СИММЕТРИЯ ТРЁХМЕРНОГО МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ ДУБИНСА

В.С. Пацко, А.А. Федотов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского,

Екатеринбург, Россия

Теория оптимального управления и приложения

(ОСТА 2022)

Екатеринбург, 27 июня – 1 июля 2022 г.

Слайд 1

В докладе рассматривается трёхмерное множество достижимости для нелинейного объекта, который стали называть “машина Дубинса”. Слово “симметрия” здесь надо понимать одновременно как обычную геометрическую симметрию, так и как возможность установления соответствия между множеством достижимости в общем случае (т.е. при произвольно заданных ограничениях на повороты влево и вправо) и в некотором каноническом случае.

Машина Дубинса

$$\dot{x} = \cos\varphi,$$
$$\dot{y} = \sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = u\ ;$$
$$u \in [u_1, u_2].$$

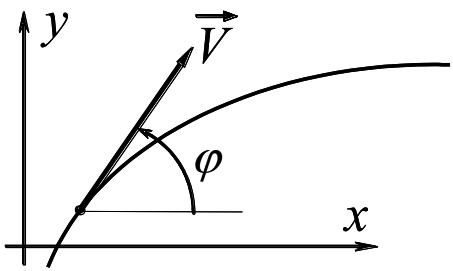
$u_1 = -1,\ u_2 = +1$ (*канонический симметричный случай*)

$u_1 < 0 < u_2$ (*несимметричный случай*)

$0 = u_1 < u_2$ (*случай одностороннего поворота*)

$0 < u_1 < u_2$ (*случай строго одностороннего поворота*)

A.A. Марков (1889), R. Isaacs (1951), L. Dubins (1957)



$\varphi \in (-\infty, +\infty)$

Множество достижимости в момент t_f*:*

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

Множество достижимости к моменту t_f*:*

$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \le t \le t_f} G(t)$$

Слайд 2

Это наш традиционный слайд. Слева показаны уравнения кинематики объекта, $u-$скалярное управление. Мы будем говорить только о случае, когда $u_1 < 0$, а $u_2 > 0$. Каноническим назовём случай, когда $u_1 = -1$ и $u_2 = 1$.

Машиной Дубинса такой объект называют в честь американского математика Lester Dubins. В его, возможно, самой первой опубликованной математической работе рассмотрена задача о свойствах линии минимальной длины, соединяющей две точки на плоскости с заданными направлениями выхода и входа. К сравнению при этом допускаются гладкие линии с оговоренным ограничением на радиус кривизны.

Андрей Андреевич Марков в своей статье, изданной в трудах Харьковского математического общества, рассмотрел 4 задачи, связанные с прокладкой железных дорог. Линии, которые он рассматривал, также удовлетворяли требованию ограниченного радиуса кривизны.

Rufus Isaacs в своих первых отчётах для Rand Corporation использовал указанную модель для описания движения автомобиля. Он первым стал называть такой объект словом “car”.

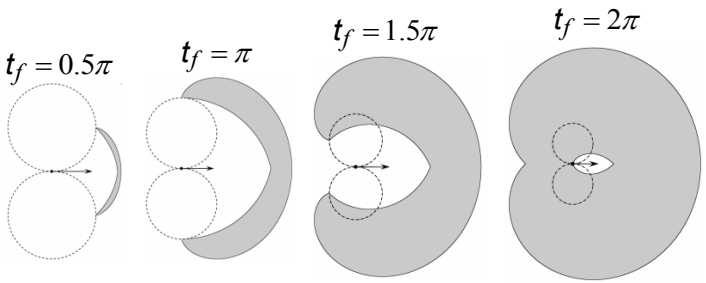
Мы предполагаем постоянной и равной единице величину линейной скорости объекта. Это дело нормировки. Угол направления вектора скорости отсчитывается от оси x против часовой стрелки и не отождествляется по модулю 2π. Трёхмерное начальное фазовое состояние считаем нулевым.

Множество достижимости в заданный момент t_f определяем как совокупность всех трёхмерных фазовых состояний, получаемых в этот момент при переборе допустимых программных управлений. В формальной постановке под допустимыми управлениями понимаем измеримые функции времени, удовлетворяющие заданному геометрическому ограничению. Привлекая принцип максимума Понтрягина, убеждаемся в том, что класс допустимых программных управлений в определении множества достижимости можно сузить до кусочно-постоянных управлений.

Мы ничего не будем говорить о множестве достижимости “к моменту”.

Цель работы – показать, что при исследовании множества достижимости можно ограничиться лишь каноническим случаем.

Множество достижимости в проекции на плоскость геометрических координат x, y



SIAM J. CONTROL
Vol. 13, No. 1, January 1975

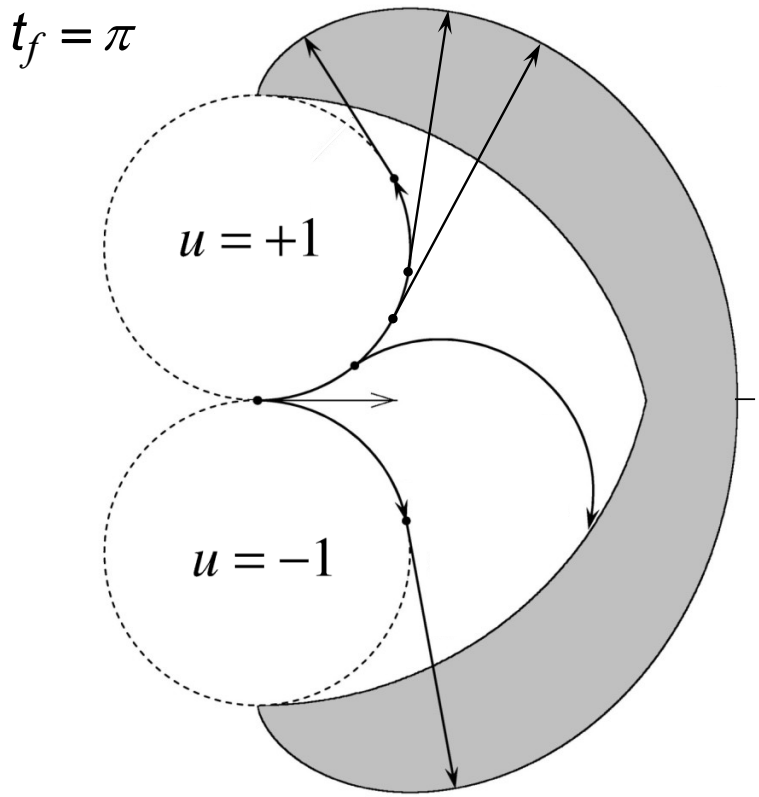
PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t, the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t, thus extending the results of several recent authors.

