

Numerical Optimization of Non-Conflict Aircraft Flow Merging

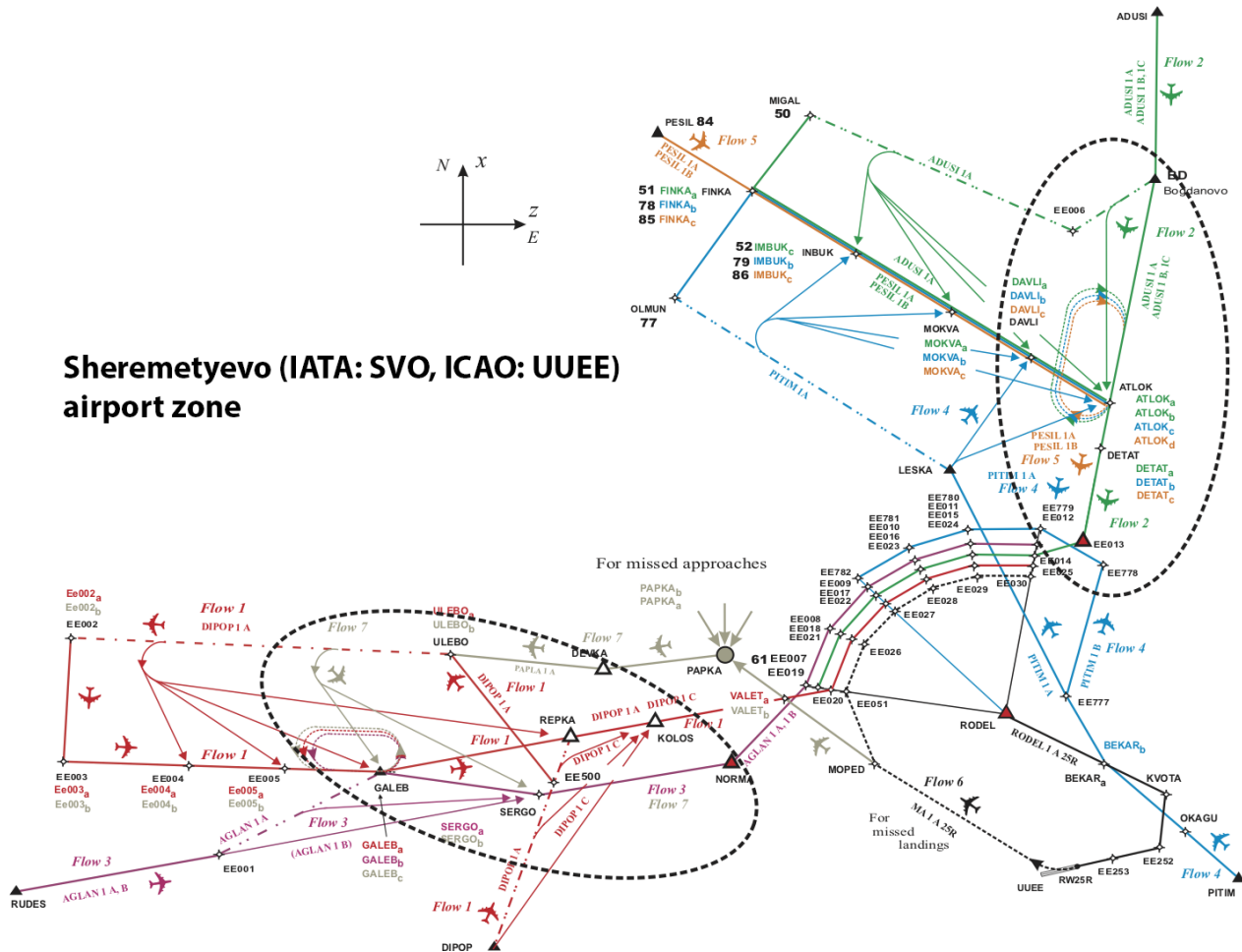
Arseniy A. Spiridonov, Sergey S. Kumkov
spiridonov@imm.uran.ru, sskumk@gmail.com

*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UrB RAS,
Ekaterinburg, Russia*

**“Mathematical Modeling
and Scientific Computing” (MMSC2020)**
A workshop in memory of Nikolai Botkin
November 19-20, 2020

Problem of Aircraft Flows Merging

Sheremetyevo (IATA: SVO, ICAO: UUEE) airport zone



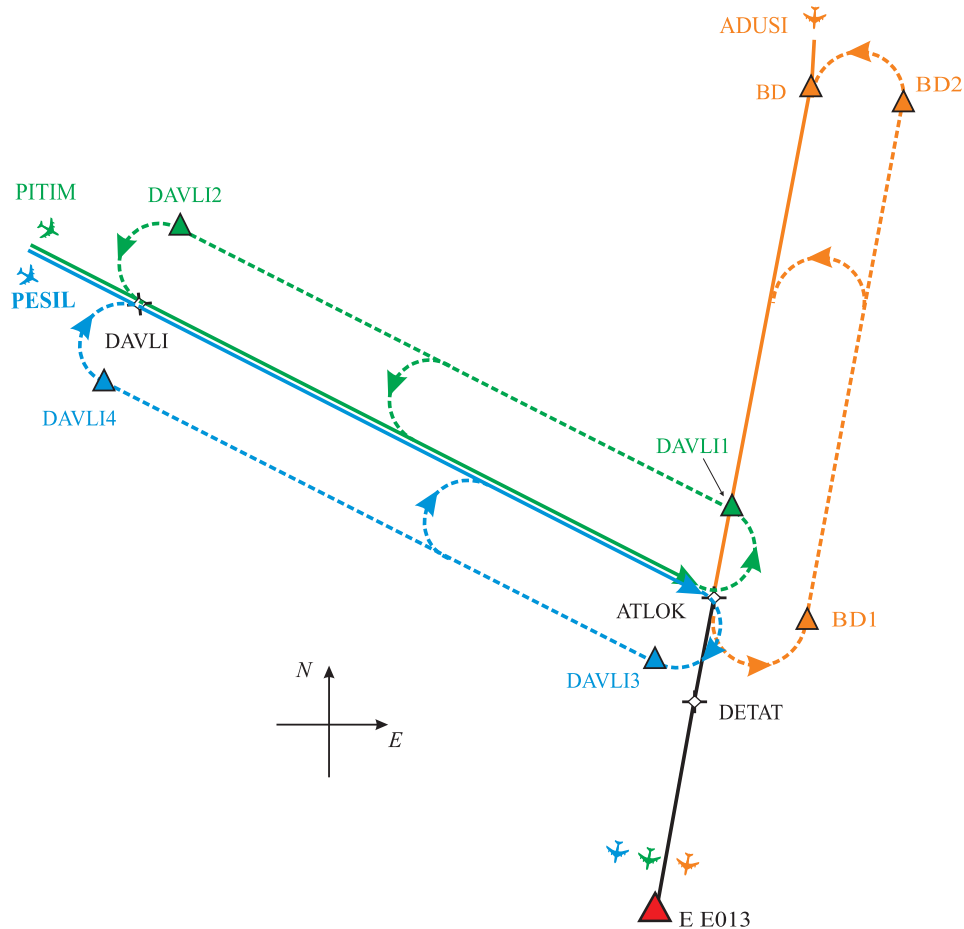
Слайд 2

В настоящее время воздушные суда (ВС) движутся по специальным трассам, состоящим из коридоров в горизонтальной плоскости и эшелонов в вертикальной. Трассы могут разветвляться или соединяться. В точке соединения трасс возникает задача безопасного слияния потоков ВС. Основным требованием в этой задаче выступает наличие безопасного временного интервала между соседними судами в очереди.

Slide 2

At the present time, aircraft move along special routes. The routes can split or join. At the route junction points, a problem of aircraft flows merging appears. Such a problem is very important especially near airport zones where the air-traffic is very dense. The main demand for the resultant aircraft queue is the presence of a minimal safe time interval between arrival instants of neighbor aircraft at the merge point.

Standard Delay Scheme



Слайд 3

Существует два основных инструмента изменения момента прибытия ВС в точку слияния: регулировка скорости и использование схем задержки. При проектировании воздушных трасс используют три основных типа схем задержки.

