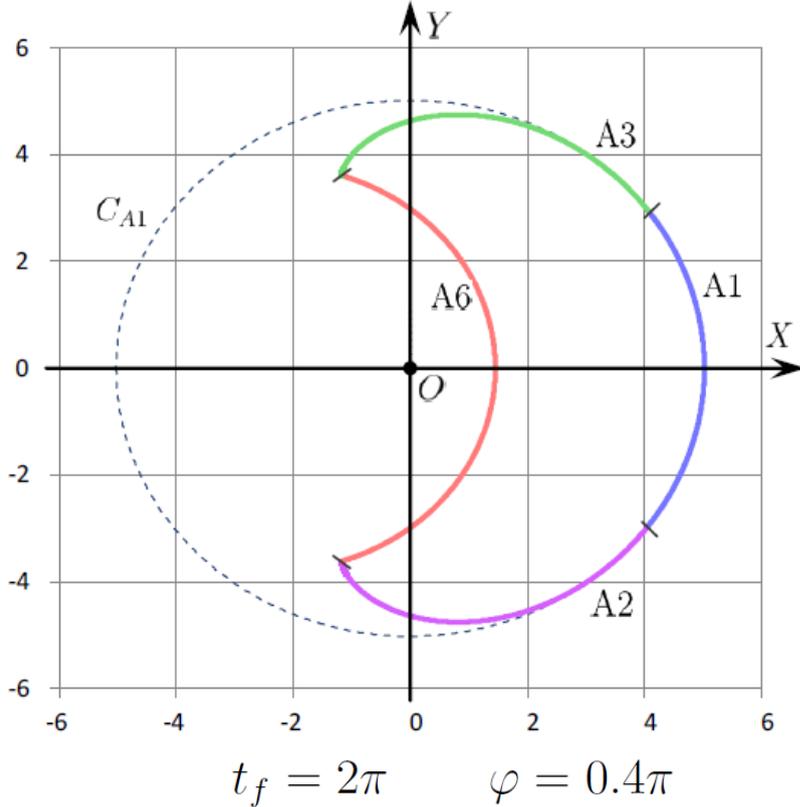


## Слайд 24

При классификации  $\varphi$ -сечений используются свойства составной кривой  $\mathcal{A}_\varphi(t_f)$ , которая образуется последовательным соединением кривых A1, A3, A6, A2.

В случае варианта I составная кривая не имеет самопересечений и совпадает с границей  $\varphi$ -сечения. На слайде показано развитие во времени  $\varphi$ -сечения для  $\varphi = 0.5\pi$ . Кривые A1 являются концентрическими дугами окружностей с центром в точке  $O$ . Кривые A6 также представляют собой концентрические дуги окружностей (но уже с другим центром).