Ю.И.Бердышев

Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение
Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015, 193 с.



Граница состоит
из двух эвольвент круга (внешняя граница)
и двух кардиоид (внутренняя граница)

Слайд 3

В литературе известно описание проекции всего трёхмерного множества достижимости на плоскость геометрических координат в каноническом случае. Такие проекции для четырёх моментов времени показаны слева. Справа поясняются два типа движений (поворот–прямая, поворот–поворот), образующих границу проекции. Соответствующие участки границы представляют собой две эвольвенты и две кардиоиды.

Это практически всё, что связано с интересующим нас вопросом.

Трёхмерное множество достижимости «в момент» (канонический случай)

$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0$

(+1, 0, +1)

(-1, 0, +1)

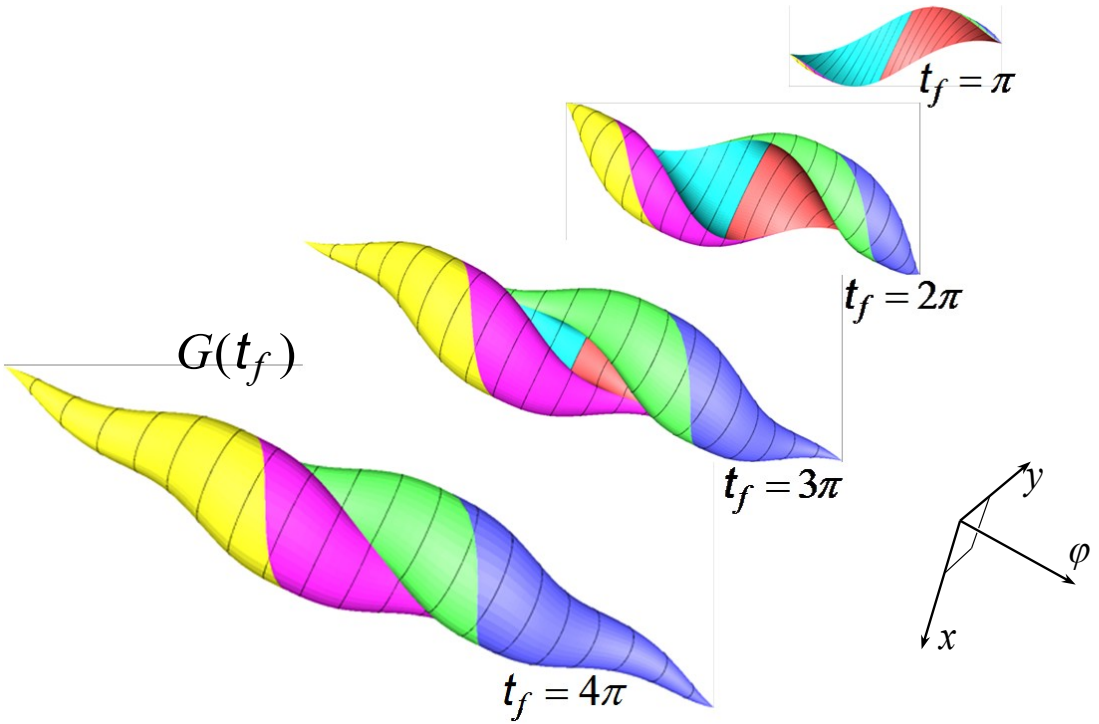
(+1, 0, -1)

(-1, 0, -1)

(+1, -1, +1)

(-1, +1, -1)

$G_\varphi(t_f)$ – φ-сечение



Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.

Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы

// Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8 –16.

Слайд 4

Доклад посвящён результатам, полученным аналитически. Но вся интуиция шла от анализа численных построений.

На слайде показаны результаты численного построения множества достижимости в каноническом случае для четырёх моментов времени t_f. Раскраской отмечены участки поверхности границы множества достижимости с одинаковым характером кусочно-постоянного программного управления, ведущего на границу. Например, в каждую точку синей поверхности ведёт управление, которое на первом интервале постоянства принимает значение 1, на втором – значение 0, на третьем – снова 1. При смене точки на синей поверхности порядок постоянных управлений сохраняется, но длительность промежутков изменяется.

В целом имеем шесть вариантов, каждый даёт управление с не более чем двумя переключениями. Таким образом, мы не только говорим о шести типах управлений, ведущих на границу, но и для каждого типа указываем соответствующий кусок поверхности.

Представленные на слайде результаты получены в статье 2003 г.

Рассечку трёхмерного множества $G(t_f)$ при фиксированном значении угловой координаты φ обозначим $G_\varphi(t_f)$ и будем называть φ-сечением. Дальнейшее изложение связано с такими φ-сечениями, причём не только в каноническом случае.

