РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ФЕДОТОВ Андрей Анатольевич

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

01.01.09 – дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2005 г.

Работа выполнена в Институте математики и механики УрО РАН,
в отделе динамических систем.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, ст. н. с. Пацко В.С.
Официальные оппоненты:	доктор технических наук, профессор Ширяев В.И., доктор физико-математических наук, ст. н. с. Костоусова Е.К.
Ведущая организация:	Институт проблем механики РАН, г. Москва

Защита состоится 29 ноября 2005 года в 14-00 на заседании диссертационного совета К 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук в Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ИММ УрО РАН.

Автореферат разослан “27” октября 2005 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета К 004.006.01
кандидат физико-математических наук, ст. н. с. Скарин В.Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современной математической теории наблюдения и управления наряду с вероятностным подходом к описанию состояния динамической системы в условиях неточных замеров используется детерминированный подход, основанный на построении информационных множеств.

Под информационным множеством понимается совокупность всех фазовых состояний системы, совместных с описанием динамики, полученными замерами и известными ограничениями на их ошибку. Информационное множество представляет собой точную гарантированную оценку фазового состояния системы, задаваемую в виде множества.

Вопросы, связанные с правильной постановкой (формализацией) и решением задач наблюдения и управления, где в той или иной форме появляются информационные множества, рассматривались, начиная с середины 60-х годов прошлого века, в работах Н.Н.Красовского, А.Б.Куржанского, Ю.С.Осипова, А.И.Субботина, Ф.Л.Черноусько.

В зарубежной литературе в качестве эквивалентных термину "информационное множество" употребляются термины "feasible set", "membership set", "likelihood set", "uncertainty set". Сам подход часто называют "set membership estimation", "unknown but bounded error description (UBB approach)". Важную роль в развитии детерминированного гарантированного оценивания сыграли работы D.P.Bertsecas, M.Milanese, J.Norton, H.Piet-Lahanier, I.B.Rhodes, F.C.Schweppe, E.Walter, H.S.Witsenhausen.

Детерминированное гарантированное оценивание применяют не только для оценивания положения, но и для идентификации неизвестных параметров системы. Здесь, кроме работ указанных выше авторов, отметим работы В.М.Кунцевича, Б.Г.Поляка, Б.Н.Пшеничного.

Существенные результаты по теории гарантированного оценивания были получены в работах Б.И.Ананьева, А.Е.Барабанова, Р.Ф.Габасова, М.И.Гусева, И.А.Дигайловой, И.Я.Каца, Ф.М.Кирилловой, А.И.Короткого, А.С.Кощеева, М.М.Лычака, А.А.Меликяна, А.Г.Наконечного, О.И.Никонова, А.И.Овсеевича, В.Г.Покотило, И.Ф.Сивергиной, Н.Н.Субботиной, Т.Ф.Филипповой, А.Ю.Хапалова, Г.С.Шелементьева, В.И.Ширяева.

Понятие информационного множества является очень простым по своему смыслу, однако в конкретных задачах информационные множества могут быть устроены весьма сложно. Для нелинейных систем информационные множества, как правило, не являются выпуклыми и далеко не всегда есть возможность описать их аналитически. Зачастую целесообразно, исходя из потребностей конкретного применения, использовать тот или иной вариант аппроксимации.

С самого начала развития теории гарантированного оценивания разрабатываются методы внутренней и внешней аппроксимации информационных множеств. Особенно много работ, в которых исследуется эллипсоидальная аппроксимация. Среди работ последнего времени выделим книги Ф.Л.Черноусько[1], А.Б.Куржанского и I.Valyi[2]. Различные варианты полиэдральной аппроксимации изучались в работах Е.К.Костоусовой, T.Alamo, B.R.Barmish, J.M.Bravo, E.F.Camacho, L.Chisci, A.Garulli, J.Sankaran, A.Vicino, G.Zappa.

Поскольку построение информационных множеств связано с нахождением множеств прогноза (или, что то же самое, множеств достижимости), а также с операцией пересечения, то трудности, возникающие здесь, близки к тем, что появляются при построении максимальных стабильных мостов в дифференциальных играх. В связи с этим отметим работы А.М.Тарасьева, А.А.Успенского, В.Н.Ушакова, А.П.Хрипунова, посвящённые численному построению максимальных стабильных мостов в системах с нелинейной динамикой, и работы М.В.Балашова, Н.Д.Боткина, Н.Л.Григоренко, М.А.Зарха, А.Г.Иванова, Г.Е.Иванова, Р.В.Константинова, С.С.Кумкова, В.С.Пацко, Е.С.Половинкина, Д.Б.Силина, Н.Г.Тринько, в которых изложены алгоритмы построения стабильных мостов для линейных дифференциальных игр.

