

СИММЕТРИЯ И АНАЛИТИКА ПРИ ОПИСАНИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА

В.С. Пацко, А.А. Федотов



Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,
Екатеринбург, Россия

**Международная конференция «Дифференциальные уравнения
и оптимальное управление», посвященная 100-летию со дня рождения
академика Евгения Фроловича Мищенко
(7–9 июня 2022 г., МИАН, г. Москва)**

Машина Дубинса

$$\dot{x} = \cos\varphi,$$

$$\dot{y} = \sin\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = u;$$

$$u \in [u_1, u_2].$$

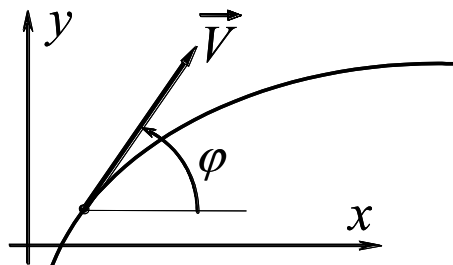
$$u_1 = -1, u_2 = +1 \quad (\text{канонический симметричный случай})$$

$$u_1 < 0 < u_2 \quad (\text{несимметричный случай})$$

$$0 = u_1 < u_2 \quad (\text{случай одностороннего поворота})$$

$$0 < u_1 < u_2 \quad (\text{случай строго одностороннего поворота})$$

А.А. Марков (1889), R. Isaacs (1951), L. Dubins (1957)



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

Множество достижимости в момент t_f :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

Множество достижимости к моменту t_f :

$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$

Слайд 2

Машиной Дубинса называем объект с геометрическим ограничением на скалярное управление, который описывается на слайде слева. Имеет смысл выделять 4 случая ограничений (указаны справа). В третьем и четвёртом из них поворот возможен только в одну сторону. Такие случаи мы не рассматриваем в данном докладе. Будем говорить о классическом симметричном случае (называем его каноническим), а также об общем несимметричном случае с поворотами в обе стороны.

Рассмотрение такого объекта очень популярно в литературе. А.А.Марков, R.Isaacs и L.Dubins – это те учёные, работы которых были первыми, где использовалась данная модель.

Величину линейной скорости считаем постоянной. Угол направления вектора скорости отсчитывается от оси x против часовой стрелки. Подчёркиваем, что значения угла не отождествляются по модулю 2π .

Нас интересует множество достижимости “в момент”, которое определяется как совокупность всех трёхмерных фазовых состояний в момент t_f , получаемых при переборе допустимых программных управлений. В формальной постановке под допустимыми управлениями понимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие заданному геометрическому ограничению. Рассматривая принцип максимума Понтрягина для управлений, ведущих на границу множества достижимости, убеждаемся в том, что класс допустимых программных управлений в определении множества достижимости можно сузить до кусочно-постоянных управлений.

Подчеркнём, что мы не будем говорить о множестве достижимости “к моменту”.

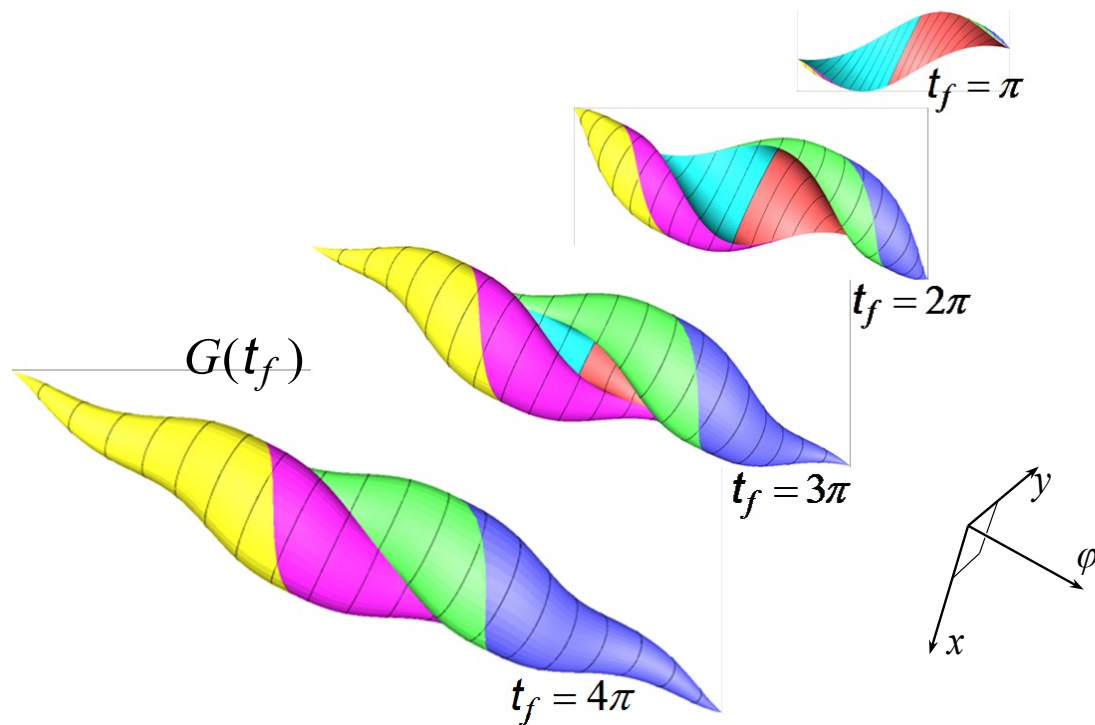
Цель данной работы – аналитическое описание множества достижимости “в момент” и выявление свойств его симметрии.

Трёхмерное множество достижимости «В МОМЕНТ»

$$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$$

(+1, 0, +1)
(-1, 0, +1)
(+1, 0, -1)
(-1, 0, -1)
(+1, -1, +1)
(-1, +1, -1)

$G_\varphi(t_f)$ – φ -сечение



Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.

Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы

// Известия РАН. ТуСУ. 2003. № 3. С. 8 – 16.

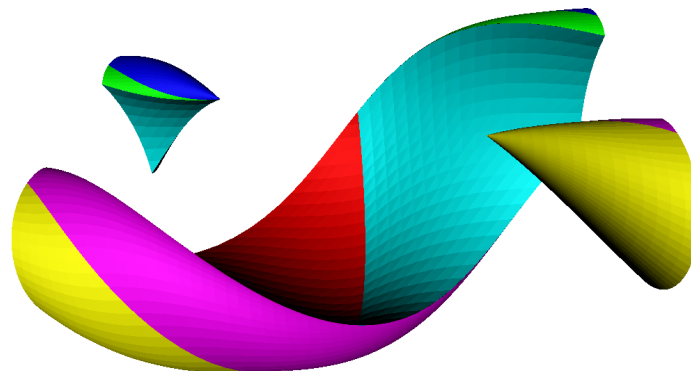
Слайд 3

Здесь показаны результаты численного построения множества достижимости для четырёх моментов времени t_f при возрастании этих моментов. Раскраской отмечены участки поверхности границы множества достижимости с одинаковым характером кусочно-постоянного программного управления, ведущего на границу. Например, в каждую точку синей поверхности ведёт управление со значениями 1, 0, 1. Всего шесть вариантов, каждый даёт управление с не более чем двумя переключениями. Таким образом, мы не только говорим о шести типах управлений ведущих на границу, но и указываем кусок поверхности, на который приводят управления одного и того же типа.

Эти результаты были получены в статье 2003 г.

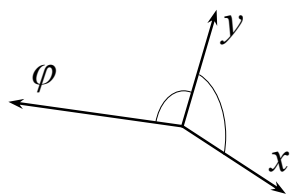
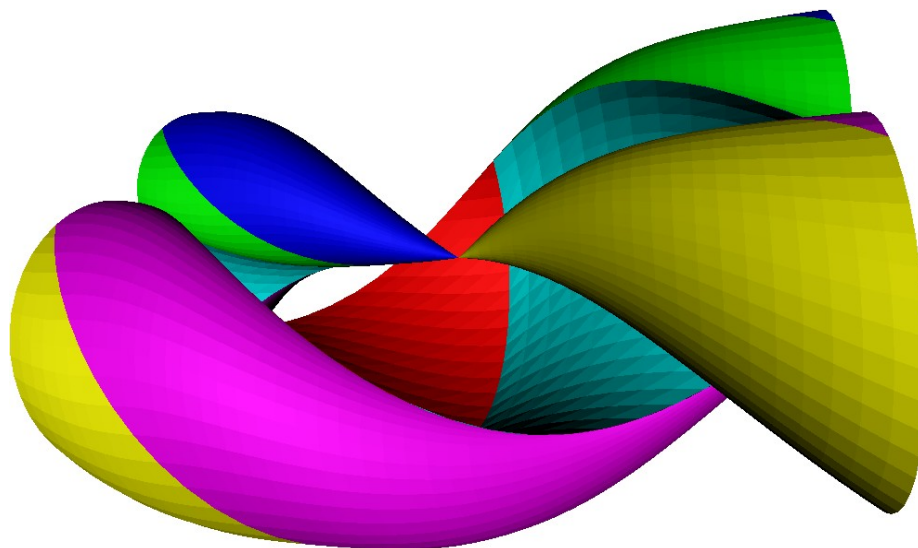
Трёхмерное множество достижимости «в момент» с обрезкой по модулю 2π : сложное описание

