Пленарные доклады

Секция I

Общая и прикладная механика

МАШИНА ДУБИНСА: ТРЕХМЕРНОЕ МНОЖЕСТВО ДОСТИЖИМОСТИ

В.С. Пацко [1], А.А. Федотов [1]

[1]*Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского, Екатеринбург*
patsko@imm.uran.ru

Аннотация. Исследуется трёхмерное множество достижимости в момент для управляемого объекта “машина Дубинса”. Управлением является угловая скорость поворота вектора линейной скорости. Наряду со случаем, когда по постановке задачи поворот возможен в обе стороны, рассматриваются случаи одностороннего поворота. Дано описание сечений трёхмерного множества достижимости по угловой координате. Исследованы закономерности развития множества достижимости. Приводятся результаты моделирования.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00410.

Введение

В прикладных работах, опирающихся на математическую теорию управления [1, 2], очень популярной является модель управляемого объекта, называемая “машина Дубинса”. Такая модель задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение управляемого объекта на плоскости, третья переменная – угол направления вектора скорости. Величина скорости считается постоянной. Скалярное управляющее воздействие, стесненное геометрическим ограничением, определяет мгновенную угловую скорость поворота.

В 1957 г. американский математик Л. Дубинс опубликовал теоретическую работу [3] о линии кратчайшей длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющей две точки на плоскости с заданным направлением выхода из первой точки и заданным направлением входа во вторую. Полученные Л. Дубинсом результаты оказались очень полезными при исследовании объектов с ограниченным радиусом поворота и постоянной по величине скоростью передвижения. Такие объекты стали называть машиной Дубинса. В дальнейшем оказалось, что близкие вопросы в 1889 г. изучал А.А. Марков в работе [4], посвященной проблемам прокладки железных дорог.

Модель Дубинса применяется в задачах управления колесными роботами, для диспетчерских расчетов в гражданской авиации, а также в прикладных работах по построению траекторий движения беспилотных летательных аппаратов в горизонтальной плоскости.

Под множеством достижимости $G(t_f)$ в момент времени t_f для машины Дубинса понимаем совокупность всех состояний в трехмерном фазовом пространстве, в каждое из которых возможен перевод системы в момент t_f из заданного начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления. Работа посвящена задаче построения множества достижимости в момент.

Постановка задачи

Пусть динамика управляемого объекта (машина Дубинса) описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos\varphi, \\ \dot{y} &= \sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \qquad u \in [u_1, u_2]. \end{aligned} \tag{1}$$

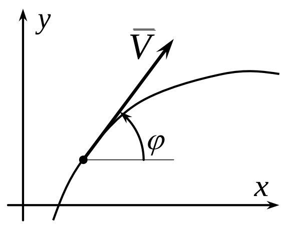

Рис.1 Система координат

Здесь x, y – координаты геометрического положения, φ – угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x (рис. 1), u – скалярное управление, стесненное геометрическим ограничением. Величина линейной скорости равна 1. Значение u_1 является параметром задачи и удовлетворяет неравенству $-u_2 \le u_1 < u_2$. Предполагаем, что $u_2 = 1$.

К представлению (1) может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном угловой скорости поворота. Для этого требуется перемасштабирование по геометрическим координатам и по времени.

В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассматриваем измеримые функции времени со значениями $u(t) \in [u_1, u_2]$. Предполагается, что угловая координата φ принимает свои значения в интервале $(-\infty, +\infty)$.

Множество достижимости $G(t_f)$ в момент t_f при оговоренном начальном фазовом состоянии x_0, y_0, φ_0 определим как совокупность всех состояний системы (1) в момент t_f, реализуемых при помощи допустимых программных управлений. Без ограничения общности, в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагаем $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ \varphi_0 = 0$. Цель работы – описать множество $G(t_f)$. Рассматриваются следующие случаи: а) $u_1 = -1$, б) $-1 < u_1 < 0$, в) $u_1 = 0$, г) $0 < u_1 < u_2 = 1$.

В статье [5] для случая а) исследовано множество достижимости в проекции на плоскость x, y. Трёхмерные множества достижимости для случаев а) – г) частично рассматривались в предыдущих статьях [6, 7]. Имеются работы (см., например, [8]), в которых при помощи численных методов, разрабатываемых для уравнений типа Гамильтона – Якоби, получены изображения трёхмерных множеств достижимости “к моменту” (но не “в момент”).

