



**XIII ВСЕРОССИЙСКИЙ
СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
21-25 АВГУСТА
2023**

ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ МАШИНЫ ДУБИНСА ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

В.С. Пацко, Г.И. Трубников, А.А. Федотов

Докладчик: В.С. Пацко

Ведущий научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, г. Екатеринбург

Санкт-Петербург 2023

Машина Дубинса

$$\dot{x} = \cos\varphi,$$

Геометрическое ограничение :

$$\dot{y} = \sin\varphi,$$

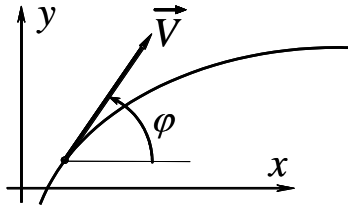
$$|u(t)| \leq \mu, \quad t \in [0, t_f], \quad \mu > 0.$$

$$\dot{\varphi} = u;$$

Интегральное ограничение :

$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$

$$\int_0^{t_f} (u(t))^2 dt \leq \mu, \quad \mu > 0.$$



Множество
достижимости
в момент t_f :

$$G(t_f, \mu) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ z(t_f) \end{pmatrix}$$

Геометрическое ограничение: А.А. Марков (1889), R. Isaacs (1951), L. Dubins (1957)

Интегральное ограничение: Л. Эйлер (1744), М.И. Зеликин, Ю.Л. Сачков, А.А. Ардентов

Слайд 2

Термин «машина Дубинса» будет означать управляемую систему, движение которой подчиняется дифференциальным соотношениям, записанным слева. Здесь x, y — координаты положения точки на плоскости; φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от направления оси x ; u — скалярное управляющее воздействие. Считаем, что угол φ принимает значения на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Т.е. мы не вводим отождествление угла по модулю 2π . Величина скорости равна 1.

Как правило, задачи управления для машины Дубинса рассматривают при геометрическом ограничении на управление. Здесь, помимо L. Dubins, упоминаем А.А. Маркова и R. Isaacs. Реже рассматривают задачи при интегральном квадратичном ограничении. Последние задачи близки к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала, постановку которой (при отождествлении угла по модулю 2π) рассматривал Л. Эйлер в книге по вариационному исчислению (1744 г., приложение 1). Он классифицировал типы движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Такие движения стали называть «эластики Эйлера». В последние годы эластики Эйлера детально изучаются Ю.Л. Сачковым и А.А. Ардентовым. У М.И. Зеликина есть статьи, посвящённые многомерным эластикам Эйлера.

Цель данной работы — численное построение трёхмерного множества достижимости *в момент* при *интегральном* ограничении. Полученные результаты будут сравниваться с теми, что были известны для случая геометрических ограничений.

На этапе формальной постановки задачи в качестве допустимых программных управлений считаем измеримые функции времени, интегрируемые с квадратом. Фактически, можно было бы ограничиться кусочно-непрерывными функциями.

Трёхмерное множество достижимости «в момент» (геометрическое ограничение $|u(t)| \leq 1$)

(+1, 0, +1)

(-1, 0, +1)

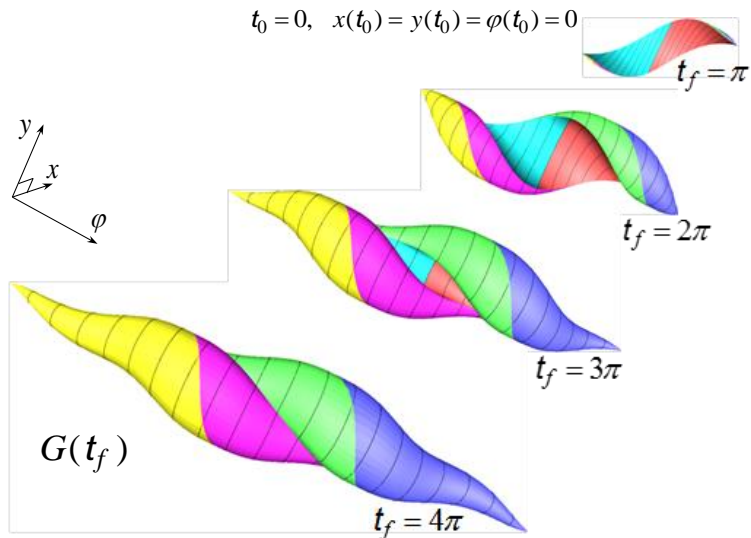
(+1, 0, -1)

(-1, 0, -1)

(+1, -1, +1)

(-1, +1, -1)

$G_\varphi(t_f)$ – φ -сечение



Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.

Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы

// Известия РАН. ТуСУ. 2003. № 3. С. 8–16.

Слайд 3

Здесь показана эволюция во времени трёхмерного множества достижимости при геометрическом ограничении $|u(t)| \leq 1$. Граница множества достижимости раскрашена в 6 цветов. Каждый цвет соответствует определённому типу кусочно-постоянных программных управлений, ведущих на границу множества. Например, тёмно-синий цвет соответствует такому управлению: на первом промежутке времени действует $u = +1$, на втором $u = 0$, на третьем $u = +1$. Для каждой точки тёмно-синей поверхности длины промежутков свои, но сумма длин одна и та же и равна t_f .

Стоит обратить внимание на линии сопряжения поверхностей разных цветов. На некоторых линиях сопряжение гладкое, на других негладкое. Точки с максимальным и минимальным значениями φ представляют собой точки негладкости.

Установлено, что на интервале от $t_f = 3\pi$ до $t_f = 4\pi$ есть небольшой промежуток, для каждого момента t_f из которого трёхмерное множество достижимости не является односвязным.

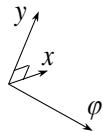
Тонкие чёрные линии на границе множества достижимости показывают контуры двумерных φ -сечений трёхмерного множества.

Трёхмерное множество достижимости «в момент»

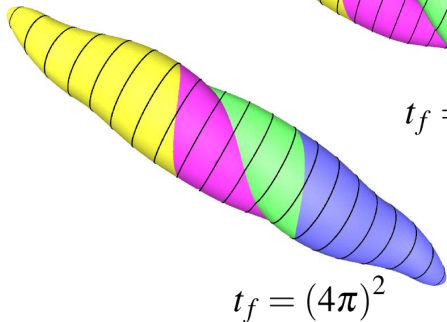
(интегральное ограничение $\int_0^{t_f} (u(t))^2 dt \leq \mu, \quad \mu > 0$)

$t_0 = 0, \quad x(t_0) = y(t_0) = \varphi(t_0) = 0 \quad \mu = 1$

$u > 0$
$u < 0, u > 0$
$u > 0, u < 0$
$u < 0$
$u > 0, u < 0, u > 0$
$u < 0, u > 0, u < 0$