Управления, порождающие границу трёхмерного множества достижимости

Теорема (канонический случай). В любую точку границы множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u; \quad |u| \le 1$$

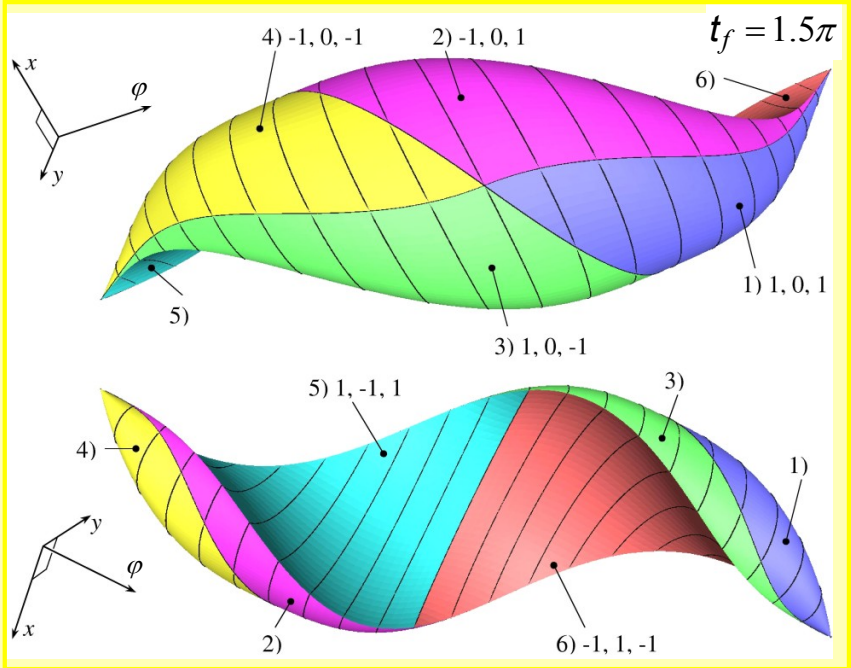
можно прийти с использованием кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. В случае двух переключений достаточно рассмотреть следующие 6 вариантов:

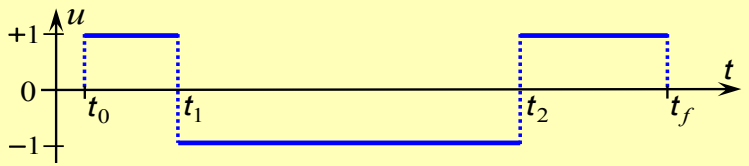
1) $+1, 0, +1$; 2) $-1, 0, +1$; 3) $+1, 0, -1$;

4) $-1, 0, -1$; 5) $+1, -1, +1$; 6) $-1, +1, -1$.

При этом для случаев 5), 6) ограничиваемся управлениями, которые удовлетворяют неравенству

$$(t_1 - t_0) + (t_f - t_2) \le (t_2 - t_1)$$





Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8 –16.

Dubins L.E. (1957) On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. American J. Math. Vol. 79, no. 3. P. 497–516.

Слайд 5

Приведём утверждение о шести типах управлений с двумя переключениями, при помощи которых мы полностью описываем границу трёхмерного множества достижимости в каноническом случае. Для вариантов 5) и 6) требуется выполнение дополнительного условия о длине среднего участка постоянства управления.

Это условие отличает сформулированный результат от знаменитой теоремы в работе Дубинса, посвящённой задаче быстродействия.

Пример множества достижимости (с двух ракурсов) показан справа.

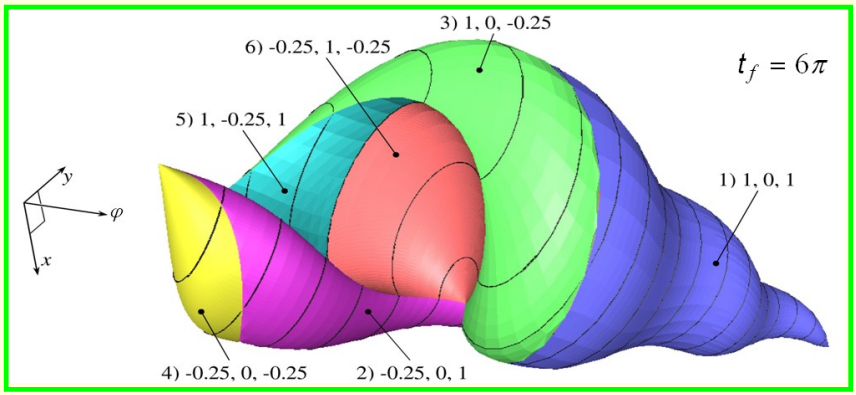
Управления, порождающие границу трёхмерного множества достижимости в несимметричном случае

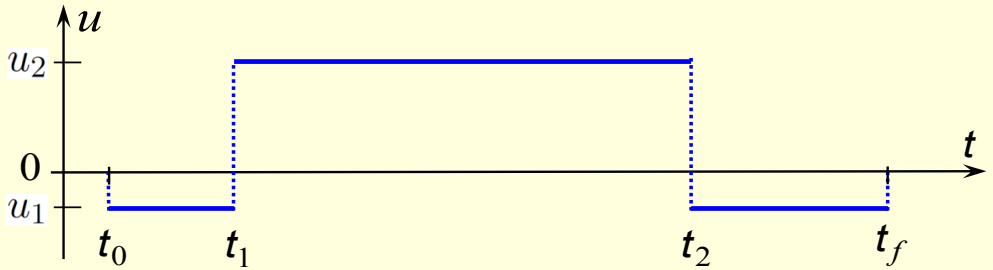
Теорема (несимметричный случай). В любую точку границы множества достижимости управляемой системы

$$\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \sin\varphi, \quad \dot{\varphi} = u,$$
$$u \in [u_1, u_2], \quad u_1 < 0 < u_2.$$

можно прийти с использованием кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

В случае двух переключений достаточно рассмотреть следующие 6 вариантов:





U1) $u_2,\ 0, u_2$; U2) $u_1,\ 0, u_2$; U3) $u_2,\ 0, u_1$;
U4) $u_1,\ 0, u_1$; U5) u_2, u_1, u_2; U6) u_1, u_2, u_1.

При этом для случаев U5), U6) *мы можем ограничиться управлениями, которые удовлетворяют неравенству*

$$|(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_f) - \varphi(t_2))| \le |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|.$$

Для $\varphi \ge 0$ *оставляем 4 варианта :*

U1) $u_2,\ 0, u_2$; U2) $u_1,\ 0, u_2$;
U3) $u_2,\ 0, u_1$; U6) u_1, u_2, u_1.

Слайд 6

Аналогичное утверждение для несимметричного случая также имеет место. Оно показано на слайде. Речь снова идёт о шести типах управлений, ведущих на границу трёхмерного множества достижимости.

Пример множества достижимости показан справа вверху. Множество построено численно с использованием указанных на слайде шести типов кусочно-постоянных управлений с двумя переключениями.