# Вид $\varphi$ -сечений для варианта I



Вариант I при дополнительном ограничении  $t_f \leq 2\pi$  рассмотрен в работе

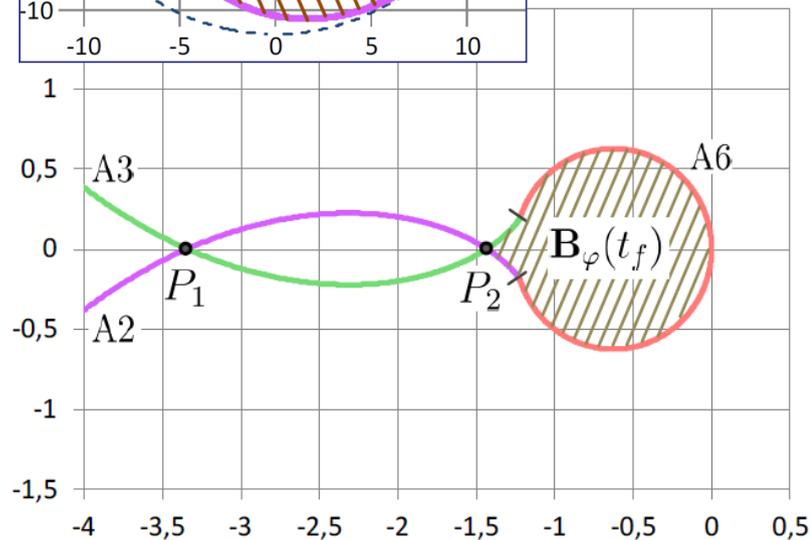
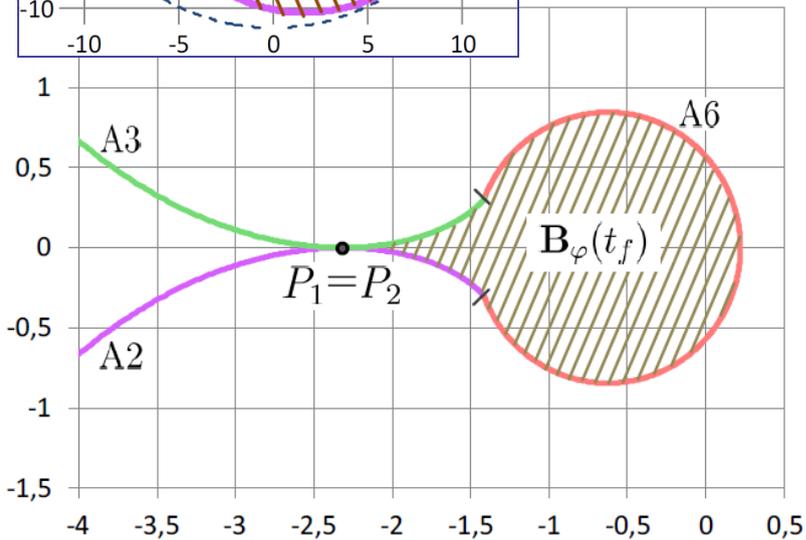
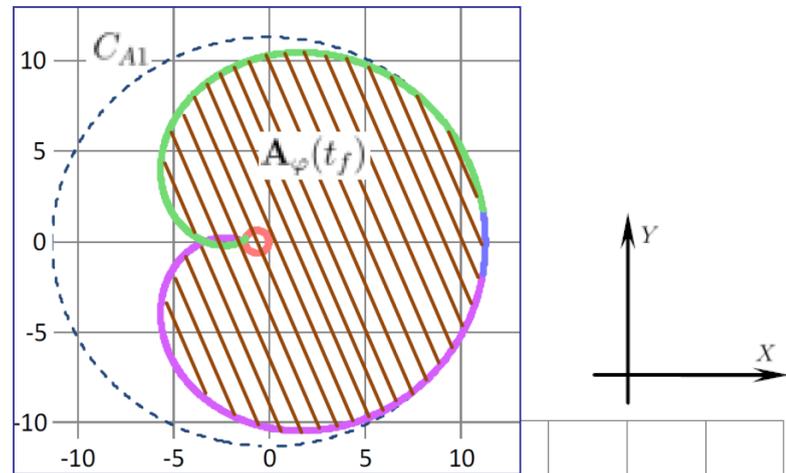
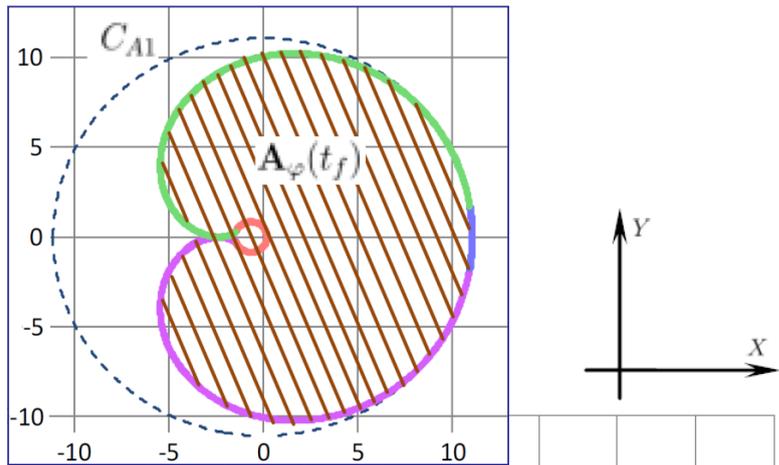
Пацко В.С., Федотов А.А. (2020) Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института Математики и Механики УрО РАН том 26, № 1, с. 182–197