Управления, ведущие на границу множества достижимости

Известно [2], что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП).

Движения системы (1), удовлетворяющие ПМП, в проекции на плоскость x, y формируются из участков движения по дугам окружностей и прямолинейных участков. На каждом из них управление можно считать постоянным. Поэтому при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться *кусочно-постоянными* управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва). Имеет место конечность числа переключений на промежутке $[t_0, t_f]$.

Т е о р е м а 1. Для случаев а), б) в каждую точку границы множества достижимости системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$1)\ u_2, 0, u_2; \quad 2)\ u_1, u_2, u_1; \quad 3)\ u_2, u_1, u_2 \quad 4)\ u_1, 0, u_1; \quad 5)\ u_1, 0, u_2; \quad 6)\ u_2, 0, u_1. \tag{2}$$

Варианты (2) совпадают с теми вариантами оптимальных управлений, что указаны для задачи оптимального быстродействия в статье [3]. Каждый из промежутков, на котором действует постоянное управление, может вырождаться.

Т е о р е м а 2. В случае в) в любую точку границы множества достижимости системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления $u^*(\cdot)$, принимающего значения $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$ с не более чем двумя переключениями. Возможны два варианта последовательности управлений: 1) 1, 0, 1; 2) 0, 1, 0.

Пусть $u_1 > 0$ (случай г)). Тогда с увеличением t_f растет также и возможное число переключений управления (однако их число при заданном t_f конечно). Исследование данного случая представлено в работе [9].

В итоге, для всех четырёх вариантов задания значений u_1 имеются описания программных управлений $u(\cdot)$, ведущих на границу множества достижимости. Это позволяет сформировать границу множества достижимости в трёхмерном пространстве в виде конечного набора гладких поверхностей. Соответствующие участки границы представляются в виде двухпараметрических семейств точек [6].

Изображения множеств достижимости на момент $t_f = 3\pi$ для трёх значений $u_1 = -0.25,\ 0,\ 0.25$ показаны на рис. 2. Нумерация цветов участков границы соответствует перечню управлений (2).

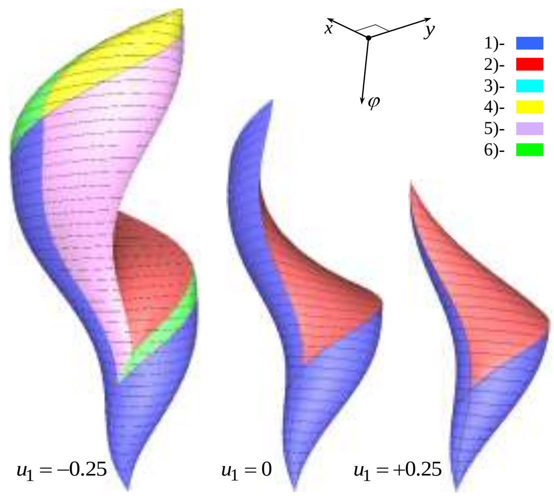

Рис. 2 Вид множества достижимости для $t_f = 3\pi$ при разных значениях u_1

Сечения множества достижимости по угловой координате

Опишем сечения по угловой координате (φ-сечения) множества достижимости $G(t_f)$.

***** Пусть $0 < u_1 < u_2 = 1$ (случай г)). Здесь количество переключений управлений, ведущих на границу, растёт с увеличением момента t_f. Но при этом φ-сечения являются строго выпуклыми. Свойство выпуклости φ-сечений первоначально было замечено в процессе моделирования, а потом доказано теоретически [9]. Также было установлено, что граница любого φ-сечения составляется из четырёх типов дуг SB, BB, SS, BS, для каждой из которых имеется аналитическое описание. Возможные варианты их стыковки показаны на рис. 3.

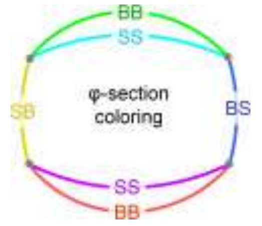

Рис. 3 Варианты структуры φ-сечений для $0 < u_1 < 1$

Дуга типа SB образуется при помощи кусочно-постоянных управлений со значением u_2 на первом участке и со значением u_1 на последнем. Для дуги типа BB управление на первом и последнем участках принимает значение u_1. Аналогично, меняя местами u_1 и u_2, определяются дуги BS, SS.