Для $\varphi \geq 0$ из шести типов управлений можно оставить только четыре типа (так же, как и в каноническом случае).

Вопрос. Пусть известно описание φ-сечений в каноническом случае для любых значений t_f.

Можно ли на основе этого просчитать φ-сечения в несимметричном случае ?

Слайд 7

На слайде сформулирован главный вопрос доклада.

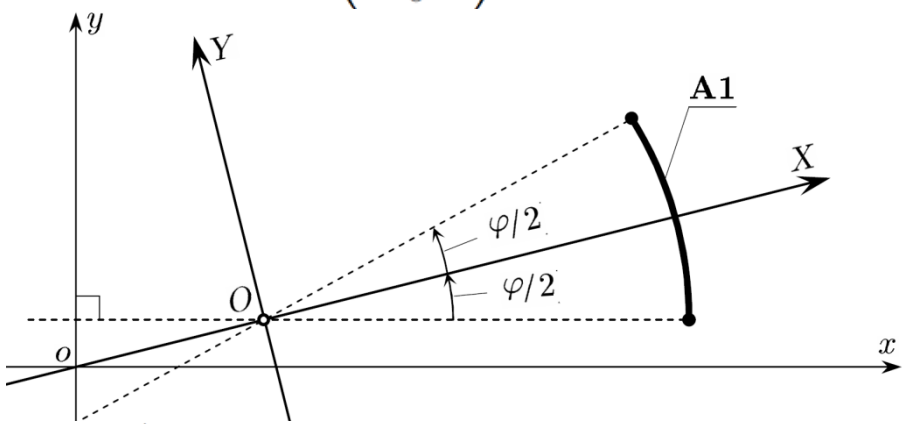
Формула соответствия φ-сечений

Пусть в несимметричном случае надо найти φ-сечение $G_\varphi(t_f)$ для некоторых значений t_f и φ. Вводим момент t_f^{c} по формуле $t_f^{\mathrm{c}} = \dfrac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi$.

Рассматриваем при том же значении φ сечение $G_\varphi^{\mathrm{c}}(t_f^{\mathrm{c}})$ для канонического случая. Во вспомогательной системе координат искомое сечение $G_\varphi(t_f)$ получаем с помощью аффинного преобразования (умножение на скалярный коэффициент и векторный сдвиг):

$$G_\varphi(t_f) = \frac{u_1 - u_2}{2u_1 u_2} G_\varphi^{\mathrm{c}}(t_f^{\mathrm{c}}) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вспомогательная система координат (зависит только от φ) :



$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & \sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix} \right)$$

Слайд 8

Ответ положительный. Формула для искомого сечения в несимметричном случае приведена в середине слайда. Такое сечение определяется аффинным отображением φ-сечения для канонического случая, взятого в момент t_φ^{C}. Этот момент рассчитывается по исходным данным u_1, u_2, t_f, φ несимметричного случая. Подчеркнём, что значение φ в левой и правой частях формулы соответствия одно и то же.

Особеность в том, что формула соответствия записана во вспомогательной системе координат X, Y, которая определяется только значением φ. Формула для координат вспомогательной системы дана внизу слайда. Ось X вспомогательной системы проходит через начало координат исходной системы и повёрнута на угол $\varphi/2$ относительно горизонтальной оси x исходной системы.

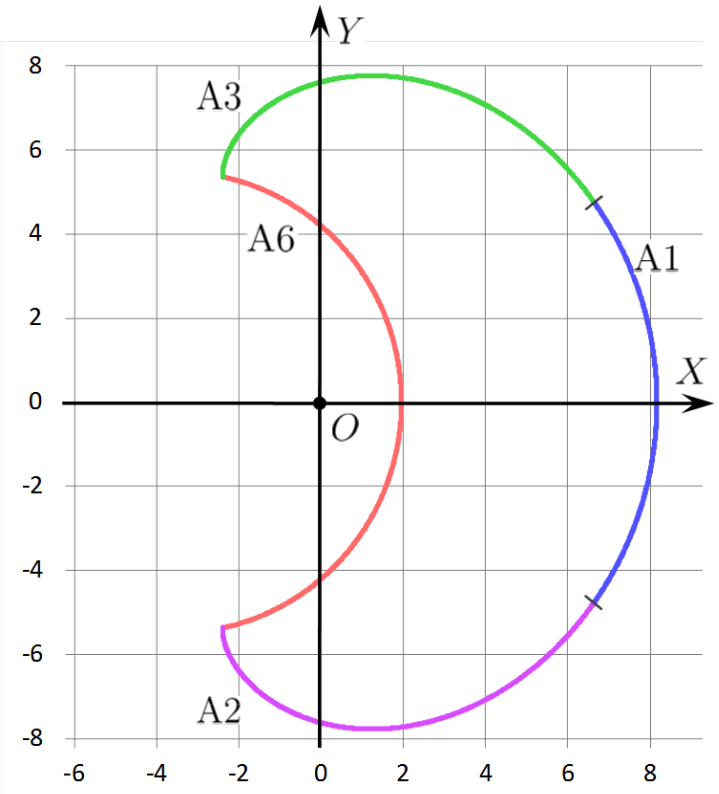
Из формулы соответствия видно, что ничего нового в структуре φ-сечений в несимметричном случае по сравнению с каноническим случаем быть не может. В частности, любое φ-сечение симметрично относительно оси X вспомогательной системы координат.

На следующих слайдах поясним происхождение формулы соответствия.

