

МАШИНА ДУБИНСА: ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ

В.С. Пацко, А.А. Федотов



Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН



ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД
ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ
ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

19 - 24
АВГУСТА
2019 г.

Слайд 1

В докладе речь пойдёт о множестве достижимости трёхмерной управляемой системы, называемой «машина Дубинса». Назначение следующих шести слайдов — обозначить те области, где применяется модель Дубинса, объяснить происхождение названия, а также отметить, что рассматриваемая модель движения является простейшей, если говорить о движущихся тележках (простейшая неголономная система).

Координированный поворот самолёта в горизонтальной плоскости

$$\dot{x} - V \cos \varphi = 0,$$

$$\dot{y} - V \sin \varphi = 0,$$

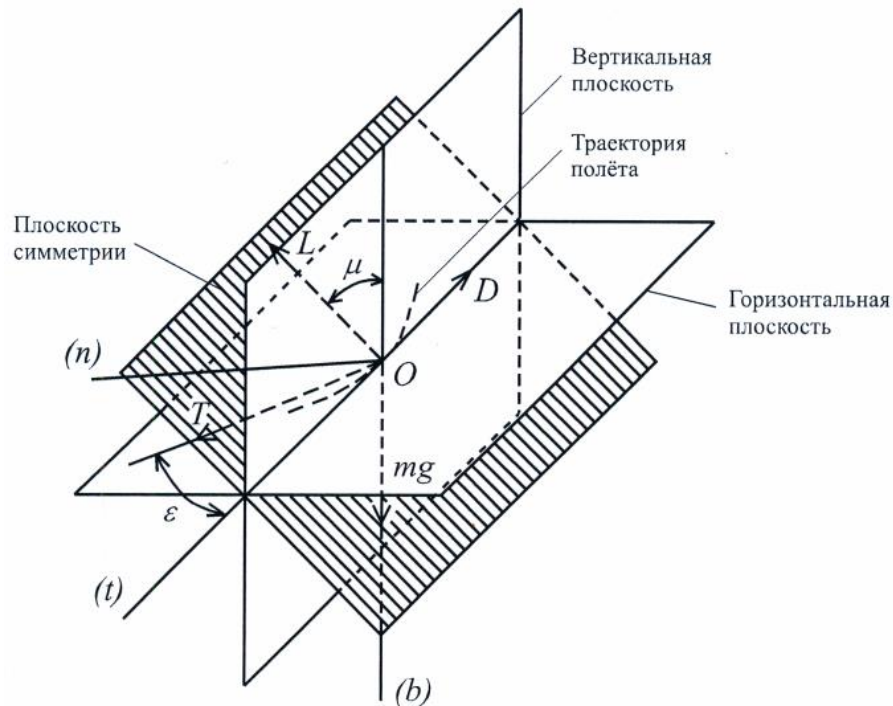
$$T \cos \varepsilon - D - m\dot{V} = 0,$$

$$(T \sin \varepsilon + L) \sin \mu - mV\dot{\varphi} = 0,$$

$$(T \sin \varepsilon + L) \cos \mu - mg = 0,$$

$$\dot{\varphi} = (g/V) \operatorname{tg} \mu$$

$$\dot{\varphi} = \frac{g \operatorname{tg} 30^\circ}{V} u, \quad |u| \leq 1$$



Миеле А. Механика полёта. Т. 1. М.: Наука, 1965

Слайд 2

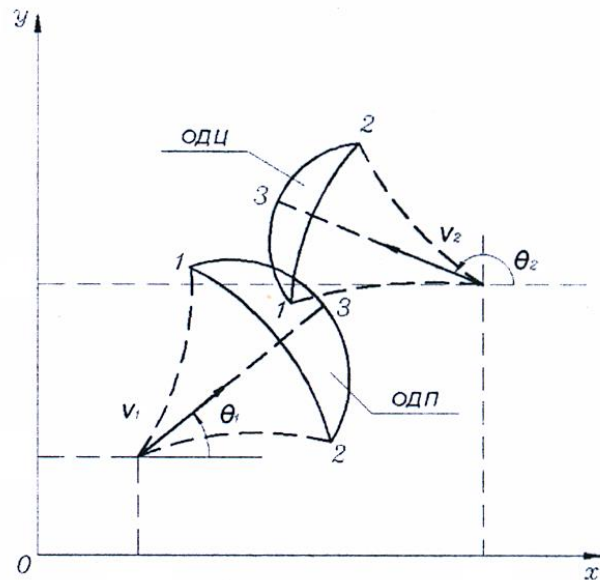
Картинка справа поясняет координированное движение самолёта в горизонтальной плоскости и взята из книги А. Миеле «Механика полёта». Силы, действующие по вертикальной оси, уравновешены, вектор скорости лежит в горизонтальной плоскости. В формулах слева x, y — координаты центра масс в горизонтальной плоскости, φ — угол вектора скорости, отсчитываемый от оси x . Оси x, y на рисунке не изображены. Изменение направления движения (в горизонтальной плоскости) осуществляется изменением угла крена μ . При движении с постоянной по величине скоростью, учитывая малость угла крена (обычно не больше 30°), после нормировки приходим к соотношениям, выделенным в рамке. Такую систему в журнальной литературе стали называть «машина Дубинса».

Задача преследования в вертикальной плоскости

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_i(t), \alpha_i(t))$$

$$z_i = \begin{bmatrix} y_i \\ x_i \\ V_i \\ \theta_i \end{bmatrix}; \quad f_i(z_i(t), \alpha_i(t)) = \begin{bmatrix} V_i \sin \theta_i \\ V_i \cos \theta_i \\ -(C_{x0i} + A_i \alpha_i^2) q_i S_i / m_i - g \sin \theta_i \\ C_{yi}^\alpha \alpha_i q_i S_i / (m_i V_i) - g \cos \theta_i / V_i \end{bmatrix}$$

$$|\alpha_i(t)| \leq \alpha_{iM}(t)$$



О.А. ТОЛПЕГИН

Балтийский университет (Военмех), С-Петербург

**МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР**

Слайд 3

В Балтийском университете (Военмех, С-Петербург) заведующий кафедрой «Процессы управления» О.А. Толпегин для решения задач перехвата применяет методы, разработанные Н.Н. Красовским. На слайде выписаны уравнения движения двух объектов в вертикальной плоскости. Управление — угол атаки α . Показаны для малого момента времени множества достижимости преследователя и цели в вертикальной плоскости. Хотя здесь для каждого игрока имеем систему четвёртого порядка (скорость V переменна), структура множеств достижимости очень похожа на структуру множеств достижимости для машины Дубинса. Метод наведения, основанный на построении множеств достижимости, применён О.А. Толпегиним и для случая нескольких догоняющих.

Мобильные колесные роботы

$$\dot{x} = V \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \psi, \quad \dot{\psi} = \Omega,$$

$$\dot{\beta} = -\Omega + \frac{V}{d} \sin \beta - \frac{\Omega b}{d} \cos \beta, \quad \dot{V} - a\Omega^2 = \frac{1}{mr} (M_L + M_R),$$

$$I_A \dot{\Omega} + maV\Omega = \frac{l}{r} (-M_L + M_R). \quad I_A = I_C + ma^2 = m\rho^2$$

$$M_L = c_1 n U_L - \frac{c_2 n^2}{r} (V - \Omega l), \quad M_R = c_1 n U_R - \frac{c_2 n^2}{r} (V + \Omega l).$$

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad \dot{y} = \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = u$$

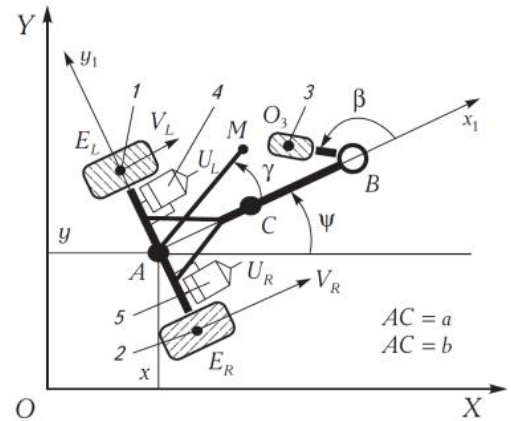


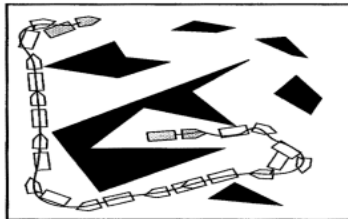
Рис. 4. Мобильный робот типа "Монолит" (пассивное роляное колесо)

НОВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНЫХ КОЛЕСНЫХ РОБОТОВ

Д.Е. Охоцимский, Ю.Г. Мартыненко 2003, Успехи механики, № 1, С. 3 – 46

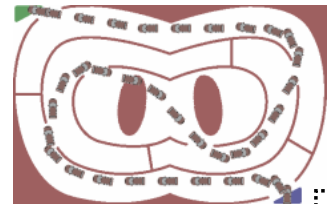
ROBOT MOTION PLANNING AND CONTROL

J.-P. Laumond (Ed)
1998, Springer



О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями

Матвейчук А.Р., Ушаков В.Н.
// Изв. РАН. ТИСУ. 2006. №1. С. 5-20.



Слайд 4

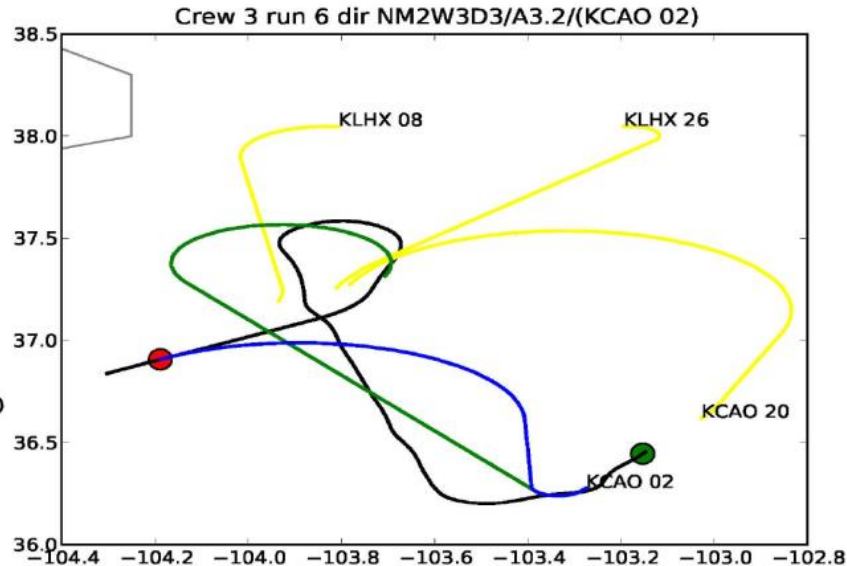
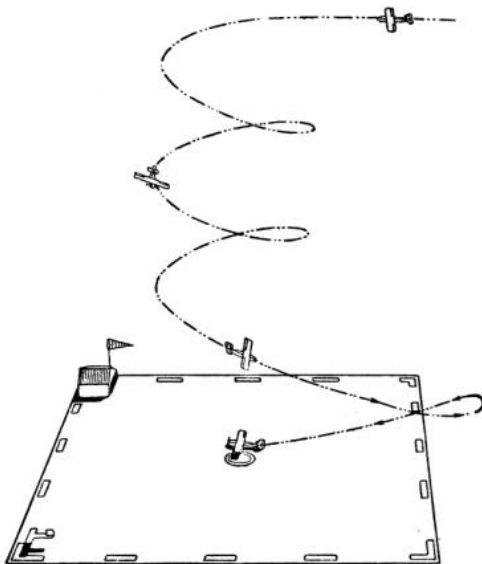
Картинка управляемой тележки взята из статьи Д.Е. Охоцимского и Ю.Г. Мартыненко о колёсных роботах. В первой строке слева — уравнения кинематики для точки A . Только кинематические уравнения и используются в модели Дубинса. Таким образом, если говорить о тележке, изображенной на рисунке, то модель Дубинса — серьёзное упрощение.

Задачи обхода препятствий различными тележками, в том числе и самыми простыми, рассмотрены в книге «Robot motion planning and control», составленной из нескольких статей под редакцией J.-P. Laumond.

