

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН БЕЛАРУСИ

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ:  
УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ,  
ОПТИМИЗАЦИЯ

Материалы Международной научной конференции  
памяти профессора Р.Ф. Габасова  
Минск, 5–10 октября 2021 г.

DYNAMICAL SYSTEMS:  
STABILITY, CONTROL, OPTIMIZATION

Proceedings of the International Scientific Conference  
in memory of Professor R.F. Gabasov  
Minsk, October 5–10, 2021

МИНСК  
БГУ  
2021

УДК 517.93(06) + 517.977(06)  
ББК 22.161.6я431  
Д46

Редакционная коллегия:

Ф. М. Кириллова (гл. ред.), В. В. Альсевич, А. И. Астровский,  
В. В. Гороховик, Н. М. Дмитрук, Б. С. Калитин, О. И. Костюкова

**Динамические** системы: устойчивость, управление, оптимизация = Dynamical systems: stability, control, optimization : материалы Междунар. науч. конф. памяти профессора Р. Ф. Габасова, Минск, 5–10 окт. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: Ф. М. Кириллова (гл. ред.) [и др.]. — Минск : Изд. центр БГУ, 2021. — 213 с. ISBN 978-985-553-732-9.

Издание содержит материалы докладов, представленных на Международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» памяти профессора Р. Ф. Габасова. Тематика докладов касается проблем качественной и конструктивной теории управления системами обыкновенных, дифференциально-алгебраических, дифференциально-разностных, сингулярно-возмущенных уравнений, системами с распределенными параметрами, а также приложений в экономике, биологии, технике.

**УДК 517.93(06) + 517.977(06)**  
**ББК 22.161.6я431**

**ISBN 978-985-553-732-9**

© Оформление. БГУ, 2021

## **ОРГАНИЗАТОРЫ**

Белорусский государственный университет  
Институт математики НАН Беларуси

## **МЕЖДУНАРОДНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

### **Сопредседатели:**

академик РАН Куржанский А.Б. (Москва, Россия)  
член-корр. НАН Беларуси Кириллова Ф.М. (Минск, Беларусь)

### **Члены Программного комитета:**

Алиев Ф.А. (Азербайджан)	Mordukhovich V.Sh. (США)
Allgöwer F. (Германия)	Pham The Long (Вьетнам)
Ащепков Л.Т. (Канада)	Половинкин Е.С. (Россия)
Гороховик В.В. (Беларусь)	Срочко В.А. (Россия)
Калинин А.И. (Беларусь)	Субботина Н.Н. (Россия)
Карелин В.В. (Россия)	Ушаков В.Н. (Россия)
Kruger A. (Австралия)	Чикрий А.А. (Украина)
Мансимов К.Б. (Азербайджан)	Shklyar V.Sh. (Израиль)

## **ОРГКОМИТЕТ**

### **Председатель:**

Недзведзь А.М. (Белорусский государственный университет)

### **Заместители председателя:**

Дмитрук Н.М. (Белорусский государственный университет)  
Костюкова О.И. (Институт математики НАН Беларуси)

**Ответственный секретарь:** Альсевич В.В. (БГУ)

### **Члены Оргкомитета:**

Асмыкович И.К. (БГТУ), Астровский А.И. (БГЭУ), Борухов В.Т. (ИМ НАНБ),  
Габасова О.Р., Дымков М.П. (БГЭУ), Калитин Б.С. (БГУ), Крахотко В.В. (БГУ),  
Лепин В.В. (ИМ НАНБ), Лавринович Л.И. (БГУ), Метельский А.В. (БНТУ),  
Минченко Л.И. (БГУИР), Павленок Н.С. (БГУ)

4. *Lamnabhi-Lagarrique F., Annaswamy A., Engell C., et al.* Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // Annual Reviews in Control. 2017. Vol. 43. P. 1–64.

## МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО И ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ БЕЗОПАСНОГО СЛИЯНИЯ ПОТОКОВ САМОЛЕТОВ

А.А. Спиридонов, С.С. Кумков

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, УрО РАН,

Екатеринбург, Россия

spiridonov@imm.uran.ru, sskumk@gmail.com

**Практическая задача.** Воздушное сообщение является важной частью пассажирских и грузовых перевозок. Движение самолетов организовано вдоль воздушных трасс, которые могут расходиться и сходиться. В точках соединения трасс возникает задача безопасного слияния потоков воздушных судов (ВС). Особенно важной эта задача является вблизи аэропортов для потоков ВС, прилетающих в данный аэропорт, так как эти потоки могут быть весьма плотными.

Соответственно, основной задачей является назначение новых моментов прибытия ВС в точку слияния. Назначенные моменты должны быть такими, что в результирующей очереди между соседними судами имеются достаточные временные промежутки, обеспечивающие отсутствие опасных сближений.