Построению информационных множеств в конкретных задачах посвящены работы М.О.Антонова, К.Е.Афанасьевой, Д.Д.Емельянова, А.И.Коблова, А.В.Кряжимского, С.И.Кумкова, Б.М.Миллера, В.С.Пацко, Е.Я.Рубиновича, В.Я.Рузакова, С.Д.Филиппова, В.И.Ширяева, А.Ф.Шорикова, L.A.Could, O.Didrit, A.Garulli, A.Giannitrapani, A.F.Henry, L.Jaulin, M.Kieffer, D.D.Lanning, O.Leveque, M.Marco, D.Meizel, A.G.Parlos, F.C.Schweppe, A.Vicino, E.Walter.

Данная работа примыкает именно к этому направлению исследований.

В диссертации предложены способы построения информационных множеств для модельных задач, связанных с движением самолёта в горизонтальной плоскости. Используется описание динамики в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений третьего и четвёртого порядков. Актуальность темы вызвана практической ценностью решения таких задач.

Цель работы: исследование трёхмерного множества достижимости нелинейной системы, описывающей управляемое движение самолёта в горизон-

[1] *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

[2] *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

тальной плоскости; разработка, обоснование и доведение до программной реализации методов построения внешних аппроксимаций трёхмерных и четырёхмерных информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости; разработка метода аппроксимации сверху множества разрешимости в задаче проводки самолёта на заданное терминальное множество с соблюдением фазовых ограничений в промежуточные моменты времени и при наличии ветрового возмущения.

Методы исследования. Используются теория оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, выпуклый анализ, теория дифференциальных игр, сеточные методы.

Научная новизна. Для типичной нелинейной системы управляемого движения самолёта в горизонтальной плоскости дано описание трёхмерного множества достижимости. Предложен метод его аппроксимации сверху, удобный в процедурах построения информационных множеств в задачах наблюдения в условиях неточных замеров, а также стабильных мостов для задач гарантированного управления при наличии возмущающих воздействий.

Теоретическая и практическая ценность. Изучаемое в работе множество достижимости представляет интерес как нетривиальный пример множества достижимости в трехмерном фазовом пространстве для нелинейной управляемой системы. Результаты построения могут быть применены в качестве тестовых при разработке универсальных численных алгоритмов построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Построение информационных множеств по предлагаемой в работе схеме может быть осуществлено в режиме реального времени. Полученные результаты могут быть использованы в алгоритмах систем управления воздушным движением.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, Кунгурка – 1999, 2000, 2001 гг.); 11th IFAC Workshop Control Applications of Optimization (г.Санкт-Петербург – 2000 г.); VIII Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (г.Пермь – 2001 г.); 10th International Symposium on Dynamic Games and Applications (г.Санкт-Петербург – 2002 г.); 7 Международной конференции "Системный анализ и управление аэрокосмическими комплексами" (г.Евпатория – 2002 г.); II Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" (г.Москва – 2003 г.); 16th IFAC World Congress (г.Прага – 2005 г.); семинарах отдела динамических систем и отдела управляемых систем ИММ УрО РАН, на семинаре кафедры прикладной математики Челябинского госуниверситета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, приложения и списка литературы. Общий объём диссертации 106 страниц, набранных в текстовом редакторе LATEX. Библиографический список содержит 100 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводится описание детерминированного гарантированного подхода к задачам наблюдения за движением. Приводится обзор литературы по исследуемой проблематике, определяется цель работы, излагаются основные результаты и содержание работы.

Под информационным множеством $I(t)$ понимаем совокупность всех фазовых состояний системы в момент t, совместных с известным для наблюдателя процессом управления-наблюдения. В практическом плане построение множества $I(t_{i+1})$ в момент t_{i+1} сводится к нахождению множества прогноза $G(t_{i+1})$ на основе построенного в момент t_i множества $I(t_i)$ и известных свойств динамики на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Если в момент t_{i+1} получен новый замер фазового состояния системы и при этом известно ограничение на ошибку замера, то формируем множество неопределённости $H(t_{i+1})$, описывающее совокупность всех фазовых состояний, совместных с такими сведениями о замере. Множество $I(t_{i+1})$ получается в результате процедуры пересечения: $I(t_{i+1}) = G(t_{i+1}) \bigcap H(t_{i+1})$.

Говоря о движении самолёта, считаем, что оно присходит в горизонтальной плоскости и описывается либо системой третьего, либо четвёртого порядка.