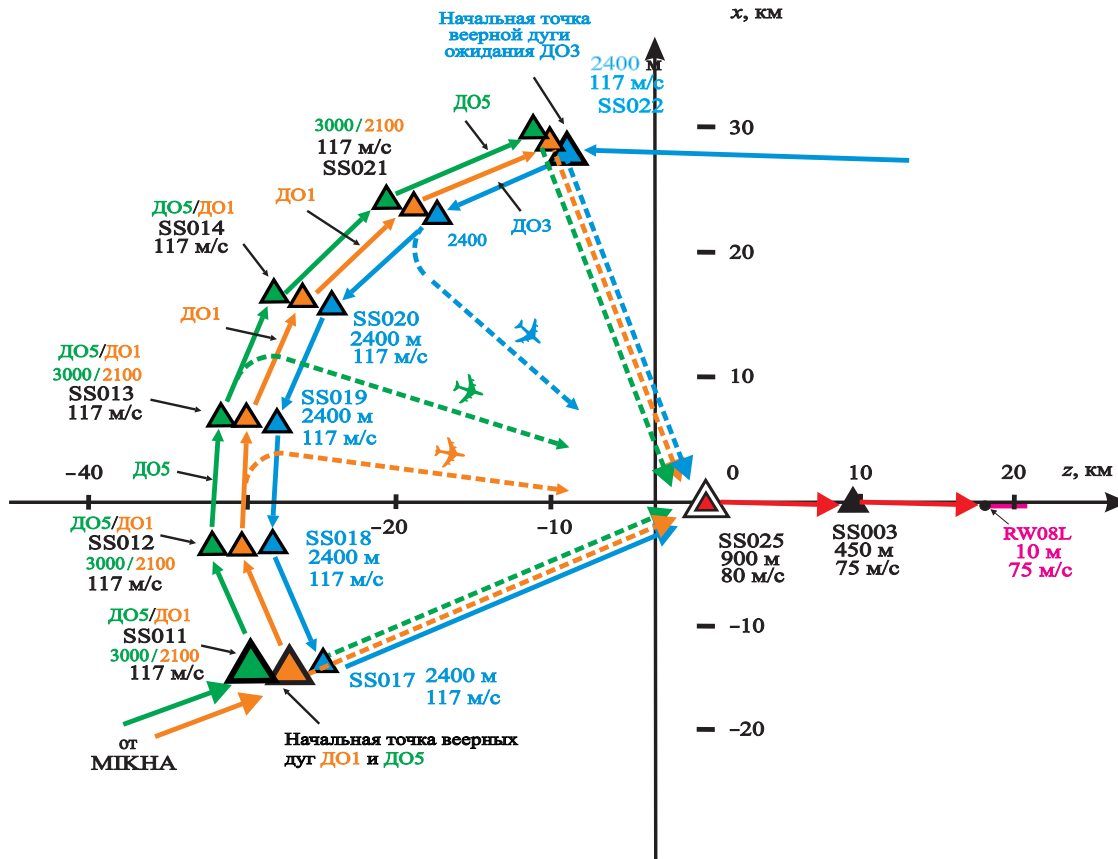
Первый тип — стандартная схема задержки. Такая схема располагается вдоль основного маршрута движения на том же или другом эшелоне относительно основного маршрута движения. Для реализации задержки ВС выполняет в заданной точке разворот на 180° , движется в обратном направлении требуемое время, затем снова выполняет разворот на 180° и продолжает движение в точку слияния по основному маршруту движения или параллельно ему, но на другой высоте. Данный тип схем задержки имеет особенность — минимальная величина задержки равняется времени полного разворота ВС, что составляет примерно 4 минуты.

Slide 3

There are two main ways to change the aircraft arrival instant. The first one is the speed control. Another one is usage of delay schemes (holding areas). Three main types of delay schemes are used in aircraft routes development.

The first type is a standard delay scheme. Such a type of delay schemes is usually located along the main route of an aircraft on the same or another echelon relative to the flight level of the main route. To realize the assigned delay, the aircraft performs a U-turn, moves in the opposite direction during the required time, then again performs a U-turn, and moves to the merge point along the main route or parallelly to it, but at a different flight level. Such a type of delay schemes has a minimal delay value equal to the full turn time of the aircraft. It usually equals approximately 4 minutes.

Point-Merge Delay Scheme



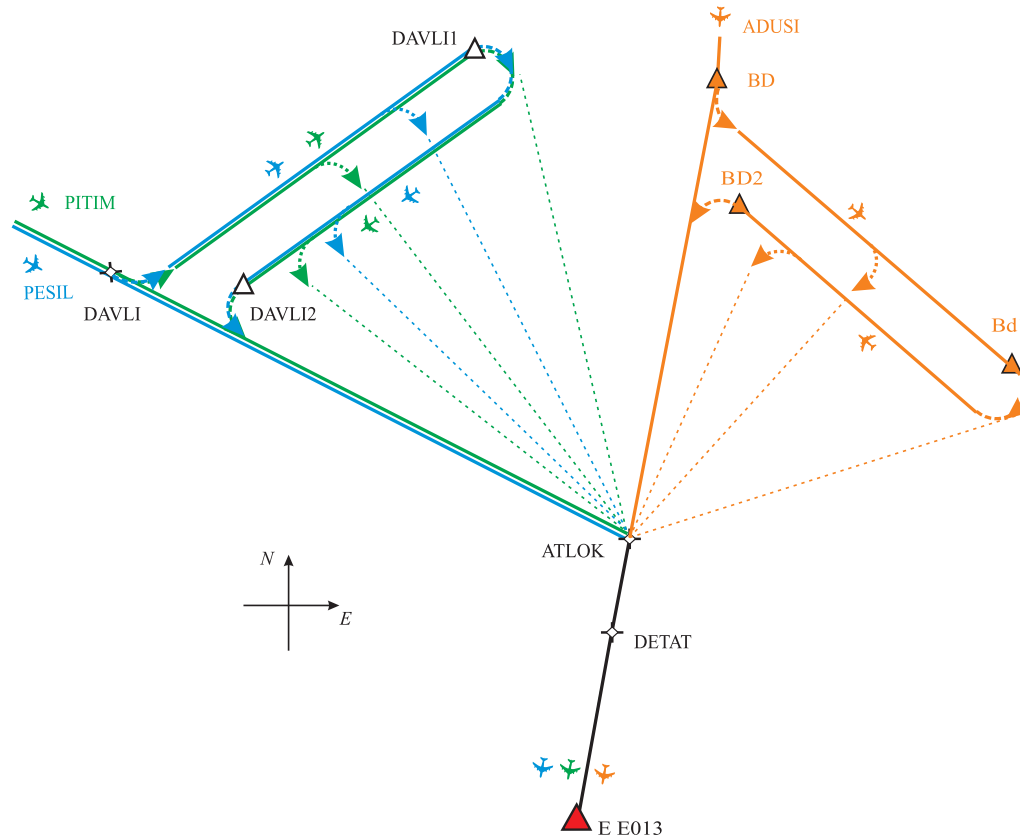
Слайд 4

Следующий тип схемы задержки — веерная схема задержки. Для реализации задержки ВС отклоняется от основного маршрута движения, выполняя разворот, затем движется по дуге окружности с центром в точке слияния. Реализовав требуемую величину задержки, ВС выполняет разворот и движется в точку слияния. Данный тип схем задержки позволяет достаточно гибко выполнять отклонения от номинального момента прибытия, так как веерные схемы не имеют минимальной величины задержки.

Slide 4

The next type of delays schemes is the point-merge delay scheme. To realize the assigned delay an aircraft deviates from the main route performing a turn and moves along an arc with the center at the merge point. After reaching the assigned delay, the aircraft performs a turn and moves to the merge point. Such a type of delay schemes allows one to perform delays flexibly since it has no a minimal delay value.

"Trombone"-Type Delay Scheme



Слайд 5

Третий тип схем задержки — схема задержки типа «тромбон». Данный вид является комбинацией двух предыдущих типов. Аналогично «вееру», «тромбон» не имеет минимальной величины задержки. Для реализации задержки ВС выполняет разворот и двигается от основного маршрута движения по плечу тромбона. Далее в заданной точке ВС выполняет ещё один разворот и двигается по параллельному плечу к основному маршруту движения. После выполнения разворота ВС возвращается на основной маршрут движения. При необходимости ВС может выполнить разворот в любом месте данной схемы и продолжить движение в точку слияния, не возвращаясь на основной маршрут движения.

Slide 5

The third type of the delay schemes is the “trombone”-type delay scheme. Such a type of delay schemes is a combination of two previous. Same as the point-merge scheme, it has no a minimal delay value. To realize the assigned delay an aircraft perform a turn and moves away from the main route along a leg of the “trombone”. Then at a prescribed point it performs a U-turn and moves along the other parallel leg of the “trombone” to the main route. The second leg is located on the lower flight level than the main route and the first leg of the “trombone”. Further, after performing a turn, the aircraft returns to the main route. If it is necessary, the aircraft may perform a turn anywhere in this trajectory and move to the merge point without returning to the main route.

Formalization of Problem

- $\{t_i^{\text{nom}}\}_{i=1}^N$ is the ascending ordered collection of nominal instants of aircraft arrivals at the merging point;
- $t_i^{\text{nom}} \rightarrow t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$ is the interval of possible variation of the resultant arrival instant. Now, it is assumed that all aircraft have the same variation time values $t^{\text{acc}}, t^{\text{dec}}$;
- τ^{safe} is the minimal safe time interval between each two neighbor aircraft in the resultant queue.

The aim of the work is to suggest some criteria corresponding to technical engineering demands of air traffic control dispatchers.

Слайд 6

В качестве входных данных в задаче безопасного слияния потоков ВС используется набор $\{t_i^{\text{nom}}\}_{i=1}^N$ номинальных моментов прибытия ВС в точку слияния. Каждое судно имеет, потенциально, свои максимальные величины ускорения t_i^{acc} и задержки t_i^{dec} , которые определяют интервал $[t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$ возможного варьирования момента прибытия этого ВС в точку слияния. Они зависят от конфигурации трасс, типа ВС, запаса топлива, положения судна на трассе и других факторов. В настоящий момент подразумевается, что эти величины равны для всех ВС в очереди, то есть $t_i^{\text{acc}} = t^{\text{acc}}$ и $t_i^{\text{dec}} = t^{\text{dec}}$, $i = \overline{1, N}$.

Между парами соседних ВС с индексами i, j в очереди обязательно должен наличествовать минимальный безопасный временной интервал τ^{safe} , который, вообще говоря, зависит от параметров i -го и j -го судов. Однако в моделировании использовался интервал безопасности, единый для всех судов.

Целью данной работы является разработка и исследование критериев оптимальности формирования безопасной очереди ВС, соответствующих тем или иным инженерным требованиям диспетчеров управления воздушным движением (УВД).