В нашем Институте задачами обхода препятствий движущимися тележками много занимается В.Н. Ушаков со своими учениками.

Практическое применение одностороннего поворота

Посадка самолета с отказавшими двигателями и/или элеронами



The Emergency Landing Planner Experiment
(2011)
N. Meuleau,
C. Neukom,
C. Plaunt,
D.E. Smith, and
T. Smithy

Intelligent Systems
Division
NASA Ames
Research Center,
California

ti.arc.nasa.gov/publications

Choi H. Time-Optimal Paths for a Dubins Car and Dubins Airplane with a Unidirectional Turning Constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan, 2014. 134 p.

Слайд 5

Фантастические задачи о посадке самолёта с большой высоты с отказавшими двигателями и повреждёнными элеронами рассматриваются и моделируются во многих статьях по авиационной тематике. На левой картинке схематично показана траектория посадки самолёта с использованием только левого поворота. Правая картинка взята из работы, выполненной в исследовательском центре NASA. Синим цветом показана исходная штатная траектория. В момент нахождения самолёта в красной точке выявлена неисправность, затрудняющая поворот направо. Автоматика подсказывает пилоту траекторию, показанную зелёным цветом. В результате пилот реализует чёрную траекторию.

Задачи быстрогодействия для движений с односторонним поворотом изучаются в диссертации, отмеченной в нижней части слайда.

Множество достижимости для щупальца осьминога

SIMONE CACACE, ANNA CHIARA LAI, AND PAOLA LORETI

Modeling and Optimal Control of an Octopus Tentacle

Preprint November 2018 <https://www.researchgate.net/publication/329124699>

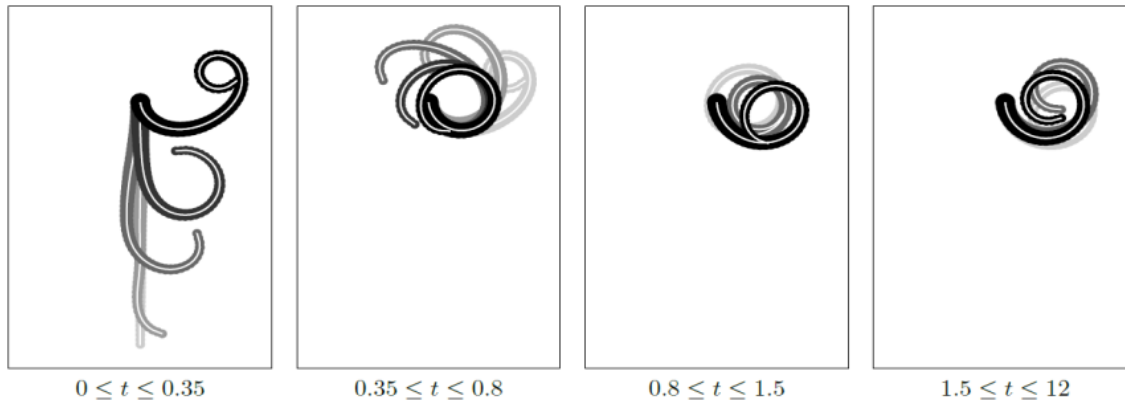


FIGURE 1. tentacle dynamics for a full contraction control

Управление гибкими роботами

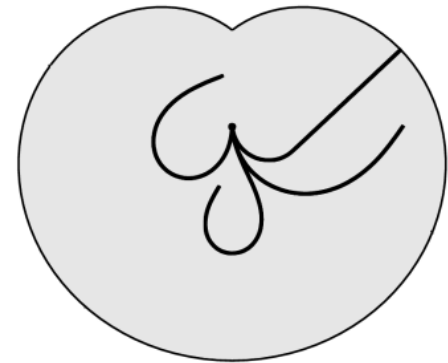


FIGURE 4. solutions of the stationary optimal control problem for different target points

Слайд 6

На слайде приведены рисунки из статьи об исследовании двумерного множества достижимости для кончика щупальца осьминога (гибкий робот). В предположении о неизменной длине щупальца и ограничении на радиус изгиба получаем множество достижимости, идентичное множеству достижимости для машины Дубинса с фиксированным моментом окончания в проекции на плоскость геометрических координат. Всевозможные положения кончика щупальца образуют множество, показанное справа серой заливкой.

Нелинейная система управления движением – машина Дубинса



Оптимальная прокладка ж/д путей

Марков, А. А. (1889).

Сообщения Харьковского математического общества,
Том 2-1 (No. 5,6), 250–276.

Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго
рода задачъ о наибольшихъ и наимень-
шихъ величинахъ.

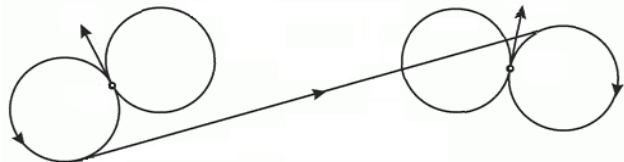


Задача преследования-уклонения
«шофер-убийца»

Isaacs, R. (1951). Games of pursuit, Scientific report
of the RAND Corporation, Santa Monica.

Начальное состояние

Конечное состояние



Задача поиска кратчайшего пути при заданных
начальном и конечном положениях и направлениях

AMERICAN

JOURNAL OF MATHEMATICS

Volume LXXIX, Number 3 JULY, 1957, pp 497 - 515

ON CURVES OF MINIMAL LENGTH WITH A CONSTRAINT ON
AVERAGE CURVATURE, AND WITH PRESCRIBED INITIAL
AND TERMINAL POSITIONS AND TANGENTS.*

By L. E. DUBINS.

Слайд 7

Теперь более аккуратно об истории вопроса.

В 1889 г. А.А. Марков опубликовал в «Сообщениях Харьковского математического общества» статью, в которой рассмотрел 4 математические задачи, связанные с проектированием железных дорог. Первая из них описывается следующим образом. Между двумя точками на плоскости провести кратчайшую линию при условии, что радиус кривизны кривой не меньше заданного числа и касательная к кривой в начальной точке имеет заданное направление.

В 1951 г. R. Isaacs представил в Rand Corporation свой первый отчет по теории дифференциальных игр, в котором поставил и наметил решение задачи «шофер-убийца». В этой игре «автомобиль» с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине линейной скоростью пытается как можно скорее сблизиться с «пешеходом», уклоняющимся от столкновения. Именно Р. Айзекс первым стал называть словом «car» управляемый объект, о котором пойдёт речь в докладе.

В 1957 г. L. Dubins в чисто математической работе установил свойства кривых минимальной длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющих две точки на плоскости с заданными направлениями выхода и входа. Ясно, что это соответствует задаче быстрогодействия для объекта, движущегося с постоянной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Специалисты по теоретической робототехнике стали называть такую модель «Dubins car».

Машина Дубинса: трёхмерное множество достижимости «в момент» t_f

$$\dot{x} = \cos \varphi, \quad u_1 = -1 \quad (\text{симметричный случай})$$

$$\dot{y} = \sin \varphi, \quad u_1 \in (-1, 0) \quad (\text{несимметричный случай})$$

$$\dot{\varphi} = u; \quad u_1 = 0 \quad (\text{односторонний случай})$$

$$u \in [u_1, 1]. \quad u_1 \in (0, 1) \quad (\text{строго односторонний случай})$$

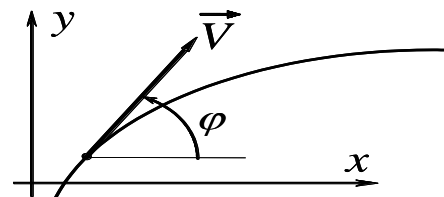
Множество достижимости
в момент t_f :

$$G(t_f) = \bigcup_{u(\cdot)} \begin{pmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \\ \varphi(t_f) \end{pmatrix}$$

~~Множество достижимости~~

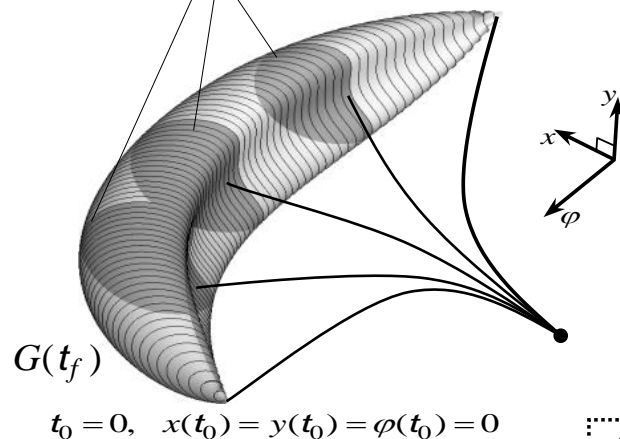
~~к моменту t_f :~~

~~$$G^*(t_f) = \bigcup_{0 \leq t \leq t_f} G(t)$$~~



Мы полагаем $\varphi \in (-\infty, +\infty)$

φ -сечения множества достижимости



Слайд 8

Переходим к основной части доклада. Слева вверху выписана модель движения. В ней x, y — геометрические координаты, φ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси x . Считаем, что угол φ принимает значения в интервале $(-\infty, +\infty)$, т.е., мы не отождествляем углы по модулю 2π . Управлением является величина u , принимающая значения в отрезке $[u_1, 1]$. Левое значение u_1 в этом отрезке является параметром задачи.

Различаем 4 случая:

- симметричный случай, когда $u_1 = -1$;
- несимметричный случай, если $u_1 \in (-1, 0)$;
- случай одностороннего поворота, когда $u_1 = 0$;
- случай строго одностороннего поворота, если $u_1 \in (0, 1)$.

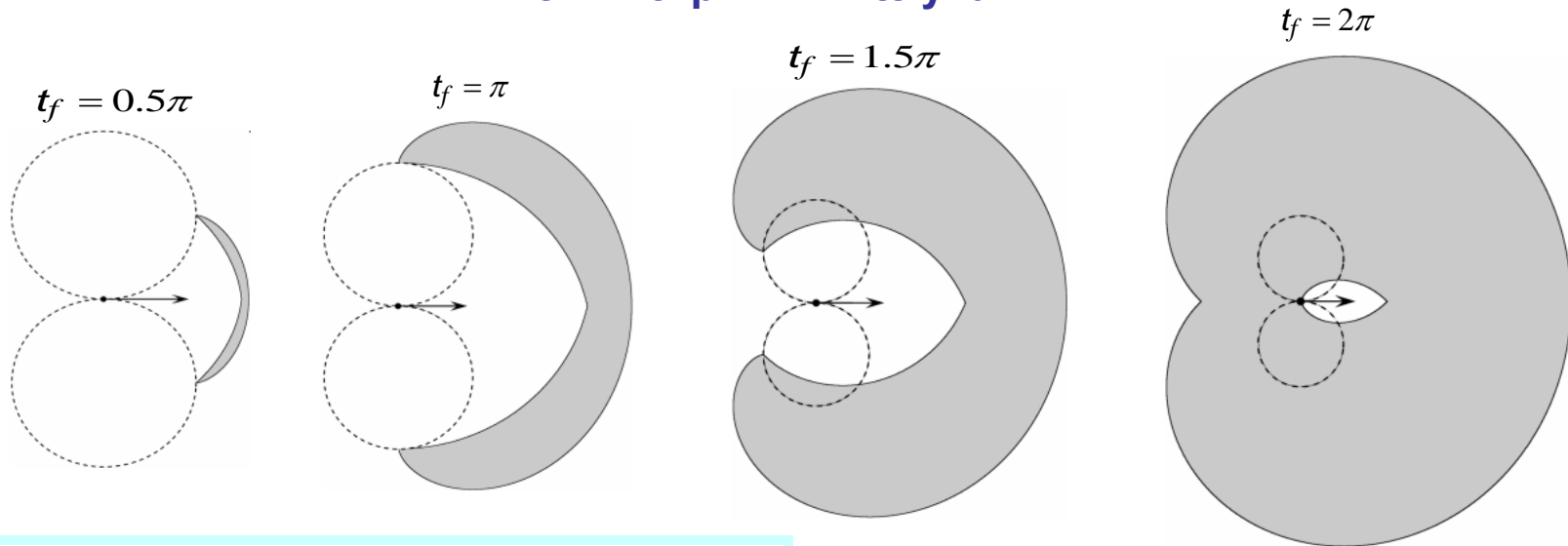
Состояние системы полагаем нулевым в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Множество достижимости $G(t_f)$ в момент t_f — это совокупность всех состояний трёхмерного фазового вектора в момент t_f , которые можно получить, перебирая допустимые измеримые программные управления.