$$t_f = 1.5\pi$$



$G(t_f)$

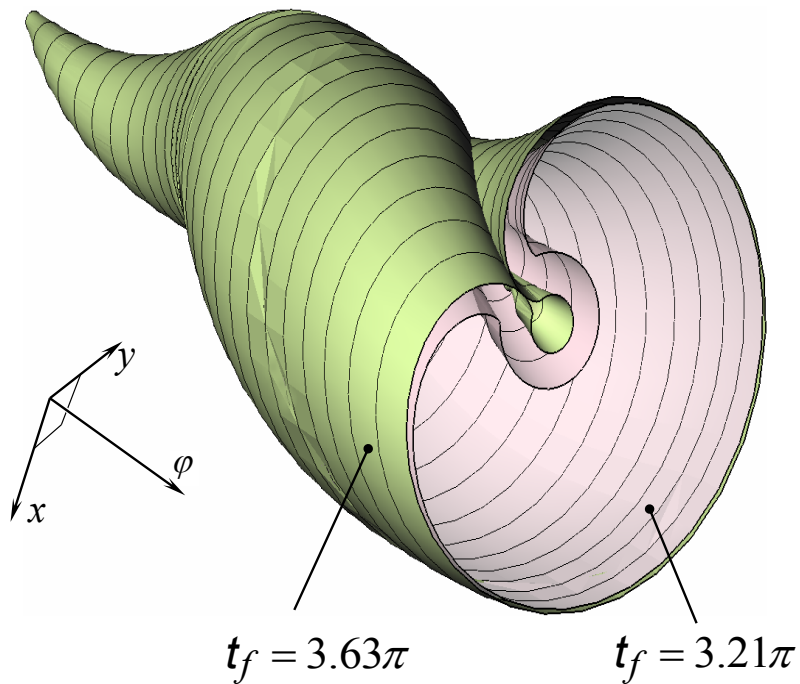
$$t_f = 2\pi$$



Слайд 4

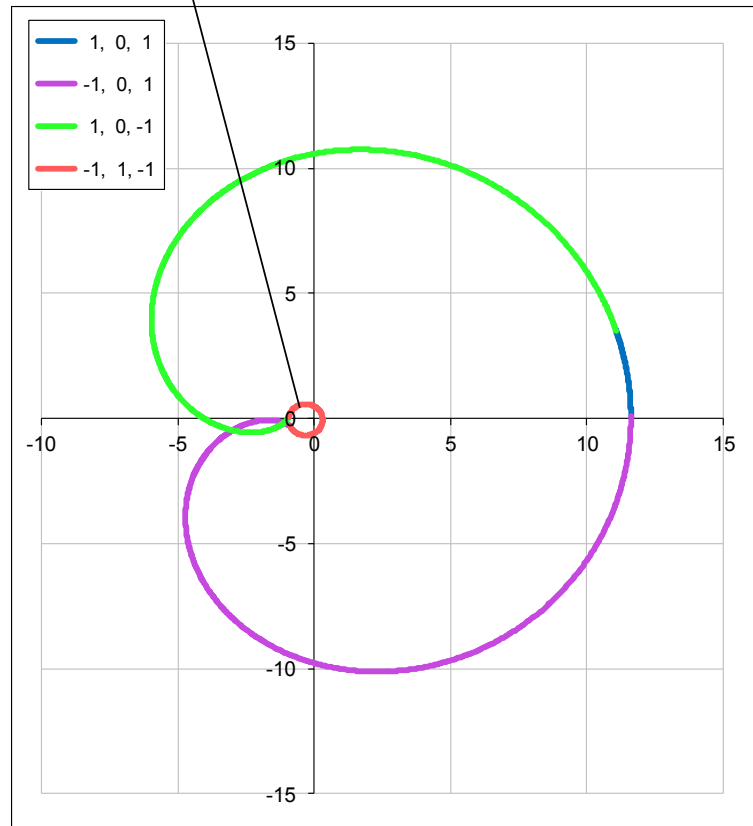
Ещё раз отметим, что отождествление угла φ по модулю 2π нами не осуществляется. Причина – существенное усложнение структуры множества достижимости при отождествлении. Соответствующие примеры показаны на слайде.

Нарушение односвязности множества достижимости



Плоскость сечения соответствует $\varphi = 0$

Это множество не принадлежит φ -сечению

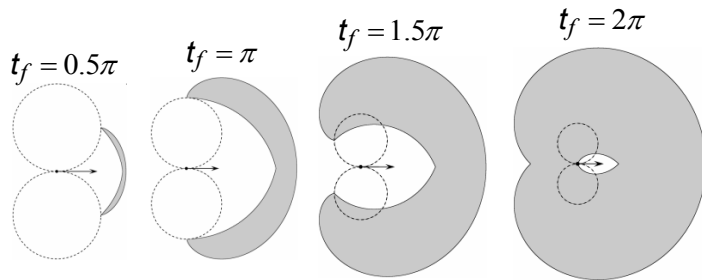


φ -сечение множества достижимости
для $\varphi = 0.1\pi$ и $t_f = 3.7\pi$

Слайд 5

Но даже при отсутствии отождествления по модулю 2π структура множества достижимости может быть весьма сложной. На слайде слева показаны два множества, разрезанные плоскостью $\varphi = 0$. Они поясняют процесс формирования полости, не принадлежащей множеству достижимости. Появление такой полости означает потерю односвязности трёхмерного множества достижимости. Справа показано некоторое двумерное φ -сечение множества достижимости, которое также не является односвязным.

Множество достижимости в проекции на плоскость геометрических координат x, y



SIAM J. CONTROL
Vol. 13, No. 1, January 1975

PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

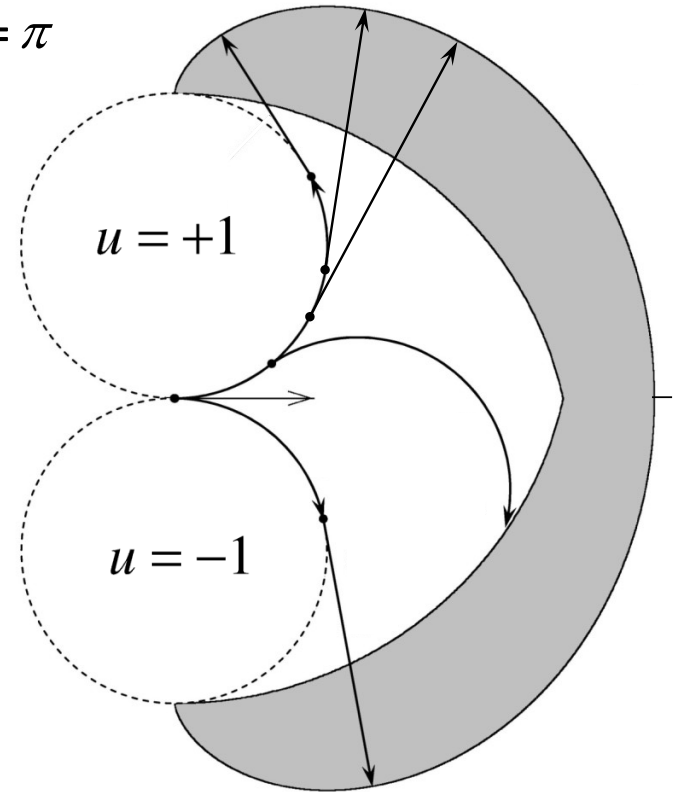
E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t , the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t , thus extending the results of several recent authors.

Ю.И.Бердышев

Нелинейные задачи последовательного
управления и их приложение
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015, 193 с.

$$t_f = \pi$$



Граница состоит
из двух эвольвент круга (внешняя граница)
и двух кардиод (внутренняя граница)

Слайд 6

В литературе известно описание проекции трёхмерного множества достижимости на плоскость геометрических координат. Такие проекции для четырёх моментов времени показаны слева (канонический симметричный случай). Справа поясняются два типа движений (поворот–прямая, поворот–поворот), образующих границу проекции. Соответствующие участки границы представляют собой две эвольвенты и две кардиоиды.

Нас будет интересовать аналитическое описание φ -сечений трёхмерного множества достижимости.

Канонический симметричный случай

Слайд 7

Вначале рассмотрим канонический симметричный случай.

Управления, порождающие границу трёхмерного множества достижимости

Теорема (симметричный случай). В любую точку границы множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad |u| \leq 1$$

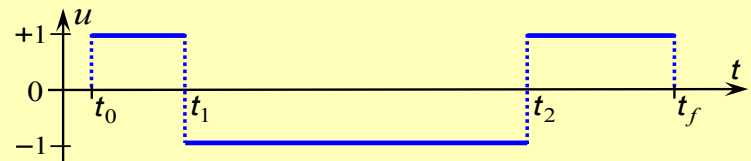
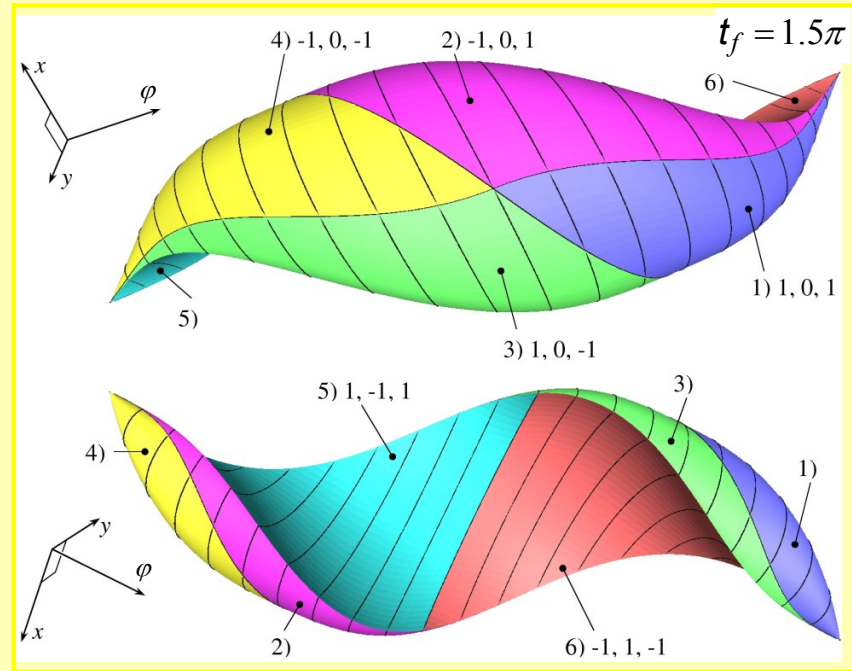
можно прийти с использованием кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. В случае двух переключений достаточно рассмотреть следующие 6 вариантов:

- 1) $+1, 0, +1$; 2) $-1, 0, +1$; 3) $+1, 0, -1$;
 4) $-1, 0, -1$; 5) $+1, -1, +1$; 6) $-1, +1, -1$.