Slide 6

The main part of the input data is the ascending ordered collection $\{t_i^{\text{nom}}\}_{i=1}^N$ of the nominal instants of aircraft arrivals to the merge point. Also, each aircraft has, potentially, its own time values of maximum acceleration t_i^{acc} and deceleration t_i^{dec} , which define the variation interval $[t_i^{\text{nom}} - t_i^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t_i^{\text{dec}}]$ of the arrival instant of the aircraft. These values t_i^{acc} and t_i^{dec} depend on the aircraft routes configuration, aircraft type, fuel remaining, position of the aircraft on its route, and other factors. At this time, it is assumed that these values are equal for all aircraft, that is $t_i^{\text{acc}} = t^{\text{acc}}$ and $t_i^{\text{dec}} = t^{\text{dec}}$, $i = \overline{1, N}$.

Between pairs of neighbor aircraft with indices i and j in the merged queue, there must be a minimal safe time interval τ^{safe} , which, generally speaking, depends on the parameters of the i th and j th aircraft. However, in the conducted experiments the same value of the safety interval has been used for all aircraft.

The aim of the work is to suggest some optimization criteria corresponding to technical engineering demands of air traffic control managers.

Formalization of Problem

Thus, an optimization problem arises:

$$F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) = \sum_{i=1}^N f(t_i, t_i^{\text{nom}}) \rightarrow \min$$

under constraints:

$$t_i \in [t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}], \quad t_i \geq 0, \\ \forall 1 \leq i, j \leq N \quad (t_j > t_i \Rightarrow t_j - t_i \geq \tau^{\text{safe}}).$$

What are the penalty functions $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$?

Слайд 7

Таким образом, возникает оптимизационная задача. Оптимизации подлежит целевой минимизируемый функционал $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$, представляемый в виде суммы $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ функционалов оптимальности назначения новых моментов прибытия ВС. Кроме того, на формируемый набор моментов прибытия имеются ограничения: новый момент прибытия i -го ВС должен находиться в интервале $[t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}]$ возможного варьирования момента прибытия. Кроме того, считается, что каждый новый момент прибытия — неотрицательное число. Также имеются ограничения, связанные с выдерживанием заданной величины τ^{safe} интервала безопасности между парами соседних судов.

Рассмотрим варианты функций $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$.

Slide 7

Thus, an optimization problem arises. There is a functional $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$ to be minimized in the form of a sum of penalty functions $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ of each aircraft for deviations from the nominal arrival instants. Also there is a number of constraints connected with the variation interval and the safety interval. Namely, the new arrival instant of aircraft t_i has to belong to its variation interval $[t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}]$, and it is non-negative value. The main constraint is the presence of the minimal safe time interval τ^{safe} between each pair of neighbor aircraft.

What are the penalty functions $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$?

Piecewise-Linear Criteria

Слайд 8

Первая часть данной работы посвящена рассмотрению выпуклых кусочно-линейных критериев.

Slide 8

The first part of the work is dedicated to study of convex piecewise-linear criteria.

Criterion 1

$$F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) = \sum_{i=1}^N (t_i - t_i^{\text{nom}}) \rightarrow \min$$

The sense of the criterion is to pass an aircraft through the merge point as early as possible.

The order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Maybe, this criterion isn't too interesting from the practical point of view, but it allows to check whether a solution exists or not.

Слайд 9

Первый кусочно-линейный критерий предложен в виде суммы отклонений ВС от их номинальных моментов прибытия в точку слияния. В данной критерии номинальные моменты прибытия являются константами и не влияют на минимизацию критерия. Таким образом, необходимо минимизировать сумму новых моментов прибытия.

Смысл данного критерия — пройти точку слияния максимально раньше. Для минимизации данного критерия используется «жадный» алгоритм.

Авторами доказано утверждение, что для данного критерия порядок ВС на оптимальном решении совпадает с исходным порядком ВС.

Возможно данный критерий не так интересен с практической точки зрения, однако он позволяет проверить существование хоть какого-нибудь решения для данного набора номинальных моментов прибытия.

Slide 9

The first piecewise-linear criterion is presented in the form of a sum of deviations of actual aircraft arrival instants from the nominal ones. Here, the nominal arrival instants are constants and do not affect the minimum point of the function to be minimized. Therefore, one has to minimize the sum of the new arrival instants.

The sense of the criterion is to pass an aircraft through the merge point as early as possible. The “greedy” algorithm is applied for minimization of the criterion.

The authors have proved a statement that the order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Maybe, this criterion is not too interesting from the practical point of view, but it allows one to check whether a solution exists or not.

Simulations of Criterion 1

$$t_1^{\text{nom}} = 299.92 \text{ sec}$$

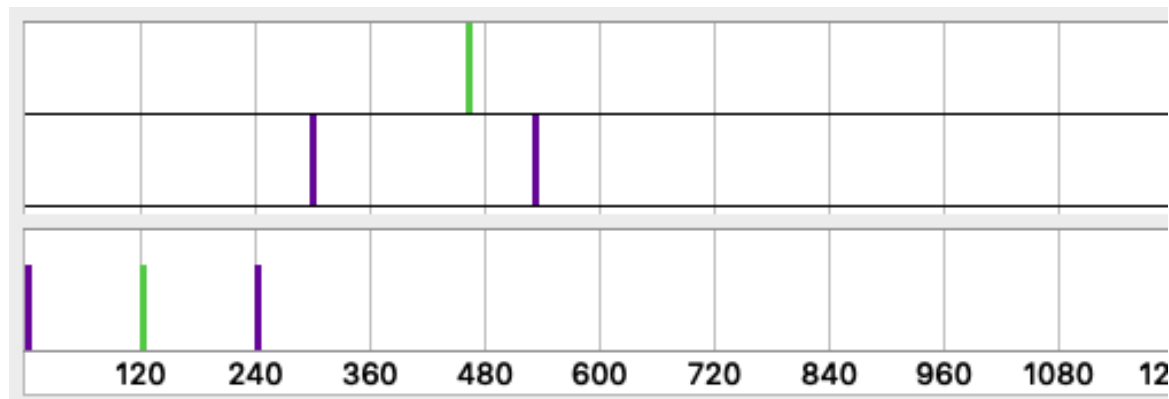
$$t_1 = 0 \text{ sec}$$

$$t_2^{\text{nom}} = 462.96 \text{ sec}$$

$$t_2 = 120 \text{ sec}$$

$$t_3^{\text{nom}} = 531.84 \text{ sec}$$

$$t_3 = 240 \text{ sec}$$



$$t^{\text{acc}} = 360 \text{ sec}, \quad t^{\text{dec}} = 840 \text{ sec}, \quad \tau^{\text{safe}} = 120 \text{ sec}$$

Слайд 10

Рассмотрим простейший модельный пример. Имеются три судна с номинальными моментами прибытия $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ с, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ с, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ с. Максимальные величины ускорения и задержки t^{acc} и t^{dec} равны 360 с и 840 с, соответственно. Величина τ^{safe} интервала безопасности в формируемой очереди равна 120 с.

Диаграмма состоит из двух частей. Верхняя часть изображает расположение номинальных моментов прибытия ВС на временной шкале. Цвета означают поток, которому принадлежит ВС: зелёным цветом обозначен первый поток, фиолетовым цветом обозначен второй поток. Нижняя часть диаграммы изображает расположение новых моментов прибытия на временной шкале. Из диаграммы видно, что ВС получили максимально ранние моменты $t_1 = 0$ с, $t_2 = 120$ с, $t_3 = 240$ с прибытия в точку слияния.

Slide 10

Let us consider a small model example of three aircraft with nominal arrival instants $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ sec, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ sec, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ sec. The values of maximum acceleration and deceleration are $t^{\text{acc}} = 360$ sec and $t^{\text{dec}} = 840$ sec, respectively. The value of the safety interval τ^{safe} is equal to 120 sec.

The resultant diagram is presented on the slide. The diagram consists of two parts. The upper part shows the arrangement of the nominal arrival instants of the aircraft on a timeline. The colors mean the corresponding aircraft flow to be merged: the green one is the first flow, the purple one is the second flow. The lower part of the diagram shows the arrangement of the obtained arrival instants on the timeline. One can see that the aircraft have obtained the earliest possible arrival instants $t_1 = 0$ sec, $t_2 = 120$ sec, $t_3 = 240$ sec at the merge point.

Criterion 2

$$F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) = \sum_{i=1}^N |t_i - t_i^{\text{nom}}| \rightarrow \min$$

The sense of the criterion is to pass an aircraft through the merge point as close to the nominal instant as possible.

The order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Слайд 11

Следующий критерий представлен в виде суммы абсолютных значений отклонений назначаемых моментов прибытия от номинальных моментов. Смысл данного критерия — пройти точку слияния, не отклоняясь, по возможности, от номинального момента прибытия.