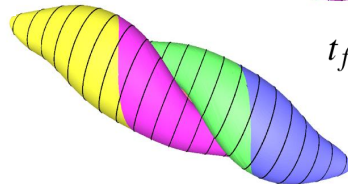


$G(t_f, \mu)$

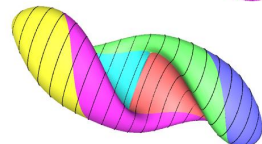


$t_f = (4\pi)^2$

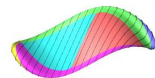
$t_f = (3\pi)^2$



$t_f = (2\pi)^2$



$t_f = \pi^2$

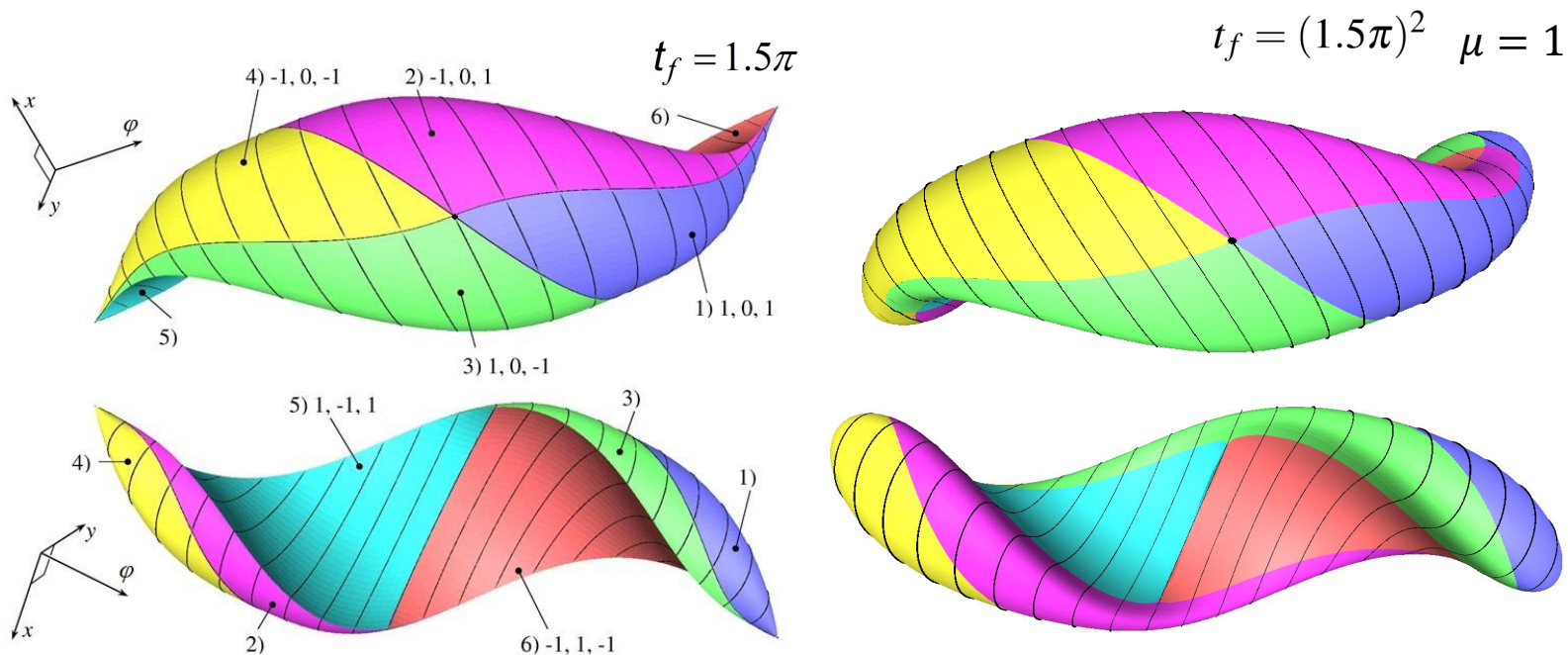


Слайд 4

На этом слайде представлена эволюция множества достижимости при интегральном ограничении. Программные управления, ведущие на границу, уже не являются кусочно-постоянными. Они описываются непрерывными функциями. Однако количество моментов смены знака для управлений, ведущих на границу, как и в случае геометрических ограничений, не более двух. Некоторые из аналогов линий негладкого сопряжения (при геометрическом ограничении на управление) стали линиями гладкого сопряжения. Общая закономерность изменения множества достижимости осталась прежней. Выбранные моменты t_f для интегрального ограничения отличаются (второй степенью) от моментов, взятых для геометрического ограничения. Так сделано для того, чтобы размах множеств по координате φ совпадал с размахом при геометрическом ограничении.

Численно просчитанные картинки трёхмерных множеств достижимости при интегральном ограничении — главное достижение представляемой работы. Далее пойдет рассказ о том, как это было сделано.

Сравнение множеств достижимости при геометрических и при интегральных ограничениях



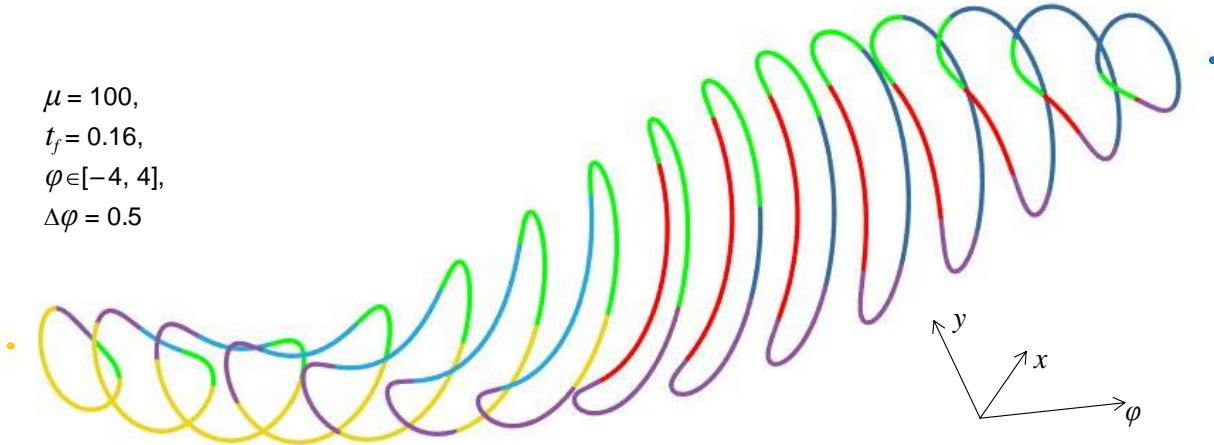
Слайд 5

На двух предыдущих слайдах не была видна фронтальная сторона множеств достижимости. Чтобы показать её, сделан данный слайд. Отметим, что особое управление $u(t) \equiv 0$ ведёт в центральную точку фронтальной части. В этой точке гладко стыкуются граничные поверхности 4-х цветов.

Представление трёхмерного множества достижимости в виде набора φ -сечений

Диапазон (размах) множества достижимости по координате φ имеет вид $[-\sqrt{t_f \cdot \mu}, \sqrt{t_f \cdot \mu}]$.
В этом диапазоне множество достижимости $G(t_f, \mu)$ задаём при помощи φ -сечений $G_\varphi(t_f, \mu)$.
Крайние φ -сечения являются односточечными и порождаются управлениями $u^*(t) \equiv \pm \sqrt{\mu/t_f}$.

$$\begin{aligned}\mu &= 100, \\ t_f &= 0.16, \\ \varphi &\in [-4, 4], \\ \Delta\varphi &= 0.5\end{aligned}$$



Слайд 6

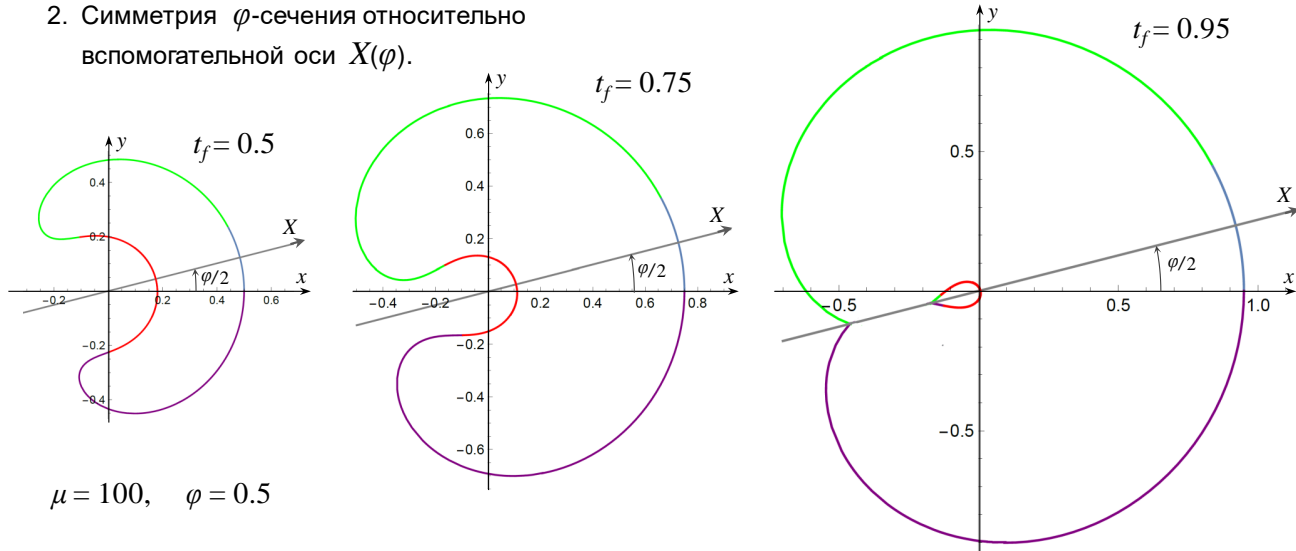
Скелет трёхмерного множества состоит из набора его φ -сечений, просчитываемых с малым шагом по координате φ . Граница каждого φ -сечения раскрашивается в несколько цветов. Каждый цвет соответствует одному из типов управлений $U_1 - U_6$. Затем пространство между φ -сечениями заполняется треугольниками соответствующего цвета. В результате возникает двумерная поверхность, ограничивающая трёхмерное множество.