## Слайд 25

На слайде показаны два дополнительных примера для варианта I при одном и том же  $\varphi = 0.4\pi$  и двух значениях  $t_f = 2\pi$ ,  $t_f = 3.3\pi$ . Пунктиром показана окружность  $C_{A1}$ , на которой лежит дуга  $A1$ . Установлено, что соответствующий круг целиком содержит  $\varphi$ -сечение. Такое свойство является универсальным: оно справедливо и для всех других вариантов.

Вариант I при дополнительном ограничении  $t_f \leq 2\pi$  был рассмотрен в статье 2020 г.

# Вид $\varphi$ -сечений для варианта II



$$t_f = 3\pi + 2 \cos(0.05), \quad \varphi = 0.1\pi$$

$$t_f = 3.7\pi, \quad \varphi = 0.1\pi$$

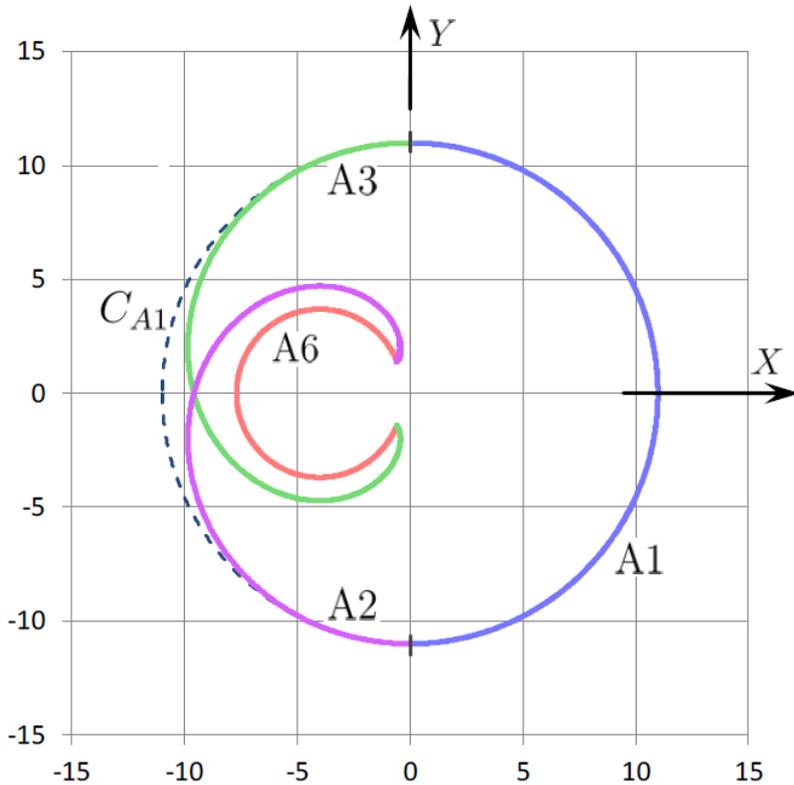
$$G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f) \setminus \text{int} \mathbf{B}_\varphi(t_f)$$