В первом из этих случаев фазовые переменные есть две координаты x, y геометрического положения и угол φ направления вектора скорости. Величина скорости V полагается постоянной. Скалярное управление u ограничено по модулю и определяет мгновенный радиус разворота вектора скорости. Описание динамики имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\varphi, \\ \dot{y} &= V\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V}u, \qquad |u| \le 1, \quad V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Во втором случае величина скорости V является переменной (четвёртая фазовая кордината). Добавлена также ещё одна компонента w управляющего воздействия, влияющая на величину скорости. Она стеснена геометрическим ограничением. Описание динамики:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= V\cos\varphi, \\
\dot{y} &= V\sin\varphi, \\
\dot{\varphi} &= ku/V, \\
\dot{V} &= w, \qquad k = \mathrm{const} > 0, \;\; V \geq \mathrm{const} > 0, \;\; |u| \leq 1, \;\; \mu_1 \leq w \leq \mu_2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Способы представления динамики движения самолёта в виде системы (1) или системы (2) являются простейшими. Построение оптимального управления обратной связи в задаче быстродействия с динамикой (1) исследовал T. Pecsvaradi[3]. Он рассматривал применение такого управления к вопросам, связанным с маневрированием самолёта в районе аэропорта. В этой связи можно также отметить статью H. Erzberger, H.Q. Lee[4], посвящённую построению простых для реализации и близких к оптимальным маневров движения самолёта в горизонтальной плоскости. Трёхмерную модель динамики вида (1) активно использовал Р. Айзекс[5] (причём даже в игровых ситуациях, когда в описании динамики присутствует помеха). Задача быстродействия для четырёхмерной модели вида (2) изучалась в работе Ю.И. Бердышева[6].

Модели вида (1), (2) используются также в работах по управляемым тележкам. Обзорные статьи на эту тему собраны в книге, выпущенной под редакцией J.-P. Laumond[7]. В работах по управляемым тележкам систему (1) часто называют Dubins' Car, поскольку L.E. Dubins[8] изучал задачу быстродействия для трёхмерной системы (1) и доказал утверждение о числе и характере переключений оптимального программного управления.

Предполагаем, что в процессе наблюдения за движением самолёта производятся замеры его геометрического положения на плоскости x, y. Ошибки замеров стеснены геометрическими ограничениями. Полученный в момент t замер и известное априорное ограничение на его ошибку определяют множество неопределённости $H^{\#}(t)$ на плоскости x, y.

---

[3] *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972, Vol. AC-17, No. 6, pp. 763-772.

[4] *Erzberger H., Lee H.Q.* Optimum Horizontal Guidance Techniques for Aircraft // J. Aircraft. Vol. 8, No. 2, 1971.

[5] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

[6] *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикладная математика и механика, Т. 39, Вып. 6, 1975, С. 985–994.

[7] *Laumond J.-P.* (editor). Robot Motion Planning and Control / Lecture notes in control and information sciences; 229. London: Springer-Verlag, 1998.

[8] *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math., 1957, Vol. 79, pp. 497–516.

Например, типичным источником информации является радиолокатор, от которого поступают замеры положения самолёта: дальность и местный азимут. Априорно известны максимальные ошибки по дальности и по углу. Соответствующее множество $H^{\#}(t)$ на плоскости x, y есть кольцевой сектор, который разумно подменять выпуклым четырёхугольником.

В работе множества $H^{\#}(t)$ предполагаются выпуклыми.

Условимся, что множество неопределенности $H(t)$ является цилиндрическим по координате φ для системы (1) и по координатам φ, V для системы (2). Множество $H(t)$ целиком задается своей проекцией $H^{\#}(t)$ на плоскость x, y:

$$H(t) = H^{\#}(t) \times \{\varphi\}, \qquad H(t) = H^{\#}(t) \times \{\varphi, V\}$$

для систем (1) и (2), соответственно.

Первая глава посвящена численно-аналитическому исследованию трёхмерных множеств достижимости системы (1).

Фазовый вектор (x, y, φ) системы (1) обозначим через z.

Зафиксируем z_0 – произвольное состояние системы (1) в начальный момент времени t_0. Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \geq t_0$ есть совокупность всех точек z трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1) в момент T при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $[t_0, T]$ из начальной точки z_0. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ считаются измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению $|u| \leq 1$.

В силу стационарности системы (1) выбор начального момента времени t_0 не существенен. Кроме того, специфика системы (1) такова, что начальное состояние z_0 влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса.

Исследование проекции $G^{\#}(T)$ множества $G(T)$ на плоскость x, y проведено в статье E.J. Cockayne, G.W.C. Hall[9]. Множество $G^{\#}(T)$ изучалось также в работе Ю.И. Бердышева[10].

Множества достижимости в первой главе исследуются в трёхмерном фазовом пространстве x, y, φ. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$.

[9] *Cockayne E.J., Hall G.W.C.* Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control, 1975, Vol. 13, No. 1, pp. 197–220.

[10] *Бердышев Ю.И.* Об одной задаче построения области достижимости для нелинейной системы третьего порядка // Сборник научных трудов “Методы построения множеств достижимости и конструкции расширений”. Екатеринбург: Издательство УГТУ-УПИ, 2004, С. 6–12.

Известно[11], что управления, которые ведут на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понтрягина. Запишем соотношения принципа максимума для системы (1).