Сечение множества достижимости при некотором значении φ называем φ -сечением.

Мы не будем говорить о множестве достижимости $G^*(t_f)$ «к моменту» t_f , которое представляет собой объединение множеств достижимости $G(t)$ при $t \in [0, t_f]$. Такое множество лучше изучать самостоятельно. Ограничимся в конце доклада лишь двумя слайдами с изображениями множеств достижимости «к моменту».

Множества достижимости в проекции на геометрическую плоскость, симметричный случай



PLANE MOTION OF A PARTICLE SUBJECT TO CURVATURE CONSTRAINTS*

E. J. COCKAYNE AND G. W. C. HALL†

Abstract. A particle P moves in the plane with constant speed and subject to an upper bound on the curvature of its path. This paper studies the classes of trajectories by which P can reach a given point in a given direction and obtains, for all t , the set $R(t)$ of all possible positions for P at time t , thus extending the results of several recent authors.

Ю.И. Бердышев

Нелинейные задачи последовательного управления
и их приложение;

Российская академия наук, Уральское отделение, Институт
математики и механики. - Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2015. 193 с.

Слайд 9

Из работы E.J. Sussmann и G.W.C. Hall известно описание множества достижимости в проекции на плоскость геометрических координат x, y для симметричного случая. В указанной на слайде статье принцип максимума Понтрягина не был использован. Однако в дальнейшем результаты статьи были передоказаны другими авторами с использованием принципа максимума.

На слайде показаны множества достижимости в симметричном случае для четырёх моментов времени. Масштаб изображения свой для каждого множества. Начальное направление отмечено стрелкой. Движения с крайними управлениями -1 и $+1$ изображены двумя окружностями. На внешнюю «выпуклую» часть границы ведут управления с одним переключением вида $+1, 0$ и $-1, 0$. На «тыльную» вогнутую часть границы приводят управления вида $+1, -1$ и $-1, +1$ также с одним переключением. Следует обратить внимание, что при $t_f = 2\pi$ множество достижимости не является односвязным.

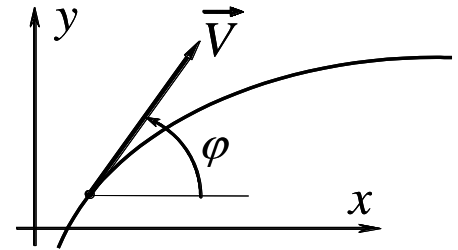
В нашем Институте Ю.И. Бердышев использовал описание двумерного множества достижимости для решения различных задач управления.

Принцип максимума Понтрягина

Известно (Ли Э.Б., Маркус Л.), что управления, которые переводят систему на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos \varphi, \\ \dot{y} = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u; \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{динамика} \\ \text{машины Дубинса} \\ \text{в нормированных} \\ \text{координатах} \end{array}$$

$u \in [u_1, 1].$



Пусть $u^*(\cdot)$ – некоторое допустимое управление и $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))^T$ – соответствующее движение системы на промежутке $[t_0, t_f]$.

Сопряжённая система записывается в виде

Имеем $\psi_1^*(\cdot) = \text{const}, \quad \psi_2^*(\cdot) = \text{const}.$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = 0, \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 \sin \varphi^* - \psi_2 \cos \varphi^*. \end{cases}$$

Слайд 10

При исследовании трёхмерного множества достижимости опираемся на принцип максимума Понтрягина. Известно, что управления, ведущие на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума. Соответствующий факт сформулирован и доказан в книге Э.Б. Ли и Л. Маркуса.

Пусть $u^*(\cdot)$ — некоторое допустимое управление. Тогда сопряжённая система записывается в виде, указанном внизу справа. Первая и вторая координаты сопряжённого движения являются константами. Они входят в уравнение для третьей координаты.

Условие максимума

Принцип максимума: существует некоторое ненулевое непрерывное решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))^T$ сопряжённой системы, для которого почти всюду на $[t_0, t_f]$ выполнено условие

$$\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_1^*(t) \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t) \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t) u \right]$$

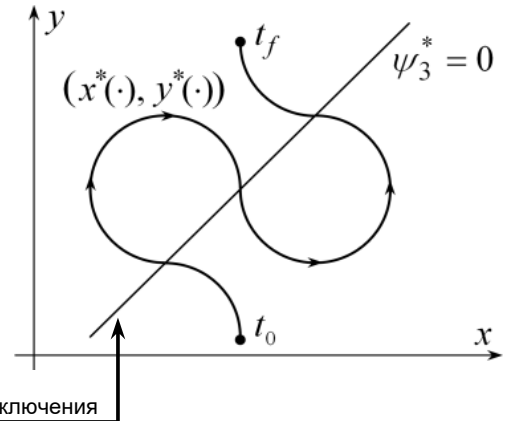
$$\Rightarrow \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \left[\psi_3^*(t) u \right], \text{ п.в. } t \in [t_0, t_f]$$

1. Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(\cdot) = \text{const} \neq 0$ на всём промежутке $[t_0, t_f]$.
Таким образом, почти всюду $u^*(t) = u_1$ или $u^*(t) = u_2$.

2. Пусть хотя бы одно из чисел $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ не равно нулю. Тогда, используя уравнения сопряженной системы, получим соотношение

$$\dot{\psi}_3^*(t) = \psi_1^*(t) y^*(t) - \psi_2^*(t) x^*(t) + C.$$

Следовательно, $\dot{\psi}_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))^T$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0$.



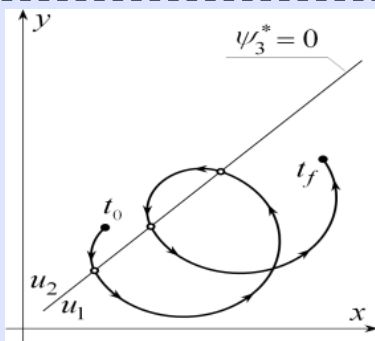
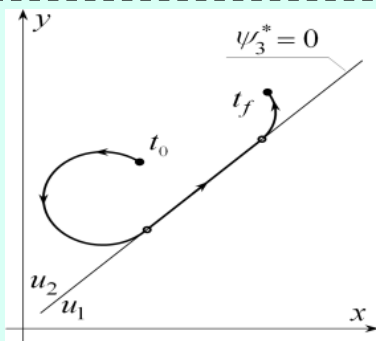
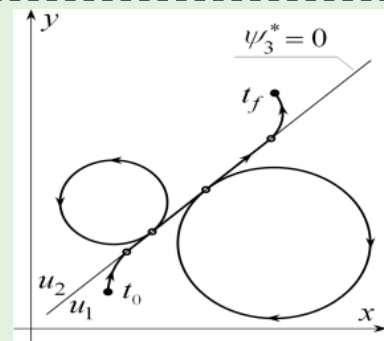
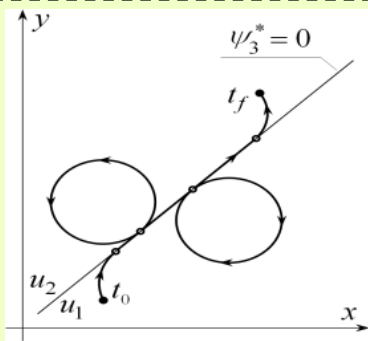
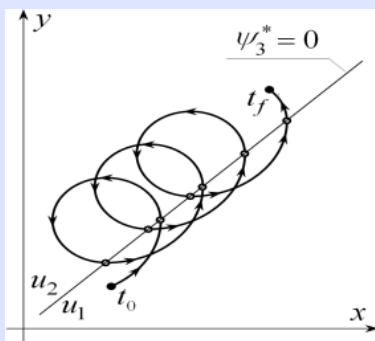
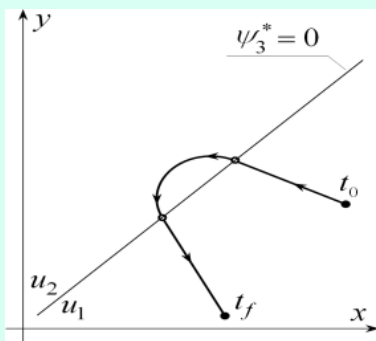
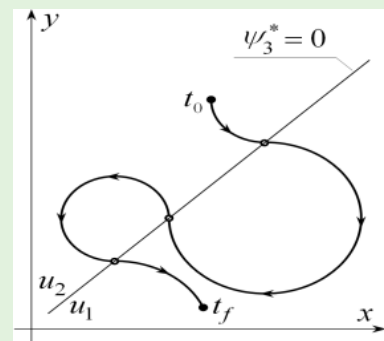
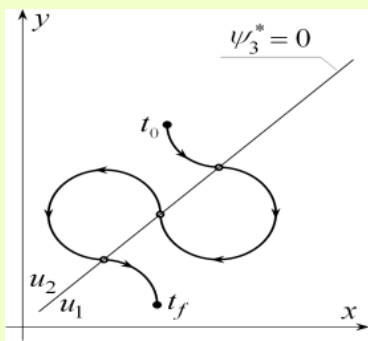
Слайд 11

Принцип максимума Понтрягина как необходимое условие для управлений, ведущих на границу, означает, что существует ненулевое решение сопряженной системы, для которого почти всюду на промежутке $[0, t_f]$ выполнено условие максимума.

Из принципа максимума для данной задачи получается, что программное управление, ему удовлетворяющее, принадлежит классу кусочно-постоянных управлений и принимает крайние значения $u_1, +1$, а также значение 0, если, конечно, $0 \in [u_1, +1]$.

Каждому управлению, удовлетворяющему принципу максимума и имеющему два или более переключений, соответствует своя прямая переключения на плоскости x, y .

Типы движений ($x^*(\cdot), y^*(\cdot)$), удовлетворяющих принципу максимума



пример для $u_1 = -0.5$

пример для $u_1 = 0.5$

симметричный случай
($u_1 = -1$)

несимметричный случай
($-1 < u_1 < 0$)

односторонний случай
($u_1 = 0$)

строго односторонний случай
($0 < u_1 < 1$)

Слайд 12

На слайде показано несколько примеров типичных экстремальных движений. Первая колонка — симметричный случай. На верхней картинке траектория состоит из дуг окружностей минимального радиуса, соответствующих управлениям $+1$ и -1 . Дуги стыкуются на прямой переключения. На нижней картинке экстремальное движение содержит два полных оборота и участки движения по прямой переключения.

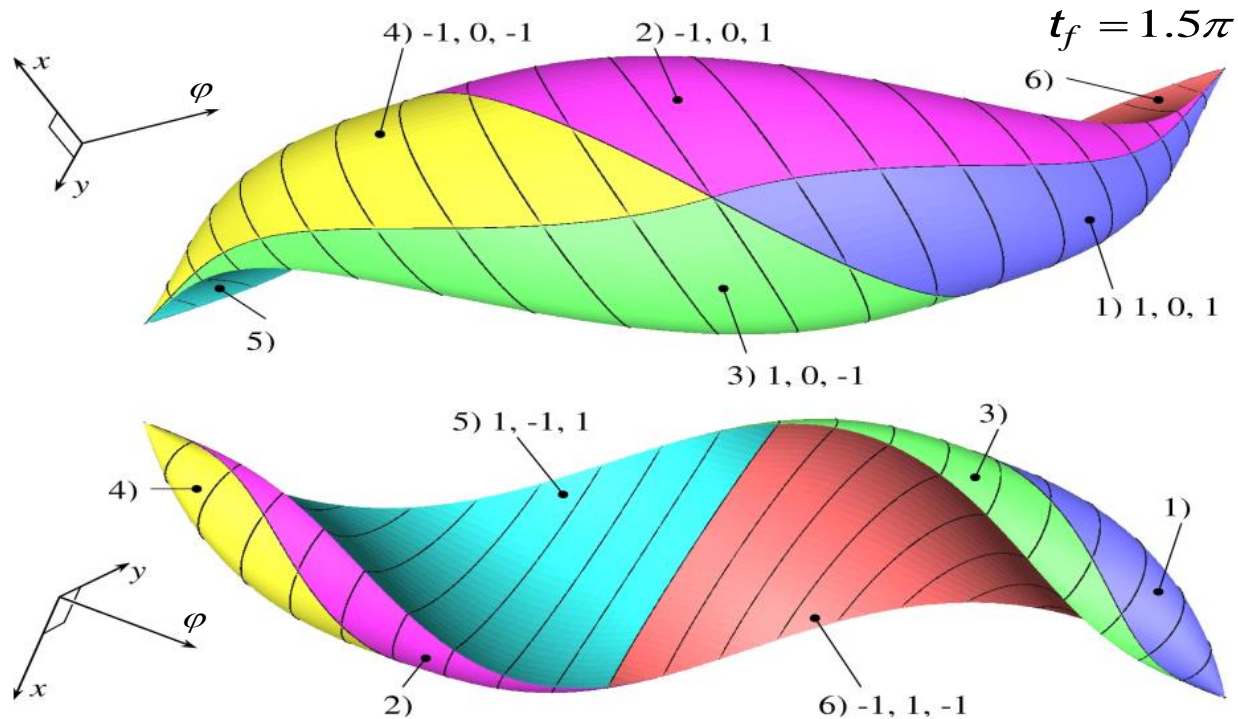
Аналогичные варианты движения возникают в несимметричном случае.