При этом для случаев 5), 6) ограничиваемся управлениями, которые удовлетворяют неравенству

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) \leq (t_2 - t_1)$$

Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТуСУ. 2003. № 3. С. 8–16.

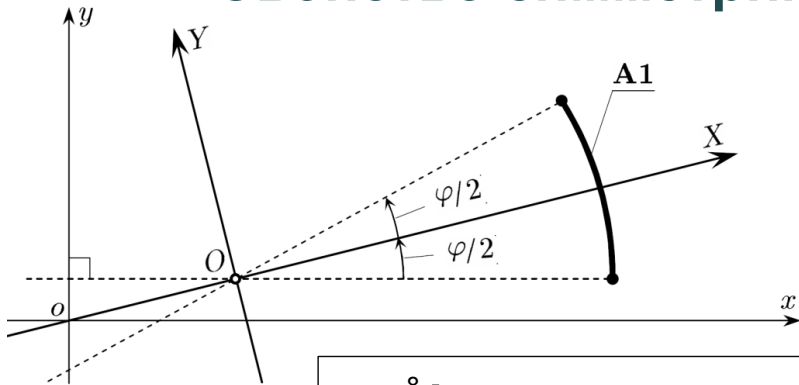


Слайд 8

Справедливо утверждение о шести типах управлений с двумя переключениями, при помощи которых мы полностью описываем границу трёхмерного множества достижимости. Для вариантов 5) и 6) требуется выполнение дополнительного условия о длине среднего участка постоянства управления. Это условие отличает сформулированный результат от теоремы в работе Дубинса, посвящённой задаче быстрогодействия. Используя указанные шесть типов управления, можем численно строить границу множества достижимости. Пример множества достижимости (с двух ракурсов) показан справа.

Сформулированный результат и картинка справа взяты из нашей старой статьи 2003 г.

Вспомогательная система координат. Свойство симметрии относительно оси X



Для любых t_f и $\varphi \geq 0$ φ -сечение является симметричным относительно оси X вспомогательной системы координат XOY . Ось X проходит через начало координат исходной системы xoy .

$$\varphi = \pi/4$$

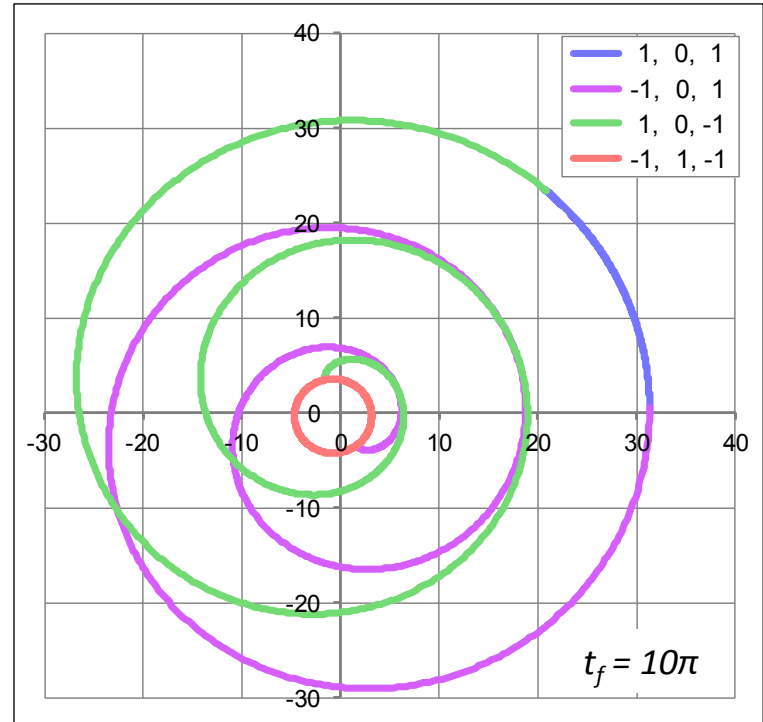
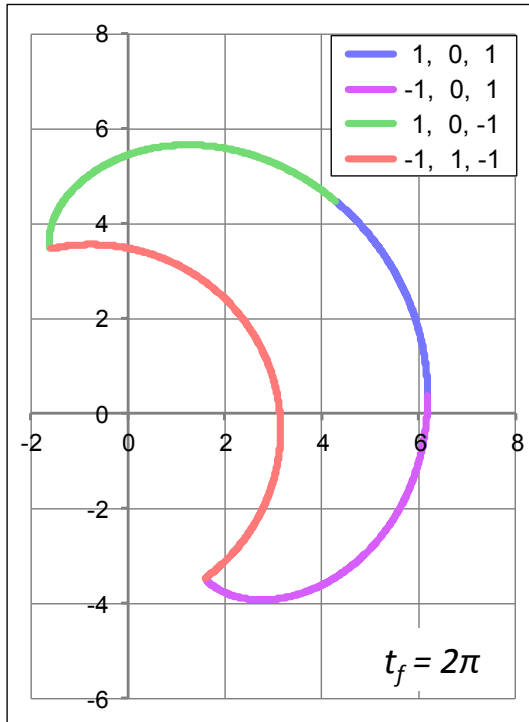
4 типа кривых :

A1 : +1, 0, +1

A2 : -1, 0, +1

A3 : +1, 0, -1

A6 : -1, +1, -1



Слайд 9

В дальнейшем будем иметь дело с φ -сечениями трёхмерного множества достижимости. Закрепив угол $\varphi \geq 0$ и используя четыре типа управления (ведущие на границу множества достижимости), получаем четыре параметрически заданные кривые A1, A2, A3, A6. Склейка их образует замкнутую кривую \mathcal{A}_φ , два примера которой показаны на слайде. Цвета соответствуют типам управления. Для левого рисунка время t_f не очень большое, и кривая \mathcal{A}_φ даёт границу φ -сечения. С увеличением момента t_f (правый рисунок) на склеенной (составной) кривой есть самопересечения и значительная часть кривой уже не лежит на границе φ -сечения.

Доказана симметрия составной кривой относительно оси X некоторой вспомогательной прямоугольной системы координат X, Y . Расположение вспомогательной системы координат зависит только от угла φ .

Составная кривая будет играть главную роль в классификации φ -сечений.

Кривые A2 и A3 – эвольвенты

$$s_2 = -t_1 \quad s_2 \in [-\theta, 0] \quad \theta = (t_f - \varphi)/2$$

$$s_3 = t_1 - \varphi \quad s_3 \in [0, \theta]$$

$$A2(s_2) = \begin{pmatrix} X_{U2}(s_2) \\ Y_{U2}(s_2) \end{pmatrix} = 2(\theta + s_2) \begin{pmatrix} \cos(s_2 - \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(s_2 - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} - 4\sin(\frac{s_2}{2}) \begin{pmatrix} \cos(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$A3(s_3) = \begin{pmatrix} X_{U3}(s_3) \\ Y_{U3}(s_3) \end{pmatrix} = 2(\theta - s_3) \begin{pmatrix} \cos(s_3 + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(s_3 + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} + 4\sin(\frac{s_3}{2}) \begin{pmatrix} \cos(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}$$

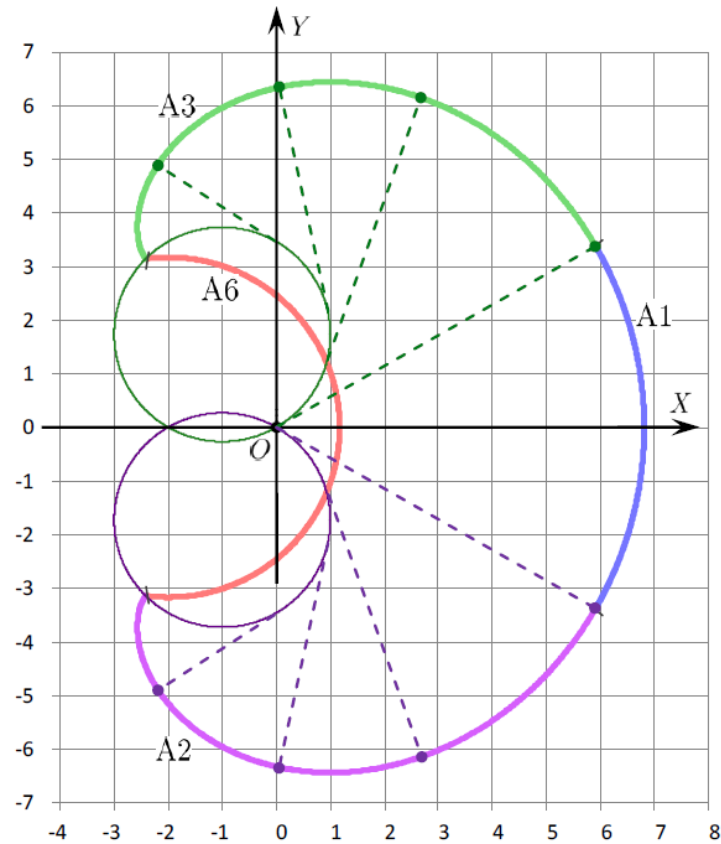
После тригонометрических преобразований получаем каноническое параметрическое представление каждой из кривых A2 и A3 в виде эвольвенты круга:

$$X(\tau) = r \cos \tau + r\tau \sin \tau,$$

$$Y(\tau) = r \sin \tau + r\tau \cos \tau.$$

Здесь r – радиус круга, τ – параметр (угол поворота производящей прямой).