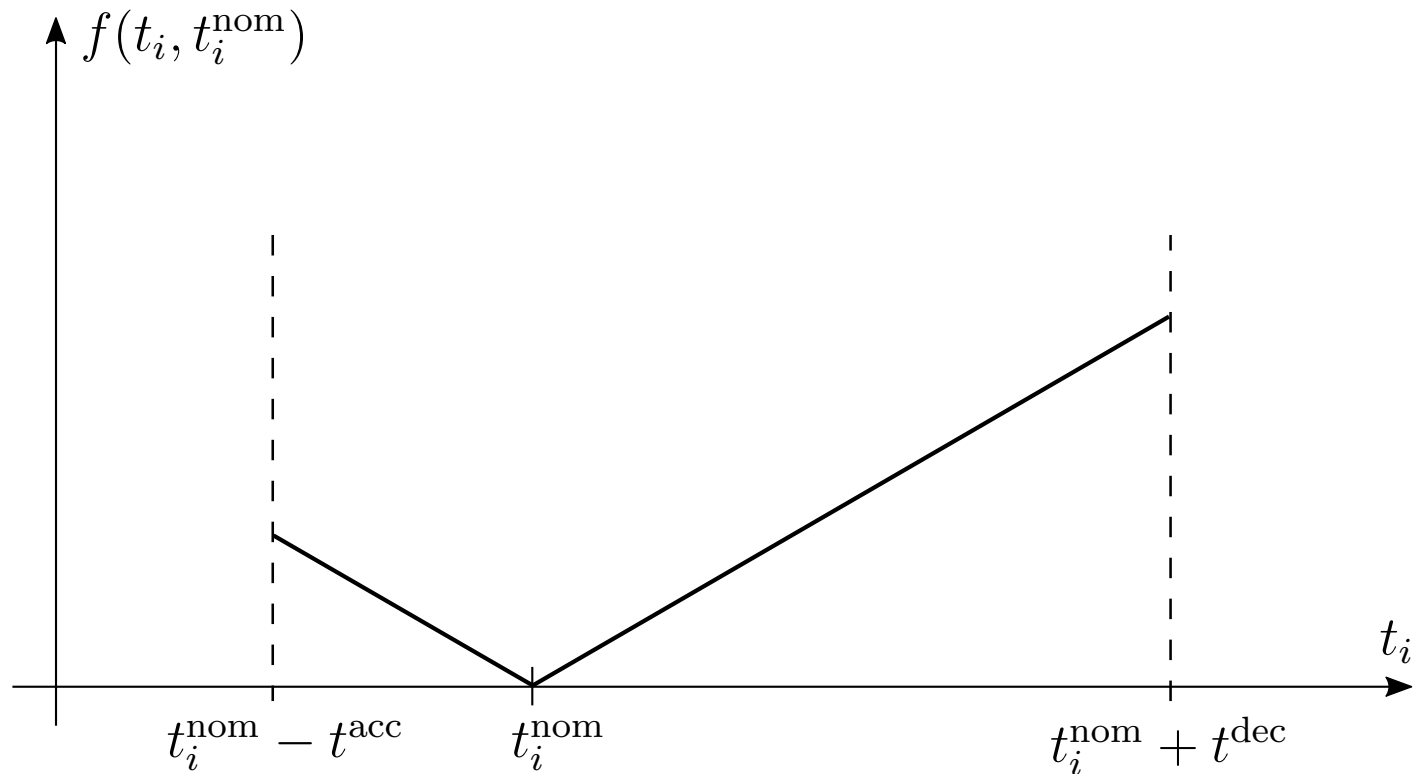
Для данного критерия авторами также доказано утверждение, что порядок ВС на оптимальном решении совпадает с исходным порядком ВС.

Slide 11

The next criterion is presented as a sum of absolute values of deviations of the assigned instants from the nominal arrival instants. The sense of the criterion is that the aircraft should pass the merge point as close to the nominal instant as possible.

The authors have proved a statement that the order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Criterion 2



Слайд 12

На слайде изображён график функции $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ штрафа за отклонение назначенного момента прибытия ВС в точку слияния от номинального. По горизонтали располагается временная ось отклонения назначенного момента от номинального, по вертикали располагается величина штрафа $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$. Пунктирными линиями обозначен интервал $[t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}]$ возможного варьирования момента t_i прибытия ВС.

Slide 12

A graph of the penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ for the deviation of the assigned arrival instant from the nominal one for the first criterion is on the slide. The horizontal axis is the time deviation, the vertical axis is the value of the penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$. The dashed lines mean the boundaries of the variation interval $[t_i^{\text{nom}} - t^{\text{acc}}, t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}]$ of the possible aircraft arrival.

Criterion 3

$$F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) = \sum_{i=1}^N K \cdot (t_i - t_i^{\text{nom}}) \rightarrow \min,$$
$$K = \begin{cases} K^+, & t_i > t_i^{\text{nom}}, \\ -K^-, & t_i < t_i^{\text{nom}}; \end{cases}$$

The sense of the criterion is that acceleration and deceleration are estimated differently.

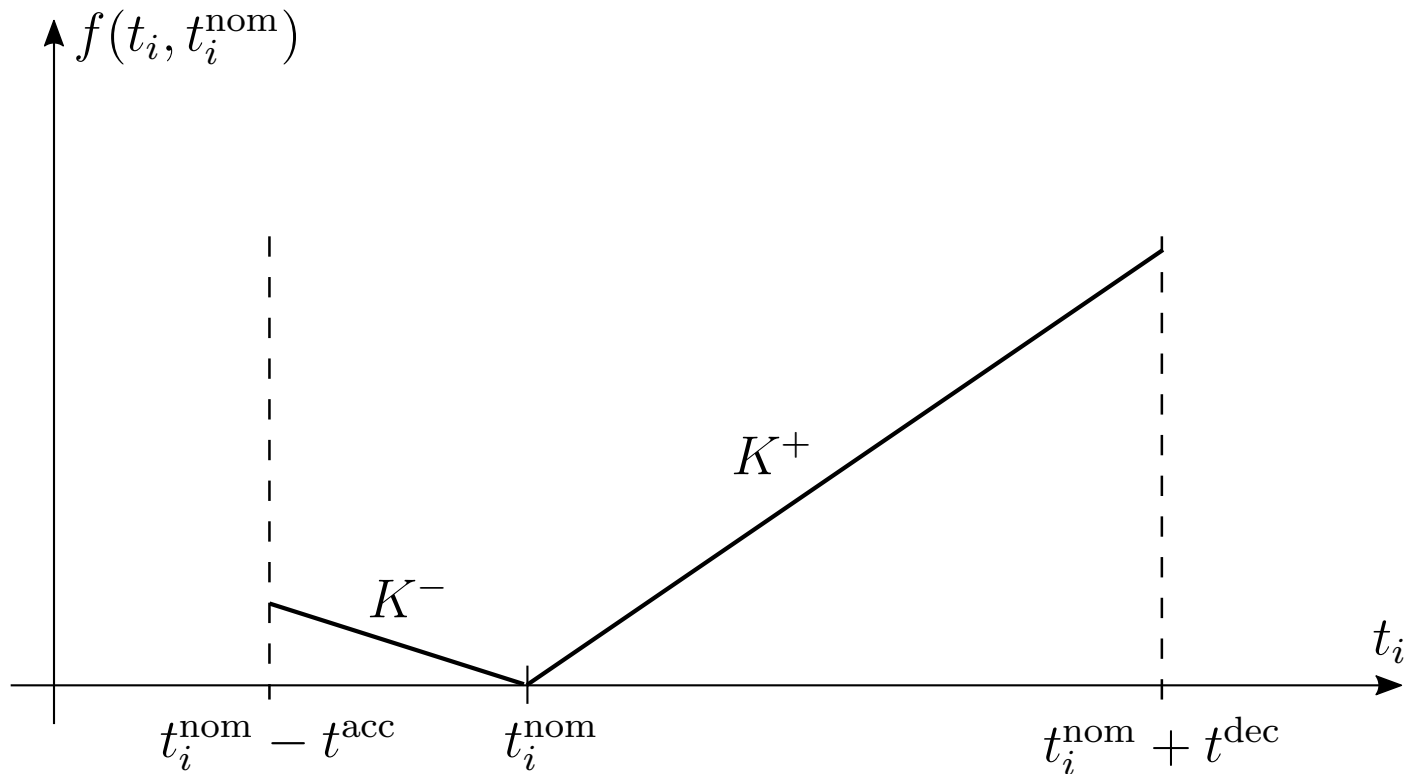
Слайд 13

Третий критерий позволяет путём выбора значений весовых коэффициентов K^- и K^+ штрафовать за ускорение и задержку ВС по-разному.

Slide 13

By choosing the values of the coefficients K^- and K^+ , the third criterion allows to penalize acceleration and deceleration in different ways.