Свойства симметрии

1. Симметрия в пространстве множеств достижимости.

Если $t_f^{(1)} \cdot \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \cdot \mu^{(2)}$, то $G(t_f^{(2)}, \mu^{(2)}) = \alpha \cdot G(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$, $\alpha = t_f^{(2)} / t_f^{(1)}$.

2. Симметрия φ -сечения относительно вспомогательной оси $X(\varphi)$.



3. Симметрия φ -сечений при $\varphi < 0$ и $\varphi > 0$. В силу специфики кинематики имеем:

если $\tilde{\varphi} = -\bar{\varphi}$, то $\tilde{x}(t_f) = \bar{x}(t_f)$, $\tilde{y}(t_f) = -\bar{y}(t_f)$ при $\tilde{u}(t) = -\bar{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$.

Слайд 7

Мы используем три вида симметрии φ -сечений.

1. Если верно, что моменты t_f и ограничения μ для некоторых двух вариантов связаны соотношением $t_f^{(1)} \cdot \mu^{(1)} = t_f^{(2)} \cdot \mu^{(2)}$, то φ -сечения двух множеств $G(t_f^{(1)}, \mu^{(1)})$ и $G(t_f^{(2)}, \mu^{(2)})$ при одном и том же φ связаны коэффициентом подобия α (относительно нуля исходной системы координат), причем этот коэффициент не зависит от значения φ .

2. Каждое φ -сечение симметрично относительно оси X , проведённой через начало координат исходной системы под углом $\varphi/2$ относительно оси x .

3. При построении φ -сечений достаточно рассмотреть случай $\varphi \geq 0$. Сечения при $\varphi < 0$ и $\varphi > 0$ совпадают друг с другом после зеркального отражения относительно оси x .

Важно отметить, что доказательства перечисленных свойств симметрии опираются только на вид кинематики машины Дубинса. Свойства симметрии имеют место как для геометрических ограничений, так и для интегральных.

Принцип максимума Понтрягина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\varphi, & \dot{\psi}_1 &= 0, & J(u(\cdot)) &= \int_0^{t_f} (u(t))^2 dt \rightarrow \min \\ \dot{y} &= \sin\varphi, & \dot{\psi}_2 &= 0, & J(u^*(\cdot)) &> 0. \\ \dot{\varphi} &= u; & \dot{\psi}_3 &= \psi_1 \sin\varphi - \psi_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Исходная и сопряжённая системы связаны для оптимального движения условием максимума:

$$\max_p (\psi_3^*(t)p - p^2) = \psi_3^*(t) \cdot u^*(t) - (u^*(t))^2, \quad t \in [0, t_f].$$

$$\Longrightarrow u^*(t) = \psi_3^*(t)/2, \quad t \in [0, t_f].$$

Гусев М.И., Зыков И.В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т.23. № 1, С.103–115.

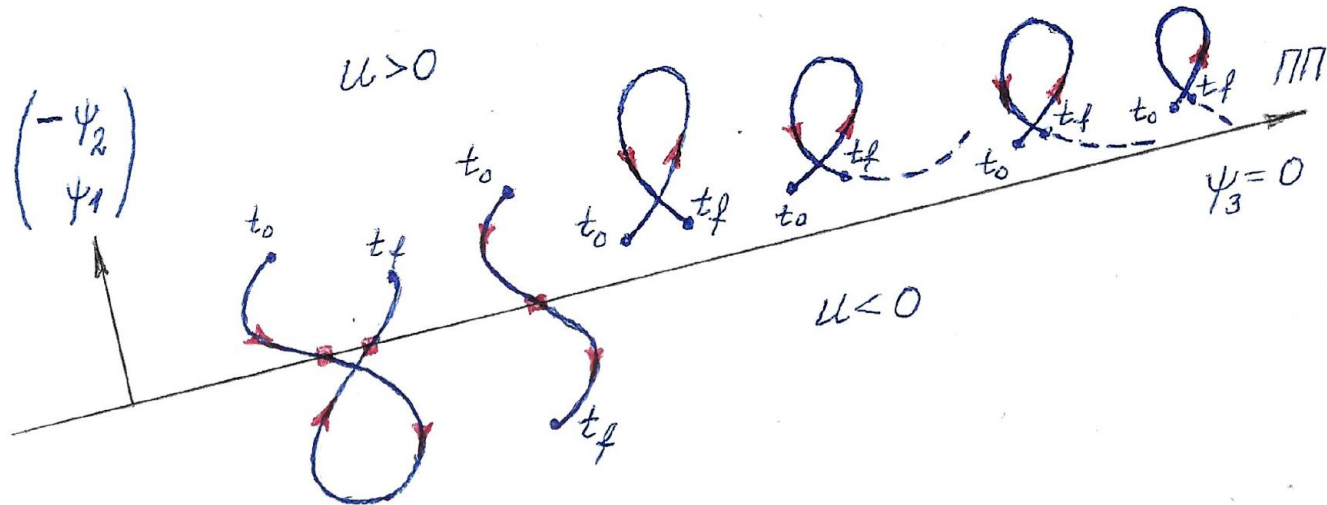
Слайд 8

Вся тонкость исследования φ -сечений связана с применением принципа максимума Понтрягина (ПМП). Здесь опираемся на результат из статьи М.И. Гусева и И.В. Зыкова о том, что для любой точки на границе множества достижимости $G(t_f, \mu)$ (за исключением особой точки, соответствующей $u(t) \equiv 0$) управление, ведущее в эту точку, доставляет минимум интегральному квадратичному функционалу, причём этот минимум равен μ . Поэтому записываем ПМП именно для такой вспомогательной задачи. Он складывается из записи исходной системы, сопряжённой системы и соотношения максимума, связывающего две системы. Такое соотношение дает $u(t) = \psi_3(t)/2$. Вид сопряжённой системы тот же самый, что и для геометрического ограничения на управление. Вероятно, это и лежит в основе «похожести» изображений трёхмерных множеств достижимости при геометрическом и интегральном ограничениях.

Прямая переключения

$$\psi_3(t) = \psi_1 \underbrace{\sin\varphi(t)}_{\dot{y}(t)} - \psi_2 \underbrace{\cos\varphi(t)}_{\dot{x}(t)} \Rightarrow \psi_3(t) = \psi_1 y(t) - \psi_2 x(t) + C$$

$$\psi_1 y - \psi_2 x + C = 0 \quad - \text{ прямая переключения (ПП)}$$



Слайд 9

Как и в случае геометрического ограничения, при интегральном ограничении каждое движение, удовлетворяющее ПМП, имеет свою прямую переключения (ПП), при пересечении которой управление изменяет знак на противоположный. Принципиальное отличие от случая геометрического ограничения состоит в том, что если мы выкидываем особое движение в силу $u(t) \equiv 0$, то любое другое не имеет участков движения по ПП: движение, удовлетворяющее ПМП, может только пересекать ПП под некоторым ненулевым углом.

Доказано, что управление, удовлетворяющее ПМП и при этом ведущее на границу множества достижимости, имеет не более двух моментов смены знака. Для движений с постоянным знаком на $[t_0, t_f]$ различаем случаи, когда продолжение движения в силу ПМП после момента t_f (при дополнительной трате интегрального ресурса) не пересекает ПП, стремится к ПП асимптотически, пересекает ПП.