Для кривой A2 имеем $\tau = \theta + s_2$



$$t_f = 2.5\pi \quad \varphi = \pi/3$$

Слайд 10

Все части составной кривой \mathcal{A}_φ описываются аналитически. Кривые A_1 , A_6 представляют собой дуги некоторых окружностей. Кривые A_2 , A_3 имеют гораздо более сложное описание (формулы приведены на слайде). Установлено, что они являются участками эвольвент двух окружностей. Пунктирные линии на рисунке справа поясняют интерпретацию кривых A_2 , A_3 в виде эвольвент, но они не являются траекториями системы, ведущими на эти кривые.

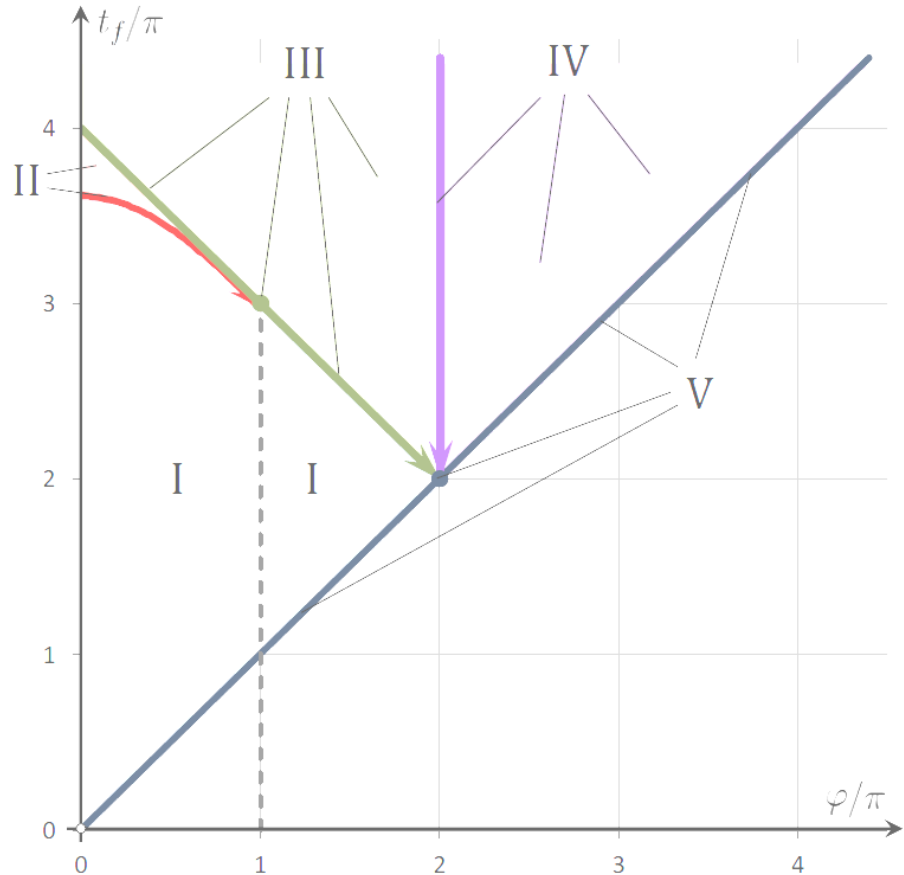
Классификация φ -сечений трёхмерного множества достижимости

- I. $0 \leq \varphi < t_f$, $t_f < 4\pi - \varphi$, $t_f < 3\pi + 2 \cos(\varphi/2)$.
- II. $0 \leq \varphi < \pi$, $t_f < 4\pi - \varphi$, $t_f \geq 3\pi + 2 \cos(\varphi/2)$.
- III. $0 \leq \varphi < 2\pi$, $t_f \geq 4\pi - \varphi$.
- IV. $2\pi \leq \varphi < t_f$.
- V. $\varphi = t_f$.

Свойство симметрии:

Если $u_*(t) = -u^*(t)$,

то $x_*(t_f) = x^*(t_f)$,
 $y_*(t_f) = -y^*(t_f)$,
 $\varphi_*(t_f) = -\varphi^*(t_f)$.



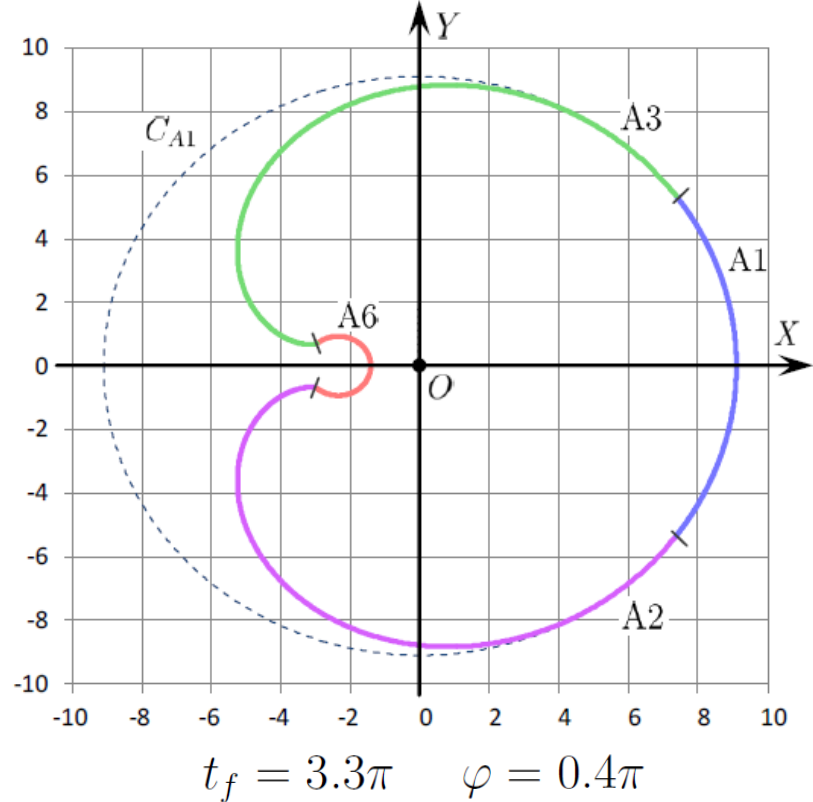
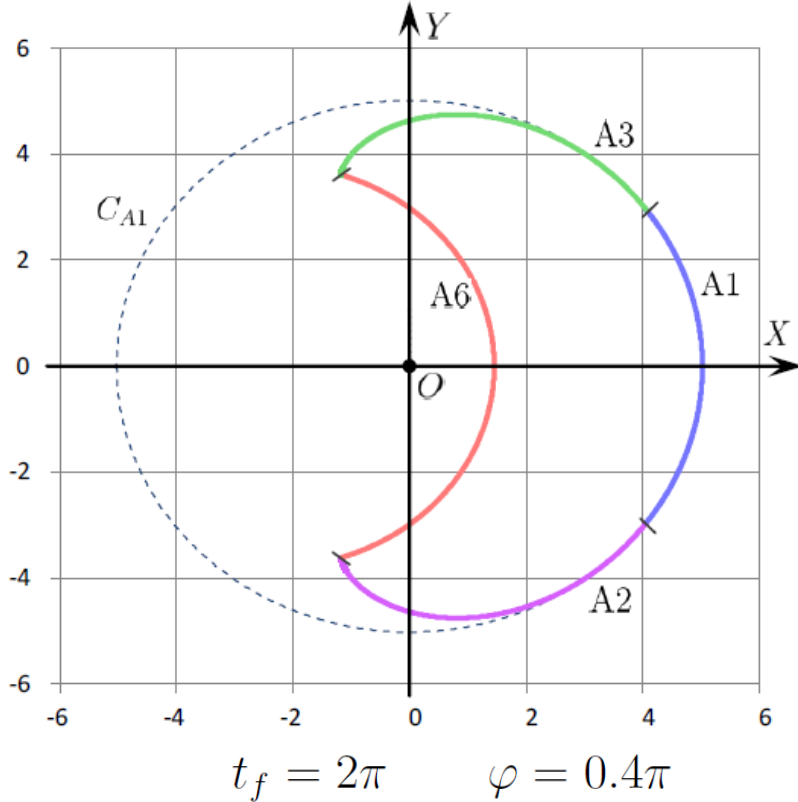
Слайд 11

Данный слайд – один из главных в докладе. На нём представлена классификация φ -сечений трёхмерного множества достижимости в каноническом симметричном случае для $\varphi \geq 0$. На плоскости φ, t_f аналитически описаны пять множеств, характеризующих пять вариантов структуры φ -сечений, которые возможны при $\varphi \geq 0$. Для $\varphi < 0$ картинка симметричная.

Забегая вперёд, отметим, что наиболее сложная структура φ -сечений реализуется в варианте II. Здесь теряется односвязность φ -сечений. Размер множества II небольшой и в практических задачах может быть упущен из виду.

Вариант V является тривиальным. Он соответствует одноточечному φ -сечению. Далее рассмотрим более подробно каждый из вариантов I–IV.