Число переключений управлений, ведущих на одну и ту же дугу, зависит от момента t_f и выбранного φ. При зафиксированных t_f и φ количество переключений для дуг BS и SB одинаково. Для дуг BB и SS оно либо одинаковое, либо отличается на одно переключение.

При выбранном направлении обхода границы (по или против часовой стрелки) возможны 4 варианта следования дуг: 1) SB, BB, BS, SS; 2) SB, BB, BS, BB; 3) SB, SS, BS, SS; 4) SB, SS, BS, BB. В зависимости от t_f и φ некоторые дуги могут вырождаться. Дуги BS и SB вырождаются одновременно. В работе [9] установлено, что всего может быть 11 типов φ-сечений.

На рис. 4 показаны примеры множеств достижимости $G(t_f)$ при $u_1 = 0.5$, $u_2 = 1$ для трёх моментов $t_f = 6\pi, 10\pi, 20\pi$. Цвета участков границы соответствуют рис. 3. Один и тот же цвет может встречаться несколько раз, поскольку меняется количество переключений при изменении φ.

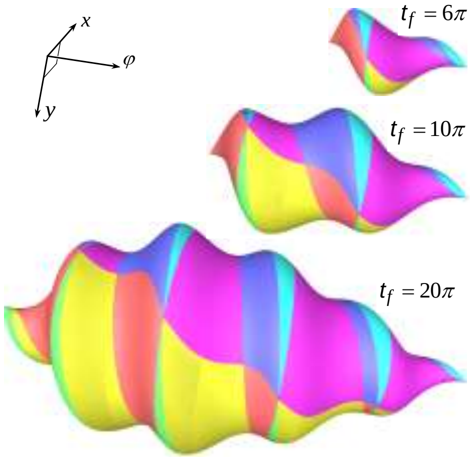

Рис. 4 Множества достижимости при $u_1 = 0.5$

** Пусть $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ (случай в)). Этот случай является самым простым. Здесь любое φ-сечение представляет собой [7, 9] либо круг (когда $\varphi \geq 2\pi$ независимо от t_f), либо круговой сектор (если $\varphi < 2\pi$). Таким образом, в данном случае φ-сечения являются выпуклыми.

*** Пусть $-1 \leq u_1 < 0$, $u_2 = 1$ (случаи а) и б)). Здесь граница φ-сечений образуется при помощи шести типов управлений, указанных в теореме 1. Получаемые φ-сечения могут быть невыпуклыми и даже неодносвязными [6].

Заключение

Выполнение ПМП является необходимым условием для управлений, ведущих на границу множества достижимости. Вообще говоря, для машины Дубинса это условие не является достаточным. Установлено, что в каждом из случаев а) и б) существует программное кусочно-постоянное управление, для которого ПМП выполнен, но соответствующее движение в момент t_f находится внутри множества $G(t_f)$, т.е. внутри некоторого его φ-сечения. Для случаев в) и г) доказано, что ПМП является достаточным условием перевода на границу. При этом имеет место выпуклость φ-сечений. Для случая г) φ-сечения являются строго выпуклыми. В этом случае кусочно-постоянное программное управление, удовлетворяющее ПМП, определяет единственное движение, ведущее в соответствующую точку на границе множества $G(t_f)$. В целом, использование ПМП позволило установить структуру φ-сечений множества достижимости и тем самым эффективно описать его границу.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
3. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // American Journal of Mathematics. 1957. Vol. 79, No. 3, pp. 497–516.
4. Марков А.А. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщ. Харьков. матем. общ. 1889. 2-я сер., том 1, выпуск 2. С. 250–276.
5. Cockayne, E.J., Hall, G.W.C., Plane motion of a particle subject to curvature constraints, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 13, No. 1, 1975, pp. 197–220.
6. Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТиСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
7. Пацко В.С., Федотов А.А. Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота // Труды института математики и механики, 2018, № 1, Том 24. С. 143–155.
8. Takei R., Tsai R. Optimal trajectories of curvature constrained motion in the Hamilton-Jacobi formulation. Journal of Scientific Computing. 2013. Vol. 54, pp. 622–644.
9. Patsko V.S., Fedotov A.A. Attainability set at instant for oneside turning Dubins car. Proceedings of 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg, Russia. 2018, pp. 201–206.