Пусть $u^*(\cdot)$ – некоторое допустимое управление, а $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ – соответствующее движение системы (1) на промежутке $[t_0, t_*]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot\psi_1 &= 0, \\ \dot\psi_2 &= 0, \\ \dot\psi_3 &= \psi_1 V \sin\varphi^*(t) - \psi_2 V \cos\varphi^*(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Принцип максимума означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$ системы (3), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_*]$ выполнено условие

$$\psi_1^*(t) V \cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t) V \sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t) k u^*(t)/V =$$
$$= \max_{|u|\le 1} [\psi_1^*(t) V \cos\varphi^*(t) + \psi_2^*(t) V \sin\varphi^*(t) + \psi_3^*(t) k u/V].$$

Таким образом, условие максимума имеет вид

$$\text{п.в.} \quad \psi_3^*(t) u^*(t) = \max_{|u|\le 1} \psi_3^*(t) u, \quad t \in [t_0, t_*]. \tag{4}$$

Функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^*.

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \mathrm{const} \ne 0$ на промежутке $[t_0, t_*]$. Следовательно, в этом случае либо п.в. $u^*(t) = 1$, либо п.в. $u^*(t) = -1$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (1) и (3), можно записать следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0. \tag{5}$$

Прямая (5) использовалась во многих работах (см., например, статью [12]) где для системы (1) анализировался принцип максимума.

[11] *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

[12] *Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.* Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Труды второго международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства, Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н.Петрова, И.С.Уколова. М.: Наука, 1971.

В силу соотношения (4), если $\psi_3^*(t) > 0$ ($\psi_3^*(t) < 0$) на некотором промежутке времени, то $u^*(t) = 1$ ($u^*(t) = -1$) п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение в проекции на плоскость x, y при этом идет по дуге окружности радиуса V^2/k против часовой стрелки в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C > 0$ (по часовой стрелке в полуплоскости $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C < 0$). Условимся называть циклом участок движения длительностью $2\pi V/k$, на котором п.в. $u^*(t) = 1$ или п.в. $u^*(t) = -1$. Траектория движения на таком участке в проекции на плоскость x, y представляет собой окружность.

Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке времени, то на этом промежутке движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ идет по прямой (5). Стало быть, $\varphi^*(t) = \text{const}$. Поэтому $u^*(t) = 0$ п.в. на этом промежутке.

Из анализа вариантов взаимного расположения прямой (5) и траектории $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ следует, что функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ может менять знак лишь конечное число раз. Поэтому в качестве управления $u^*(\cdot)$, порождающего движение $z^*(\cdot)$ и удовлетворяющего принципу максимума, можно взять кусочно-постоянное управление со значениями $0, \pm 1$ и конечным числом переключений на промежутке $[t_0, t_*]$. Для определенности будем считать такое управление кусочно-непрерывным справа. Момент t_* не включаем в число моментов переключения.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Пусть движение $z^*(\cdot)$ порождается кусочно-постоянным управлением $u^*(\cdot)$ и при этом выполнен принцип максимума. Тогда*

а) *если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и нет циклов, то интервалы времени между соседними моментами переключения одинаковы;*

б) *если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и есть хотя бы один цикл, то все точки геометрического положения в моменты переключения совпадают;*

в) *если на движении $z^*(\cdot)$ есть совпадающие точки геометрического положения в моменты переключения, то на этом движении имеется хотя бы один цикл;*

г) *если на движении $z^*(\cdot)$ есть участок с нулевым управлением, то любой полный участок с управлением 1 или -1, не лежащий на краю, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов.*

Далее, в леммах $1.2, 1.3$ исследуются движения без участков с нулевым управлением, а в лемме 1.4 анализируется случай с участком нулевого управления. Будем обозначать внутренность множества через int.

Лемма 1.2. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ± 1 и двумя моментами переключения t_1, t_2. Предположим, что точки геометрического положения на плоскости x, y в моменты переключения не совпадают. Пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$(t_1 - t_0) + (t_* - t_2) > (t_2 - t_1). \tag{6}$$

Тогда $z(t_*) \in \mathrm{int} G(t_*)$.

Лемма 1.3. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ± 1 и тремя моментами переключения. Тогда $z(t_*) \in \mathrm{int} G(t_*)$.*

Лемма 1.4. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями $0, \pm 1$ и двумя моментами переключения. Предположим, что участок с нулевым управлением один и является одним из двух крайних участков постоянства управления. Тогда $z(t_*) \in \mathrm{int} G(t_*)$.*

Сформулируем основное утверждение, которое доказывается на основе лемм 1.1–1.4.

Теорема 1.1. *В каждую точку границы множества достижимости системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:*

$$\begin{array}{llll} 1)\ 1, 0, 1; & 2)\ -1, 0, 1; & 3)\ 1, 0, -1; & 4)\ -1, 0, -1; \\ 5)\ 1, -1, 1; & 6)\ -1, 1, -1. & & \end{array} \tag{7}$$

Приведённая теорема позволяет строить численно границу множества достижимости системы (1). Моменты переключения будем использовать в качестве параметров.