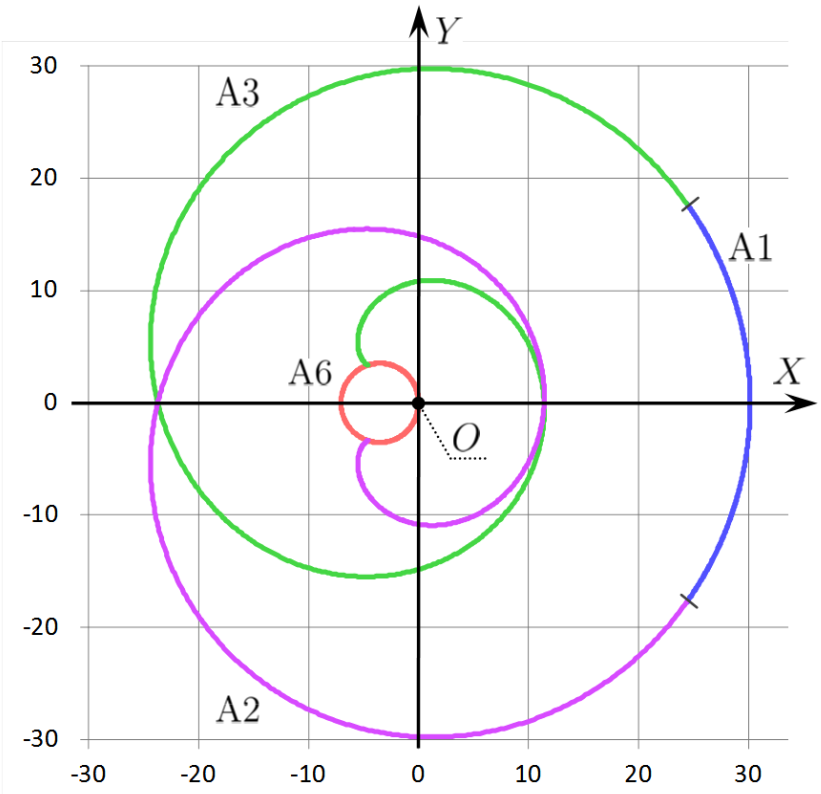
Составная кривая при исходных ограничениях на управление

$\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$ -- *замкнутая кривая, составленная из кривых* $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \mathrm{A}_6$

$u_1 = -0.5 \quad u_2 = 1 \quad \varphi = 0.4\pi$



$t_f = 3\pi$



$t_f = 10\pi$

Слайд 9

На слайде 6 было отмечено, что при $\varphi \geq 0$ можно ограничиться четырьмя типами управлений U1, U2, U3 и U6 при формировании границы множества достижимости. При фиксированном φ каждый тип управления порождает однопараметрическое семейство точек, которое имеет вид гладкой кривой. Для таких кривых введём обозначения $A1$, $A2$, $A3$ и $A6$. Объединение кривых даёт непрерывную замкнутую кривую на плоскости геометрических координат. Будем называть её составной кривой и обозначим $\mathcal{A}_\varphi(u_1, u_2, t_f)$.

На слайде приведены примеры составной кривой во вспомогательной системе координат X, Y. Кривая симметрична относительно оси X. Отметим, что данное свойство симметрии выполнено для общего случая несимметричных ограничений на управление и распространяется на φ-сечение в целом. Представленные на слайде варианты составной кривой рассчитаны для ограничений $u_1 = -0.5$, $u_2 = 1$. Левый и правый рисунки отличаются только значениями t_f.

При малых t_f составная кривая не имеет самопересечений и является границей φ-сечения. С ростом t_f структура составной кривой усложняется, и только её некоторая часть задаёт границу φ-сечения.

Составная кривая играет главную роль в классификации φ-сечений.

Аналитическое описание экстремальных кривых ($\varphi \geq 0$)

$$\mathrm{A}_1(s_1) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right)\left[\theta \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_1}{2}\right) \end{pmatrix}\right] + \xi_\varphi(u_2), \qquad \xi_\varphi(u_2) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{u_2} - 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}_2(s_2) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right)\left[(\theta + s_2)\begin{pmatrix} \cos\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_2 - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} - 2\sin\left(\frac{s_2}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_2}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}\right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$\mathrm{A}_3(s_3) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right)\left[(\theta - s_3)\begin{pmatrix} \cos\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(s_3 + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} + 2\sin\left(\frac{s_3}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{s_3}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}\right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$\mathrm{A}_6(s_6) = \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right)\left[-\begin{pmatrix} 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sin\left(\frac{\varphi + \theta}{2}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{-s_6}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{-s_6}{2}\right) \end{pmatrix}\right] + \xi_\varphi(u_2),$$

$$s_1 \in [-\varphi, \varphi], \quad s_2 \in [-\theta, 0], \quad s_3 \in [0, \theta], \quad s_6 \in [-\theta, \theta], \quad \theta = \frac{u_1(\varphi - t_f \cdot u_2)}{u_2 - u_1}.$$

Слайд 10

Вывод формулы соответствия опирается на аналитическое параметрическое описание компонент составной кривой. Имеем четыре участка составной кривой, формулы для них показаны на слайде. Каждая формула содержит выражение в квадратной скобке, одинаковый скалярный коэффициент перед скобкой и одинаковый сдвиг вдоль оси X. Квадратная скобка зависит от величины θ, которая задаётся по исходным данным. Формула для θ и диапазоны изменения параметров s_1, s_2, s_3, s_6 показаны внизу слайда.