Специфика уравнений принципа максимума

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos\varphi, \\ \dot{y} = \sin\varphi, \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{\psi_3}{2}, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin\varphi - \psi_2 \cos\varphi, \end{cases} \right\} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \rho \sin(\varphi - \beta)$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \text{const}, \\ \psi_2 = \text{const}. \end{cases}$$

$$\frac{d(\dot{\varphi}(t))^2}{dt} = 2\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t) = 2\dot{\varphi}(t)\rho \sin(\varphi(t) - \beta),$$

$$(\dot{\varphi}(t))^2 = c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta),$$

$$c_* = 2\rho \cos\beta + C^2/4.$$

$$\dot{\varphi}(t) = \pm\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta)}.$$

Слайд 10

Теорема об управлениях, удовлетворяющих ПМП и ведущих на границу множества достижимости, имеет такую же структуру, как и при геометрических ограничениях. Она говорит о 6 типах программных управлений. Для $\varphi(t_f) > 0$ ограничиваемся 4 типами.

Управления, порождающие границу множества достижимости

Лемма 3

Пусть движение $(x(\cdot), y(\cdot), \varphi(\cdot))^T$ на промежутке $[t_0, t_f]$ порождается непрерывным управлением $u(\cdot)$, которое удовлетворяет ПМП с тремя моментами t_1, t_2, t_3 смены знака управления: $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_f$.

Тогда $(x(t_f), y(t_f), \varphi(t_f))^T \in \text{int}G(t_f)$.

Типы управлений :

U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
$u > 0$	$u < 0, u > 0$	$u > 0, u < 0$	$u < 0$	$u > 0, u < 0, u > 0$	$u < 0, u > 0, u < 0$

Теорема

В любую точку $(x, y, \varphi)^T \neq (t_f, 0, 0)^T$ на границе множества $G(t_f)$ ведёт непрерывное управление, удовлетворяющее ПМП и относящееся к одному из типов $U_1 - U_6$. Других вариантов управлений, ведущих на границу, нет.

Если $\varphi > 0$, то в перечне шести типов оставляем лишь четыре: U_1, U_2, U_3, U_6 .

В случае $\varphi < 0$ ограничиваемся четырьмя типами: U_4, U_2, U_3, U_5 .

Если $\varphi = 0$, оставляем типы U_2, U_3, U_5, U_6 ; при этом управления типов U_5 и U_6 порождают одну и ту же совокупность точек.

Слайд 11

При интегральном квадратичном ограничении на управление в замкнутой (при помощи равенства $u(t) = \psi_3(t)/2$) системе уравнений ПМП можно выделить подсистему, определяющую изменение угла φ . Эта подсистема переписывается в виде уравнения второго порядка, представляющего собой нелинейное уравнение математического маятника. Его решение зависит от скалярных констант $\rho, \beta, \varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0)$.

Несложные выкладки приводят к выражению для $\dot{\varphi}(t)$ на участках постоянства знака управления $u(t)$. Используем полученную формулу для описания движения на участках с постоянным по знаку управлением, т.е. по одну сторону от ПП.

Теперь нужно составить соотношения, которые при заданных t_f, μ и $\varphi(t_f)$ определяют движения, ведущие на границу φ -сечения для $\varphi = \varphi(t_f) \geq 0$. Выписываем такие соотношения для управлений типа U_1, U_3 и U_6 . Движения, соответствующие типу U_2 , дают точки в рассматриваемом φ -сечении, которые симметричны относительно оси X точкам, получаемым при помощи U_3 .

Кривая, порождаемая управлением U_1 при заданном $\varphi(t_f)$

Кривая A_1 состоит из точек, в каждую из которых ведет положительное управление типа U_1 .
Справедливы соотношения

$$t_f = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)}}, \quad \mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi.$$

Здесь β_1 – угол, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки до направления ПП. Положим $c_* = 2\rho k_1$, $k_1 > 0$. Это позволяет, рассматривая умножение $t_f \cdot \mu$, получить при фиксированном β_1 уравнение с одним неизвестным k_1 :

$$t_f \cdot \mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{k_1 - \cos(\varphi - \beta_1)}} \cdot \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{k_1 - \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi. \quad (*)$$

Определив k_1 , находим ρ из соотношения $\mu = \int \dots$. Далее интегрируем на $[0, t_f]$ первые два уравнения исходной системы с учётом соотношения $\dot{\varphi}(t) = \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi(t) - \beta_1)}$.

Получаем движение – эластику Эйлера на плоскости x, y . Кончик её обозначим $A_1(\beta_1)$ и отнесем к кривой A_1 для рассматриваемого параметра β_1 .

Если $\beta_1 = \varphi(t_f)/2$, то соответствующая эластика приходит на ось X . Построение кривой A_1 начинаем именно с этой точки, перебирая β_1 в диапазоне $[\varphi(t_f)/2, \varphi(t_f)/2 + \pi]$. Увеличиваем β_1 от значения $\varphi(t_f)/2$ до значения $\tilde{\beta}_1$, при котором ещё существует решение уравнения (*). Объединяя полученную кривую с симметричной ей относительно оси X , получаем кривую A_1 .

Однако есть трудности вычисления интегралов в (*).

Слайд 12

На слайде выписаны и пояснены соотношения (условия связи), соответствующие типу U_1 . Получаемые точки при реализации программных управлений образуют однопараметрическую кривую A_1 на плоскости x, y . В качестве независимого параметра используется величина β_1 . Кривая A_1 симметрична относительно оси X и строится при $\varphi(t_f) > 0$.

Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода

Имеем
$$t_f = \int_0^{\varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)}}, \quad \mu = \int_0^{\varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1)} d\varphi.$$

Замена: $\varphi - \beta_1 = 2\gamma - \pi.$

Первый интеграл (для t_f):

$$t_f = 2 \int_0^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{c_* + 2\rho \cos 2\gamma}} - 2 \int_0^{(-\beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{c_* + 2\rho \cos 2\gamma}}.$$

Преобразуем подкоренное выражение:

$$c_* + 2\rho \cos 2\gamma = c_* + 2\rho (1 - 2\sin^2 \gamma) = c_* + 2\rho - 4\rho \sin^2 \gamma = (c_* + 2\rho) \left(1 - \frac{4\rho}{c_* + 2\rho} \sin^2 \gamma\right).$$

Учитывая $c_* - 2\rho \cos(\varphi - \beta_1) \geq 0$, положим $k^2 = \frac{4\rho}{c_* + 2\rho} > 0$.

Отсюда

$$t_f = \frac{2}{\sqrt{c_* + 2\rho}} \int_0^{(\varphi(t_f) - \beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}} - \frac{2}{\sqrt{c_* + 2\rho}} \int_0^{(-\beta_1 + \pi)/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}.$$

Слайд 13

При построении кривой A_1 сталкиваемся с существенными трудностями, связанными с вычислением эллиптических интегралов (вблизи $k = 1$). Проблем с интегрированием не было в случае геометрических ограничений.

Кривая, порождаемая управлением U_3 при заданном $\varphi(t_f)$

Кривая A_3 состоит из точек, в каждую из которых ведет управление типа U_3 с одним моментом смены знака управления с «+» на «-». Справедливы соотношения

$$t_f = \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}} + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)}},$$

$$\mu = \int_0^{\varphi_3} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi + \int_0^{\varphi_3 + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_3)} d\varphi.$$

Здесь β_3 – угол наклона траектории в момент пересечения ПП (отсчитывается против часовой стрелки от направления вектора скорости до направления ПП). Первые интегралы в формулах соответствуют участку движения с $u(t) < 0$ от момента пересечения с ПП до момента t_f . При этом φ_3 – накопленный угол на этом участке, взятый по модулю. Вторые интегралы соответствуют участку движения с $u(t) > 0$ от начального момента до выхода на ПП. Накопленный угол равен $\varphi_3 + \varphi(t_f)$.

Фактически рассматриваем два движения, выходящие из одной и той же вспомогательной точки на ПП. Учитывая $\psi_3(0) = 0$ для такой вспомогательной точки, имеем $c_* = 2\rho \cos \beta_3$. Перемножая соотношения для t_f и μ , получаем уравнение относительно φ_3 . При каждом β_3 находим его единственное решение φ_3 . Затем вычисляем единственное ρ из соотношения для μ . Диапазон β_3 , для которого существует решение, обозначим $[\tilde{\beta}_3, \hat{\beta}_3]$. Имея при каждом β_3 два участка движения, склеиваем их и переносим полученную эластику в начало координат с касанием по оси x . Последнюю точку эластики обозначаем $A_3(\beta_3)$.