Полагаем $t_0 = 0,\ z_0 = 0$. Для построения границы множества $G(T)$ перебираем все управления вида 1–6 из списка (7) с двумя моментами переключения t_1, t_2. Для каждого варианта переключений параметр t_1 выбирается из промежутка $[0, T]$, а параметр t_2 – из промежутка $[t_1, T]$. Управления с одним переключением и без переключений при этом также охватываются. Взяв конкретный вариант переключений и перебирая для него параметры t_1, t_2 на некоторой достаточно мелкой сетке, получаем набор точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве x, y, φ.

Таким образом, каждому из шести вариантов в списке (7) соответствует своя поверхность в трехмерном пространстве. Граница множества достижимости $G(T)$ составляется из кусков этих поверхностей. Шесть поверхностей без какой-либо дополнительной обработки загружаются в программу визуализации. С её помощью выделяем границу множества достижимости. Некоторые поверхности частично или полностью попадают внутрь множества достижимости. При изображении границы такие участки не видны.

На рис. 1 показана с двух ракурсов граница множества $G(T)$ для момента $T = \pi V/k$. Разными оттенками отмечены участки границы с различным характером управляющего воздействия. С некоторым шагом по оси φ изображены сечения множества достижимости плоскостью $\varphi = \text{const}$. Управление, тождественно равное нулю, ведет в точку стыковки участков 1−4. В точки линий, лежащих на стыке участков 1,2; 1,3; 2,4; 2,5; 2,6; 3,4; 3,5; 3,6, ведет управление с одним переключением. В любую точку линии, являющейся общей для участков 5 и 6, идут два движения, каждое с двумя переключениями.

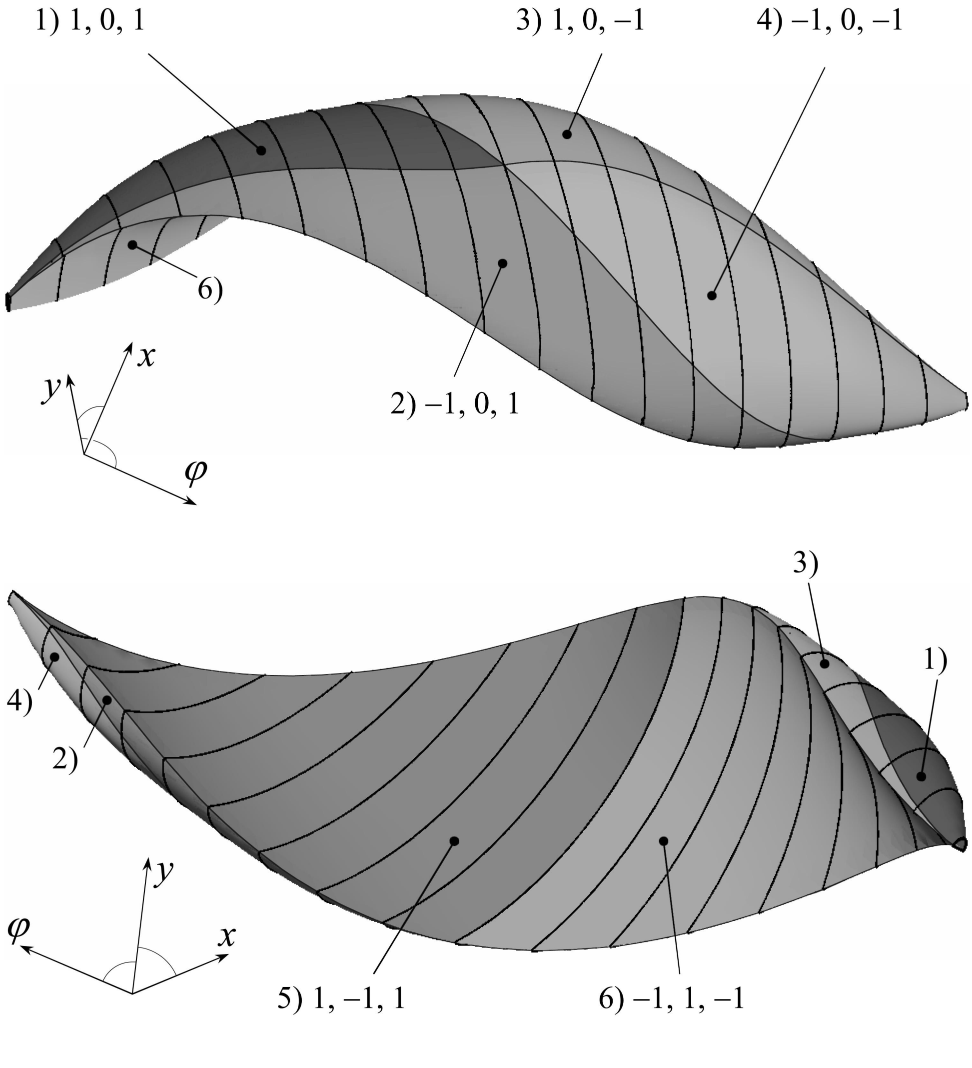

Рис. 1: Структура границы множества достижимости для $T = \pi V/k$.