Вид φ -сечений для варианта I



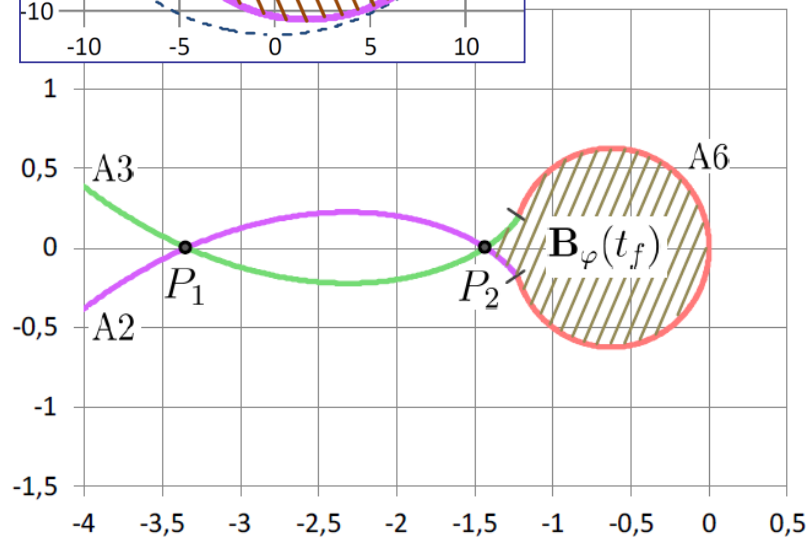
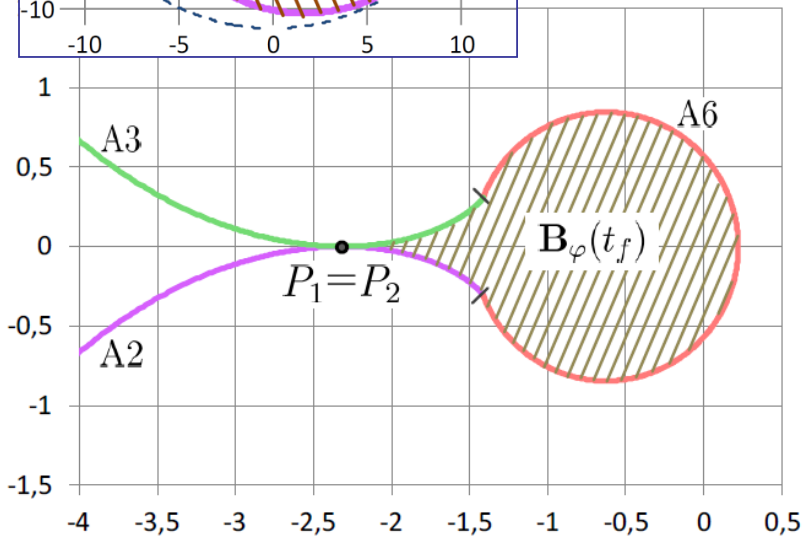
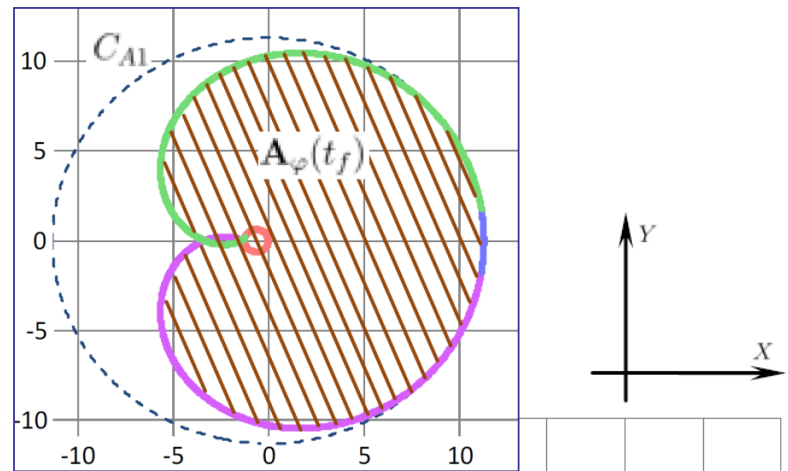
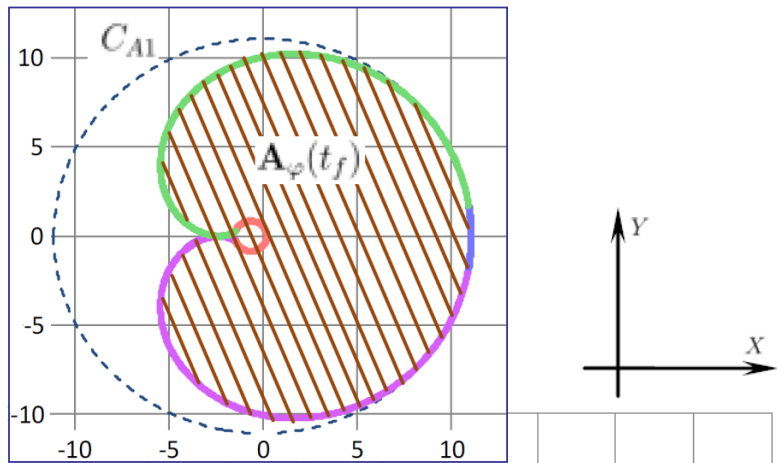
Вариант I при дополнительном ограничении $t_f \leq 2\pi$ рассмотрен в работе

Пацко В.С., Федотов А.А. (2020) Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института Математики и Механики УрО РАН том 26, № 1, с. 182–197

Слайд 12

Вариант I характеризуется простой (без самопересечений) замкнутой кривой \mathcal{A}_φ , которая совпадает с границей φ -сечения. Для значений $t_f \leq 2\pi$ такой вариант был рассмотрен в нашей работе 2020 г.

Вид φ -сечений для варианта II



$$t_f = 3\pi + 2 \cos(0.05), \quad \varphi = 0.1\pi$$

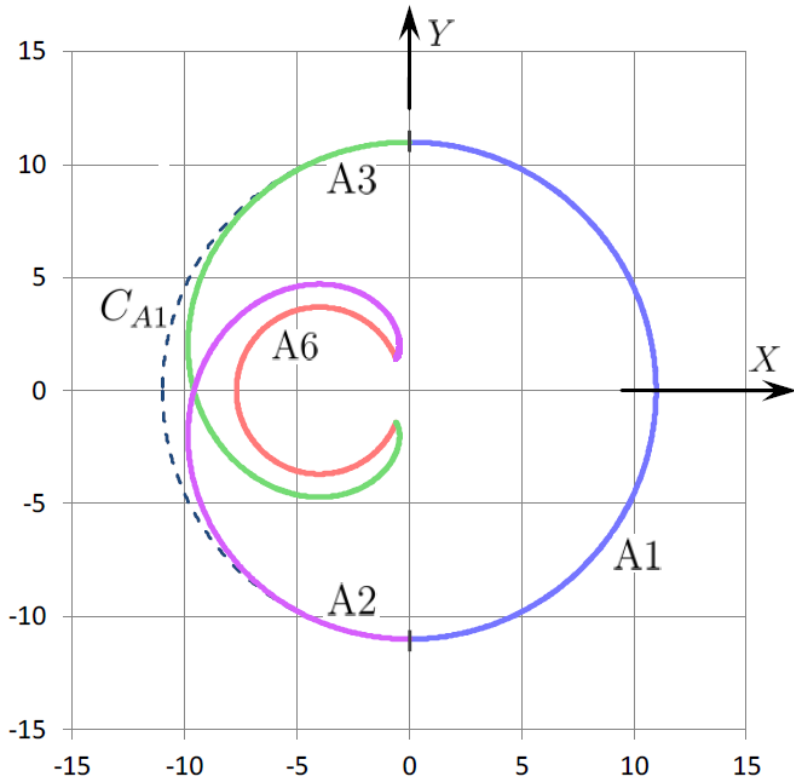
$$t_f = 3.7\pi, \quad \varphi = 0.1\pi$$

$$G_\varphi(t_f) = \mathbf{A}_\varphi(t_f) \setminus \text{int} \mathbf{B}_\varphi(t_f)$$

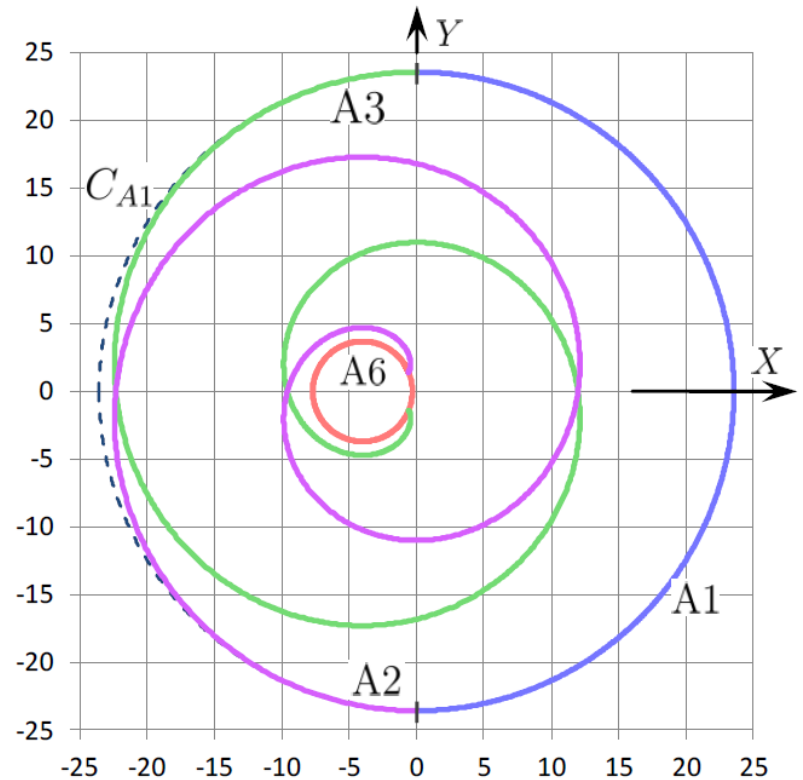
Слайд 13

Вариант II характеризуется потерей односвязности φ -сечения. На составной кривой \mathcal{A}_φ может быть одно или два самопересечения, как показано на слайде. Полость, не принадлежащая φ -сечению, представлена в увеличенном масштабе в нижней части слайда. В итоге φ -сечение задаётся внешней (два верхних рисунка) и внутренней (нижние рисунки) границами.