Criterion 3



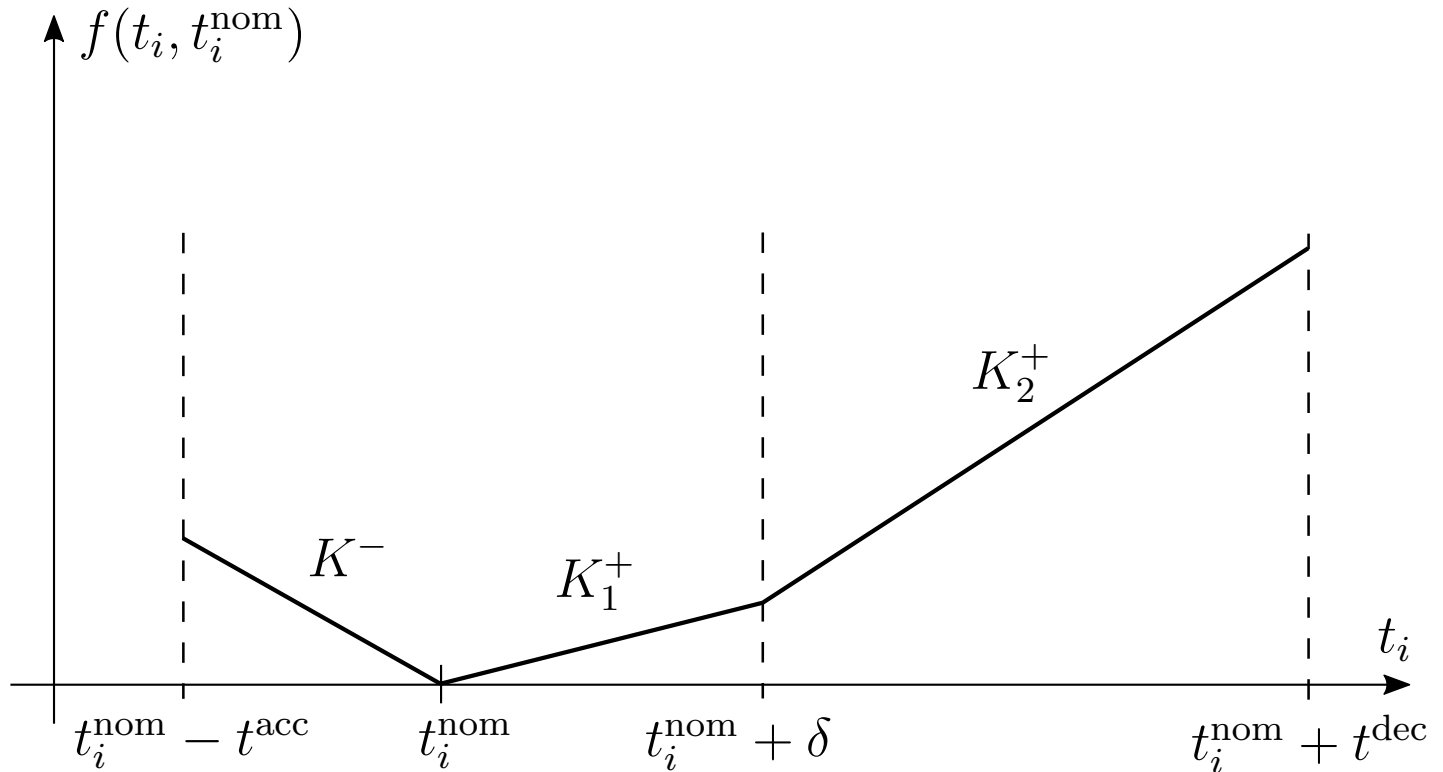
Слайд 14

На слайде изображён график функции $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ штрафа за отклонение нового момента прибытия ВС в точку слияния от номинального в случае, когда ускорение ВС штрафуются меньше, чем его задержка.

Slide 14

A graph of the penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ for the second criterion is on the slide. This is the case when an acceleration of an aircraft is cheaper than its deceleration.

Criterion 4



The sense of the criterion is that delay by velocity and delay by schemes are estimated differently.

Слайд 15

Следующий критерий позволяет по-разному штрафовать ВС за задержку регулировкой скорости и с использованием схем задержки. На слайде представлен график функции $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$. Величина δ на графике обозначает момент переключения типа задержки (с замедления ВС регулировкой скорости на замедление с использованием схем задержки). Непрерывность функции $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ в точке $t_i^{\text{nom}} + \delta$ подразумевается для возможности сведения данной задачи к задаче линейного программирования.

Slide 15

The next criterion allows to penalize in different ways the delays provided by speed control and by usage of the delay schemes. A graph of the penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ is on the slide. The value δ means the value of the deviation when the delay mode switches from speed deceleration to deceleration by delay schemes. The continuity of the function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ at the point $t_i^{\text{nom}} + \delta$ is questionable, but it is assumed, because it is necessary to pass to a linear programming problem.

Criterion 4

On the basis of the values δ , K^- , K_1^+ , K_2^+ , one can compute coefficients a , b , c , d of the following representation of the penalty function:

$$f(t_i, t_i^{\text{nom}}) = a|t_i - t_i^{\text{nom}}| + b|t_i - (t_i^{\text{nom}} + \delta)| + ct_i + d.$$

The quantity d is a constant, so, does not affect the minimum points and can be omitted:

$$f(t_i, t_i^{\text{nom}}) = a|t_i - t_i^{\text{nom}}| + b|t_i - (t_i^{\text{nom}} + \delta)| + ct_i.$$

Слайд 16

Выбрав величины δ , K^- , K_1^+ , K_2^+ и подразумевая непрерывность функции $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ в точке $t_i^{\text{nom}} + \delta$, можно вычислить коэффициенты a , b , c , d и получить следующее представление функции штрафа для каждого ВС. Константа d может быть опущена, так как не влияет на минимизацию функционала.

Slide 16

On the basis of the values δ , K^- , K_1^+ , K_2^+ and continuity of the function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ at the point $t_i^{\text{nom}} + \delta$, one can compute coefficients a , b , c , d and obtain the following representation of the penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ for each aircraft. The coefficient d is a constant, so it can be omitted since it does not affect the minimization of the functional $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$.

Piecewise-Linear Criteria

All three criteria give linear programming problems and have been solved by simplex method.

Слайд 17

Все задачи с выпуклыми кусочно-линейными критериями сводятся к задачам линейного программирования и решаются эффективно с помощью соответствующего ЛП-решателя. В данной работе для минимизации кусочно-линейных критериев в виде сумм абсолютных величин использовался симплекс-метод.

Slide 17

All criteria mentioned above can be reduced to a linear programming problem (LP) and solved by the corresponding LP-solver. In this work, the simplex-method has been applied.

Non-Linear Criteria

Слайд 18

Следующая часть работы посвящена минимизации нелинейных критериев. Однако оптимизация нелинейных функционалов с ограничениями довольно сложна, поэтому необходимо свести задачу к задаче безусловной нелинейной оптимизации.

Slide 18

The next part of the work studies nonlinear criteria. However, constrained nonlinear optimization is very difficult. Therefore, one needs to pass to an unconstrained nonlinear minimization problem.

Unconstrained Minimization Problem

Strict constraints connected to the variation interval of the arrival instant:

$$-\alpha \cdot \ln(t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{acc}}), \quad -\alpha \cdot \ln(-t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}});$$

The functional for the unconditional minimization:

$$\mathcal{F} = F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) - \alpha \cdot \sum_{i=1}^N \left(\ln(t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{acc}}) + \ln(-t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}) \right) + I$$

Слайд 19

При таком переходе к минимизируемому функционалу добавляются логарифмические слагаемые вида $-\alpha \cdot \ln(t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{acc}})$ и $-\alpha \cdot \ln(-t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}})$. Каждое из них имеет под логарифмом одно из ограничений-неравенств исходной задачи. Весовой коэффициент α описывает *жесткость* ограничений: чем меньше величина этого коэффициента, тем ближе к границе ограничений начинается быстрый рост логарифма и тем ближе к границе ограничений может приближаться текущая точка. В областях, где ограничения не выполняются, логарифмы не определены. Соответственно, текущая точка в итерационном алгоритме минимизации в принципе не может покидать область, задаваемую ограничениями.

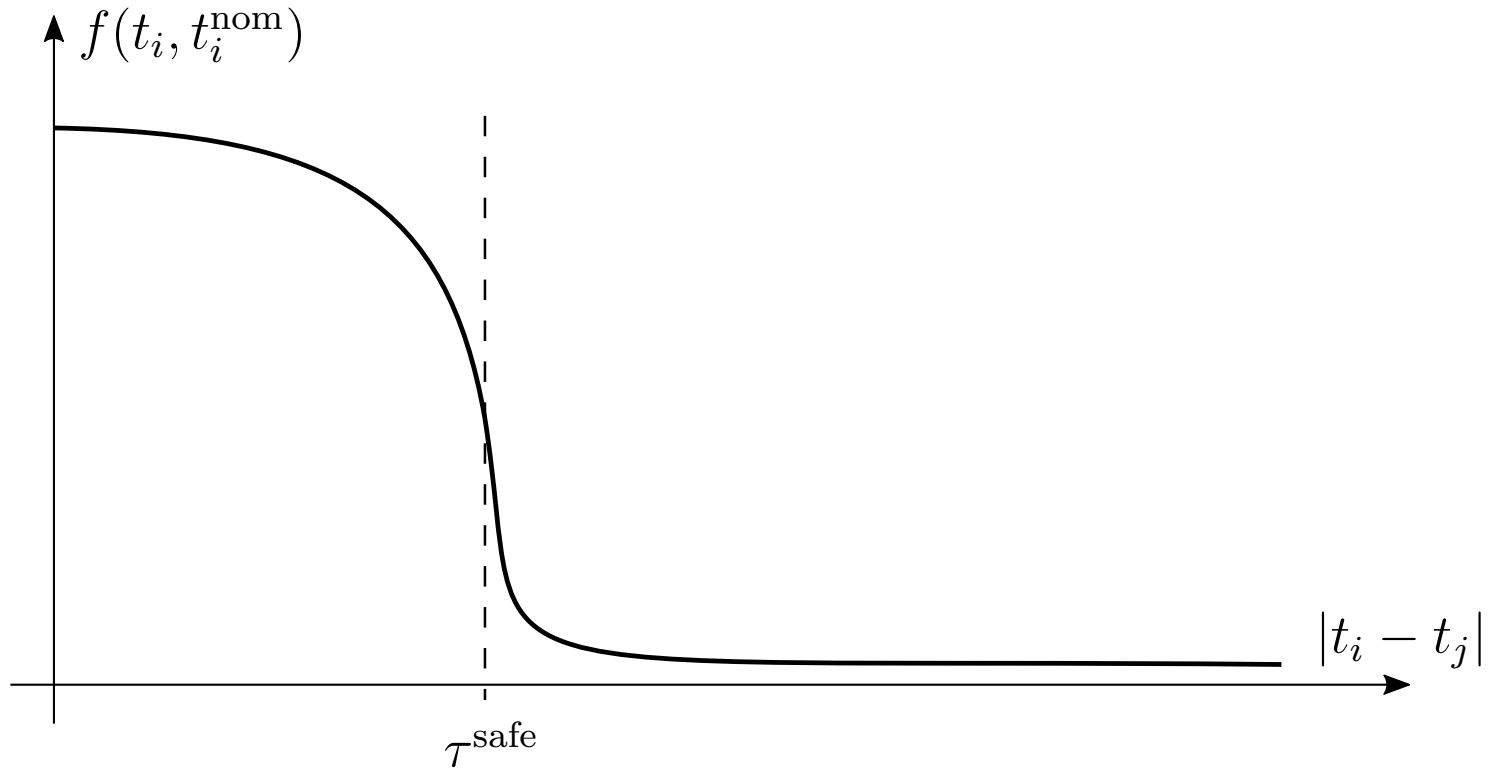
Слагаемое I связано с выдерживанием интервала безопасности между ВС в очереди и может быть реализовано двумя способами.