На рис. 2 показаны в одном ракурсе множества достижимости $G(T)$ для четырех моментов времени T. Прослеживается изменение структуры границы множества достижимости: с увеличением времени передняя часть границы, составленная из участков 1−4, "затягивает" тыльную часть, составленную из участков 5, 6.

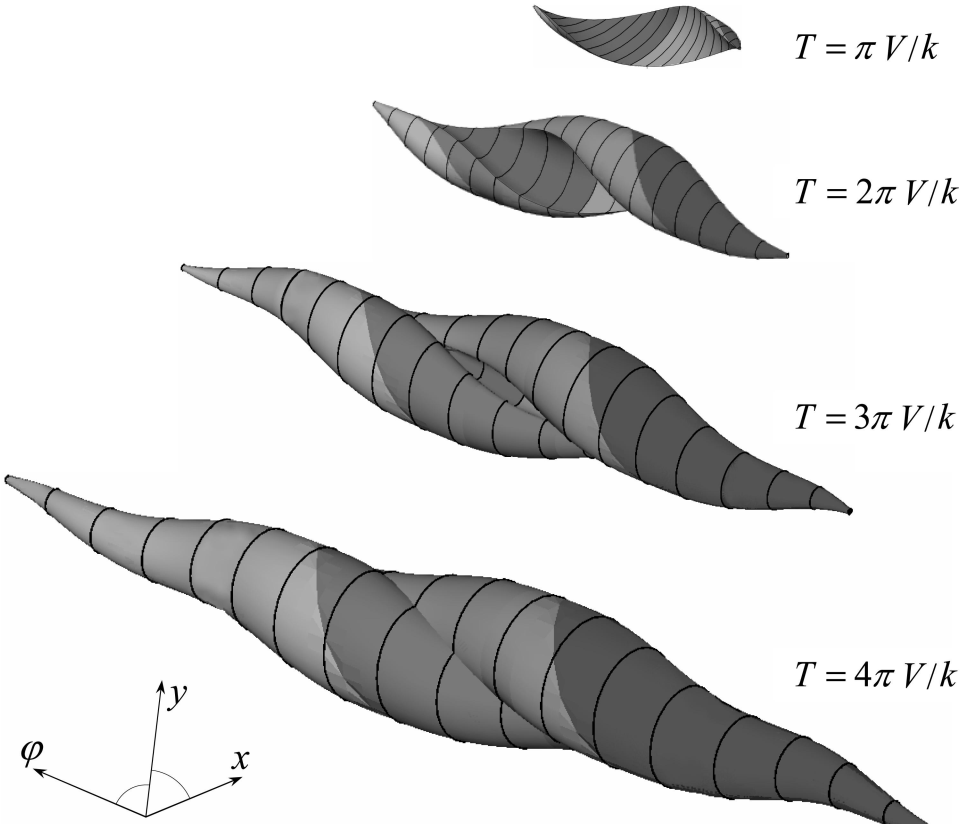

Рис. 2: Развитие множества достижимости.

Граница трехмерного множества достижимости $G(T)$ устроена весьма просто для не слишком больших моментов времени T. При увеличении T структура границы усложняется. Существует небольшой промежуток времени, на котором множество $G(T)$ не является односвязным. При переходе от $T = 3\pi V/k$ к $T = 4\pi V/k$ наступает момент $T \approx 3.63\pi V/k$, начиная с которого множество достижимости $G(T)$ на некотором малом промежутке времени содержит полость, не принадлежащую множеству достижимости.

В первой главе дополнительно приведены изображения множеств достижимости для случая, когда производится склейка значений координаты φ по модулю 2π. Даны также изображения множеств достижимости в цилиндрических координатах.

Во **второй главе** рассматривается задача о построении информационных множеств для системы с динамикой (1), когда относительно реализаций управляющих воздействий известно лишь то, что они удовлетворяют ограничению $|u| \leq 1$. Значения координаты φ либо рассматриваются на бесконечной оси $(-\infty, \infty)$, либо вычисляются по модулю 2π. В последнем случае отождествляются значения φ, отличающиеся на величину кратную 2π.