В случае одностороннего поворота прямолинейное движение может быть как фрагментом экстремального движения вне линии переключения, так и участком движения по прямой переключения.

В строго одностороннем случае движение по прямой переключения исключено по постановке задачи. Перемещение вдоль прямой переключения осуществляется циклическими движениями, содержащими движение «вперёд» и движение «назад».

Перечисленные факты напрямую следуют из принципа максимума и являются несложными. При исследовании структуры границы множества достижимости устанавливаются дополнительные более сложные свойства для соответствующих управлений.

Множество достижимости $G(t_f)$ для симметричного случая



Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.

Слайд 13

Для симметричного случая нами доказано, что при изучении движений, ведущих на границу множества достижимости, можно ограничиться шестью типами (последовательностями) управлений. При этом, пока момент t_f не слишком большой, вся граница разбивается на шесть гладких клеток. На слайде для момента $t_f = 1.5\pi$ в двух ракурсах показаны фронтальная и тыльная части множества достижимости.

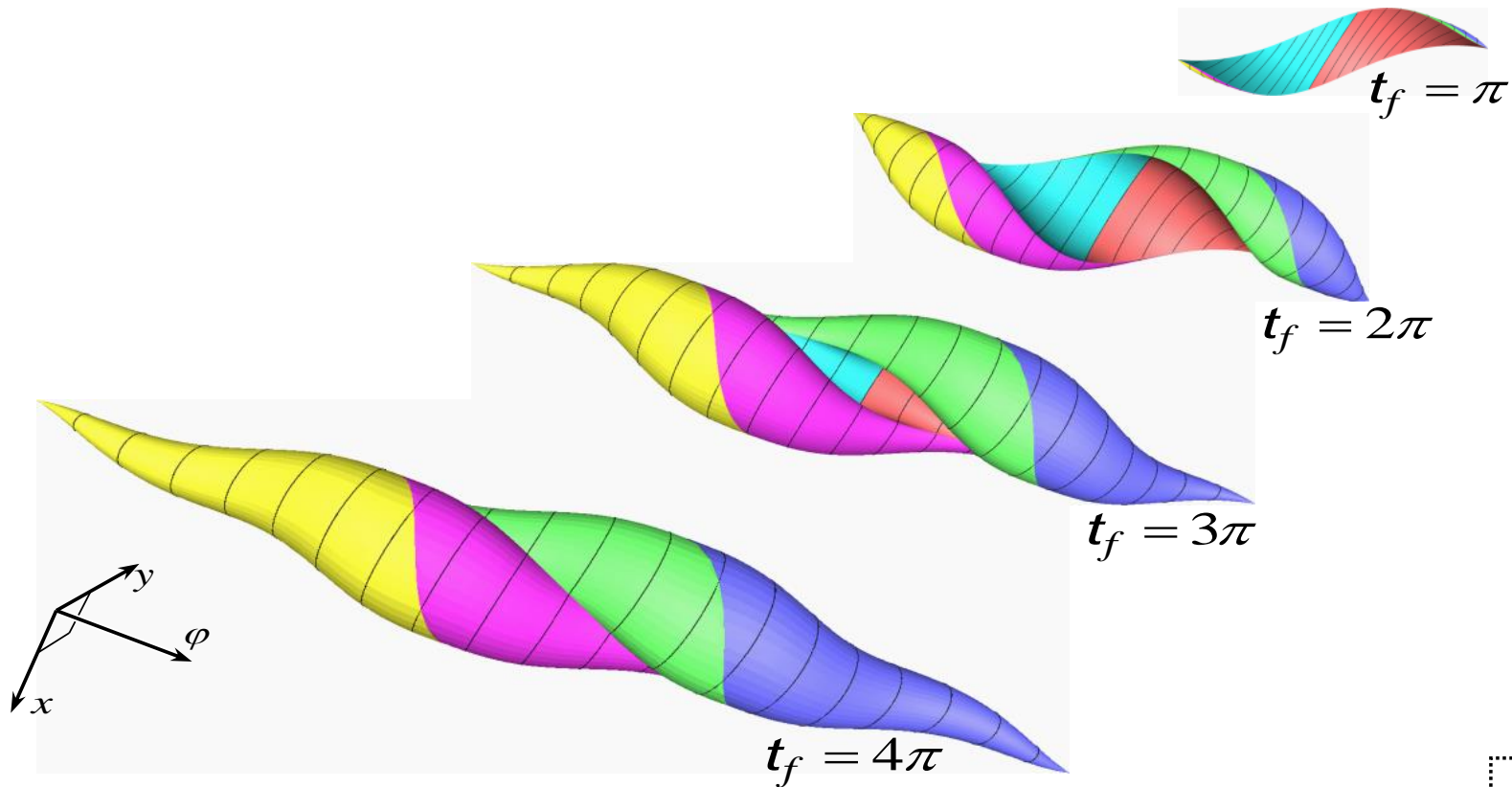
Например, отмеченной фиолетовым цветом клетке 2 отвечают управления, равные -1 на первом промежутке времени, 0 на втором промежутке и $+1$ на третьем промежутке. Для каждой точки в этой клетке своя длительность этих трёх участков, в сумме составляющих $t_f = 1.5\pi$. Таким образом, клетка с номером 2 есть кусок двумерной поверхности.

Клетке 5, изображённой на тыльной части сине-зелёным цветом (циан), соответствует последовательность управлений $+1, -1, +1$. Эта клетка под ненулевым углом стыкуется с красной клеткой 6, которая соответствует последовательности управлений $-1, +1, -1$.

Тонкими линиями обозначены φ -сечения множества достижимости. Для $t_f \leq 2\pi$ у нас есть аналитическое описание таких сечений.

В упомянутой выше работе Дубинса, которую можно интерпретировать как работу, посвящённую задаче быстрогодействия, были выделены шесть вариантов последовательности управлений с двумя переключениями, которыми можно ограничиться при решении задачи быстрогодействия с заданными направлениями в начальной и конечной точках. Эти шесть вариантов совпадают с полученными нами. Из нашего утверждения о шести клетках на границе множества достижимости вытекает утверждение Дубинса, но не наоборот.

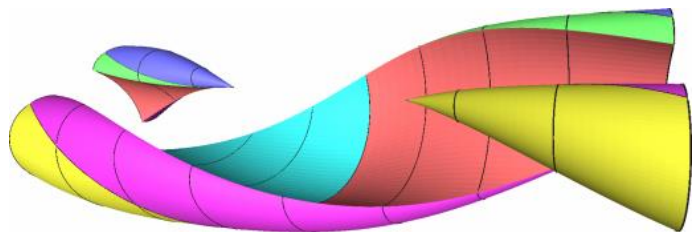
Развитие множества достижимости для симметричного случая



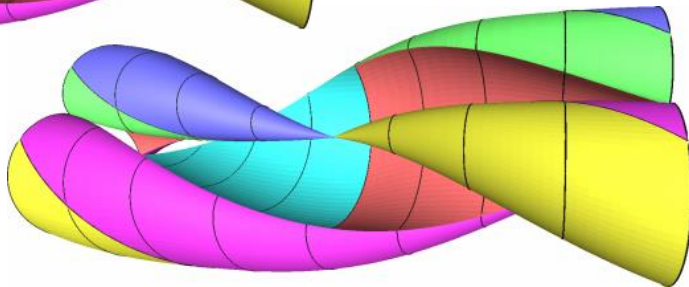
Слайд 14

Здесь показано изменение множества достижимости с ростом момента t_f для симметричного случая. Очень похоже на развитие панциря улитки. При $t_f = 4\pi$ на границе множества достижимости отсутствуют клетки 5 и 6, образующие тыльную часть границы при меньших моментах t_f .

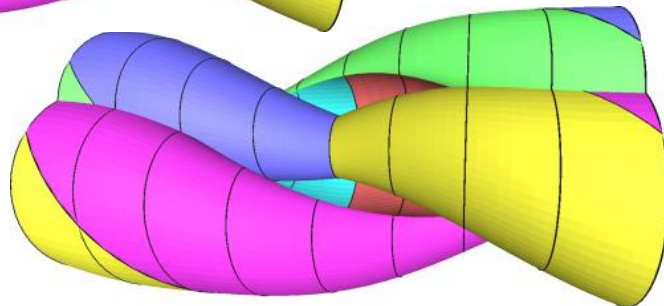
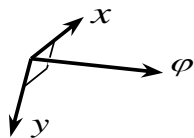
Множества достижимости для φ , вычисляемого по модулю 2π , в симметричном случае



$$t_f = 1.6\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



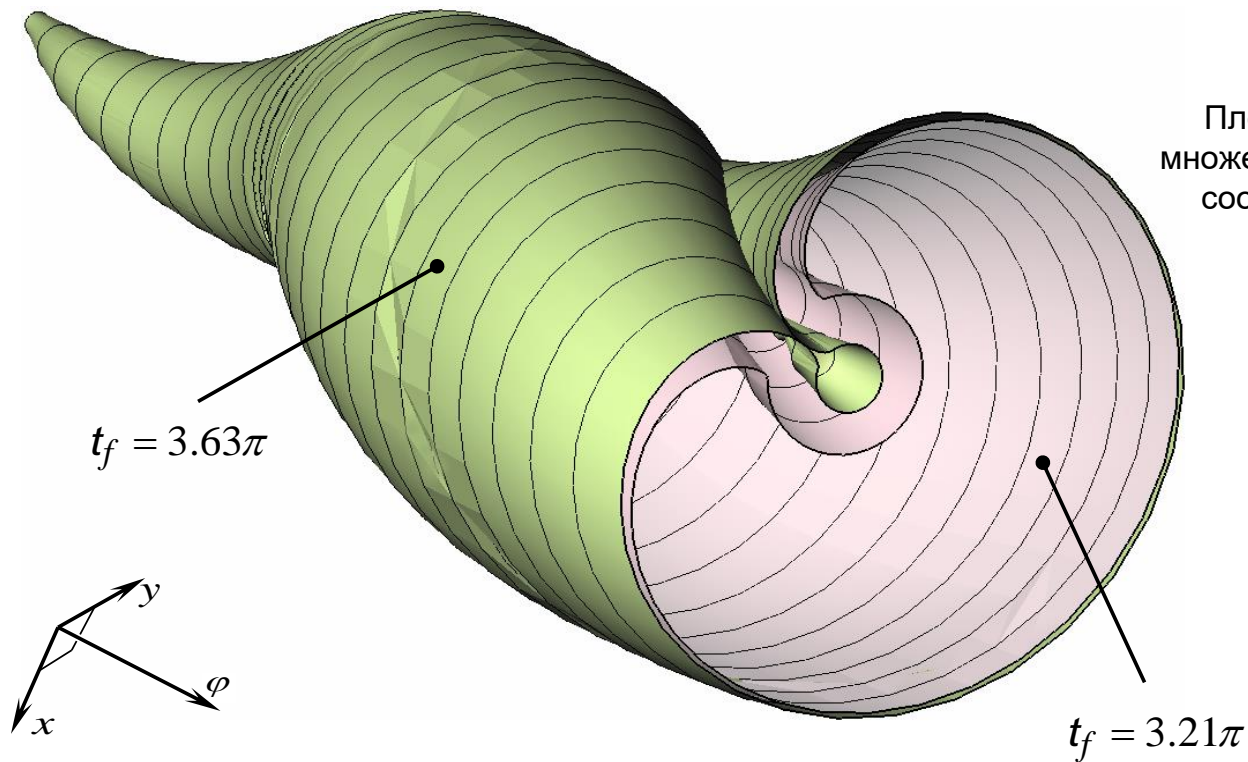
$$t_f = 2.5\pi$$

Слайд 15

Зная описание границы в предположении, что угол φ берётся в интервале $(-\infty, +\infty)$, можно получить изображения для случая «склейки» угла φ по модулю 2π . На слайде представлены три такие картинки.