Slide 19

To do this, some logarithmic terms $-\alpha \cdot \ln(t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{acc}})$ and $-\alpha \cdot \ln(-t_i - t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}})$ are added to the functional to be minimized. Each of them has inside one of the inequality constraint of the original problem. The weight coefficient α describes the *strictness* of the new constraints: the less the coefficient is, the closer to the original constraint boundary is the area where the logarithm starts to grow fast. Therefore, the closer to the boundary of constraints the current point can go up in the iterative minimization algorithm. In the areas, where the original constraints are violated, the logarithmic terms are undefined. So, the current point in essence cannot leave the domain defined by the constraints.

The term I is connected with maintaining the safety interval between aircraft arrival instants. Two different techniques are used to represent the term I .

Soft Constraints for Variation Interval



As the initial point for the minimization algorithm, the collection of nominal instants is taken.

Слайд 20

Первый способ — это так называемые *мягкие* ограничения. Слагаемое I представляет собой функцию, которая определена вне области, заданной ограничениями. Она позволяет точке быть в области, где ограничения не выполняются, и выталкивает её из этой запрещённой области, не давая попасть обратно. В этом случае набор номинальных моментов прибытия ВС в точку слияния может быть взят в качестве начальной точки алгоритма минимизации целевого функционала.

Slide 20

The first technique is so called *soft* constraints. The term I is represented as a function, which is defined outside the domain defined by the constraints. It allows the point to be in the prohibited area. This function “pushes” the point out of the prohibited area and prevents it from getting back. When using this technique, the collection of nominal arrival instants can be taken as the starting point of the algorithm for minimizing the objective functional.

Strict Constraints for Variation Interval

$$\forall i = \overline{1, N} \quad - \alpha \cdot \ln \left((t_i - t_j)^2 - (\tau^{\text{safe}})^2 \right).$$

- 1 To obtain the initial point for the minimization algorithm, the greedy algorithm is used. If the greedy algorithm was unsuccessful to process all aircraft or some of the resultant instants coincide with the corresponding right boundary $t_i^{\text{nom}} + t^{\text{dec}}$, then no internal point exists, and further computations ceases.
- 2 Otherwise, the initial point for the minimization algorithm is taken as the result of the greedy algorithm slightly slid apart (to obey all constraints strictly).

Слайд 21

Другой способ реализации слагаемого I — в виде *жестких* ограничений, то есть с помощью суммы по всем парам индексов $1 \leq i < j \leq N$ логарифмов $-\alpha \cdot \ln((t_i - t_j)^2 - (\tau^{\text{safe}})^2)$. Разность моментов прибытия в подлогарифмическом выражении возведена в квадрат, потому что в общем случае нет гарантии того, что исходный порядок ВС будет сохранён.

Жесткие ограничения не позволяют ВС нарушать требования безопасности, так как в соответствующих областях не определены логарифмы. Поэтому набор номинальных моментов прибытия ВС в точку слияния, вообще говоря, не подойдёт для использования в качестве стартовой точки для алгоритма минимизации, так как в исходной очереди присутствуют нарушения безопасности (если бы их не было, то и задачи бы не существовало).

Стартовая точка для алгоритма минимизации выбирается следующим образом. Сперва запускается жадный алгоритм и проверяется наличие его решения. Если решения жадного алгоритма не существует, то для данного набора номинальных моментов прибытия ВС в точку слияния и соответствующих ограничений вообще не существует решения задачи построения нового расписания. Другой вариант: решение жадного алгоритма существует, но присутствует такая максимально плотная подгруппа ВС, что крайние ВС в ней находятся в точности на границах своих интервалов варьирования (первое ВС на левой границе, последнее на правой). В этом случае для данной задачи нет иного решения кроме решения жадного алгоритма. В обоих случаях дальнейшая работа алгоритма останавливается.

Если «плотных» групп судов нет, то решение жадного алгоритма может быть использовано в качестве стартовой точки для алгоритма минимизации целевого функционала (после небольшой «раздвижки» судов, чтобы условия на интервал безопасности гарантированно выполнялись строго).

Slide 21

(continued in the next page)

The second technique to implement the term I is to represent it as *strict* constraints, that is as a sum over all pairs of indices $1 \leq i < j \leq N$ of the logarithms $-\alpha \cdot \ln((t_i - t_j)^2 - (\tau^{\text{safe}})^2)$. The difference between the arrival instants in sub-logarithmic terms is squared, since, generally speaking, there is no guarantee that the initial order of the aircraft arrivals will be kept.

The *strict* constraints do not allow the point to violate the constraints, since outside the allowed area the logarithms are not defined. So, the collection of nominal arrival instants, generally speaking, are not suitable as the start point for the minimization algorithm, since there are safety violations (if the safety intervals are not violated, then the problem just does not exist).

To obtain the initial point, the greedy method is started. If the algorithm is not successful, then there is no solution at all. Another situation: the algorithm gives a solution, but there is a subgroup of aircraft so dense that there are exactly safe intervals between aircraft in it (that is, the first aircraft is on the left boundary of its variation interval and the last aircraft is on the right boundary of its variation interval). In both cases the procedure is ceased. However, in the latter case one can optimize aircraft outside of such a group.

Finally, if the greedy algorithm gives some result and there are no dense subgroups of aircraft, then this solution is taken as the initial point for the minimization algorithm (after a light slide apart of the aircraft to obey strictly the inequalities for the safety intervals).

Quadratic Criterion

The simplest non-linear criterion:

$$F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\}) = \sum_{i=1}^N (t_i - t_i^{\text{nom}})^2 \rightarrow \min$$

The sense of the criterion is that large deviations are punished more severe.

The order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Слайд 22

Авторами был рассмотрен простейший нелинейный критерий в виде суммы квадратов отклонений назначенных моментов прибытия от номинальных моментов. Смысл данного критерия в том, что в отличие от суммы модулей отклонений большие отклонения штрафуются квадратично сильнее.

Авторами доказано утверждение, что порядок ВС на оптимальном решении совпадает с исходным порядком ВС в очереди.

Slide 22

The simplest nonlinear criterion in the form of a sum of squared deviations has been studied. The sense of the criterion is that large deviations are punished more severe in comparison with the sum of absolute values of the deviations.

The authors have proved a statement that the order of the resultant instants is the same as of the nominal ones.

Minimization Algorithms

- Specific linear-quadratic algorithms
- Steepest descent algorithm
The problem with ravines exists.
- Hooke – Jeeves direct search algorithm
- Newton algorithm
It searches minimum of convex functions, however, soft constraints are concave. In this domain, the gradient method works.

Слайд 23

Для решения полученной задачи безусловной минимизации нелинейных критериев использовались следующие приближённые методы:

- конкретные методы линейно-квадратичного программирования;

Однако, если берётся критерий, отличный от квадратичного, эти методы перестают работать.

- метод наискорейшего спуска;

Для данного метода, как и для всего семейства градиентных методов, существует проблема с существенной «овражистостью» минимизируемой функции.

- метод Ньютона;

Данный метод ищет минимум выпуклой функции, однако мягкие ограничения не являются выпуклыми. Внутри запретной области, где выпуклость функционала нарушается, запускался метод градиентного спуска.

- метод прямого поиска Хука – Дживса.

Slide 23

The following optimization methods have been applied for the reduced unconstrained nonlinear problems:

- specific linear-quadratic algorithms;

However, if a new criterion is taken, which is not quadratic, then these methods cease to work.