Предложен способ построения оценки сверху $\mathbf{G}(t)$ для множеств прогноза $G(t)$ (множеств достижимости). Доказано утверждение (Лемма 2.1) о полугрупповом свойстве отображения $t \to \mathbf{G}(t)$. Полугрупповое свойство имеет важное значение. В частности, оно позволяет разумно сочетать промежуточные шаги по времени с перебором небольшого числа управляющих воздействий на каждом шаге. При численной реализации способ использует сетку по координате φ. Каждому узлу сетки сопоставляется выпуклое множество на плоскости x, y. Разумность предлагаемой аппроксимации подтверждается сравнением с точными результатами, полученными в первой главе.

Предлагаемый способ оценки сверху множеств прогноза удобен для выполнения операции пересечения $\mathbf{G}(t_i) \bigcap H(t_i)$. Такое пересечение определяет множество $\mathbf{I}(t_i)$ – оценку сверху истинного информационного множества $I(t_i)$.

На рис. 3 в трехмерном пространстве изображены информационные множества в момент прихода замера. Показаны два множества: слева – до учета замера (множество прогноза), справа – после учета замера. При пересчете ин-

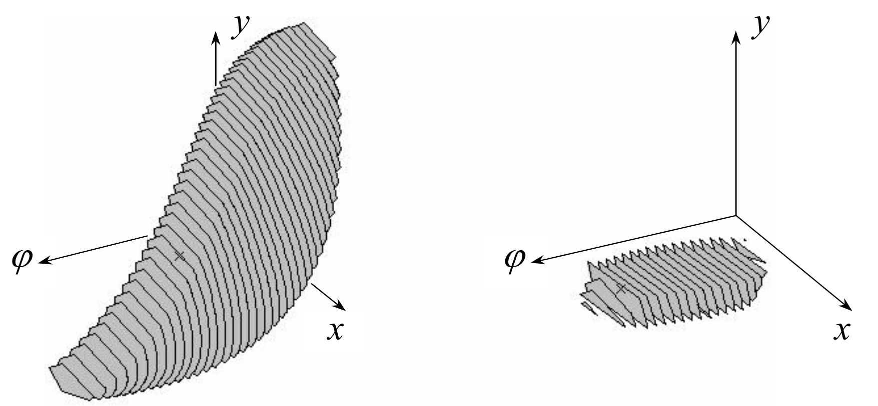

Рис. 3: Информационное множество до и после замера.

формационных множеств в процессе поступления замеров базовыми являются операция пересечения выпуклых многоугольников и операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых многоугольников. Реализация таких операций на плоскости не требует больших затрат.

В конце второй главы приведены результаты моделирования движения информационных множеств $\mathbf{I}(t)$. Представлены также результаты построения информационных множеств для различных вариантов геометрии множеств неопределенности и при различном числе вершин выпуклых многоугольников, аппроксимирующих сечения информационного множества.

В **третьей главе** процедура построения информационных множеств переносится на случай системы (2).

Здесь величина V вектора скорости является дополнительной фазовой переменной. В конкретных практических задачах соотношение, определяющее динамику изменения скорости, вообще говоря, может быть более сложным, чем четвертое уравнение системы (2). Это соотношение может зависеть от большого числа параметров и не всегда точно известно. Отказываясь от сложного описания, используем уравнение $\dot{V} = w$ и трактуем μ_1, μ_2 как ограничения на возможные значения ускорения $\dot{V}$.

При построении информационных множеств управление $u(t)$ по боковому каналу и управление $w(t)$ по продольному каналу предполагаются неизвестными. Информационные множества строятся в четырёхмерном фазовом пространстве на основе замеров двумерного геометрического положения самолёта с учетом известных ограничений на ошибку замеров. Направление φ и скорость V движения напрямую не замеряются, полагаются неизвестными и могут быть непостоянны.

Схема построения информационных множеств подобна той, что была во второй главе. Используется сетка по координатам φ, V.

Приводятся результаты моделирования.

В **четвёртой главе** рассматривается задача проводки самолёта, движущегося в горизонтальной плоскости, через заданные области. Для описания динамики выбрана система

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= V\cos\varphi + v_1, \\
\dot{y} &= V\sin\varphi + v_2, \qquad\qquad v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} \in Q, \\
\dot{\varphi} &= ku/V, \\
\dot{V} &= w, \qquad\qquad k = \mathrm{const} > 0,\;\; V \geq \mathrm{const} > 0,\;\; |u| \leq 1,\;\; \mu_1 \leq w \leq \mu_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

отличающаяся от системы (2) наличием неизвестной помехи $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}}$ в первых двух строках динамики. Наложено ограничение $v \in Q$. Управляющие воздействия u, w, как и в третьей главе, стеснены геометрическими ограничениями.

Исследуется задача о возможности гарантированного (т.е. при любом действии помехи) перевода самолета из начального состояния при помощи управления обратной связи на заданное терминальное множество в фиксированный момент времени с соблюдением фазовых ограничений в промежуточные моменты.