Если по постановке задачи с самого начала будем отождествлять углы по модулю 2π , то анализ результатов существенно усложняется. В нашем случае искомое множество можно получить путём «нарезки» по 2π первоначального множества, полученного без отождествления по модулю 2π .

Нарушение односвязности множества достижимости в симметричном случае



Слайд 16

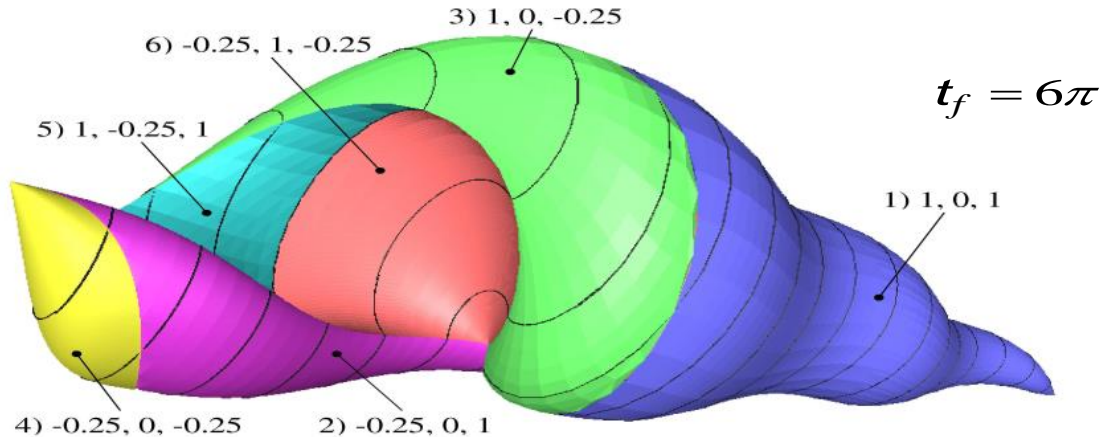
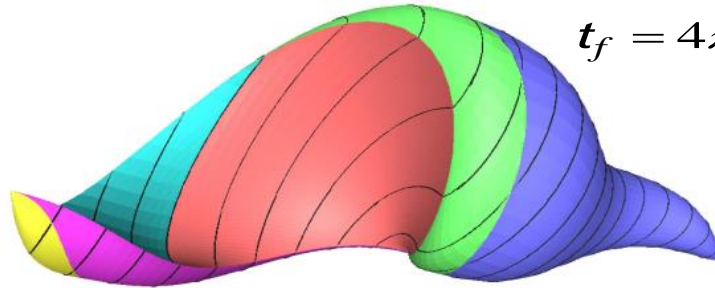
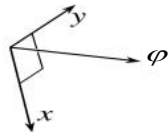
Некоторая экзотика и трудность для симметричного случая состоит в том, что для моментов t_f в некотором малом промежутке времени трёхмерное множество достижимости не является односвязным. Это выражается в наличии «полости», не принадлежащей множеству достижимости.

На слайде показана половина множества достижимости для моментов $t_f = 3.21\pi$ и $t_f = 3.63\pi$. Для момента $t_f = 3.21\pi$ указанной полости ещё нет. В момент $t_f = 3.63\pi$ она возникает. Численные построения показывают, что полость исчезает в момент $t_f = 4\pi$.

Множества достижимости в несимметричном случае

$$u \in [-0.25, 1]$$

$$t_f = 4\pi$$



Слайд 17

Для несимметричного случая каких-либо принципиально новых ситуаций по сравнению с симметричным случаем не возникает. Естественно, что теряется симметрия множества достижимости, но при этом сохраняется структура, обусловленная шестью типами управлений, ведущих на границу. На слайде показаны два множества достижимости для моментов $t_f = 4\pi$ и $t_f = 6\pi$. Значение u_1 взято равным -0.25 .

3D-печать множеств достижимости в момент t_f

$$t_f = 2\pi$$



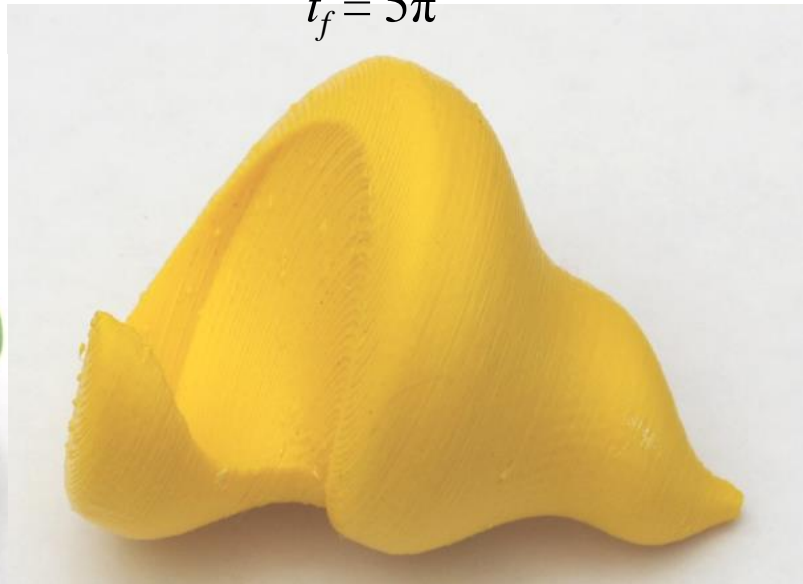
$$t_f = 3\pi$$



$$t_f = 4\pi$$



$$t_f = 5\pi$$



$$u_1 = -1$$

симметричный случай

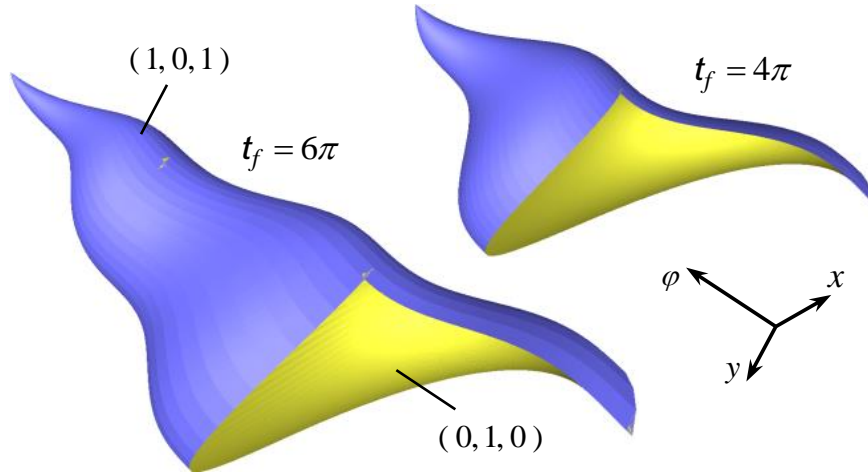
$$u_1 = -0.25$$

несимметричный случай

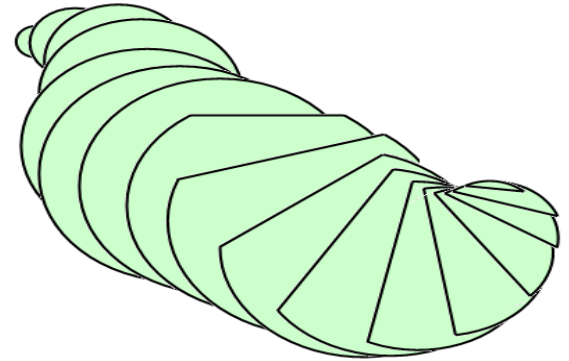
Слайд 18

И.С. Стародубцев из нашего Института несколько лет назад напечатал на 3D-принтере по нашим данным трёхмерные множества достижимости. Мы используем их при преподавании курса «Оптимальное управление». На слайде показаны фотографии множеств достижимости для трёх моментов времени в симметричном случае и для одного момента в несимметричном случае.

Односторонний случай $u_1=0$ (разрешено движение по прямой линии)



*Два типа управлений,
приводящих движение на границу*



Выпуклые φ -сечения

Получено описание φ -сечений множества достижимости в случае одностороннего поворота. Они представляют собой круговой сегмент (при $\varphi < 2\pi$) или круг (при $\varphi \geq 2\pi$)

Слайд 19

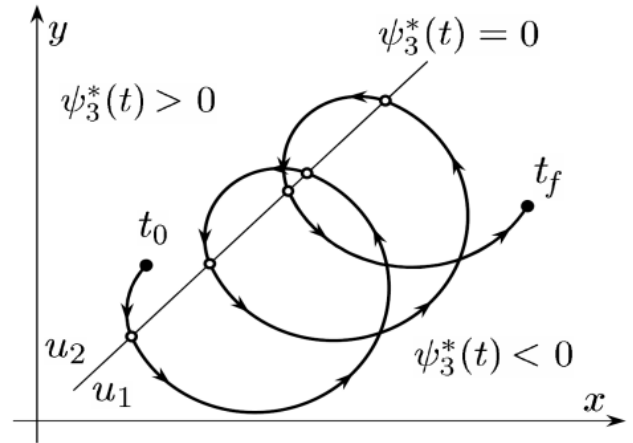
Самым простым является случай одностороннего поворота, когда $u_1 = 0$. В этом случае при анализе управлений, ведущих на границу множества достижимости, можно ограничиться двумя типами последовательности управлений: $+1, 0, +1$ и $0, +1, 0$. При этом для каждой точки на границе реализуется своя продолжительность участков постоянства управления. Доказана выпуклость φ -сечений. Каждое φ -сечение представляет собой либо круг, либо круговой сегмент.

Строго односторонний случай $u_1 > 0$

Типы движений, ведущих на границу множества достижимости

- 0 Движения с постоянным управлением на всём промежутке $[t_0, t_f]$:
 $u \equiv u_1$ или $u \equiv u_2$
(две крайние точки множества достижимости)
-

- 1 Движения BS: начальное управление $u = u_1$
управление на конечном участке $u = u_2$
- 2 Движения BB: начальное управление $u = u_1$
управление на конечном участке $u = u_1$
- 3 Движения SB: начальное управление $u = u_2$
управление на конечном участке $u = u_1$
- 4 Движения SS: начальное управление $u = u_2$
управление на конечном участке $u = u_2$



Пример движения SB-типа

Слайд 20

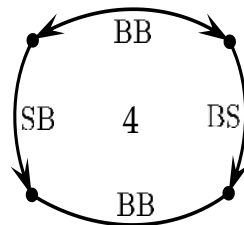
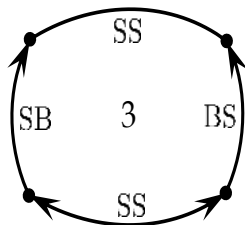
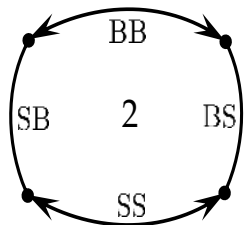
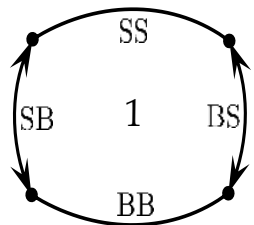
Полное аналитическое описание φ -сечений получено нами также для строго одностороннего случая. Различаем четыре типа движений. Тип BS соответствует управлению $u = u_1$ на некотором начальном промежутке времени и $u = 1$ на последнем промежутке времени, примыкающем к моменту t_f . Между этими участками имеется конечное число «циклов» с оборотом вектора скорости на угол 2π на каждом из них.

