ТРЁХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В.С. Пацко [1], Г.И. Трубников [2], А.А. Федотов [1]

[1]*Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, Екатеринбург*
[2]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург*
patsko@imm.uran.ru

Аннотация. Исследуется трёхмерное множество достижимости для нелинейного управляемого объекта «машина Дубинса». Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Управляющее воздействие стеснено интегральным квадратичным ограничением. На основе принципа максимума Понтрягина дано описание движений, порождающих границу множества достижимости. Движения, ведущие на границу, представляют собой оптимальные эластики Эйлера. Приводятся результаты моделирования.

Введение

Под математической «машиной Дубинса» понимаем объект, передвигающийся на плоскости с постоянной величиной линейной скорости. Фазовое состояние включает в себя две координаты геометрического положения и угол направления вектора скорости. Скалярное управление u имеет смысл мгновенной угловой скорости поворота. Управление стеснено на промежутке $[0, t_f]$ интегральным квадратичным ограничением

$$\int_0^{t_f} u^2(t)\, dt \le \mu \qquad (1)$$

с заданным значением $\mu > 0$. В работе приводятся результаты численного построения множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f. Опираемся на опыт [1, 2] аналитического описания и численного построения множества достижимости для случая геометрических ограничений $|u(t)| \le \mu$.

Движения, ведущие на границу множества достижимости при заданном интегральном ограничении (так же, как и в случае геометрических ограничений) удовлетворяют [3] принципу максимума Понтрягина. Такие управления (за исключением тождественно равного нулю управления) доставляют равное μ минимальное значение интегральному функционалу

$$J\big(u(\cdot)\big) = \int_0^{t_f} u^2(t)\, dt\, . \qquad (2)$$

Соответствующие этому функционалу экстремальные движения были классифицированы Л. Эйлером [4] и называются эластиками Эйлера.

Сопряжённая система дифференциальных уравнений в принципе максимума Понтрягина одна и та же для интегральных и геометрических ограничений. Поэтому можем использовать разработанный ранее метод построения множества достижимости при геометрических ограничениях также и для интегральных ограничений. Принципиальное отличие состоит в том, что в случае геометрических ограничений многие вычисления можно производить в явном виде при помощи элементарных функций, а в случае интегральных ограничений аналитические вычисления крайне затруднены в силу необходимости использования специальных эллиптических функций. Тем не менее, численные построения множества достижимости $G(t_f)$ возможны. В этом состоит цель работы. Полученные при построении границы множества $G(t_f)$ результаты дополняют исследования М.И.Зеликина [5], Ю.Л. Сачкова и А.А. Ардентова [6], связанные с эластиками Эйлера.

Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \cos\varphi, \qquad \dot{y} = \sin\varphi, \qquad \dot{\varphi} = u. \qquad (3)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения, φ — угол наклона вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x. Величина скорости равна единице. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$. Начальный момент времени t_0 полагаем равным нулю. Начальные значения $x(t_0)$, $y(t_0)$, $\varphi(t_0)$ также считаем нулевыми. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ являются измеримые интегрируемые функции времени, удовлетворяющие интегральному ограничению (1).

Множество достижимости $G(t_f)$ в момент времени $t_f > t_0$ есть совокупность всех точек $(x, y, \varphi)^{\mathrm{T}}$ трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (3) в момент t_f при помощи некоторого допустимого управления. Обозначим через $G_\varphi(t_f)$ двумерное сечение множества $G(t_f)$, отвечающее значению φ угловой координаты. Если некоторая точка $(x, y)^{\mathrm{T}}$ принадлежит $\partial G_\varphi(t_f)$, то точка $(x, y, \varphi)^{\mathrm{T}}$ принадлежит $\partial G(t_f)$. Обратное, вообще говоря, неверно. Символ ∂ означает границу множества.

Требуется построить множество достижимости $G(t_f)$.

Принцип максимума Понтрягина

Из общих результатов математической теории управления следует, что множество достижимости $G(t_f)$ замкнуто и ограничено. Очевидно, что управление $u(t) \equiv 0$ ведёт на границу множества достижимости. В работе [3] показано, что для любой точки на границе множества достижимости, в которую ведёт управление не равное тождественно нулю, выполнен принцип максимума Понтрягина, записанный для задачи оптимизации на движениях системы (3) с фиксированными краевыми условиями в моменты t_0, t_f и функционалом (2). При этом рассматриваемое движение доставляет равный μ минимум функционалу.