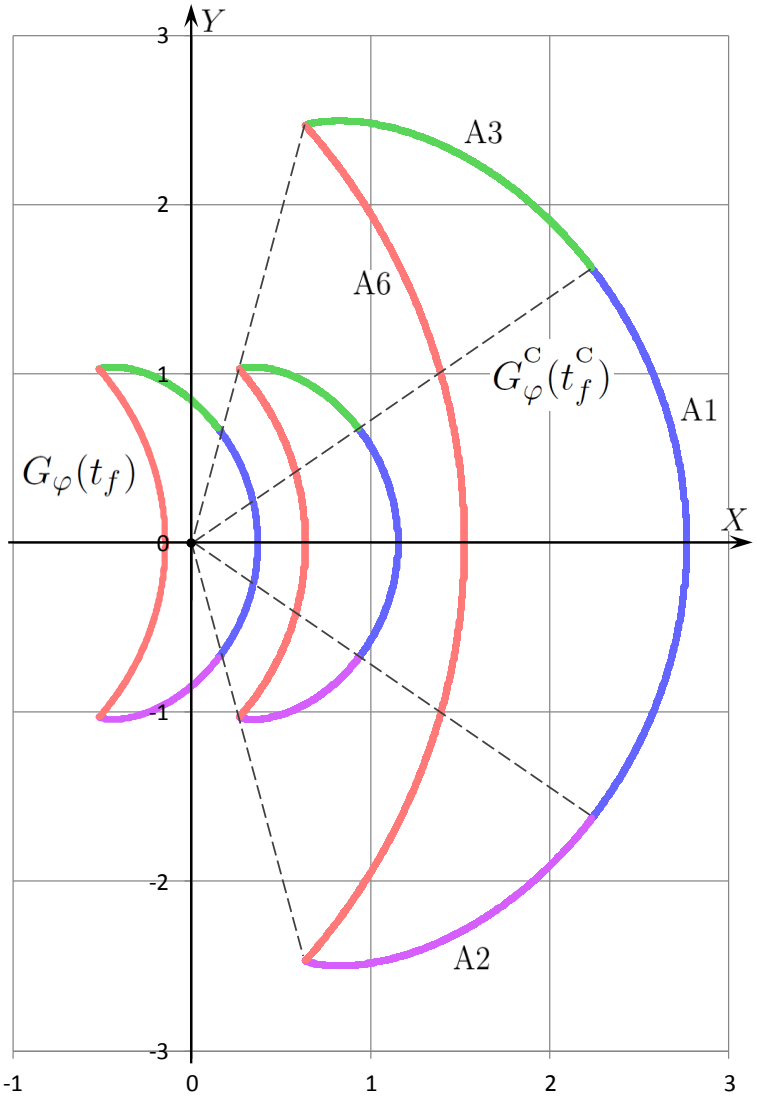
Расчёт φ-сечений на основе канонического случая

Формула соответствия φ-сечений :

$$G_\varphi(t_f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}\right) G^{\mathrm{C}}_\varphi(t^{\mathrm{C}}_f) + \xi_\varphi(u_2),$$

$$t^{\mathrm{C}}_f = \frac{2u_1(\varphi - t_f u_2)}{u_2 - u_1} + \varphi,$$

$$\xi_\varphi(u_2) = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{u_2} - 1\\ 0\end{pmatrix}.$$



$u_1 = -2, \quad \varphi = 0.4\pi,$

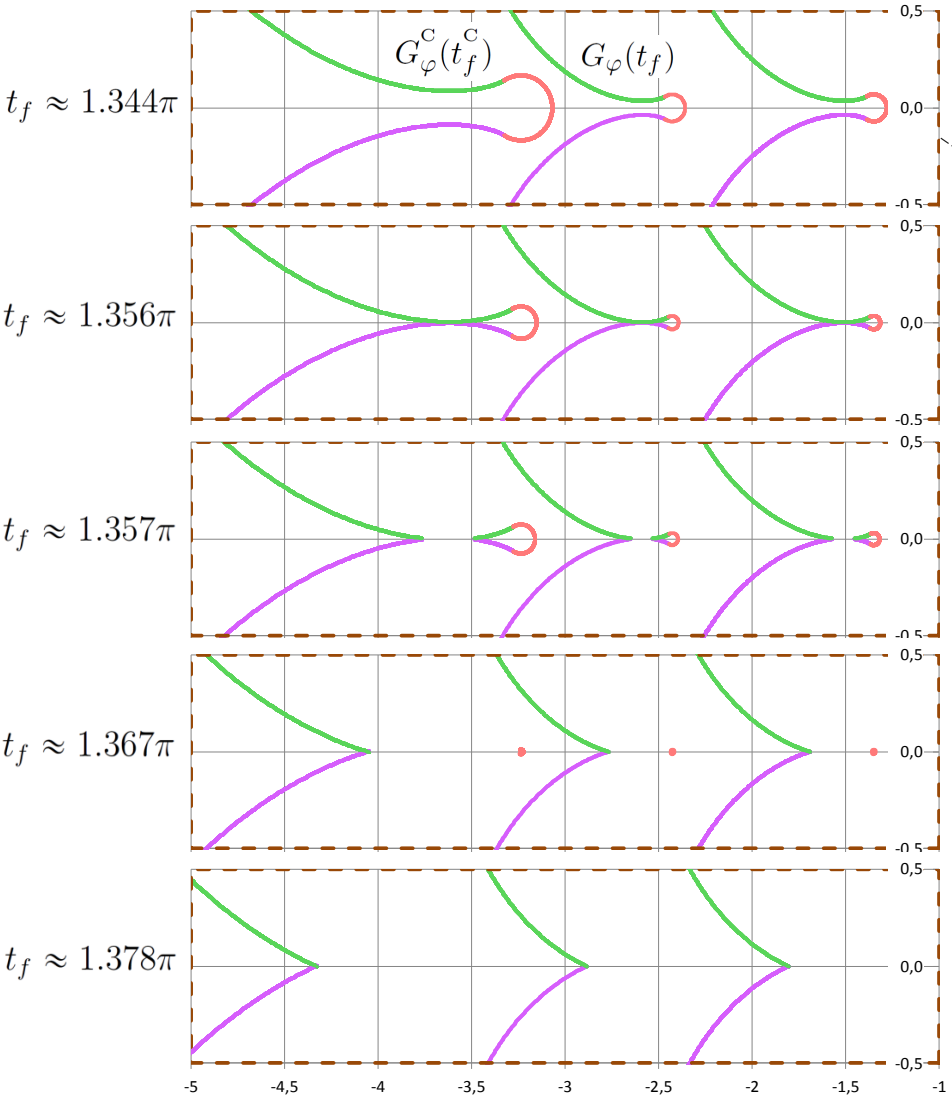
$u_2 = 3, \quad t_f = 0.5\pi, \quad t^{\mathrm{C}}_f = 1.28\pi$