Тип SB аналогичен, только на начальном участке, наоборот, действует управление $u = 1$, а на последнем участке $u = u_1$. Траектория такого типа показана на рисунке справа.

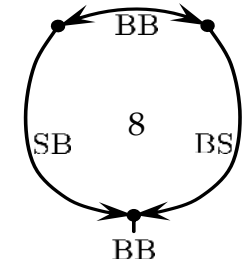
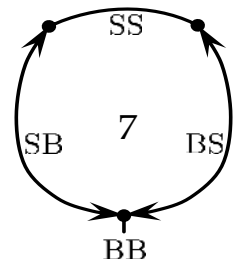
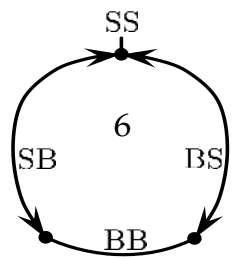
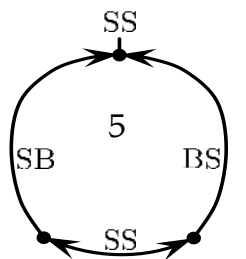
Тип BB: на начальном и на последнем участках действует управление $u = u_1$. Оставшиеся промежуточные участки дают конечное число циклов и одну дугу с управлением $u = 1$.

Тип SS аналогичен типу BB.

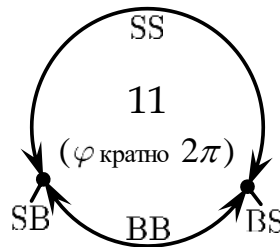
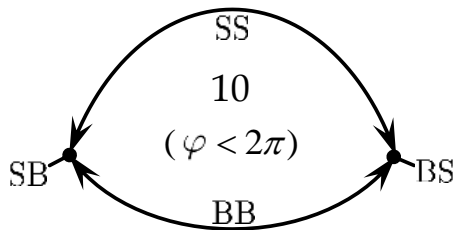
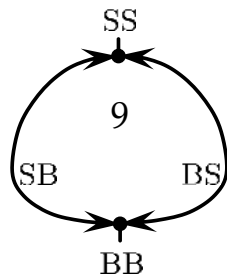
Строго односторонний случай $u_1 > 0$. Варианты φ -сечений



4 дуги
с гладким
сопряжением



3 дуги
с гладким
сопряжением



2 дуги
с гладким ($\varphi \geq 2\pi$)
и с негладким ($\varphi < 2\pi$)
сопряжением

Слайд 21

Для строго одностороннего случая перечислены все возможные 11 вариантов φ -сечений. Любое φ -сечение представляет собой строго выпуклое множество. Его граница составляется из четырёх дуг, одна или две из которых могут быть вырожденными (состоящими из одной точки). Каждая дуга состоит из точек, порождаемых одним из четырёх рассмотренных выше типов управлений. Граница φ -сечения при $\varphi \geq 2\pi$ есть гладкая кривая, а при $\varphi < 2\pi$ граница φ -сечения имеет две угловые точки (вариант 10). Каждая из отмеченных дуг задаётся в однопараметрическом виде. Стрелки показывают крайние точки, не принадлежащие дуге.

Аналитическое описание границы φ -сечений множества достижимости

Дуга
SB

$$\begin{pmatrix} x_{SB}[t_1] \\ y_{SB}[t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1 - \cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + n \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \begin{pmatrix} \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 - T_{u_2}) \end{pmatrix}$$

$$T_{u_2} = \frac{t_1^*(n+1) - t_1}{n} \quad n = \begin{cases} \frac{\varphi}{2\pi} - 1, & \text{если } \varphi \text{ кратно } 2\pi, \\ \left[\frac{\varphi}{2\pi} \right], & \text{если } \varphi \text{ не кратно } 2\pi. \end{cases}$$

$$t_1^* = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}$$

Дуга
SS

$$\begin{pmatrix} x_{SS}[n, t_1] \\ y_{SS}[n, t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin \left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \\ \sin \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$T_{u_1} = \frac{t_f - \varphi}{(n+1)(1-u_1)} \quad T_{u_2} = 2\pi - \frac{(t_f - \varphi) \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}$$

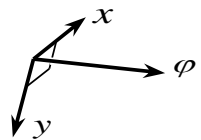
$$-2\pi < -T_{u_2} < t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1) \leq T_{u_2} < 2\pi$$

Слайд 22

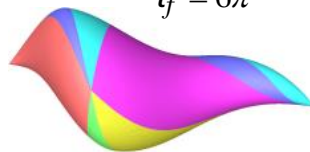
Здесь приведены формулы для дуг SB и SS. Дуга SB описывается весьма сложно, однако число n , характеризующее количество промежуточных циклов, определяется однозначно. Дуга SS представляет собой дугу окружности. Число n может принимать два соседних целых значения.

Множества достижимости для строго одностороннего случая $u_1 > 0$ (не разрешено движение по прямой)

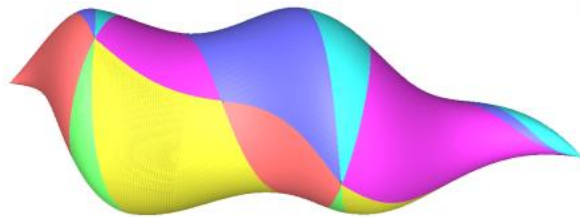
----- Примеры для $u_1 = 0.5, u_2 = 1$ -----



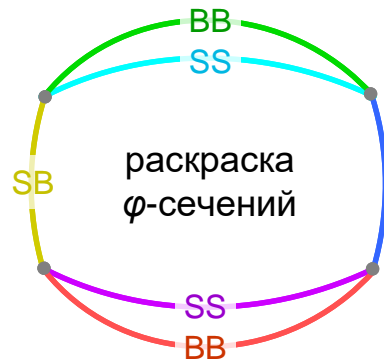
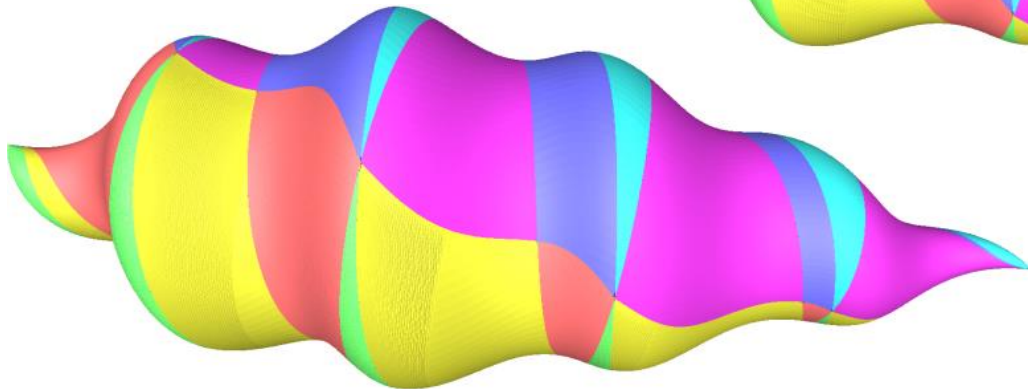
$t_f = 6\pi$



$t_f = 10\pi$



$t_f = 20\pi$



Слайд 23

На слайде показаны множества достижимости в строго одностороннем случае для трёх моментов времени t_f . Раскраска клеток на границе соответствует типу дуг, возникающих в φ -сечениях.

Принцип максимума Понтрягина, φ -сечения множества достижимости и управления, ведущие на границу

	Принцип максимума Понтрягина	φ -сечения множества достижимости	Управления, ведущие на границу
$u_1 = -1$ симметричный случай	Только необходимое условие	<i>Невыпуклые*</i>	Отсутствие единственности в классе кусочно-постоянных управлений
$u_1 \in (-1, 0)$ несимметричный случай			
$u_1 = 0$ односторонний случай	Необходимое и достаточное условие	<i>Выпуклые</i>	Единственность в классе кусочно-постоянных управлений
$u_1 \in (0, 1)$ строго односторонний случай		<i>Строго выпуклые</i>	

Слайд 24

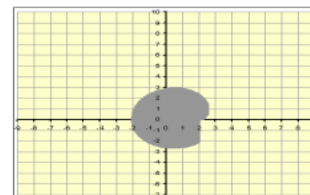
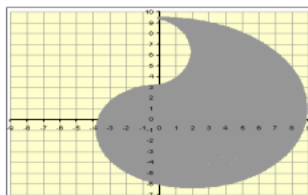
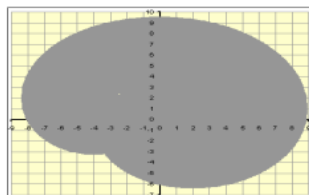
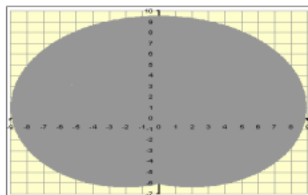
В симметричном и несимметричном случаях принцип максимума Понтрягина — только необходимое условие для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Существуют движения, которые удовлетворяют принципу максимума, но ведут внутрь множества достижимости. В одностороннем и строго одностороннем случаях принцип максимума является также и достаточным условием перевода на границу.

Вторая колонка характеризует свойство выпуклости φ -сечений. В симметричном и несимметричном случаях есть невыпуклые φ -сечения. В одностороннем случае φ -сечения суть выпуклые множества, а в строго одностороннем случае φ -сечения представляют собой строго выпуклые множества.

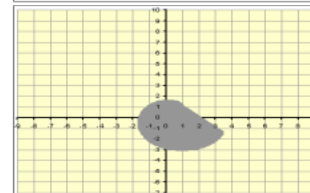
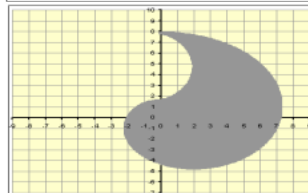
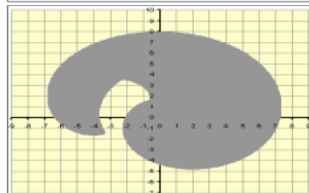
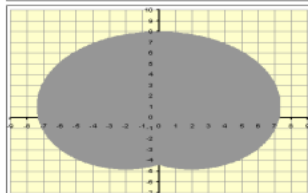
Последняя колонка говорит о том, что в строго одностороннем случае есть единственность управлений, ведущих на границу в классе кусочно-постоянных управлений. Такой единственности нет в остальных случаях.