Запишем соотношения принципа максимума для задачи минимизации функционала $J\big(u(\cdot)\big)$ при оговоренных краевых условиях в системе (3) (см., например, [3], [5]). Пусть $u^*(\cdot)$ — не равное тождественно нулю допустимое управление, $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^{\mathrm{T}}$ — соответствующее движение системы (3) на промежутке $[t_0, t_f]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\dot{\psi}_1 = 0, \qquad \dot{\psi}_2 = 0, \qquad \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin\varphi^*(t) - \psi_2 \cos\varphi^*(t). \tag{4}$$

Принцип максимума означает, что если $u^*(\cdot)$ — минимизирующее управление, то существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^{\mathrm{T}}$ системы (4), для которого почти всюду на промежутке $[t_0, t_f]$ выполнено равенство $u^*(t) = \psi_3^*(t)/2$.

Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^*. Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{ const } \neq 0$ на промежутке $[t_0, t_f]$. Следовательно, в этом случае $u^*(t)$ есть постоянное управление, и оно задаётся формулой $u^*(t) = \sqrt{\mu / t_f}$. Такое управление определяет одноточечное сечение $G_\varphi(t_f)$ для максимально возможного значения $\varphi = \varphi_{\max} = \sqrt{\mu\, t_f}$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (3) и (4), можно записать выражение $\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$ Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^{\mathrm{T}}$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0\,. \tag{5}$$

Прямая переключения (5) не является универсальной: при смене движения, удовлетворяющего принципу максимума, изменяется, вообще говоря, и прямая переключения.

Движения, ведущие на границу множества достижимости

Подчеркнём, что сопряжённая система в принципе максимума имеет тот же вид, что и в задаче построения множества достижимости при геометрических ограничениях на мгновенные значения управления [1, 2]. При этом тем же самым остаётся и уравнение для прямой переключения. Используя подход, изложенный в [1, 2], можно выделить типы управлений (удовлетворяющих принципу максимума) с не более, чем двумя сменами знака управляющего воздействия, которыми можно ограничиться при построении границы множества достижимости $G(t_f)$.

Учитывая симметрию задачи, рассматриваем сечения $G_\varphi(t_f)$ лишь для значений $\varphi \in [0, \varphi_{\max})$. При построении таких сечений главным образом опираемся (так же, как и в случае геометрических ограничений) на следующие типы управлений: U1 — управления, в силу которых движения не пересекают прямую переключения; U2, U3 — управления, в силу которых движения пересекают прямую переключения один раз (управления изменяют знак с «–» на «+» и с «+» на «–» соответственно); U6 — управления, в силу которых движения пересекают прямую переключения два раза (соответствующее управление дважды изменяет знак).

Для любого сечения $G_\varphi(t_f)$ при $\varphi \geq 0$ каждому типу управления соответствует однопараметрическая кривая, состоящая из кончиков движений системы (3), удовлетворяющих принципу максимума. Получаемые кривые обозначим A1, A2, A3 и A6. Доказывается, что граница сечения $G_\varphi(t_f)$ формируется из кусков этих кривых. При $\varphi = 0$ кривая A1 отсутствует.

Результаты моделирования

На рис.1 для $\mu = 100$ и двух значений $t_f = 0{,}5$, $t_f = 0{,}95$ показаны сечения $G_\varphi(t_f)$ множества достижимости при $\varphi = 0$. Множество $G_\varphi(t_f)$ симметрично относительно оси x. Кривые A2, A3, A6 выделены цветом. Для левого рисунка граница сечения состоит из объединения указанных кривых. Для правого рисунка граница сечения не полностью включает в себя кривые A2 и A3. Получаемое здесь сечение не является односвязным. Его внешняя граница образуется частями кривых А2 и А3, выходящими из одной и той же точки на оси x (такая точка соответствует управлению $u \equiv 0$) до точки их первого пересечения. Внутренняя граница сечения состоит из кривой А6 и кусков кривых А2 и А3 после второй точки пересечения. Неодносвязность сечения $G_\varphi(t_f)$ приводит к неодносвязности трёхмерного множества $G(t_f)$ в целом. При фиксированном μ неодносвязность сохраняется на очень малом промежутке времени. Аналогичные факты имели место и в случае геометрического ограничения на управление.

На рис.1 пунктиром показаны траектории, которые ведут в точки $e_1 - e_5$, отмеченные на границе сечений $G_\varphi(t_f)$. Все траектории выходят из нулевой начальной точки с направлением касательной вдоль оси x и приходят в конечные точки с такой же касательной. Траектории представляют собой оптимальные по функционалу (2) эластики Эйлера.

В докладе будут показаны дополнительные сечения $G_\varphi(t_f)$ для различных значений $\varphi \geq 0$.