- the steepest descent algorithm;

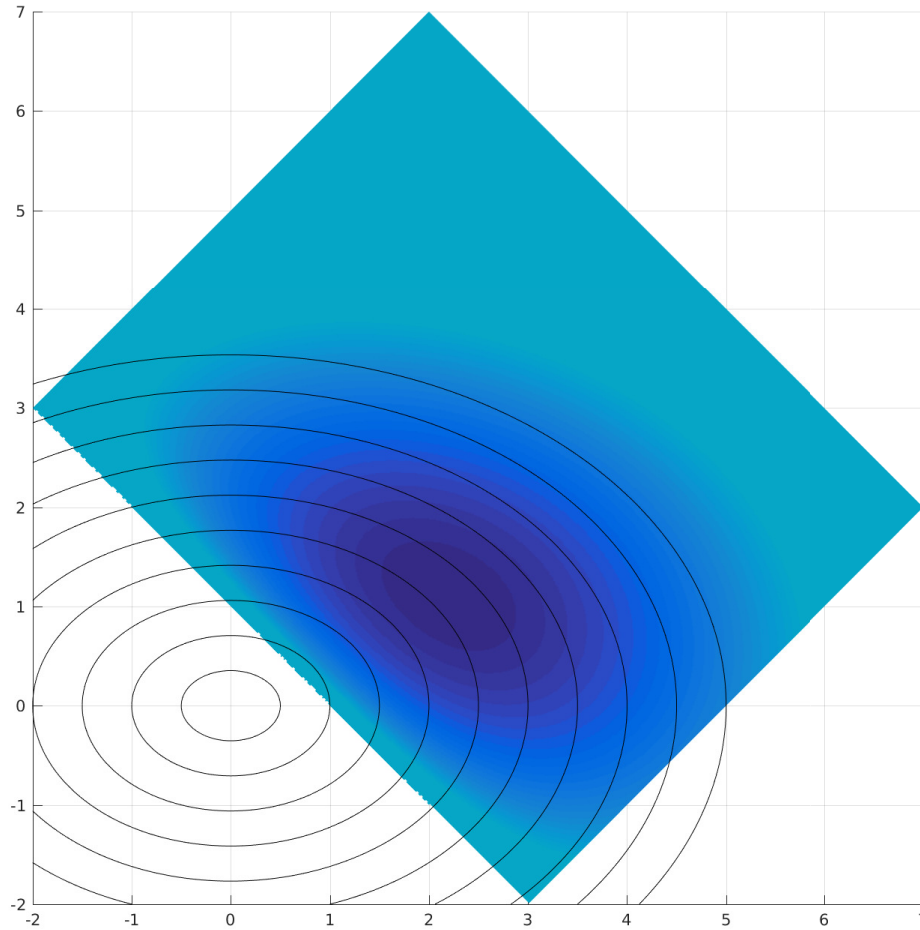
For this method, as for the other methods of gradient family, there is a problem with “ravines” of the function to be minimized.

- the Newton method;

It searches minimum of convex functions, however, the soft constraints are not convex. In the prohibited domain, where the convexity of the functional is violated, the gradient method is applied.

- the Hooke – Jeeves direct search method.

«Ravineness» of Penalty Functions



Слайд 24

Здесь поясняется причина возникновения «оврагов» у минимизируемой функции. Эллипсы схематично показывают линии уровня основного критерия $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$. Цветной прямоугольник представляет линии уровня суммы основного критерия и *жестких* ограничений в виде логарифмов, связанных с выдерживанием интервала безопасности. Чем темнее цвет этого прямоугольника, тем меньше величина суммарного функционала.

При приближении точки к линии ограничений (граница прямоугольника) логарифм стремится к $+\infty$. Если удаляться от линии ограничений, то начинает расти значение основного критерия $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$. Таким образом, рядом с линией ограничений присутствует овраг, узкий в поперечном направлении и пологий в продольном направлении. Такие овраги в оптимизируемой функции являются большой проблемой для методов оптимизации.

Slide 24

Here, there is a try to explain the problem of “ravines” appearance. The ellipses schematically represent the level lines of the main criterion $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$. The colored rectangle shows levels of the sum of the main criterion and logarithm of a strict constraint connected to the safety interval between aircraft. The darker the color of this rectangle is, the smaller the value of the total functional is.

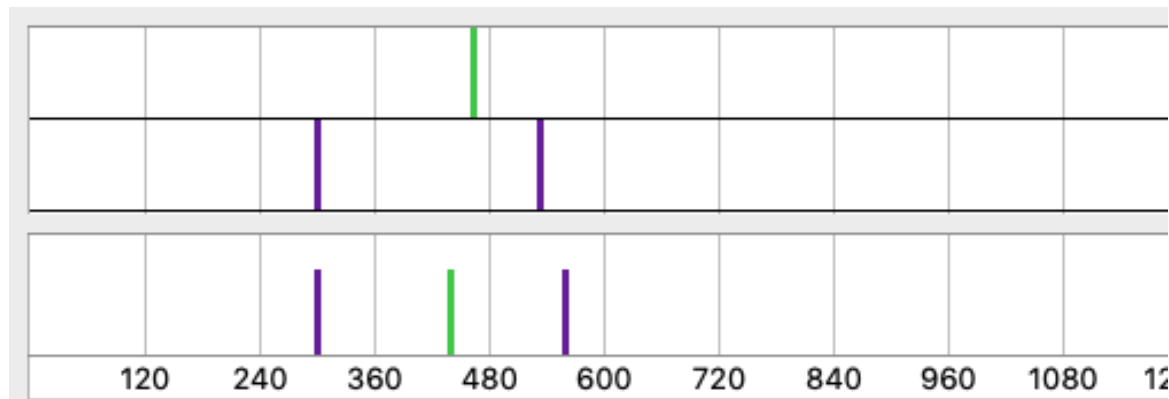
When approaching the line of the constraint, the logarithm tends to $+\infty$. When going away from the line, the main criterion $F(\{t_i\}, \{t_i^{\text{nom}}\})$ grows. Thus, near the line, one has a ravine, which is very narrow in the cross direction and mildly sloping along the line. Such a ravine is a very hard problem for the minimization methods.

Simulations of Quadratic Criterion

Soft constraints. Hooke–Jeeves direct search algorithm:

$$t_1^{\text{nom}} = 299.92 \text{ sec} \quad t_2^{\text{nom}} = 462.96 \text{ sec} \quad t_3^{\text{nom}} = 531.84 \text{ sec}$$

$$t_1 = 299.92 \text{ sec} \quad t_2 = 436.93 \text{ sec} \quad t_3 = 557.87 \text{ sec}$$



$$t^{\text{acc}} = 360 \text{ sec}, \quad t^{\text{dec}} = 840 \text{ sec}, \quad \tau^{\text{safe}} = 120 \text{ sec}$$

Слайд 25

Рассмотрим простейший модельный пример применения метода Хука – Дживса к минимизации квадратичного критерия в случае мягких ограничений. Дан набор из трёх ВС с номинальными моментами прибытия $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ с, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ с, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ с. Максимальные величины ускорения и задержки t^{acc} и t^{dec} равны 360 с и 840 с, соответственно. Величина τ^{safe} интервала безопасности в оптимизируемой очереди равна 120 с. ВС получили следующие моменты прибытия в точку слияния $t_1 = 299.92$ с, $t_2 = 436.93$ с, $t_3 = 557.87$ с. Порядок воздушных судов был сохранён, решение можно считать близким к оптимальному.

Slide 25

Let us consider a small model example of three aircraft with the nominal arrival instants $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ sec, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ sec, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ sec and application of the direct search Hooke – Jeeves method for minimization of the quadratic criterion in the case of the soft constraints. The maximum values of acceleration and deceleration are $t^{\text{acc}} = 360$ sec and $t^{\text{dec}} = 840$ sec, respectively. The values τ^{safe} of the safety interval is equal to 120 sec. The aircraft have obtained the following arrival instants: $t_1 = 299.92$ sec, $t_2 = 436.93$ sec, $t_3 = 557.87$ sec. The initial aircraft order has been kept. The solution can be considered close to the optimal one.

Simulations of Quadratic Criterion

Soft constraints. Newton algorithm:

$$t_1^{\text{nom}} = 299.92 \text{ sec}$$

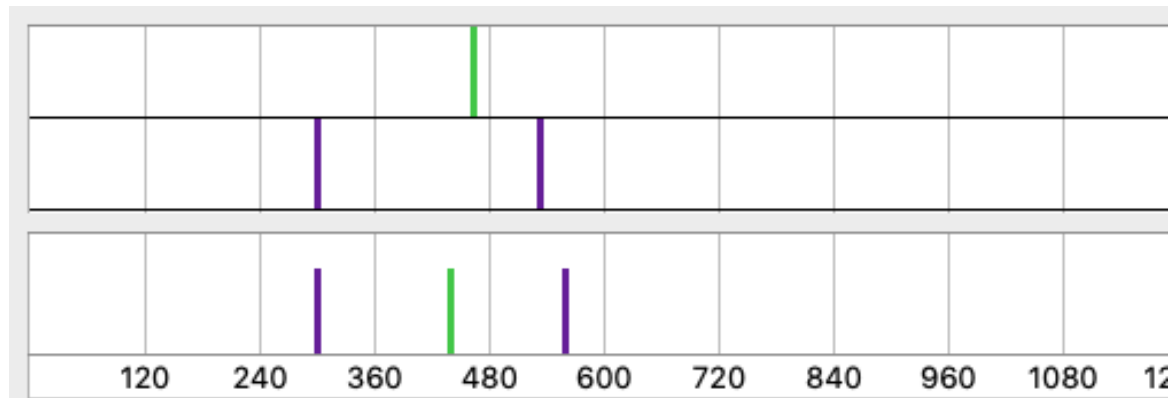
$$t_2^{\text{nom}} = 462.96 \text{ sec}$$

$$t_3^{\text{nom}} = 531.84 \text{ sec}$$

$$t_1 = 299.92 \text{ sec}$$

$$t_2 = 436.93 \text{ sec}$$

$$t_3 = 557.87 \text{ sec}$$



$$t^{\text{acc}} = 360 \text{ sec}, t^{\text{dec}} = 840 \text{ sec}, \tau^{\text{safe}} = 120 \text{ sec}$$

Слайд 26

Снова рассмотрим этот же пример из трёх ВС с номинальными моментами прибытия $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ с, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ с, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ с. Однако в этом случае для минимизации квадратичного критерия с мягкими ограничениями использовался метод Ньютона. Максимальные величины ускорения и задержки t^{acc} и t^{dec} равны 360 с и 840 с, соответственно. Величина τ^{safe} интервала безопасности в оптимизируемой очереди равна 120 с. В результате ВС получили моменты прибытия $t_1 = 299.92$ с, $t_2 = 436.93$ с, $t_3 = 557.87$ с. Порядок воздушных судов был сохранён, решение можно считать близким к оптимальному.