Вид φ -сечений для варианта III (невырожденный подслучай)



$$t_f = 4.5\pi, \quad \varphi = \pi$$



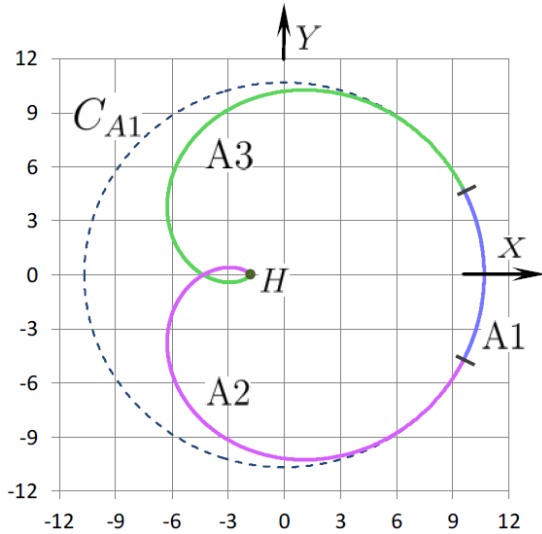
$$t_f = 8.5\pi, \quad \varphi = \pi$$

Граница φ -сечения образована кривой A1 и участками кривых (эвольвент) A2 и A3 до точки их первого пересечения

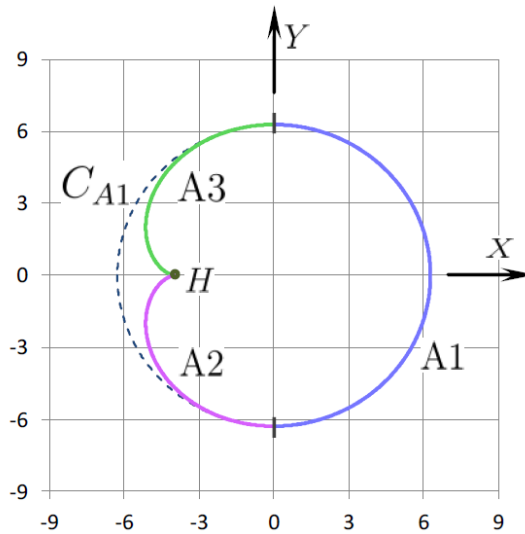
Слайд 14

В случае варианта III граница φ -сечения образована дугой $A1$ и участками кривых $A2$ и $A3$ до точки их первого пересечения. Невырожденным называем подслучай, когда $\varphi + t_f > 4\pi$. В таком подслучае кривая $A6$ целиком и оставшиеся (после точки первого пересечения) части кривых $A2, A3$ находятся во внутренней области φ -сечения.

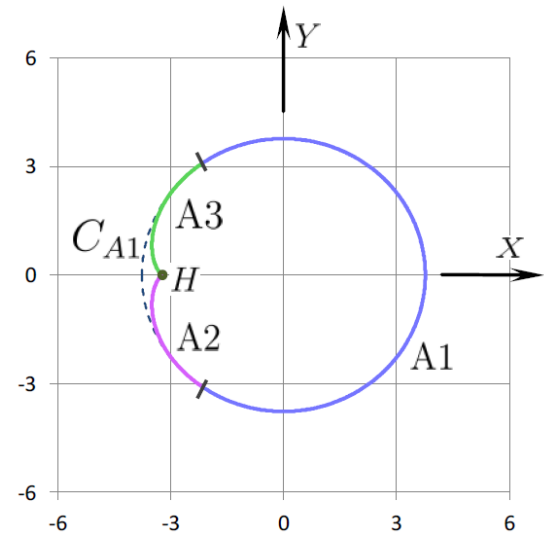
Вид φ -сечений для варианта III (вырожденный подслучай)



$$\varphi = 0.3\pi, t_f = 3.7\pi$$



$$\varphi = 1.0\pi, t_f = 3.0\pi$$



$$\varphi = 1.4\pi, t_f = 2.6\pi$$

*Кривые A1, A2, A3 показаны полностью.
Кривая A6 вырождается в точку H.*

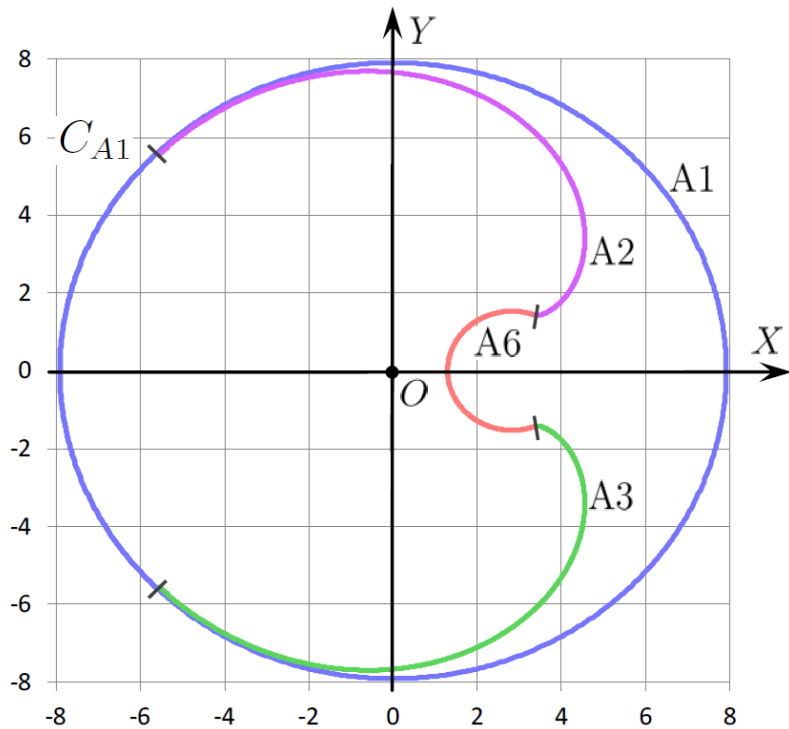
Граница φ -сечения образована кривой A1 и участками кривых (эвольвент) A2 и A3 до точки их первого пересечения.

В вариантах б) и в) точка первого пересечения совпадает с точкой H.

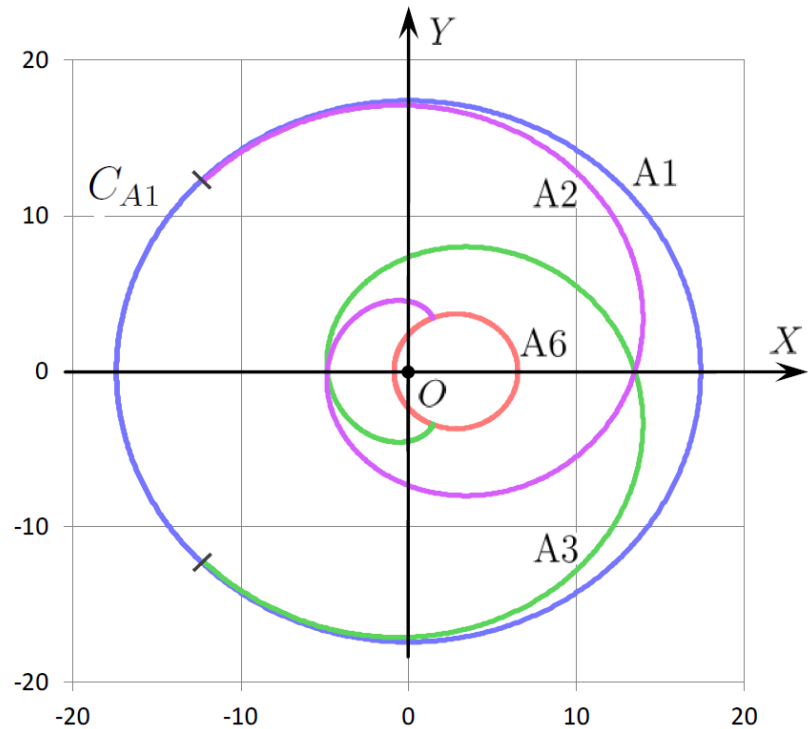
Слайд 15

Вырожденный подслучай варианта III определяется равенством $\varphi + t_f = 4\pi$. Особо выделим левый рисунок. Здесь точка H принадлежит внутренности φ -сечения, однако точка (H, φ) в трёхмерном пространстве находится на границе трёхмерного множества достижимости.

Вид φ -сечений для варианта IV



$$t_f = 5\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$



$$t_f = 8\pi, \quad \varphi = 2.5\pi$$

Кривая A1 – окружность с раствором больше 2π .

Множество $G_\varphi(t_f)$ – круг C_{A1} .