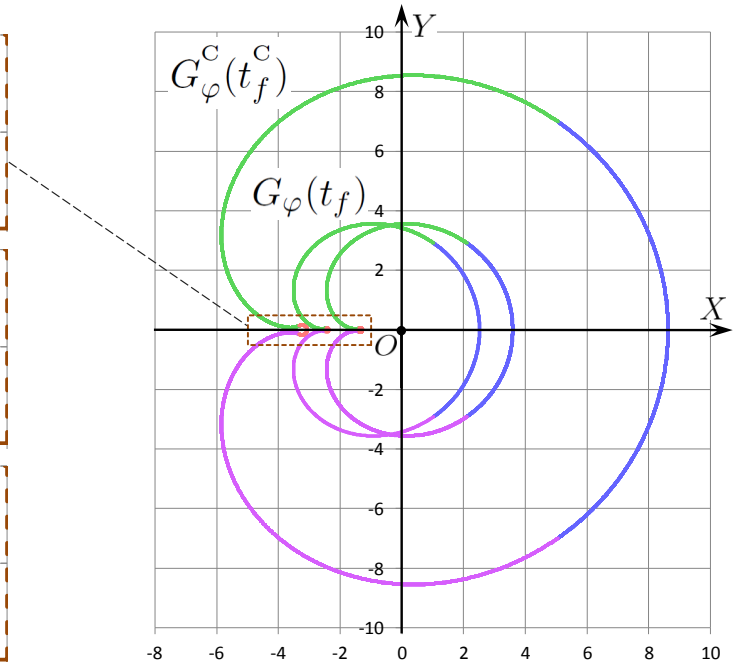
Слайд 11

Слайд поясняет формулу соответствия φ-сечений. Исходные данные для несимметричного случая приведены внизу. По этим данным рассчитывается момент времени t_{φ}^{C} для канонической системы. Соответствующее ему множество $G_{\varphi}^{\mathrm{C}}(t_{\varphi}^{\mathrm{C}})$ во вспомогательной системе координат показано справа на рисунке. При умножении на коэффициент $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_1}\right)\approx 0.417$ происходит "сжатие" множества относительно нуля вспомогательной системы. Получаемое множество изображено вторым справа. Сдвиг этого множества на величину $\xi_{\varphi}(u_2)\approx -0.784$ даёт искомое множество $G_{\varphi}(t_f)$ (первое слева) для несимметричного случая.

Здесь исходные данные были подобраны так, чтобы рассматриваемые три множества не пересекались (для наглядности пояснения формулы соответствия).

Процедура пересчёта. Исследование потери односвязности





$$u_1 = -2, \qquad \varphi = 0.6\pi$$
$$u_2 = 3, \qquad t_f \approx 1.344\pi$$

Промежуток времени, на котором теряется односвязность, очень мал

Слайд 12

На этом слайде исходные данные подобраны так, чтобы продемонстрировать формулу соответствия для более сложного случая, когда искомое φ-сечение теряет односвязность. При этом потеря односвязности происходит и для соответствующего φ-сечения в каноническом случае. По аналогии с предыдущим слайдом на правом рисунке показаны три множества, используемые в формуле соответствия.

В левой части слайда даны увеличенные фрагменты трёх множеств (о них говорим при анализе формулы соответствия) на небольшом интервале времени, на котором пропадает и снова восстанавливается свойство односвязности φ-сечения. Пять фрагментов отличаются только моментом времени t_f. Верхний фрагмент соответствует правому рисунку. Полные рисунки для остальных четырёх фрагментов опущены.

На первом фрагменте свойство односвязности ещё сохраняется. На втором и третьем фрагментах происходит потеря односвязности. На четвёртом фрагменте полость, не принадлежащая φ-сечению, стягивается в точку. Получаемое φ-сечение становится односвязным. При дальнейшем увеличении момента t_f (пятый фрагмент) свойство односвязности рассматриваемого φ-сечения сохраняется.

Смысл формулы соответствия заключается в том, что построение φ-сечений достаточно выполнить для канонического случая. Каких-либо новых структурных свойств φ-сечений для несимметричного случая не возникает.

Классификация φ-сечений трёхмерного множества достижимости (канонический случай)

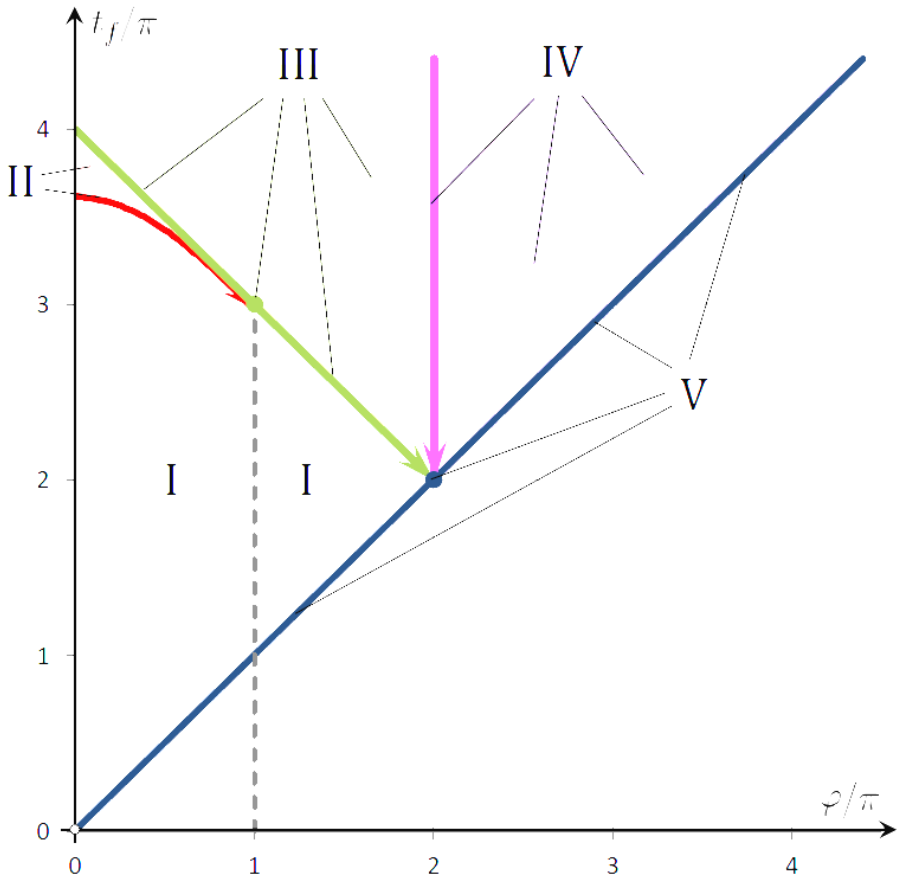
I. $0 \leqslant \varphi < t_f, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f < 3\pi + 2\cos(\varphi/2).$