Slide 26

Let us consider the same example of three aircraft with the nominal arrival instants $t_1^{\text{nom}} = 299.92$ sec, $t_2^{\text{nom}} = 462.96$ sec, $t_3^{\text{nom}} = 531.84$ sec and application of the Newton method for minimization of the quadratic criterion in the case of the soft constraints. The maximum values of acceleration and deceleration are $t^{\text{acc}} = 360$ sec and $t^{\text{dec}} = 840$ sec, respectively. The values τ^{safe} of the safety interval is equal to 120 sec. The aircraft have obtained the following arrival instants $t_1 = 299.92$ sec, $t_2 = 436.93$ sec, $t_3 = 557.87$ sec. The initial order of the instants has been saved. The solution can be considered as close to optimal.

Simulations of Quadratic Criterion

In the case of strict constraints, the gradient methods (gradient descent and Newton's method) have significant problems with ravines. The Hooke–Jeeves method gives more or less acceptable results.

In the case of soft constraints, all methods work acceptable. However, a problem arises when there are several (greater than 3) aircraft with the same nominal arriving time.

Слайд 27

В случае жёстких ограничений градиентные методы (методы наискорейшего спуска и метод Ньютона) имеют значительные проблемы с овражистостью минимизируемой функции. Метод прямого поиска Хука – Дживса даёт более или менее приемлемые результаты.

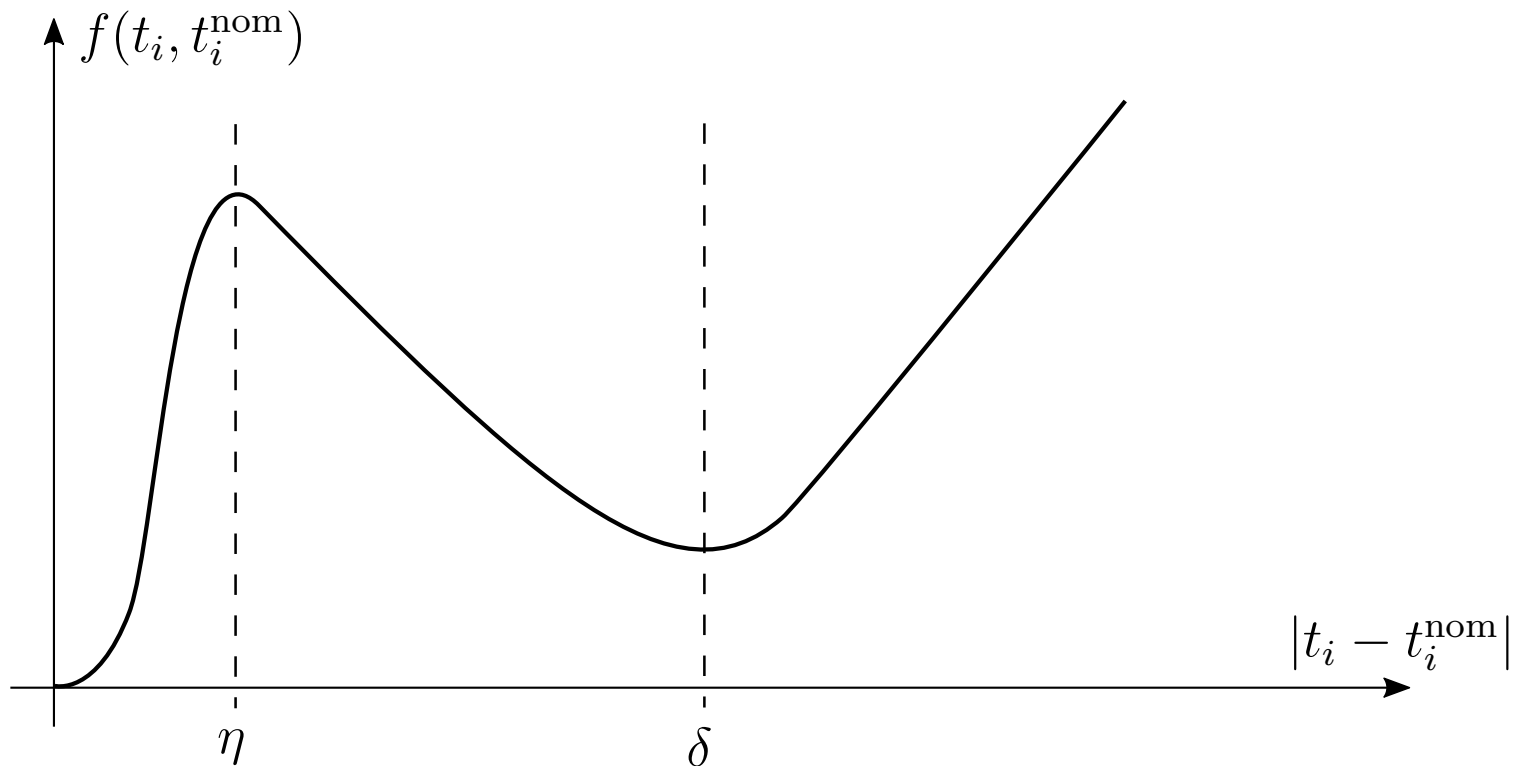
В случае мягких ограничений все методы работают приемлемо. Однако возникает проблема, когда несколько ВС (3 и более) имеют одинаковые номинальные моменты прибытия.

Slide 27

In the case of the strict constraints, the gradient methods (the steepest descent method and the Newton method) have significant problems with ravines of the function to be minimized. The direct search Hooke – Jeeves method gives more or less admissible results.

In the case of the soft constraints, all methods work quite well. However, a problem with coinciding nominal arrival instants (3 or more) appears.

Criterion with Constraint on Minimal Deviation



This penalty function has two minima: one near the nominal instant, and the other is near $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$, where δ is the minimal technically acceptable deviation.

Слайд 28

Идея следующего критерия состоит в том, чтобы избежать относительно маленьких нетехнологичных отклонений ВС от своего номинального момента прибытия в точку слияния. На графике представлен вид такой функции штрафа. У неё два минимума: один около номинального момента прибытия, другой находится в точке $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$, где δ заранее заданная величина минимальной вариации момента прибытия. Величина η означает максимальную величину отклонения, которую может получать ВС в процессе вычислений, но реализацией которой в процессе полёта может пренебрегать. В моделировании использовались значения $\eta = 3$ с и $\delta = 30$ с.

Slide 28

The idea of the next criterion is to avoid relatively small and technologically unfeasible deviations of aircraft from their nominal arrival instants at the merge point. A graph of the corresponding penalty function $f(t_i, t_i^{\text{nom}})$ is on the slide. It has two minima: one is near the nominal arrival instant and the other is at the point $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$ where δ is a predetermined value of the minimal technically admissible deviation. The value η means a deviation value, which an aircraft can obtain during computations, but which can be neglected during the flight. In the conducted experiments the values $\eta = 3$ sec and $\delta = 30$ sec have been tested.

Simulations of Criterion with Constraint on Minimal Deviation

In the case of strict constraints, all methods have problems with falling into the ravine near instance $t_i = t_i^{\text{nom}}$, since the ravine is quite narrow and the initial point is far from it. The final point is either far from the global minimum, or connected with local minima at the points $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$.

In the case of soft constraints, additionally to the mentioned problem, the problem with coinciding nominal arriving times exists.

At this time, the authors have no any acceptable results for non-linear criteria. Possibly, some specific methods for constrained problems should be involved.

Слайд 29

В случае жёстких ограничений все методы не попадали в овраги минимизируемых функций около $t_i = t_i^{\text{nom}}$, так как эти овраги достаточно узкие, а начальная точка (результат жадного алгоритма) находится далеко от них. Методы останавливались в точке, которая либо далека от глобального минимума, либо связана с локальным минимумом в точке $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$.

В настоящее время у авторов не имеется каких либо приемлемых процедур минимизации нелинейных критериев. Возможно эта проблема разрешится с использованием специфичных методов для нелинейной оптимизации с ограничениями.

Slide 29

In the case of the strict constraints, all applied methods have missed the ravines of the minimized functions near the points $t_i = t_i^{\text{nom}}$, since this ravines are quite narrow and the start point (the result of the greedy algorithm) is located far from them. The methods have stopped at a point, which is either far from the global minimum, or related to the local minimum at the point $t_i^{\text{nom}} \pm \delta$.

So far, the authors have no any stable and admissible procedures for nonlinear optimization of the suggested criteria. Possibly, this problem will be solved by using specific methods for nonlinear constrained optimization problems.

Conclusion

- ① Several piecewise-linear criteria are studied. Exact solutions by means of simplex method have been obtained.
- ② For non-linear criteria, soft and strict constraints corresponding to the variation interval have been suggested.
- ③ Gradient and direct search methods have been applied for solving non-linear variants.
- ④ The simplest quadratic criterion and a criterion with constraint on the minimal deviation have been considered (more or less successfully).
- ⑤ Disappointing result for non-linear criteria have been obtained.

Aims for the future work:

- To involve another, more delicate methods for constrained non-linear optimization problems.
- To take into account aircraft types. (In progress.)
- To consider individual variation intervals for each aircraft. (In progress.)
- To take into account the priority of aircraft: some of them can not be variated.
- To decrease the number of aircraft with variated arrival instant.

Thank you for your attention!