В итоге получаем кривую $A_3(\beta_3)$, $\beta_3 \in [\tilde{\beta}_3, \hat{\beta}_3]$. Ей соответствует симметричная относительно оси X кривая A_2 , в каждую точку которой ведет реверсивное управление.

Слайд 14

Кривая A_3 порождается программными управлениями типа U_3 с одним моментом смены знака. Каждое из двух условий связи (для t_f и μ) содержит теперь два слагаемых. Кривой A_3 соответствует симметричная ей относительно оси X кривая A_2 .

Кривая, порождаемая управлением U_6 при заданном $\varphi(t_f)$

Кривая A_6 состоит из точек, в каждую из которых ведет управление типа U_6 с двумя моментами смены знака: с «-» на «+» и затем с «+» на «-».

При построении кривой A_6 в качестве одномерного параметра возьмем $\varphi_{6,1}$. Движение, ведущее при рассматриваемом $\varphi_{6,1}$ в точку $A_6(\varphi_{6,1})$, состоит из трех участков, равных по угловой величине соответственно $-\varphi_{6,2}$ (участок лежит справа от ПП), $+\varphi_{6,2}+\varphi_{6,1}+\varphi(t_f)$ (участок лежит слева от ПП), $-\varphi_{6,1}$ (справа от ПП). Здесь значения $\varphi_{6,2}$, $\varphi_{6,1}$, $\varphi(t_f)$ считаются положительными. При этом справедливо равенство

$$2\pi - 2\beta_6 - \varphi_{6,2} - \varphi_{6,1} = \varphi(t_f). \quad (*)$$

Составляем соотношения

$$t_f = \int_0^{\varphi_{6,2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \int_0^{\varphi_{6,1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}} + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \frac{d\varphi}{\sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)}},$$
$$\mu = \int_0^{\varphi_{6,2}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \int_0^{\varphi_{6,1}} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi + \int_0^{\varphi_{6,2} + \varphi_{6,1} + \varphi(t_f)} \sqrt{c_* - 2\rho \cos(\varphi + \beta_6)} d\varphi.$$

Полагаем $c_* = 2\rho \cos\beta_6$. Эти два соотношения с учетом равенства (*) дают систему относительно β_6 и ρ при фиксированном $\varphi_{6,1}$. Начальное значение параметра $\varphi_{6,1}$ берём равным $\hat{\varphi}_3$, где значение $\hat{\varphi}_3$ соответствует $\beta_3 = \hat{\beta}_3$. Строим первую часть кривой A_6 до тех пор, пока $\varphi_{6,1} \geq \varphi_{6,2}$.

Рассматривая в силу леммы 1 симметричную относительно оси X кривую, получаем объединенную кривую A_6 . Кривая A_6 соединяет концы кривых A_3 , A_2 и гладко сопрягается с ними.

Кривая A_6 не строится, если $\hat{\varphi}_3 = 0$.

Слайд 15

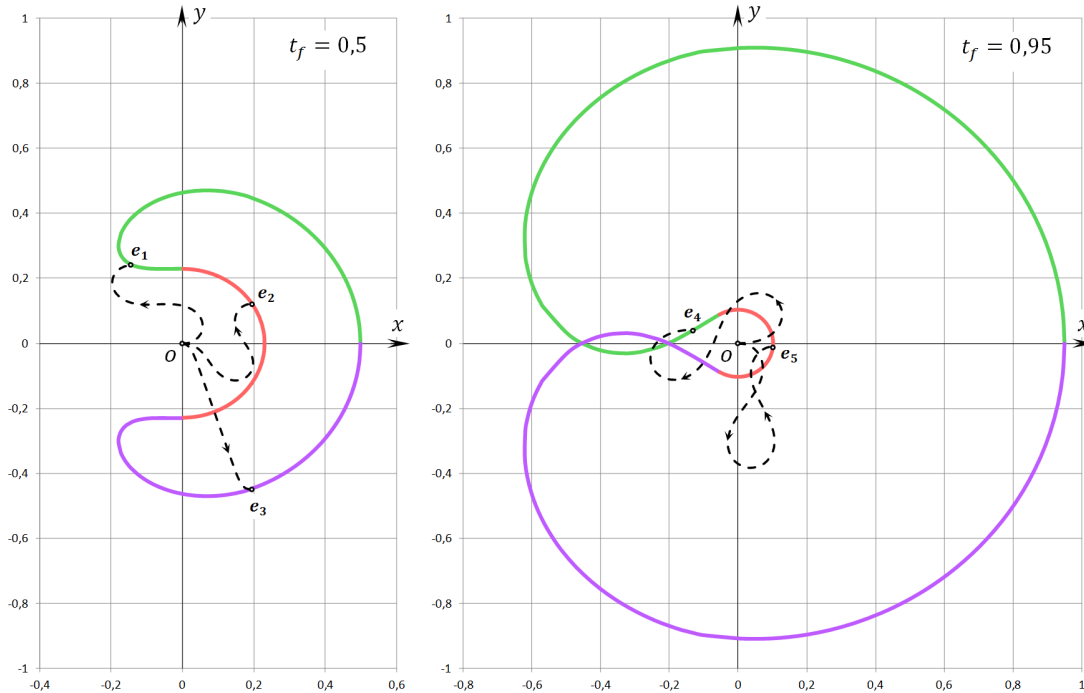
Соотношения связи еще более усложняются при построении кривой A_6 , соответствующей типу U_6 . Помимо двух соотношений для t_f и μ , учитываем равенство (\star) , записанное в угловых величинах. Кривая A_6 симметрична относительно оси X .

Выстраивая численно кривые A_1 , A_3 , A_2 и A_6 , убеждаемся, что A_1 гладко стыкуется с A_3 и A_2 . Такой факт был и при геометрическом ограничении. Кривая A_6 также гладко стыкуется с A_3 и A_2 . При геометрическом ограничении подобная стыковка не была гладкой. Соединение кривых A_1 , A_3 , A_6 и A_2 даёт замкнутую кривую \mathcal{A} на плоскости x, y , которая целиком, либо какими-то своими частями определяет границу рассматриваемого φ -сечения.

Подчеркнём, что у нас нет пока аккуратных теоретических доказательств (связанных с детальным описанием границы) для случая интегрального ограничения. При геометрическом ограничении такие доказательства были сделаны. Сейчас во многом действуем по аналогии, но при этом абсолютно уверены в правильности результатов.

Далее идут 7 слайдов, на которых поясняется, как при помощи кривой \mathcal{A} образуется граница φ -сечения. Пунктиром показаны примеры движений, идущих на границу.

Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $\varphi(t_f) = 0$



Формирование границы сечений множества достижимости по угловой координате: два примера для $\varphi = 0$.

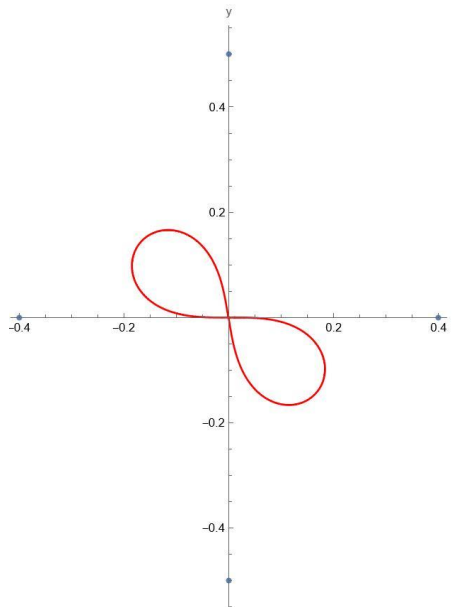
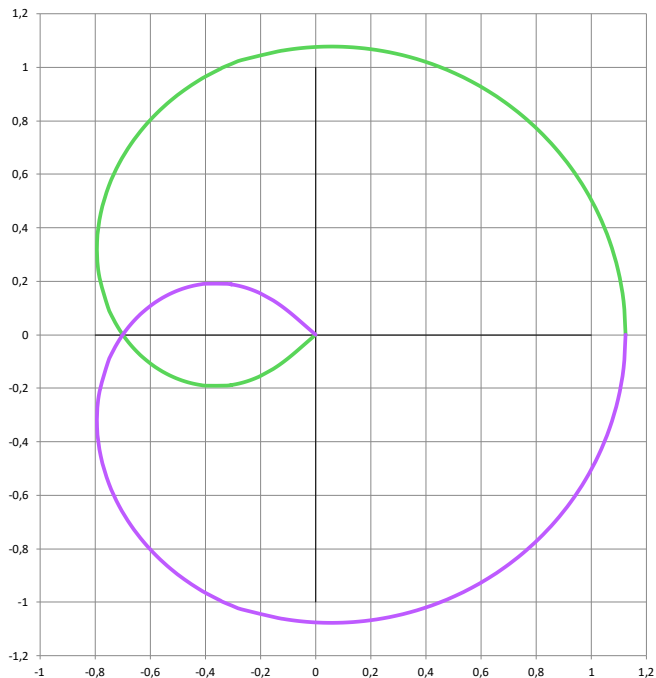
Слайд 16

Наиболее простым является случай, когда составная кривая \mathcal{A} не имеет самопересечений. Такое происходит при малых значениях t_f , если ограничение μ и угол $\varphi(t_f)$ (для которого строим φ -сечение) зафиксированы. Соответствующий случай изображён слева для $\varphi(t_f) = 0$. Кривая \mathcal{A} и является границей φ -сечения.