II. $0 \leqslant \varphi < \pi, \quad t_f < 4\pi - \varphi, \quad t_f \geqslant 3\pi + 2\cos(\varphi/2).$

III. $0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad t_f \geqslant 4\pi - \varphi.$

IV. $2\pi \leqslant \varphi < t_f.$

V. $\varphi = t_f.$



Свойство симметрии:

Если $u_*(t) = -u^*(t),$

то $x_*(t_f) = x^*(t_f),$

$y_*(t_f) = -y^*(t_f),$

$\varphi_*(t_f) = -\varphi^*(t_f).$

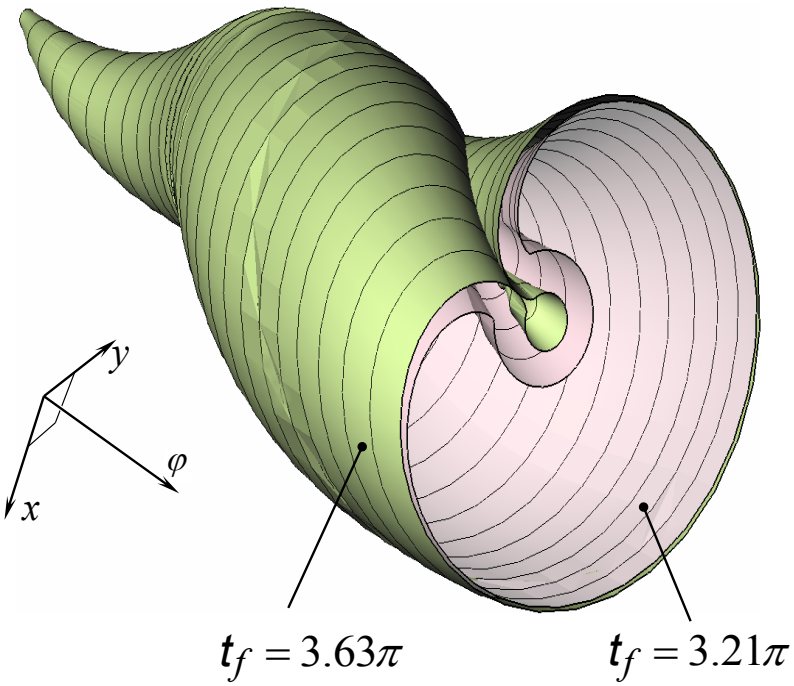
Слайд 13

На слайде представлена классификация структуры φ-сечений трёхмерного множества достижимости в каноническом случае. Показан случай $\varphi \geq 0$, для случая $\varphi < 0$ картинка симметричная.

На плоскости φ, t_f аналитически описаны пять множеств, характеризующих пять вариантов структуры φ-сечений, которые возможны при $\varphi \geq 0$.

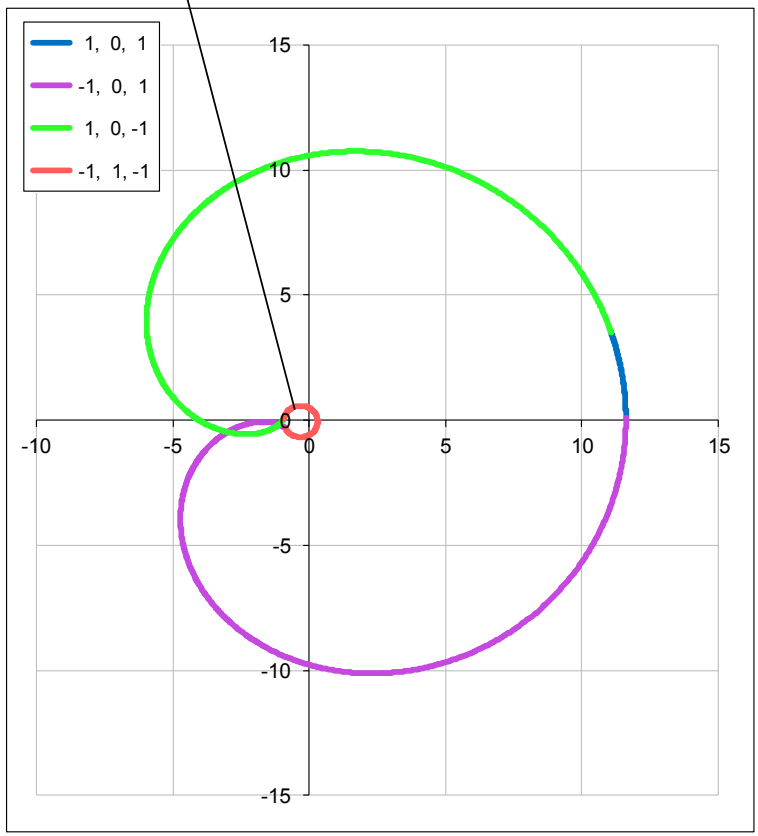
Односвязность φ-сечений теряется в варианте II. Размер множества II небольшой, но именно он представляет наибольшую сложность при теоретическом исследовании. При численных построениях его легко пропустить.

Нарушение односвязности множества достижимости (канонический случай)



Плоскость сечения соответствует φ = 0

Это множество не принадлежит φ-сечению



φ-сечение множества достижимости для φ = 0.1π и t_f = 3.7π

Слайд 14

Заключительный слайд поясняет возникновение неодносвязности трёхмерного множества достижимости. Рассматривается канонический случай. Для двух моментов времени показаны два множества достижимости с отсечкой половины каждого из них плоскостью $\varphi = 0$. При $t_f = 3.21\pi$ трёхмерное множество является односвязным. В момент $t_f = 3.63\pi$ зарождается его неодносвязность. Рассечка позволяет видеть φ-сечение для $\varphi = 0$. На правом рисунке показано φ-сечение для $\varphi = 0.1\pi$ и $t_f = 3.7\pi$. Оно не является односвязным.