## Слайд 26

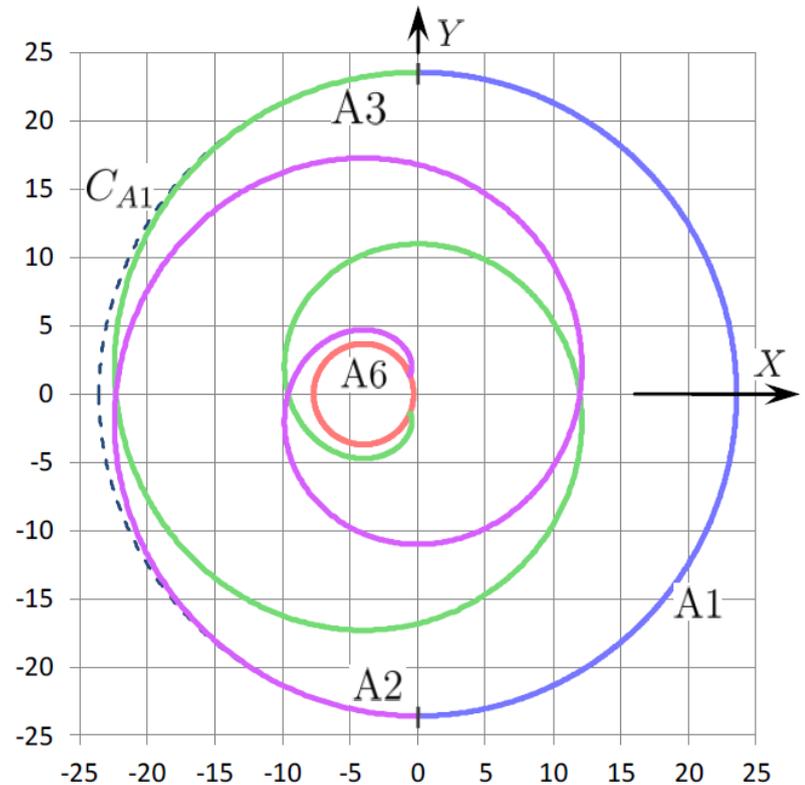
Как уже говорилось, вариант II является наиболее сложным: потеря односвязности  $\varphi$ -сечений приводит к необходимости описания двух граничных линий (для внешней и внутренней границы).

Появление “дырки” связано с наличием точек пересечения кривых A2 и A3. При первом по времени пересечении кривые A2 и A3 касаются друг друга. Именно в этот момент  $\varphi$ -сечение теряет односвязность (левый рисунок). При дальнейшем увеличении  $t_f$ , но только на небольшом промежутке времени,  $\varphi$ -сечение остаётся неодносвязным (правый рисунок).

## Вид $\varphi$ -сечений для варианта III (невырожденный подслучай)



$$t_f = 4.5\pi, \quad \varphi = \pi$$



$$t_f = 8.5\pi, \quad \varphi = \pi$$

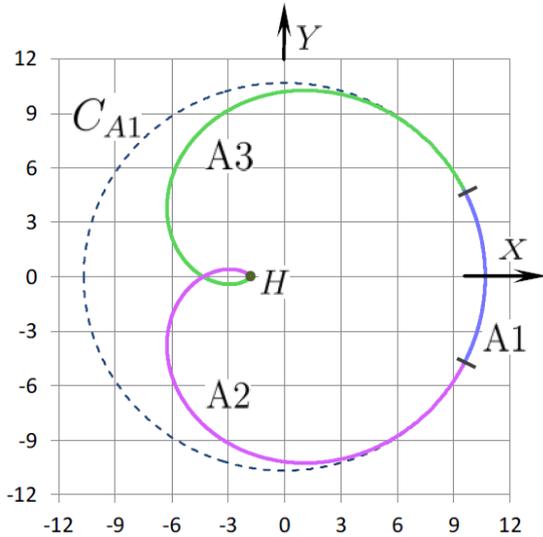
*Граница  $\varphi$ -сечения образована кривой A1 и участками кривых (эвольвент) A2 и A3 до точки их первого пересечения*