С увеличением t_f возникает самопересечение кривой \mathcal{A} и появляется «дырка», не принадлежащая φ -сечению $G_\varphi(t_f, \mu)$. Граница дырки (рисунок справа) образована кривой A_6 и примыкающими к ней дугами кривых A_3 и A_2 . Граница φ -сечения не включает в себя открытые дуги кривых A_3 и A_2 между первой P_1 и второй P_2 точками их пересечения.

Опыт теоретического исследования при геометрическом ограничении на управление подсказывает, что именно потеря односвязности (наличие дырки) делает анализ границы φ -сечений весьма сложным.

Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $t_f = 1.1244$, $\varphi(t_f) = 0$



*Оптимальные движения
в исходную точку –
совокупность лемнискат
(эластики Эйлера)
Точка $(0,0,0)$ для данных
 μ и t_f лежит во
внутренности множества
 $G(t_f, \mu)$*

Слайд 17

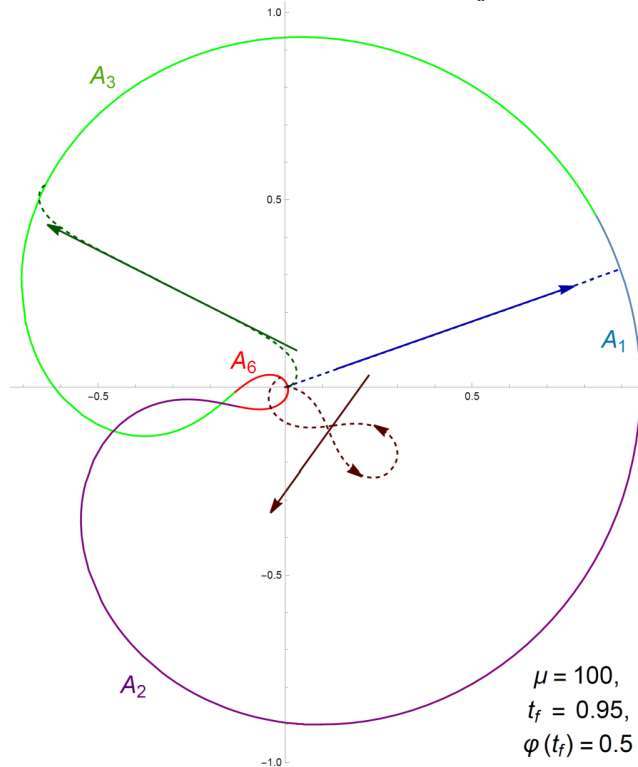
При зафиксированных μ и $\varphi(t_f)$ односвязность φ -сечения сохраняется лишь для значений t_f из малого промежутка. В конце его дырка «сжимается» в точку, и эта точка принадлежит внутренности полученного φ -сечения. Траектории, ведущие в такую точку вырождения (она совпадает с началом координат исходной системы), представляют собой лемнискаты. Их целое семейство (смотрим мультимедиа). Каждая кривая есть траектория предельного движения, ведущего на границу дырки при её сжатии.

Граница φ -сечения составляется дугами кривой \mathcal{A} до точки P_1 первого пересечения дуг A_3 и A_2 .

Существование замкнутых траекторий в виде лемнискат было обнаружено Л. Эйлером.

В работе Ю.Л. Сачкова показано, что лемниската (бантик, восьмёрка, символ бесконечности) не является глобально оптимальным решением в задаче оптимизации интегрального функционала, если углы отождествляются по модулю 2π . Наши численные исследования подтверждают это.

Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $t_f = 0.95$, $\varphi(t_f) = 0.5$

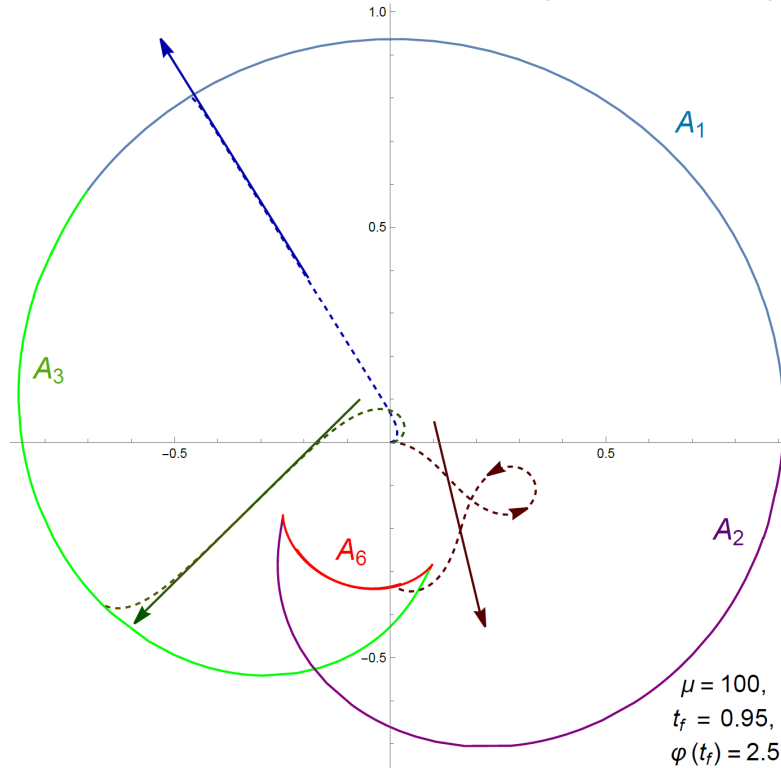


Слайд 18

При взятых значениях μ , t_f , $\varphi(t_f)$ есть неодносвязность φ -сечения. Показаны движения, ведущие в точки дуг A_1 , A_3 , A_6 . Зрительно кажется, что движение на дугу A_1 идет по ПП. На самом деле траектория расположена слева от ПП (если смотреть в направлении стрелки ПП).

Граница φ -сечения определяется дугами кривой \mathcal{A} за исключением открытых дуг A_3 и A_2 между точками P_1 и P_2 .

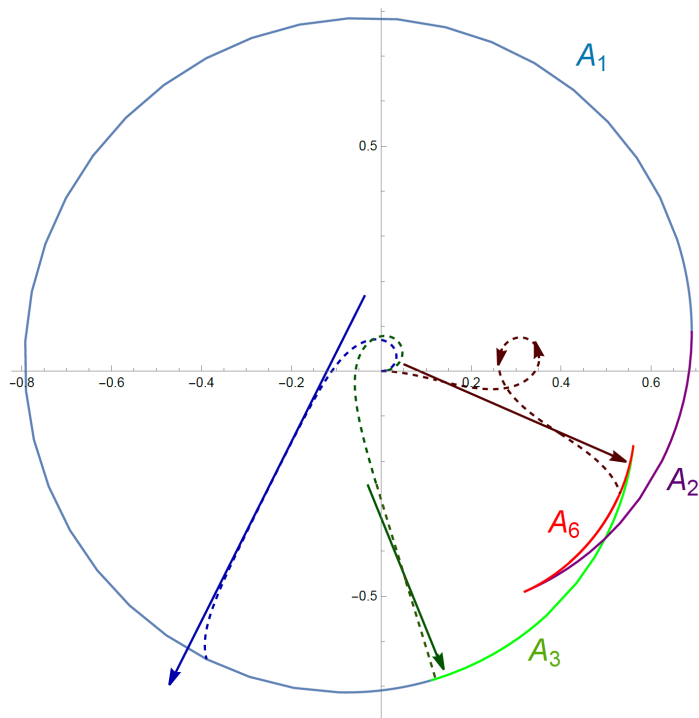
Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $t_f = 0.95$, $\varphi(t_f) = 2.5$



Слайд 19

Неодносвязность φ -сечения пропала. Граница состоит из кривой A_1 и дуг кривых A_3 , A_2 до точки P_1 их пересечения.

Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $t_f = 0.95$, $\varphi(t_f) = 5.0$

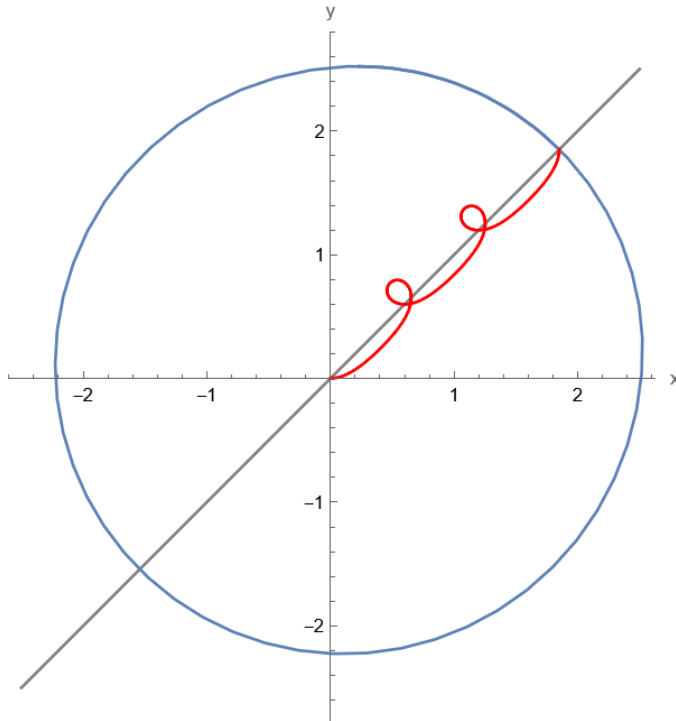


$\mu = 100$,
 $t_f = 0.95$,
 $\varphi(t_f) = 5$

Слайд 20

По сравнению с предыдущим слайдом на границе φ -сечения кривая A_1 «увеличилась» (относительно общей длины кривой \mathcal{A}) и «уменьшились» кривые A_3 , A_2 . Граница φ -сечения становится «похожей» на окружность.

Двумерное φ -сечение: $\mu = 100$, $t_f = 4$, $\varphi(t_f) = 14.5$

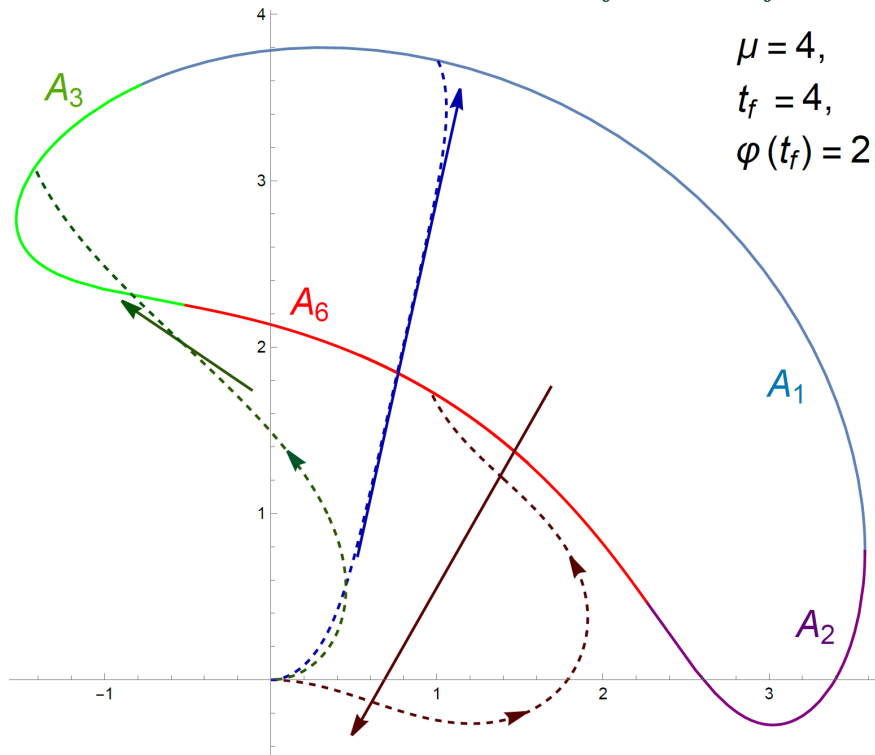


*Граница φ -сечения –
окружность. Движения,
ведущие на границу,
порождаются
положительными
управлениями.
Набираемый угол $\varphi(t_f)$
равен 14.5 рад.*

Слайд 21

Граница φ -сечения состоит только из кривой A_1 и представляет собой окружность. Движения, идущие на границу, порождаются положительным управлением и имеют несколько петель (смотрим мультик).

Двумерное φ -сечение: $\mu = 4$, $t_f = 4$, $\varphi(t_f) = 2$

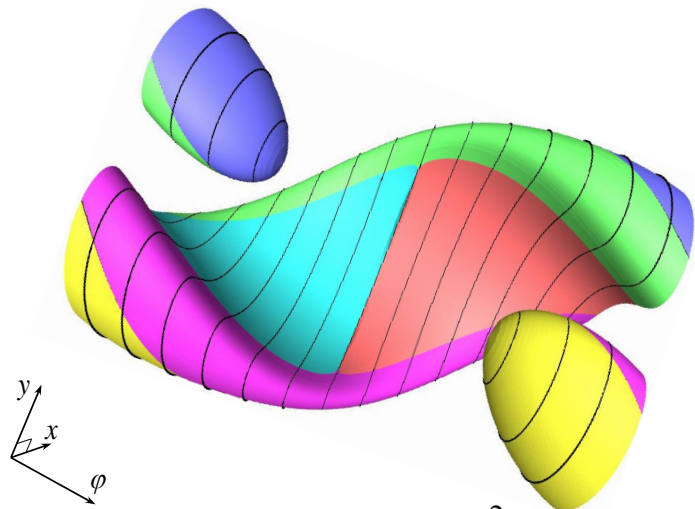


Слайд 22

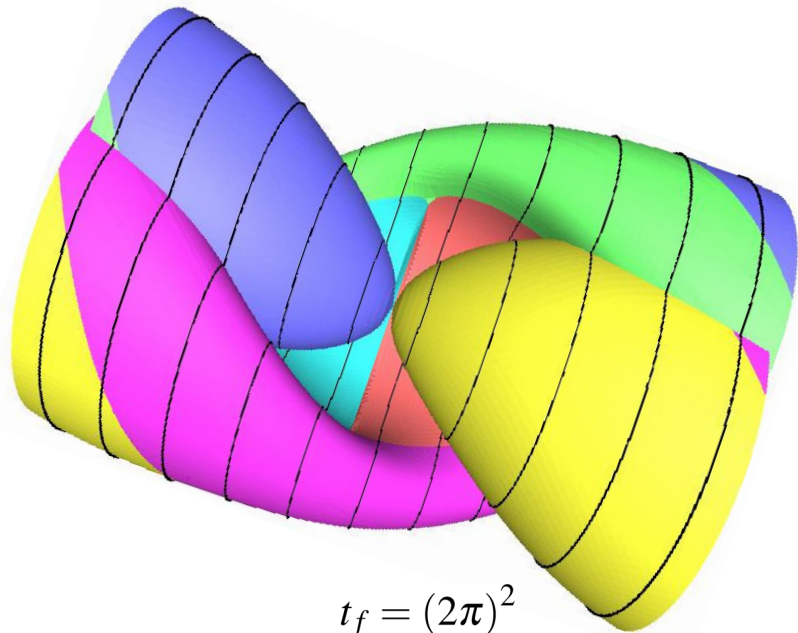
Здесь в сравнении с предыдущим слайдом значение $\varphi(t_f)$ мало. Составная кривая \mathcal{A} не имеет самопересечений и задает границу φ -сечения.