Выбор моментов прибытия должен быть согласован с промежутком возможного варьирования прибытия ВС. Этот промежуток обуславливается возможностью ускорения и задержки самолета вследствие изменения скорости его движения, а также наличия на маршруте его движения различных схем задержки или участков спрямления.

Кроме того, при выработке новых моментов прибытия должны учитываться различные практические запросы диспетчеров управления воздушным движением (УВД). Основное требование — минимизация отклонения назначенного момента прибытия от номинального, обуславливаемая минимизацией затрат горючего на маневры ВС. Кроме того, могут быть и другие требования, например, минимизация количества взаимодействий диспетчер–пилот. Или в случае варьирования момента прибытия вариация должна быть не слишком малой, так как малые вариации нетехнологичны. Могут накладываться ограничения на смену порядка прибытия ВС в точку слияния потоков и др.

**Математические модели задачи слияния.** Задача безопасного слияния потоков судов весьма активно изучается математиками достаточно давно, по крайней мере, с 1970-х годов. Чаще всего задача формализуется в рамках теории конечномерной оптимизации. Обзоры теоретических и вычислительных аспектов такого рода задач изложены в [1–4].

Традиционно оптимизируемым критерием в подобных задачах является сумма модулей отклонений назначенных моментов прибытия ВС от номинальных. Это естественно, поскольку такой критерий наиболее простым образом отражает основное требование к назначенным моментам прибытия. Также могут использоваться двухзонные кусочно-линейные функции штрафов отклонений, похожие на модуль, но имеющие разные угловые коэффициенты левой и правой ветвей. Такие критерии отражают разные траты горючего при ускорении и замедлении момента прибытия.

При этом прочие требования, упоминавшиеся выше, учитываются каким-то иным способом: введением векторных или стохастических критериев, введением иерархических задач оптимизации, рассмотрением задач теории расписаний. Получаемые постановки зачастую оказываются настолько тяжелыми, что приходится отказываться от точных методов решения в пользу разного рода усеченных методов динамического программирования или дискретных переборов, генетических алгоритмов или эвристических методов.

В своей работе авторы предлагают критерии, отражающие основные требования диспетчеров УВД и при этом позволяющие формализовать задачу в рамках линейного или целочисленного программирования, точные численные методы которых разработаны в достаточной степени. Приводятся результаты численного моделирования, показывающие адекватность предлагаемых формализаций.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

### **Библиографические ссылки**

1. *Bennell J.A., Mesgarpour M., Potts C.N.* Airport runway scheduling // 4OR – Quarterly Journal of Operations Research, 2011. Vol. 9. No. 2. P. 115–138.
2. *Zulkifli A., Aziz N.A.A., Aziz N.H.A., Ibrahim Z., Mokhtar N.* Review on computational techniques in solving aircraft landing problem // Proceedings of the 2018 International Conference on Artificial Life and Robotics, Oita, Japan, 2018. P. 128–131.
3. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения

- оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч.1. Методы точного решения // Проблемы управления. 2018. № 4. С. 2–13.
4. *Вересников Г.С., Егоров Н.А., Кулида Е.Л., Лебедев В.Г.* Методы построения оптимальных очередей воздушных судов на посадку. Ч.2. Методы приближенного решения // Проблемы управления. 2018. № 5. С. 2–13.

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ

**В.А. Срочко**

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия  
srochko@math.isu.ru

Различные технологии преобразования задач оптимального управления к конечномерным моделям имеют давнюю историю. Такой априорный переход от вариационных проблем к задачам математического программирования, весьма популярный в зарубежных публикациях, встречал определенную критику и неприятие со стороны ряда отечественных специалистов по численным методам оптимального управления.

Однако ситуация в этой области несколько модифицируется в последние годы, когда новые методы дискретизации (параметризации) управления приобретают практическую актуальность и конкурентность в сравнении с традиционными алгоритмами решения задач оптимального управления [1].

В отношении разнообразных редукций вариационных задач к конечномерным необходимо отметить следующее.

С одной стороны такие преобразования снижают качество получаемых результатов, поскольку экстремальные решения конечномерных задач (удовлетворяющие необходимым условиям экстремума) не приводят, вообще говоря, к экстремальным управлениям вариационных задач (удовлетворяющим принципу максимума). Конечно, качество конечномерных решений можно повысить за счет уменьшения шага параметризации, однако определенный разрыв между вариационным и конечномерным решениями всегда сохраняется (поточечные неравенства, интегральные неравенства).

Кроме того, вариационные методы имеют определенные преимущества, поскольку используют незаурядные результаты теории оптимального управления. Это, прежде всего, необходимые и достаточные