## Слайд 27

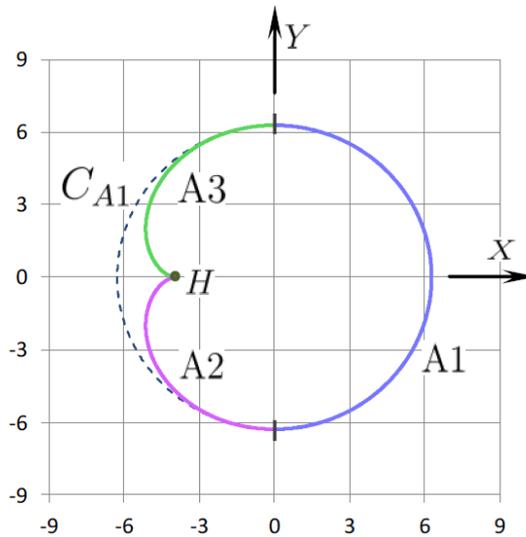
На слайде показаны примеры  $\varphi$ -сечений для варианта III. Здесь граница  $\varphi$ -сечения состоит из дуги A1 и примыкающих к ней частей кривых A2, A3 до точки их первого пересечения на оси X. Остальные части кривых A2 и A3, а также кривая A6 целиком лежат во внутренности  $\varphi$ -сечения.

Такое описание соответствует невырожденному подслучаю варианта III. Невырожденный подслучай выделяется условием  $t_f + \varphi > 4\pi$ .

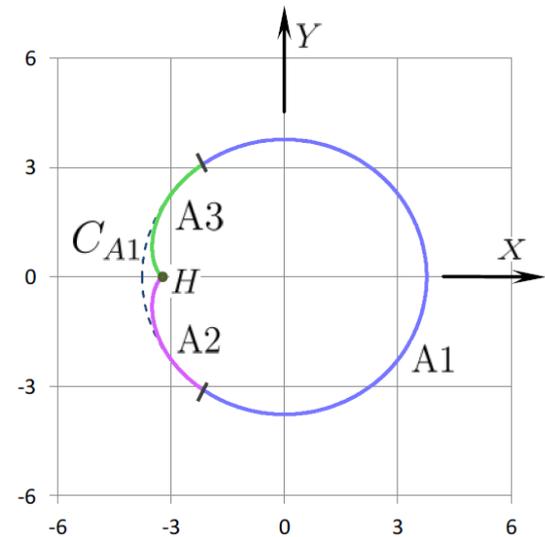
# Вид $\varphi$ -сечений для варианта III (вырожденный подслучай)



$$\varphi = 0.3\pi, t_f = 3.7\pi$$



$$\varphi = 1.0\pi, t_f = 3.0\pi$$



$$\varphi = 1.4\pi, t_f = 2.6\pi$$

*Кривые A1, A2, A3 показаны полностью.  
Кривая A6 вырождается в точку H.*

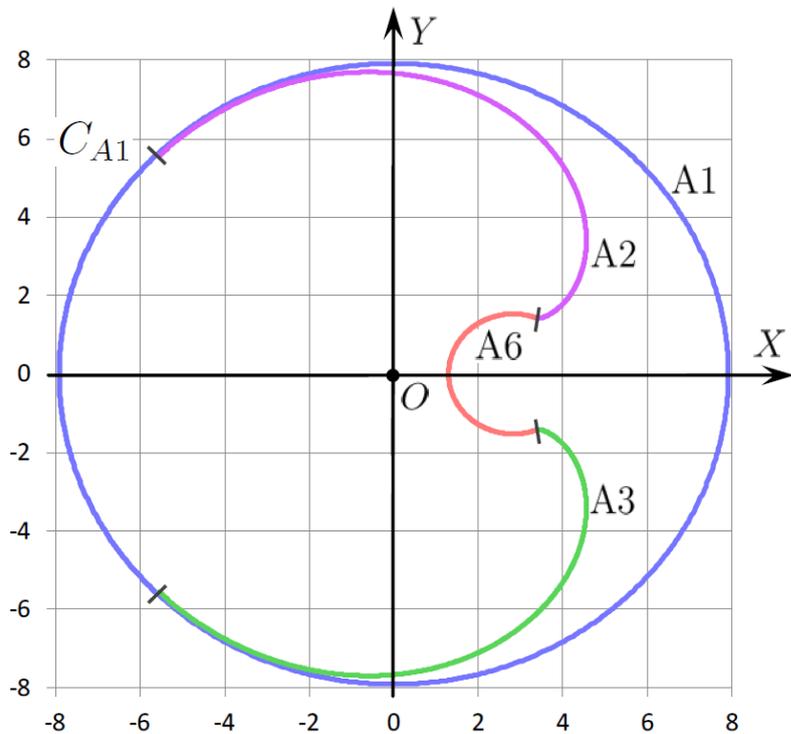
*Граница  $\varphi$ -сечения образована кривой A1 и участками кривых (эвольвент) A2 и A3 до точки их первого пересечения.*