Множество достижимости при отождествлении угловой координаты по модулю 2π

$$\mu = 1$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$



$$t_f = (1.5\pi)^2$$



$$t_f = (2\pi)^2$$

Слайд 23

Для двух моментов времени t_f показаны трёхмерные множества достижимости в случае, когда угол φ отождествляется по модулю 2π .

Эластики Эйлера

$$\dot{x} = \cos \varphi,$$

$$\dot{y} = \sin \varphi,$$

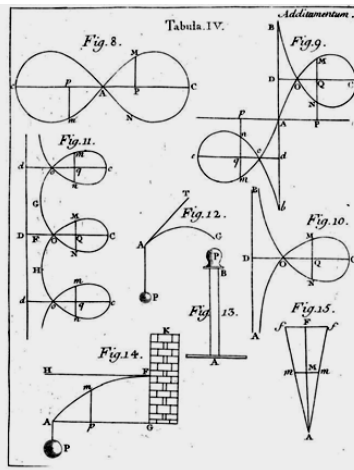
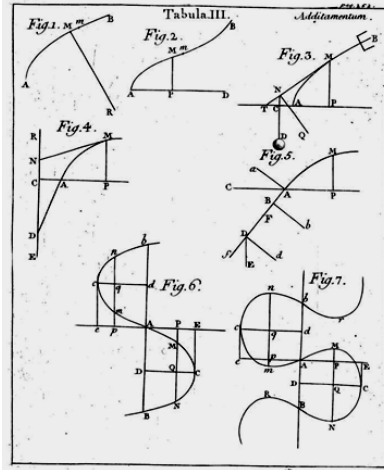
$$\dot{\varphi} = u;$$

$$\int_0^{t_f} u(t)^2 dt \rightarrow \min$$

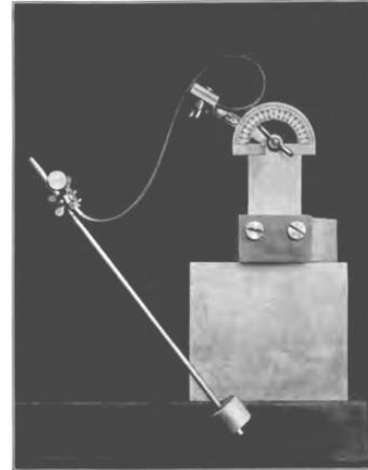
углы φ отождествляются
по модулю 2π

Заданы начальный $t_0=0$ и конечный $t_f=0$ моменты времени, а также соответствующие трёхмерные фазовые состояния

Найти оптимальное управление $u^*(\cdot)$, и оптимальную кривую, соединяющую эти точки.



Рисунки из книги Л.Эйлера (1744)



Установка М.Борна (1906)

Слайд 24

Здесь приведены копии двух страниц из книги Л. Эйлера, на которых поясняются возможные виды траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности в задаче минимизации интегрального квадратичного функционала.

Справа — установка М. Борна для экспериментальной проверки правильности математической теории об эластичах Эйлера. Тонкий нерастяжимый стержень закрепляется в двух точках под заданными углами. Форма, которую принимает стержень, должна соответствовать минимуму его «упругой» энергии.

Четыре глобально оптимальные эластики Эйлера

Заданы: момент $t_f = 1$, точка **a** и угол $\varphi = 0$.

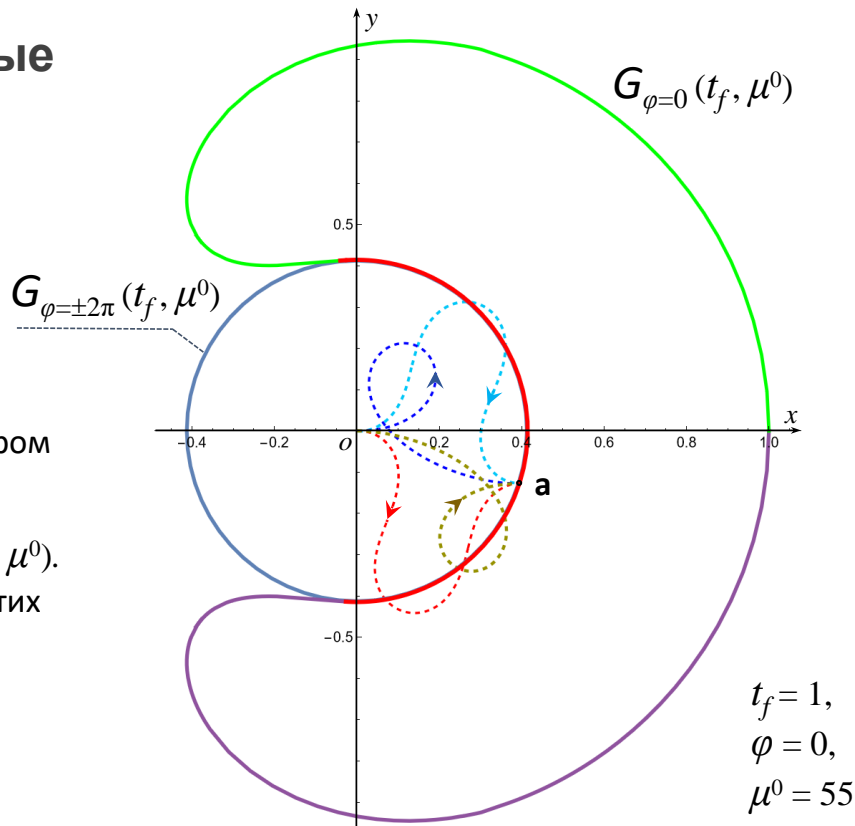
Задача: найти минимальное μ^0 , при котором возможен перевод в точку **a** с углом $\varphi = 0$;

построить все глобально оптимальные эластики.

Решение: подбираем минимальное μ^0 , при котором точка **a** попадает в φ -сечение $G_{\varphi=0}(t_f, \mu^0)$.

Дополнительно строим два φ -сечения $G_{\varphi=\pm 2\pi}(t_f, \mu^0)$. Убеждаемся, что точка **a** принадлежит границе этих φ -сечений.

Поэтому найденное μ^0 является оптимальным. Собираем эластики, ведущие в точку **a**. В данном случае их четыре.



$$\begin{aligned} t_f &= 1, \\ \varphi &= 0, \\ \mu^0 &= 55 \end{aligned}$$

Слайд 25

Ю.Л. Сачков и А.А. Ардентов в своих работах исследовали вопрос о количестве глобально оптимальных эластик Эйлера.

В одной из работ А.А. Ардентова приведён пример, где количество оптимальных эластик равно 4. При помощи трёх φ -сечений нашего множества достижимости мы даем пояснение такому количеству глобально оптимальных эластик.

Литература

1. Л. Эйлер. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
2. Levien, R. (2008) The Elastica: A Mathematical History / Electrical Engineering and Computer Sciences, University of California at Berkeley Technical Report No. UCB/EECS 2008–103, pp. 1–25
3. М. И. Зеликин. Теория и приложения задачи об эйлеровых эластках // УМН, 2012, Т. 67, вып. 2, 93–108.
4. А. А. Ардентов, Ю. Л. Сачков. Решение задачи Эйлера об эластках // АиТ, 2009, вып. 4, 78–88.
5. А.А. Ардентов. Кратные решения в задаче Эйлера об эластках // АиТ, 2018. вып. 7, 22-40.
6. М.И. Гусев, И.В. Зыков. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1, 103–115.
7. Ю.С. Сикорский Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. М.: КомКнига, 2006. 368 с.
8. В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3, 8–16.
9. V.S. Patsko, A.A. Fedotov. Three-dimensional Reachable Set for the Dubins Car: Foundation of Analytical Description // Commun. Optim. Theory. 2022. V. 2022. Article ID 23, pp.1–42.

Слайд 26

Указана литература, которая использована при подготовке доклада о численном построении трёхмерного множества достижимости при интегральном ограничении на управление.