Множества достижимости в проекции на геометрическую плоскость

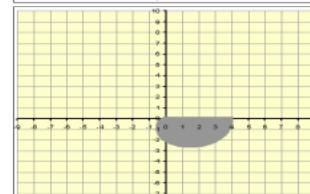
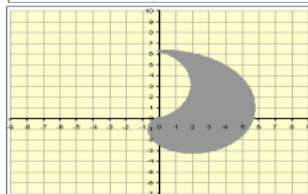
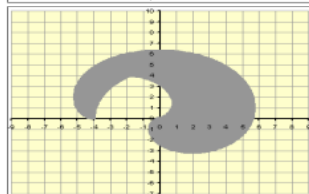
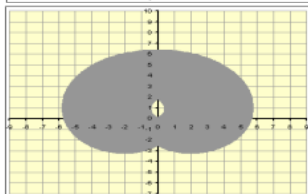
$$t_f = 3\pi$$



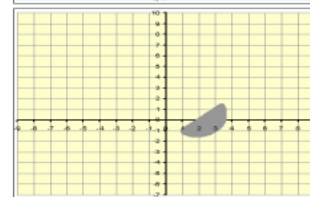
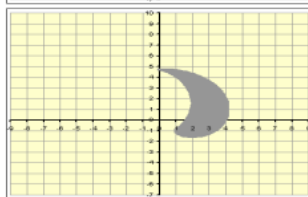
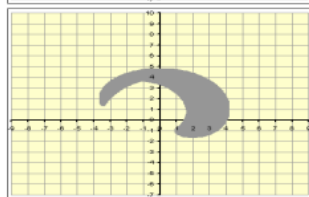
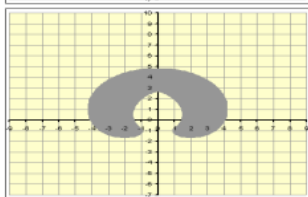
$$t_f = 2.5\pi$$



$$t_f = 2\pi$$



$$t_f = 1.5\pi$$



$$u_1 = -1$$

симметричный случай

$$u_1 = -0.5$$

несимметричный случай

$$u_1 = 0$$

односторонний случай

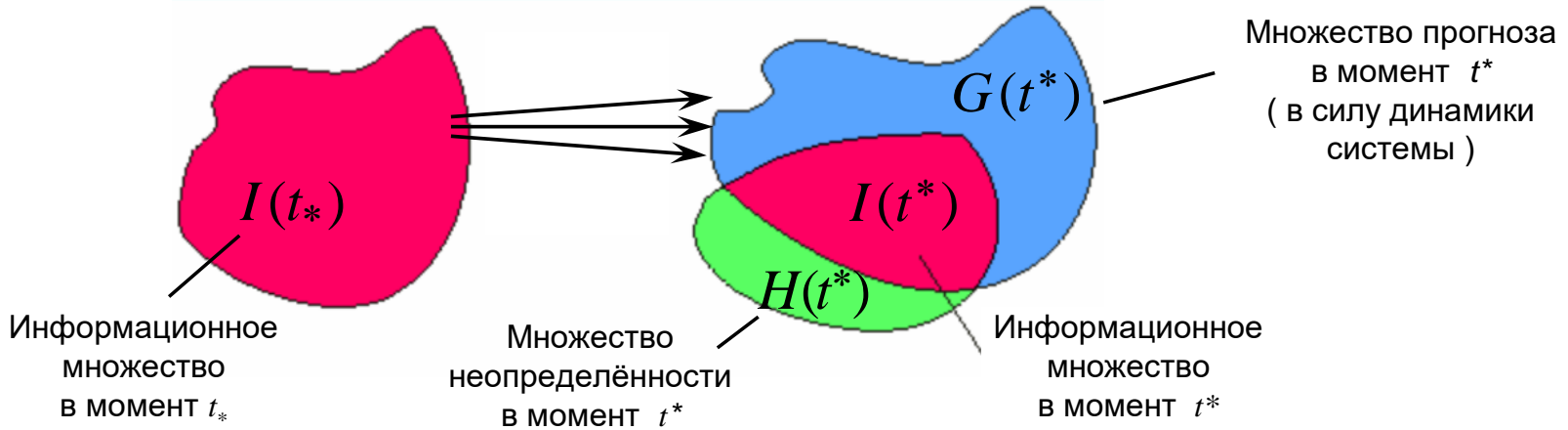
$$u_1 = +0.5$$

строго односторонний
случай

Слайд 25

Имея трёхмерные множества достижимости, мы численно можем просчитывать их проекции на плоскость геометрических координат x, y . Первые две колонки повторяют известные ранее результаты. Две последние колонки представляют собой новые результаты.

Расчёт информационных множеств



Информационное множество в заданный момент времени есть множество всех фазовых состояний, совместных с описанием динамики, оговоренным уровнем ошибок измерений и предысторией измерений.

Эквивалентные термины в англоязычной литературе:

“**information set**”, “feasible set”, “membership set”, “likelihood set”.

Соответствующий способ оценки фазового состояния часто называется

“set membership estimation” или “unknown but bounded error description (UBB approach)”

Слайд 26

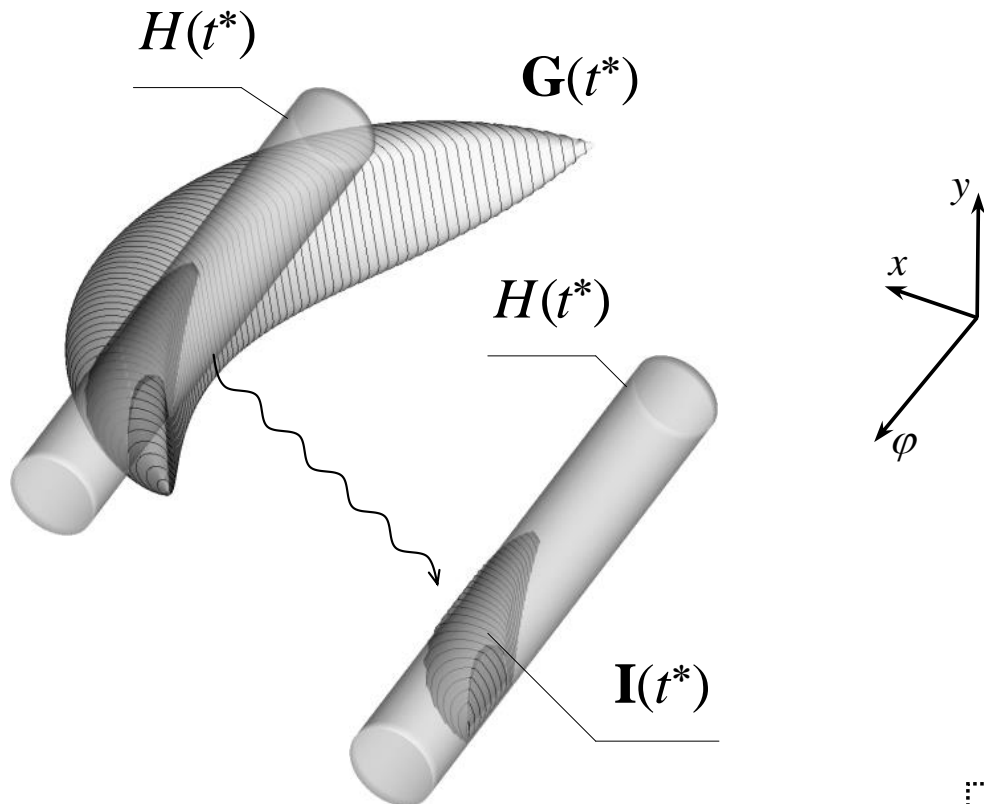
Говоря о применении множеств достижимости, рассмотрим вопрос построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением управляемого объекта, который представляет собой машину Дубинса.

Пусть имеем информационное множество $I(t_*)$ в момент t_* . Это есть совокупность всех трёхмерных фазовых состояний, совместных с описанием модели движения, оговоренным уровнем ошибок измерения и предысторией измерений до момента t_* включительно.

Делаем прогноз $G(t^*)$ состояний системы на момент t^* следующего замера. Полученное множество пересекаем с множеством неопределённости $H(t^*)$, построенным на основе замера в момент t^* с учётом данных о характере ошибок измерения. Полагаем $I(t^*) = G(t^*) \cap H(t^*)$. Операция пересечения — наиболее трудная.

Пересечение множества прогноза с множеством неопределённости замера

Выпуклость φ -сечений
позволяет строить
эффективные численные
процедуры

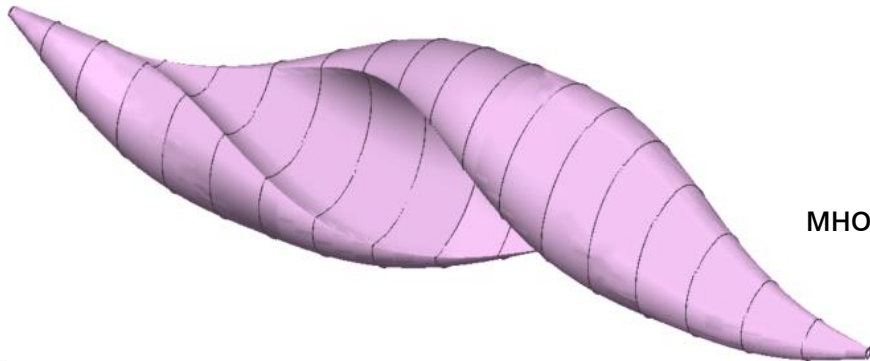


Слайд 27

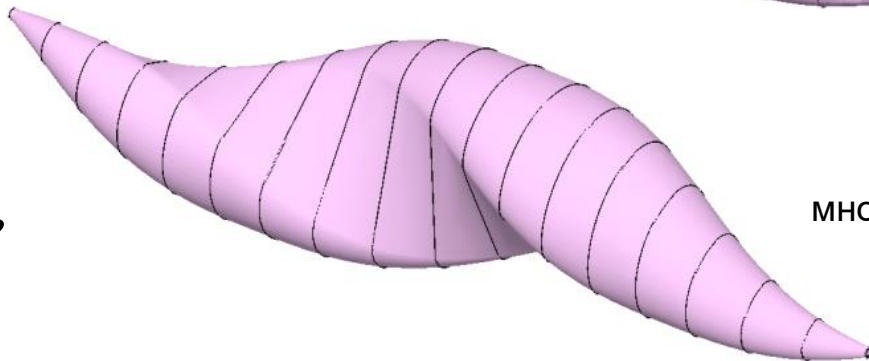
Операция пересечения существенно упрощается, если φ -сечения рассматриваемых двух множеств являются выпуклыми. Множество неопределённости $H(t^*)$ естественно считать выпуклым и цилиндрическим по координате φ . Для множества прогноза $G(t^*)$ в общем случае его φ -сечения выпуклыми не являются. Разработана процедура эффективной аппроксимации множества прогноза сверху так, чтобы в новом множестве $\mathbf{G}(t^*)$ иметь выпуклые φ -сечения. Получаемое информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ также имеет выпуклые φ -сечения.

Аппроксимация сверху множества достижимости

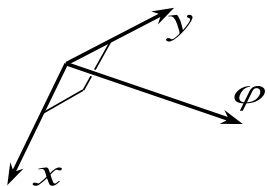
$$t_f = 2\pi$$



Точное
множество достижимости



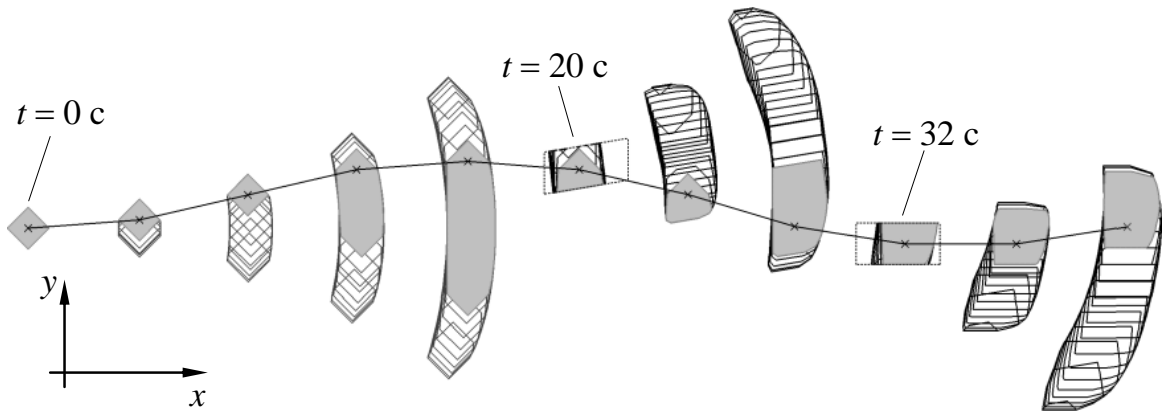
Аппроксимация
множества достижимости
сверху



Слайд 28

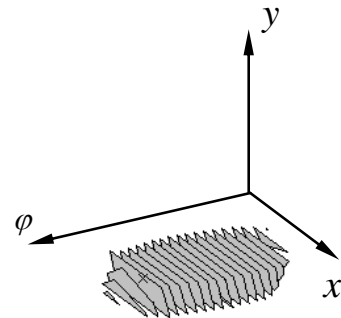
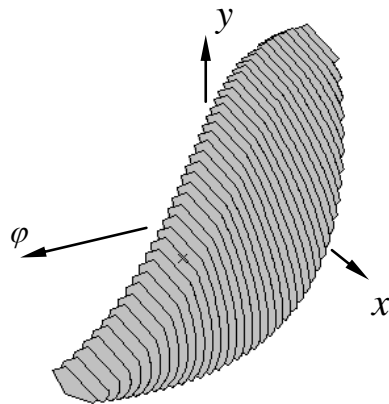
Поясним сказанное для частного случая. Пусть начальное информационное множество — точка в трёхмерном пространстве. Тогда истинное множество прогноза $G(t^*)$ в назначенный будущий момент t^* есть множество достижимости в этот момент. Для симметричного случая его φ -сечения невыпуклые. Разработанная процедура аппроксимации сверху даёт множество $\mathbf{G}(t^*)$ с выпуклыми φ -сечениями. Каждое φ -сечение этого множества в рассматриваемом случае совпадает с выпуклой оболочкой соответствующего φ -сечения точного множества достижимости. При этом в численных построениях вид точного φ -сечения нами не используется.