*В вариантах б) и в) точка первого пересечения совпадает с точкой H.*

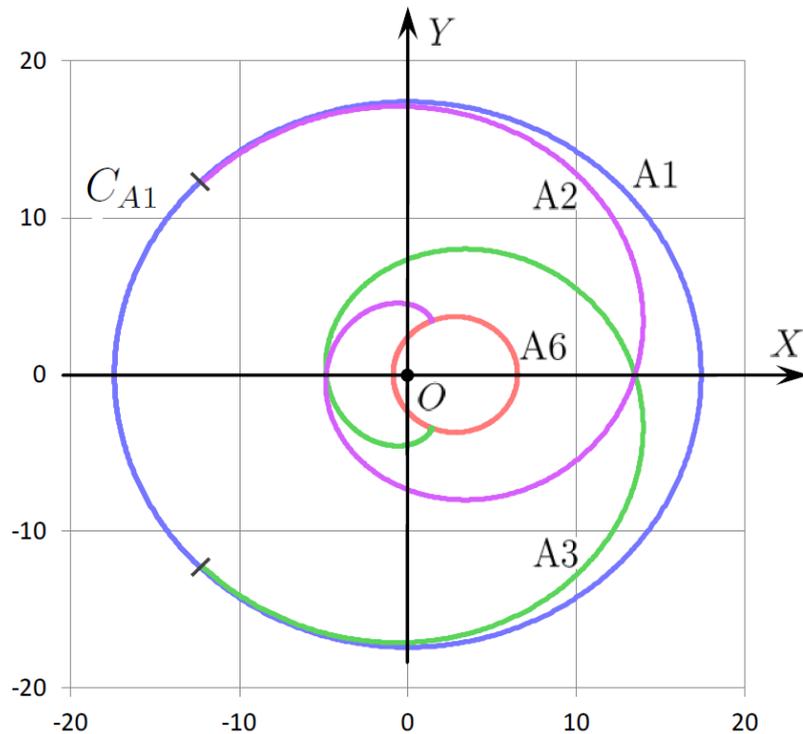
## Слайд 28

Вырожденный подслучай  $t_f + \varphi = 4\pi$  соответствует зелёной линии на границе варианта III на слайде 23. При этом отдельно рассматриваются ситуации, когда  $\varphi < \pi$  (левый рисунок),  $\varphi > \pi$  (правый рисунок) и  $\varphi = \pi$  (рисунок в центре). Ситуация  $\varphi = \pi$  характеризуется касанием кривых A2, A3 в точке  $H$  их стыковки. Граница  $\varphi$ -сечения для среднего и правого рисунков образована кривыми A1, A2, A3. Для левого рисунка граница  $\varphi$ -сечения не полностью включает в себя кривые A2 и A3. Точка  $H$  стыковки кривых A2, A3 расположена во внутреннейности  $\varphi$ -сечения. Однако соответствующая ей точка  $(H, \varphi)^T$  лежит на границе трёхмерного множества  $G(t_f)$ .

## Вид $\varphi$ -сечений для варианта IV



$$t_f = 5\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$



$$t_f = 8\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$

*Угловой разворот дуги A1 больше  $2\pi$ .*

*Множество  $G_\varphi(t_f)$  – круг, ограниченный окружностью  $C_{A1}$ .*

## Слайд 29

Вариант IV введён для значений  $\varphi \geq 2\pi$ . Граница  $\varphi$ -сечения представляет собой окружность  $C_{A1}$ , содержащую дугу  $A1$ . Угловой раствор дуги  $A1$  равен  $\varphi$  и при  $\varphi > 2\pi$  кривая  $A1$  покрывает окружность  $C_{A1}$  с “перехлёстом”.