

Описание постера

Работа посвящена 3D-печати множеств достижимости *в момент* и *к моменту* для простейшего “математического автомобиля”, известного как “машина Дубинса”.

Координаты x , y описывают точечное геометрическое положение объекта на плоскости, координата θ есть угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. В нормированных переменных полагаем её равной 1. Угол θ при математических исследованиях удобно рассматривать не в диапазоне $[-\pi, \pi)$, а в диапазоне $(-\infty, \infty)$. Допустимыми управлениями считаем кусочно-непрерывные функции $t \rightarrow u(t)$, где значение $u(t)$ стеснено ограничением $|u(t)| \leq 1$ (симметричный случай), либо ограничением $u(t) \in [b, 1]$ (несимметричный случай). В последнем варианте фиксированный параметр b берётся из промежутка $[-1; 0)$. Начальный момент принимаем равным 0. Начальное фазовое состояние также считаем нулевым. Множество достижимости $G(T)$ *в момент* T есть совокупность всех трехмерных фазовых состояний (x, y, θ) , в каждое из которых можно перейти в момент T при помощи некоторого допустимого управления. Множество достижимости $G^*(T)$ *к моменту* T представляет собой объединение по $t \in [0, T]$ множеств достижимости $G(t)$ *в момент*.

На фиг. 1 отмечены работы А.А. Маркова (1889), R. Isaacs (1951) и L.E. Dubins (1967), в которых рассматривались задачи, связанные с динамикой простейшего автомобиля. На фиг. 3 ссылка [1] выделяет работу, где исследовались множества достижимости в момент в проекции на плоскость геометрических координат x , y . Книга [2] представляет собой набор статей по различным задачам управления с динамикой простейшего автомобиля и по задачам с более сложной динамикой движения. В работах [3, 4] проанализированы множества достижимости в момент и к моменту для машины Дубинса. Задачи оптимального быстрогодействия для машины Дубинса, а также для машины Ридса – Шеппа и связанные с ними множества достижимости к моменту кратко разъяснены в статье [5]. В модели Ридса – Шеппа разрешено дополнительно включать управление “обратного хода”. Книга [6] посвящена принципам и возможностям 3D-печати. Работа [7] есть отчет о построении на 3D-принтере трёхмерных множеств достижимости к моменту для машин Дубинса и Ридса – Шеппа, реализованном в LAAS-CNRS студентом G. Caner под руководством J.-P. Laumond. Эта работа сделана в то же время, что и наша работа. Использовано другое, чем у нас, математическое описание границы трехмерных множеств достижимости к моменту.

Изображения трёхмерных множеств достижимости в момент и к моменту, взятые из статей [3, 4], показаны на фиг. 4–9. Множества достижимости в моменты $T = 4\pi$ и $T = 6\pi$ на фиг. 6 соответствуют несимметричному ограничению на управление. Множества достижимости в моменты $T = 1.5\pi$ и $T = 2\pi$ на фиг. 8 построены для случая, когда угол θ рассматривается по модулю 2π , а именно, в промежутке $[-\pi, \pi)$. Фиг. 9 изображает множества достижимости для моментов $T = 1.5\pi$ и $T = 2\pi$ в цилиндрических координатах. Расцветка различных частей границы множеств достижимости соответствует различным наборам кусочно-постоянных управлений, ведущих на границу из начального состояния. Мы используем такое знание, чтобы экономно формировать входные данные для 3D-печати. Множества достижимости к моменту отличаются от множеств достижимости в момент наличием некоторого выступа с остриём в начальной точке $x = 0$, $y = 0$, $\theta = 0$ (выступ показан синим цветом на фиг. 7). Приведённые изображения из статей [3, 4] получены при помощи языка VRML.

Для 3D-печати использовался одноцветный принтер (фиг. 10). Некоторые важные обстоятельства, на которые следует обращать внимание при печати, отмечены на фиг. 11–13.

Фотографии напечатанных на 3D-принтере множеств достижимости в момент и к моменту даны на фиг. 14–18. На фиг. 14 множества достижимости в момент показаны для трёх значений T . При изготовлении множеств достижимости использовались специальные подставки (фиг. 15). Различие множеств достижимости в момент и к моменту хорошо видно на фиг. 16. С ростом T такое различие пропадает: при достаточно больших T множество достижимости в момент совпадает с множеством достижимости к моменту. Фиг. 17 представляет собой фото несимметричного множества достижимости в момент $T = 5\pi$. При освоении 3D-печати было напечатано много фигурок множеств достижимости, которые вполне можно использовать как ёлочные украшения. Фото новогодней ёлочки с такими украшениями показано на фиг. 18.