Движение информационного множества, пример 1



Моменты замеров:
0, 20, 32 с

Структура информационного множества на момент $t = 20 \text{ c}$:
до замера (слева) и после замера (справа)



Слайд 29

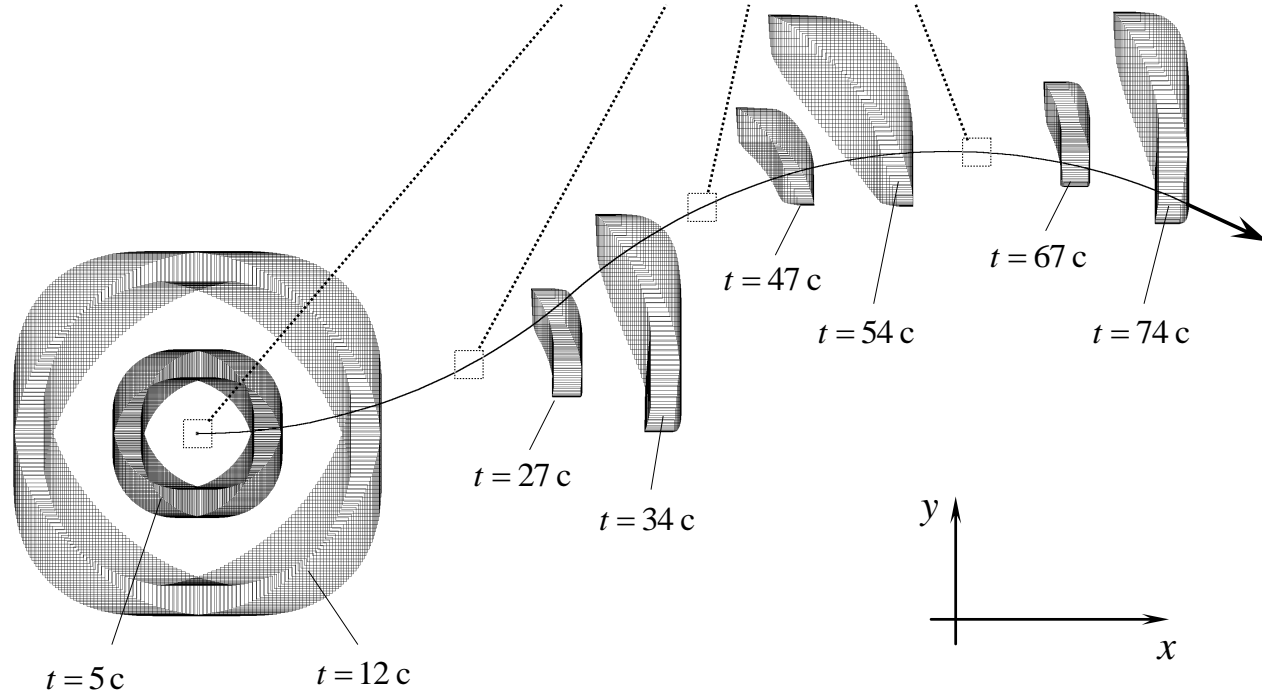
Рассмотрим примеры численного построения информационных множеств $\mathbf{I}(t)$. В первом примере в начальный момент $t_0 = 0$ с исходное информационное множество содержит всего одно φ -сечение. Далее до момента $t = 20$ с следующего измерения информационное множество растёт, а после момента $t = 20$ с резко сужается. Аналогично вблизи второго замера в момент $t = 32$ с.

Мы представляем информационное множество в виде совокупности его φ -сечений. На промежутке между замерами информационное множество $\mathbf{I}(t)$ растёт и совпадает с множеством прогноза $\mathbf{G}(t)$, построенным от информационного множества $\mathbf{I}(t_*)$ в момент t_* предыдущего замера.

Движение информационного множества, пример 2

множества неопределённости : $t = 0, 20, 40, 60$ с

Нет начальных
данных
по угловой
координате

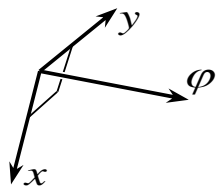


Аппроксимация φ -сечений прямоугольниками

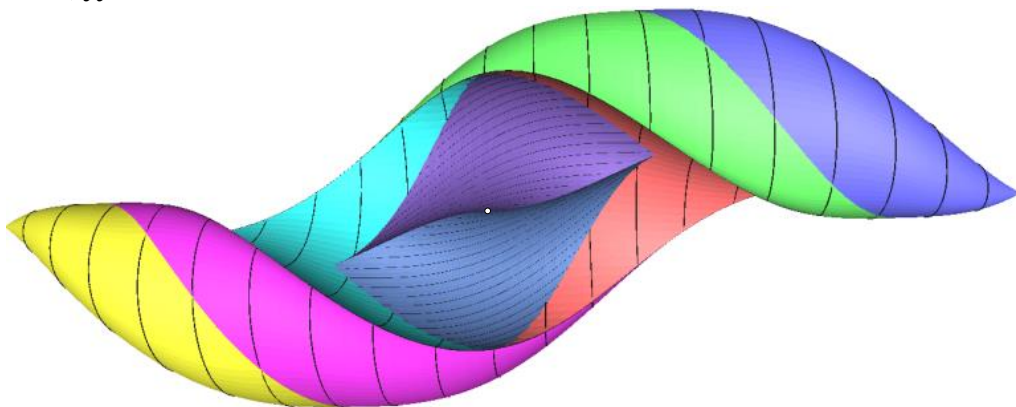
Слайд 30

Второй пример отличается тем, что в начальный момент $t_0 = 0$ с нет данных по угловой координате. Известно лишь, что геометрическое положение объекта находится в заданном квадрате. Следующий замер приходит в момент $t = 20$ с. Множество неопределённости — цилиндр по координате φ с сечением в виде квадрата. После замера в момент $t = 20$ с информационное множество резко сужается и т.д. В данном примере мы аппроксимировали сверху φ -сечения прямоугольниками фиксированной ориентации по осям x, y .

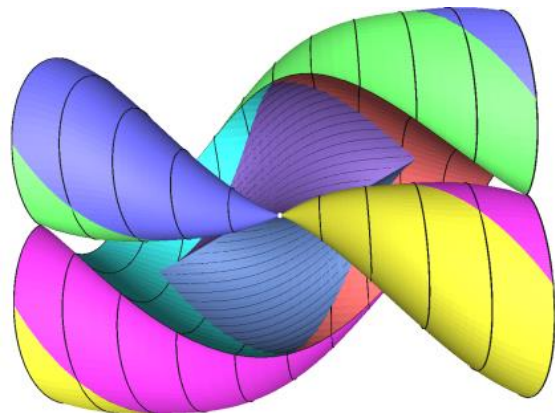
Множество достижимости к моменту в симметричном случае



$$t_f = 2\pi$$



$$\varphi \in (-\infty, +\infty)$$



$$\varphi \text{ по модулю } 2\pi$$

Слайд 31

Доклад был посвящен множествам достижимости «в момент». Кое-что численно сделано нами и для множеств достижимости «к моменту». Один из примеров показан на слайде. Представленное множество достижимости к моменту $t_f = 2\pi$ есть множество достижимости в момент $t_f = 2\pi$, к которому добавляется множество, изображённое тёмно-синим цветом. Начальная точка с нулевыми координатами изображена белым кружочком.

Справа показано то же самое множество, но с угловой координатой, вычисляемой по модулю 2π .

Построение множества достижимости к моменту с использованием уравнений типа Гамильтона-Якоби

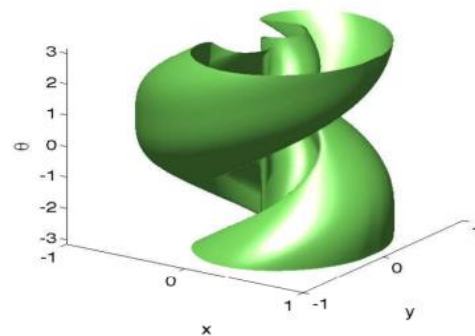
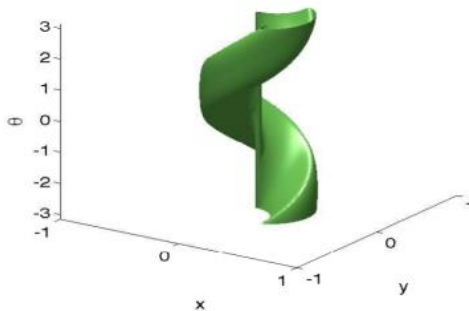
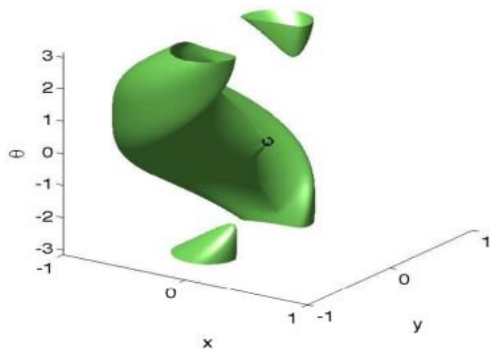
Ryo Takei and Richard Tsai.

“Optimal Trajectories of Curvature Constrained Motion in the Hamilton-Jacobi Formulation.”

J. Sci. Comput. 54 (2013): 622-644.

Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, (rrtakei@ucla.edu).

Department of Mathematics, University of Texas, Austin, (ytsai@math.utexas.edu).



Множества достижимости к моменту для различных краевых условий

Слайд 32

Мы знаем небольшое число авторов, которые на основе численных методов для уравнений в частных производных типа уравнений Гамильтона – Якоби просчитывали множества достижимости к моменту. На слайде показаны картинки из статьи двух авторов из США. Угол φ берётся по модулю 2π . Множество достижимости слева посчитано для точечного начального множества. В середине — начальное множество есть отрезок по оси φ . На третьей картинке начальное множество также является отрезком по оси φ , но момент времени больше. Видно, что качество счёта очень хорошее.

Литература

Машина Дубинса :

A.A. Марков, R. Isaacs, L. Dubins,

E. J. Cockayne, G. W. C. Hall, T. Pecsvaradi, Ю. И. Бердышев, В.Н. Ушаков, О.А. Толпегин,
J.-P. Laumond, P. Souères, S.M. LaValle, T. Shima, P. Tsiotras, E. Bakolas, M. Pachter,
H. Choi, R.W. Beard, T.W. McLain, J. Campbell, M. Moll, L.E. Kavraki
Z. Chen, R. Takei, R. Tsai, ...

Информационные множества :

Н.Н. Красовский, А.И. Субботин, А.Б.Куржанский, М.И. Гусев, Ю.С. Осипов,
А.В. Кряжимский, Ф.Л. Черноусько, Б.Т. Поляк, В.М. Кунцевич

D.P. Bertsecas, F.C. Schweppe, H.S. Witsenhausen,
M. Milanese, E. Walter, ...

Последние статьи авторов :

Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Труды института математики и механики, 2018, № 1, Том 24. С. 143–155.

V.S. Patsko, A.A. Fedotov, Attainability set at instant for one-side turning Dubins car, Proceedings of 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg, Russia, 2018, pp. 201–206.

Слайд 33

Говоря о литературе, следует отметить, что машина Дубинса — самая популярная модель управляемого движения, используемая в различных постановках задач для беспилотных летательных аппаратов, модельных транспортных задач и т.д. Очень активно в настоящее время ведут исследования J.-P.Laumond и P.Souères (Франция), T.Shima (Израиль), M.Pachter (США), P.Tsiotras (США).

Теория информационных множеств активно развивалась в Советском Союзе в 70–80 гг.

На слайде указаны также две последние опубликованные работы авторов на тему доклада.