Слайд 16

Для варианта IV φ -сечение представляет собой круг, граница которого образована кривой A1. Кривые A2, A3, A6 находятся во внутренности φ -сечения.

Случай несимметричных ограничений на управление

Слайд 17

Переходим к случаю несимметричных ограничений на управление. Главный вопрос: будет ли здесь что-то новое по сравнению с симметричным случаем?

Формула соответствия φ -сечений

Случай несимметричных ограничений на управление при построении множества достижимости сводится к каноническому симметричному случаю.

$$\dot{x} = \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = u;$$

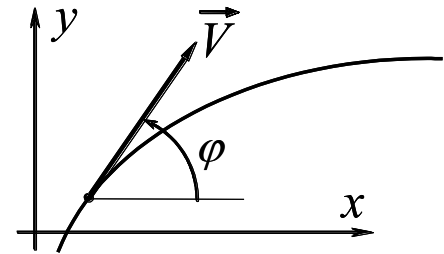
$$u \in [u_1, u_2]$$

$$u_1 = -1, u_2 = 1$$

(канонический симметричный случай)

$$u_1 < 0 < u_2$$

(несимметричный случай
с поворотами влево и вправо)



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

Пусть в несимметричном случае надо найти φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ для некоторых значений t_f и φ . Вводим момент t_f^c по формуле $t_f^c = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi$.

Рассматриваем при том же значении φ сечение $G_\varphi^c(t_f^c)$ для канонического случая. Во вспомогательной системе координат (она зависит только от φ) получаем нужное сечение $G_\varphi(t_f)$ с помощью аффинного преобразования (умножение на коэффициент и сдвиг):

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} G_\varphi^c(t_f^c) + 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Слайд 18

Мы установили, что построение φ -сечений для общего несимметричного случая можно выполнить при помощи несложного преобразования φ -сечений для канонического случая.

А именно, пусть требуется найти некоторое φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ в несимметричном случае при оговоренных u_1 , u_2 и t_f . Рассмотрим φ -сечение $G_\varphi^c(t_\varphi^c)$ для канонического случая при том же φ , но другом моменте t_φ^c , который рассчитывается по формуле, приведённой на слайде. Момент t_φ^c зависит от исходных данных несимметричной системы. Искомое φ -сечение $G_\varphi(t_f)$ связано с φ -сечением $G_\varphi^c(t_\varphi^c)$ для канонического случая формулой, приведённой внизу слайда.

Соответствующее преобразование является аффинным (умножение на коэффициент и сдвиг).

На следующих слайдах поясним происхождение этой формулы.

Управления, порождающие границу трёхмерного множества достижимости в несимметричном случае

Теорема (несимметричный случай). В любую точку границы множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u,$$

$$u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < 0 < u_2.$$

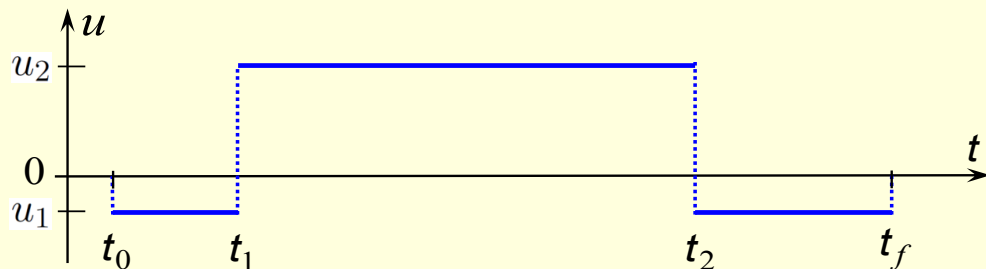
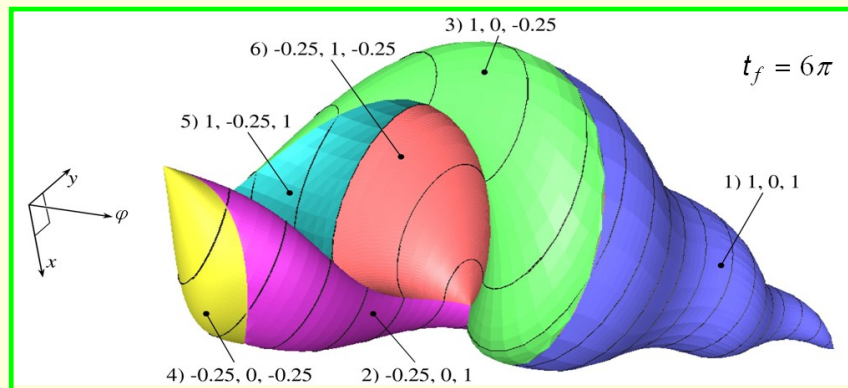
можно прийти с использованием кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

В случае двух переключений достаточно рассмотреть следующие 6 вариантов:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| U1) $u_2, 0, u_2$; | U2) $u_1, 0, u_2$; | U3) $u_2, 0, u_1$; |
| U4) $u_1, 0, u_1$; | U5) u_2, u_1, u_2 ; | U6) u_1, u_2, u_1 . |

При этом для случаев U5), U6) мы можем ограничиться управлениями, которые удовлетворяют неравенству

$$|(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2))| \leq |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|.$$



Для $\varphi \geq 0$ оставляем 4 варианта :

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| U1) $u_2, 0, u_2$; | U2) $u_1, 0, u_2$; |
| U3) $u_2, 0, u_1$; | U6) u_1, u_2, u_1 . |

Слайд 19

Прежде всего нам потребовалось распространить утверждение о шести типах управлений, ведущих на границу трёхмерного множества достижимости на несимметричный случай. Данный слайд является аналогом слайда 8. Картинка справа вверху является примером множества достижимости в несимметричном случае. Данное множество построено численно с использованием указанных на слайде шести типов кусочно-постоянных управлений с двумя переключениями.

Для $\varphi \geq 0$ из шести типов управлений остаются четыре типа (так же, как в каноническом случае).

Аналитическое описание экстремальных кривых ($\varphi \geq 0$)

$$A_1(s_1) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\theta \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_1}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_1}{2} \right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2), \quad \xi_\varphi(u_2) = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2(s_2) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\left(\theta + s_2 \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_2 - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} - 2 \sin \left(\frac{s_2}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$A_3(s_3) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[\left(\theta - s_3 \right) \begin{pmatrix} \cos \left(s_3 + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(s_3 + \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{s_3}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$A_6(s_6) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \left[- \begin{pmatrix} 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{-s_6}{2} \right) \\ \sin \left(\frac{-s_6}{2} \right) \end{pmatrix} \right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$s_1 \in [-\varphi, \varphi], \quad s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [0, \theta], \quad s_6 \in [-\theta, \theta], \quad \theta = \frac{u_1 (\varphi - t_f \cdot u_2)}{u_2 - u_1}.$$

Слайд 20

При фиксированном $\varphi \geq 0$ каждый из четырёх типов управлений даёт однопараметрическую кривую, которую можно записать аналитически. Здесь (так же, как в каноническом случае) используем вспомогательную систему координат X, Y .

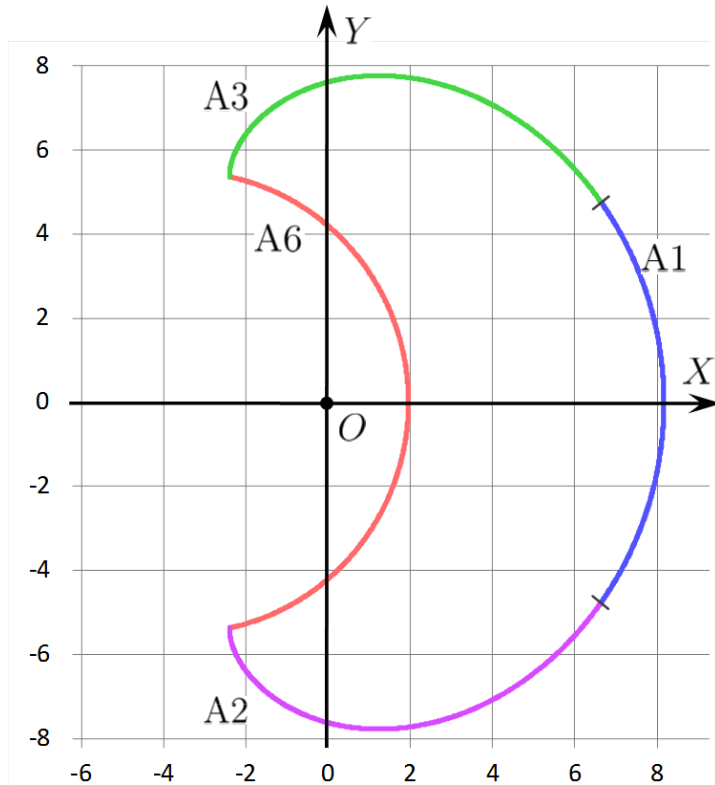
Видим, что во всех формулах для кривых A_1, A_2, A_3, A_6 есть своя квадратная скобка. Коэффициент при ней и сдвиг в виде последнего слагаемого одни и те же во всех формулах. Квадратная скобка зависит от величины θ , определяемой по исходным данным. Диапазоны изменения параметров s_1, s_2, s_3, s_6 приведены внизу слайда.

Структурная особенность данных формул существенно используется при выводе соответствия между φ -сечениями в несимметричном и каноническом случаях.