Практическая польза исследования такой задачи может быть пояснена следующим образом. В системах избежания столкновений воздушных судов актуальной является задача проведения самолета из начального состояния в заданную область в назначенный момент времени. При этом в некоторые промежуточные моменты времени траектория должна проходить через другие заданные области пространства. Последовательность таких областей (фазовых ограничений) вдоль траектории стандартного маневра и моменты их пролета задаются диспетчером службы управления воздушным движением с целью обеспечения безопасного расхождения конфликтующих судов. Полезно иметь быстрый вычислительный алгоритм, позволяющий ответить на вопрос о возможности проведения самолета через заданные области, но уже при наличии ветровых возмущений.

Рассматриваемая задача трактуется как задача о нахождении множества разрешимости дифференциальной игры наведения[13] на терминальное множество в фиксированный момент окончания при наличии фазовых ограничений, оговоренных в промежуточные моменты времени. Строится оценка сверху для максимального стабильного моста в четырёхмерном фазовом пространстве. Для решения задачи применяется попятная процедура, основу которой составляют алгоритмы построения множеств достижимости, операции пересечения множеств и построения выпуклых оболочек. Подобная процедура (но только в прямом времени) использовалась во второй и третьей главах для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости при неточных замерах его геометрического положения.

Построение управления по принципу обратной связи, удерживающего движение самолета в условиях ветрового возмущения внутри множества разрешимости, является самостоятельной задачей и в данной работе не рассматривается.

В конце четвёртой главы приведены результаты построения множества разрешимости в задаче проводки для некоторых типичных исходных числовых данных.

В **приложении** к диссертации помещены результаты моделирования трубки информационных множеств для ситуации апостериорного оценивания. В этом случае замеры геометрического положения самолёта вместе с ограничениями на их ошибку считаются заранее известными на оговоренном промежутке для некоторой совокупности моментов времени. Трубка

[13] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

информационных множеств выделяет на фиксированной сетке моментов времени, включающей моменты замеров, четырёхмерные множества фазовых состояний, совместных с динамикой системы (2) и заданными замерами. Используется рекуррентный алгоритм из третьей главы, который прогоняется несколько раз в прямом и обратном времени. Как и в третьей главе, речь идёт о построении аппроксимации сверху истинных информационных множеств. Строится также некоторое "эталонное" движение системы (2), проходящее в полученной трубке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена теоретическому и численному исследованию модельных задач наблюдения, связанных с движением самолёта в горизонтальной плоскости.

Получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема о числе и характере переключений управления, ведущего на границу множества достижимости нелинейной системы третьего порядка, описывающей движение самолёта в горизонтальной плоскости.

2. Исследована структура границы множества достижимости рассматриваемой нелинейной системы третьего порядка.

3. Предложен способ аппроксимации сверху информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости. Реализованы алгоритмы для трёхмерного и четырёхмерного случаев.

4. Предложен алгоритм построения оценки сверху множества разрешимости в игровой задаче проводки самолёта через заданные области.

Публикации по теме диссертации

[1] *Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тезисы докладов 30-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1999, С. 70–71.

[2] *Федотов А.А.* Оценивание четырехмерных множеств достижимости в задаче наблюдения за движением самолета // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 31-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2000, С. 102–103.

[3] *Федотов А.А.* Построение множества достижимости для нелинейной управляемой системы третьего порядка // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 32-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2001, С. 224–228.

[4] *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления, 2003, N 3, С. 8–16.

[5] *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Известия РАН. Теория и системы управления, 2003, N 4, С. 51–61.

[6] *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Построение множества разрешимости в задаче проводки самолёта при ветровом возмущении // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005, Т. 11, N 1, С. 149–159.

[7] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Informational Sets in a Problem of Observation of Aircraft Trajectory // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2000, pp. 94–112.

[8] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Four-dimensional informational sets in a problem of aircraft tracking // Proceedings of the 11th IFAC International Workshop "Control Applications of Optimization"(CAO 2000), 2000, Vol. 2. St.-Petersburg, Russia, Edited by V.Zakharov, Oxford: Pergamon Press, 2000, pp. 573–578.

[9] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Nonlinear construction of informational sets in aircraft tracking problem under inertional control // Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Vol. 3, St.-Petersburg, Russia, 2001. Edited by A.B.Kurzhanski, A.L.Fradkov, Oxford: Pergamon Press, 2002, pp. 1389–1394.

[10] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Construction of the stable bridge in a problem of aircraft guiding under wind disturbances // Proceedings of the Tenth International Simposium on Dynamic Games and Applications. St.-Petersburg, Russia. 2002, Vol. 2, pp. 474–480.

Федотов Андрей Анатольевич

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Автореферат

Подписано в печать 14.10.05.
Формат 60x84 1/16. Объем 1.2 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 66

Размножено с готового оригинал-макета в типографии
"Уральский центр академического обслуживания"
620219, Екатеринбург, ГСП-169, ул. Первомайская, 91