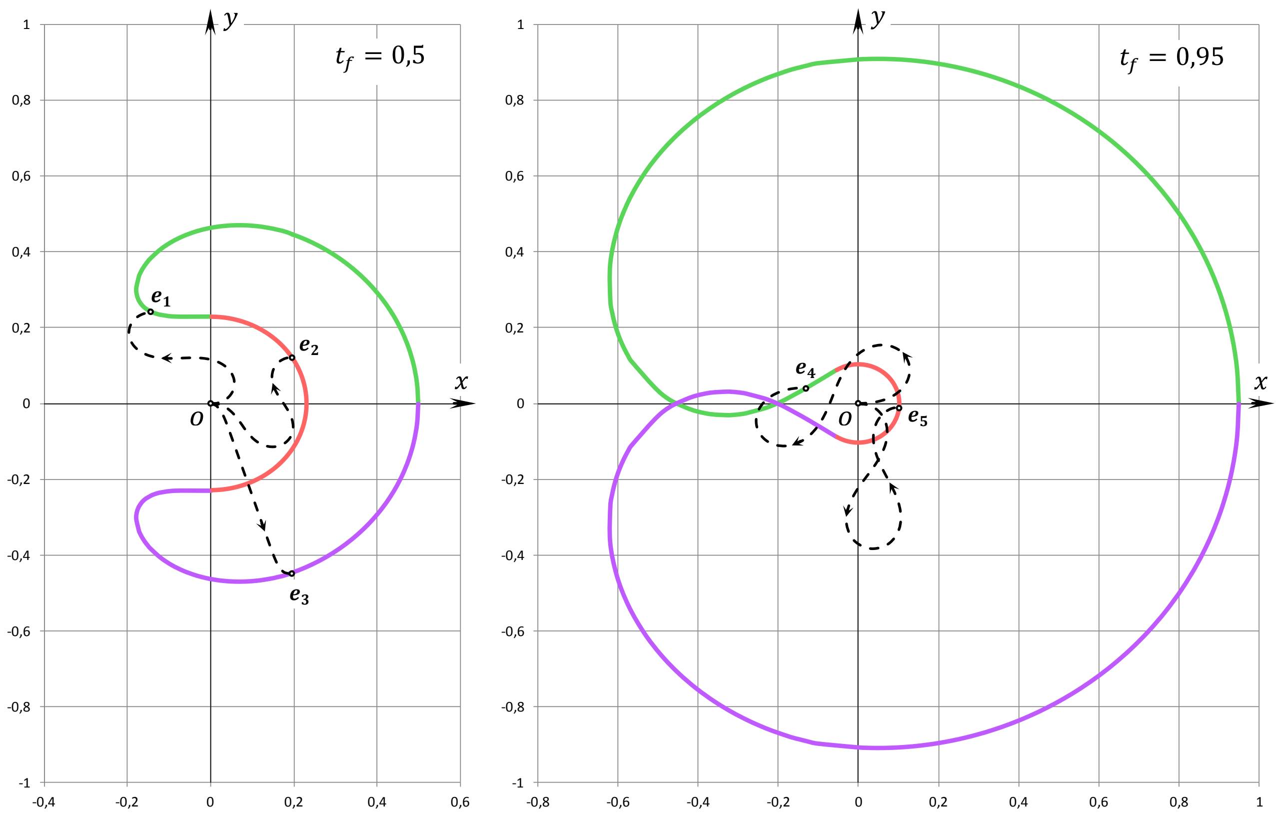

Рис. 1. Формирование границы сечений множества достижимости по угловой координате: два примера для $\varphi = 0$.

Заключение

Структура трёхмерного множества достижимости при интегральных ограничениях имеет много общего со структурой множества достижимости при геометрических ограничениях, хотя и является более сложной. Движения, ведущие из начальной фазовой точки на границу множества достижимости, представляют собой эластики Эйлера. Каждая из них доставляет минимум интегральному квадратичному функционалу (2). Для всех граничных точек множества достижимости, за исключением точки, соответствующей прямолинейному движению при $u \equiv 0$, значение минимума квадратичного функционала (2) равно μ.

Литература

1. В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. 8–16.
2. V.S. Patsko, A.A. Fedotov. Three-dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description // Commun. Optim. Theory. 2022. V. 2022. Article ID 23. 1–42.
3. М.И. Гусев, И.В. Зыков. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. 103–115.
4. Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
5. М. И. Зеликин. Теория и приложения задачи об эйлеровых эластиках // УМН, 2012, Т. 67, вып. 2, 93–108.
6. А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. Решение задачи Эйлера об эластиках // АиТ, 2009, вып. 4, 78–88.