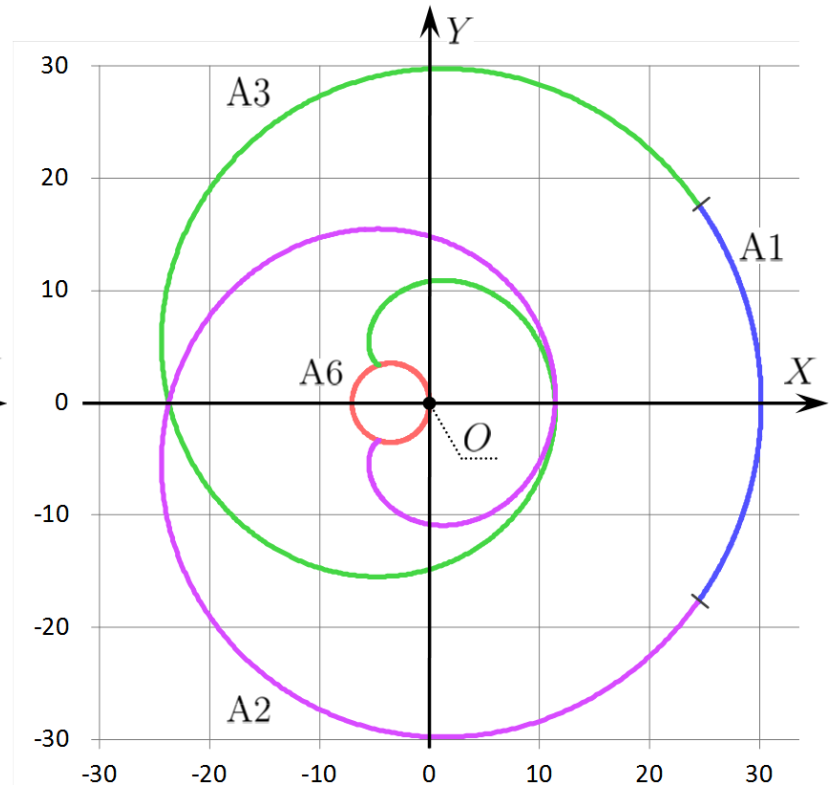
Составная кривая при исходных ограничениях на управление

$A_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ -- замкнутая кривая,
составленная из кривых A_1, A_2, A_3, A_6

$$u_1 = -0.5 \quad u_2 = 1 \quad \varphi = 0.4\pi$$



$$t_f = 3\pi$$



$$t_f = 10\pi$$

Слайд 21

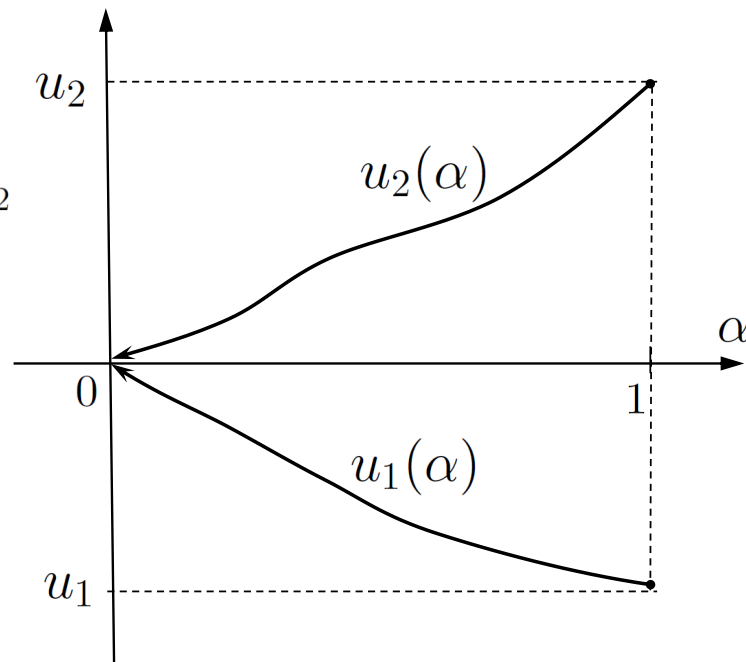
В несимметричном случае так же, как в каноническом симметричном, рассматриваем составную кривую, являющуюся объединением кривых A_1, A_2, A_3, A_6 (формулы для этих кривых были приведены на предыдущем слайде). Составную кривую обозначим $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$. Эта кривая симметрична относительно оси X вспомогательной системы координат.

Два примера составной кривой для $u_1 = -0.5, u_2 = 1, \varphi = 0.4\pi$ показаны на слайде.

Составные кривые при «уменьшенных» ограничениях на управление

$$u_1 \rightarrow u_1(\alpha) \rightarrow 0 \leftarrow u_2(\alpha) \leftarrow u_2$$

$\alpha : 1 \rightarrow 0$
 $\alpha : 1 \rightarrow 0$



$\mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f)$ -- семейство замкнутых составных кривых при $\alpha \in (0, 1]$

Через каждую точку φ -сечения проходит по крайней мере одна из таких кривых. \Rightarrow Объединение замкнутых составных кривых совпадает с φ -сечением в целом :

$$G_\varphi(t_f) = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \{ \mathcal{A}_\varphi(u_1(\alpha), u_2(\alpha), t_f) \}$$

Слайд 22

Пусть зафиксированы ограничения u_1 и u_2 , а также значения $t_f > 0$, $\varphi \in [0, t_f u_2)$. Установлено, что при непрерывном уменьшении интервала $[u_1(\alpha), u_2(\alpha)]$ ограничений на управление получаемая совокупность составных кривых полностью покрывает φ -сечение $G_\varphi(t_f)$.

Функции $u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$, обеспечивающие соответствие φ -сечений в несимметричном и каноническом симметричном случаях

$$u_1^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) + (u_2 - u_1)},$$

$$u_1^{(2)}(\alpha) = -\alpha,$$

$$u_2^{(1)}(\alpha) = \frac{2\alpha u_1 u_2}{\alpha(u_2 + u_1) - (u_2 - u_1)}$$

$$u_2^{(2)}(\alpha) = -u_1^{(2)}(\alpha) = \alpha$$

(несимметричный случай)

(канонический симметричный случай)

Для указанных функций $u_1^{(1)}(\alpha)$, $u_2^{(1)}(\alpha)$, $u_1^{(2)}(\alpha)$, $u_2^{(2)}(\alpha)$ справедлива формула соответствия частей составных кривых :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{A_{n,\alpha}^{(1)}}_{\text{red box}} \left(\frac{1}{u_2^{(1)}(\alpha)} - \frac{1}{u_1^{(1)}(\alpha)} \right) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_{n,\alpha}^{(1)}} + \xi_\varphi \left(u_2^{(1)}(\alpha) \right) = \\
 = & \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} \left(\underbrace{\left(\frac{1}{u_2^{(2)}(\alpha)} - \frac{1}{u_1^{(2)}(\alpha)} \right) \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}_{A_{n,\alpha}^{(2)}} + \xi_\varphi \left(u_2^{(2)}(\alpha) \right)}_{\text{red box}} \right) + \xi_\varphi(u_2)
 \end{aligned}$$

Слайд 23

Выберем зависимости $u_1^{(1)}(\alpha)$ и $u_2^{(1)}(\alpha)$ для несимметричного случая и зависимости $u_1^{(2)}(\alpha)$ и $u_2^{(2)}(\alpha)$ для канонического случая так, чтобы выполнялась формула соответствия, которая была указана на слайде 18. Данная формула, но для каждой из кривых A_1, A_2, A_3, A_6 в отдельности, показана сейчас внизу. В этой формуле квадратные скобки с многоточием зависят от $u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha)$ в левой части и от $u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha)$ справа. Конкретный вид зависимостей $u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha)$ и $u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha)$ подобран так, чтобы квадратные скобки слева и справа совпали. Кроме того, выбор таких зависимостей обеспечивает выполнение равенства внизу слайда для любого α из $(0, 1]$.

Пояснение к формуле соответствия φ -сечений в несимметричном и каноническом симметричном случаях

Формула соответствия составных кривых:

$$\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^C) + \xi_\varphi(u_2), \quad \alpha \in (0, 1].$$

Поскольку

$$G_\varphi(t_f) = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \left\{ \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f) \right\}, \quad G_\varphi^C(t_f^C) = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \left\{ \mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^C) \right\},$$

(несимметричный случай)
(канонический симметричный случай)

то справедлива формула соответствия φ -сечений :

$$G_\varphi(t_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) G_\varphi^C(t_f^C) + \xi_\varphi(u_2)$$

$$t_f^C = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi, \quad \xi_\varphi(u_2) = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Слайд 24

Поскольку формула соответствия справедлива при рассмотрении отдельных кривых A_1, A_2, A_3, A_6 (зависящих от α), то такая же формула выполнена и для составных кривых. Параметр α изменяется в диапазоне $(0, 1]$. При этом объединение кривых $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(1)}(\alpha), u_2^{(1)}(\alpha), t_f)$ образует множество $G_\varphi(t_f)$, а объединение кривых $\mathcal{A}_\varphi(u_1^{(2)}(\alpha), u_2^{(2)}(\alpha), t_f^c)$ даёт множество $G_\varphi^c(t_f^c)$.

Таким образом, получаем обещанную формулу соответствия φ -сечений. Эта формула имеет вид аффинного преобразования и записана в координатах X, Y вспомогательной системы. Момент t_f^c вычисляется через параметры несимметричного случая. Сдвиг $\xi_\varphi(u_2)$ осуществляется вдоль оси X .

Формула соответствия позволяет получить описание φ -сечений для случая произвольных ограничений $u_1 < 0, u_2 > 0$ на управление u на основе известных φ -сечений для канонического симметричного случая. Поскольку формула соответствия представляет собой взаимно-однозначное отображение, то решение задачи описания φ -сечений фактически становится известным, если оно получено для некоторого конкретного случая при фиксированных значениях $u_1 < 0, u_2 > 0$.