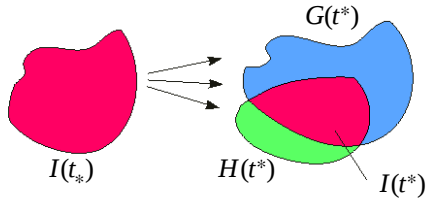


1	2
ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ Федотов А.А. Специальность: 01.01.09 (дискретная математика и математическая кибернетика)	Информационное множество в текущий момент времени – совокупность всех фазовых состояний, совместных с описанием динамики и с множествами неопределённости, построенными до данного момента. Множеством неопределённости замера называем совокупность всех фазовых состояний, согласованных с этим замером и известными геометрическими ограничениями на его ошибку. В зарубежной литературе эквивалентными к термину “информационное множество” являются термины “feasible set”, “membership set”, “likelihood set”, “uncertainty set”. Сам подход часто называют “set membership estimation”, “unknown but bounded error description (UBB approach)”.

(Слайд 1) Глубокоуважаемые члены учёного совета и все присутствующие, Вашему вниманию представляется диссертационная работа, в которой рассматриваются модели траекторного движения самолёта в горизонтальной плоскости.

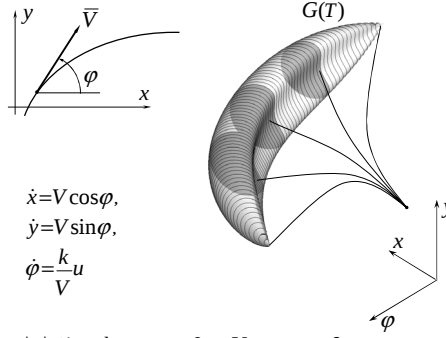
(Слайд 2) Основным понятием, используемым в работе, является информационное множество. Это совокупность всех фазовых состояний, совместных с описанием динамики и множествами неопределённости замеров, поступившими до данного момента. Множество неопределённости замера – это совокупность всех фазовых состояний, согласованных с этим замером и ограничениями на его ошибку. Эквивалентные термины, встречающиеся в зарубежной литературе, показаны здесь ниже.

3	4
Информационное множество и множество неопределённости замера 	Н.Н.Красовский, А.Б.Куржанский, Ю.С.Осипов, А.И.Субботин, Ф.Л.Чернушко. D.P.Bertsecas, F.C.Schweppe, H.S.Witsenhausen, M.Milanese, J.Norton, H.Piet-Lahanier, I.B.Rhodes, E.Walter. В.М.Кунцевич, Б.Т.Поляк, Б.Н.Пшеничный. М.И.Гусев, Е.К.Костоусова, О.И.Никонов, Т.Ф.Филиппова. Д.Д.Емельянов, С.И.Кумков, Е.Я.Рубинович, В.Я.Рузаков, С.Д.Филиппов, В.И.Ширяев, А.Ф.Шорилов, O.Didrit, L.Jaulin, A.Garulli, A.Giannitrapani, M.Kieffer, O.Leveque, M.Marco, D.Meizel, A.Vicino. В.Н.Ушаков, А.М.Тарасьев, А.А.Успенский, А.П.Хрипунов. Н.Л.Григоренко, В.С.Пацко, Е.С.Половинкин.

(Слайд 3) Рекуррентная процедура пересчёта информационных множеств может быть пояснена на следующей схеме. Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ есть и нужно получить информационное множество на момент t^* прихода следующего замера. Для этого строим множество прогноза $G(t^*)$ системы (показано на слайде голубым цветом) при помощи допустимых управлений. Множество прогноза – это фактически множество достижимости системы из начального состояния $I(t_*)$ в момент t^* . Далее пересекаем полученное множество прогноза $G(t^*)$ с множеством неопределённости $H(t^*)$ замера, поступившего в момент t^* . Множество неопределённости показано зелёным цветом. Результат пересечения и составляет новое информационное множество $I(t^*)$ на момент t^* . Основная сложность здесь состоит в том, что множества невыпуклые и построения необходимо вести в трёхмерном или четырёхмерном

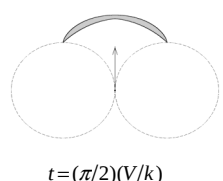
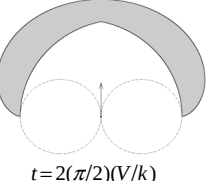
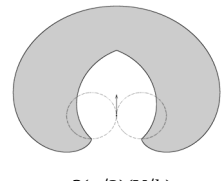
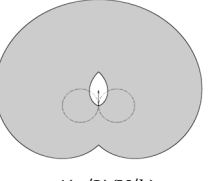
фазовом пространстве. Основные операции, используемые здесь – это построение множества прогноза и операция пересечения с множеством неопределённости замера.

(Слайд 4) На этом слайде фамилии учёных, которые в разное время занимались теорией, связанной с информационными множествами, стояли у истоков и работающие в настоящее время. Это наши и зарубежные учёные. Учёные, занимающиеся какими-то практическими задачами и дифференциальными играми. Дифференциальными играми потому, что попятные процедуры в дифференциальных играх во многом схожи с процедурами рекуррентного пересчёта информационных множеств.

5 Глава 1 Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы	6 Нелинейная управляемая система третьего порядка  $\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V} u\end{aligned}$ $u \leq 1, \quad k = \text{const} > 0, \quad V = \text{const} > 0$
---	--

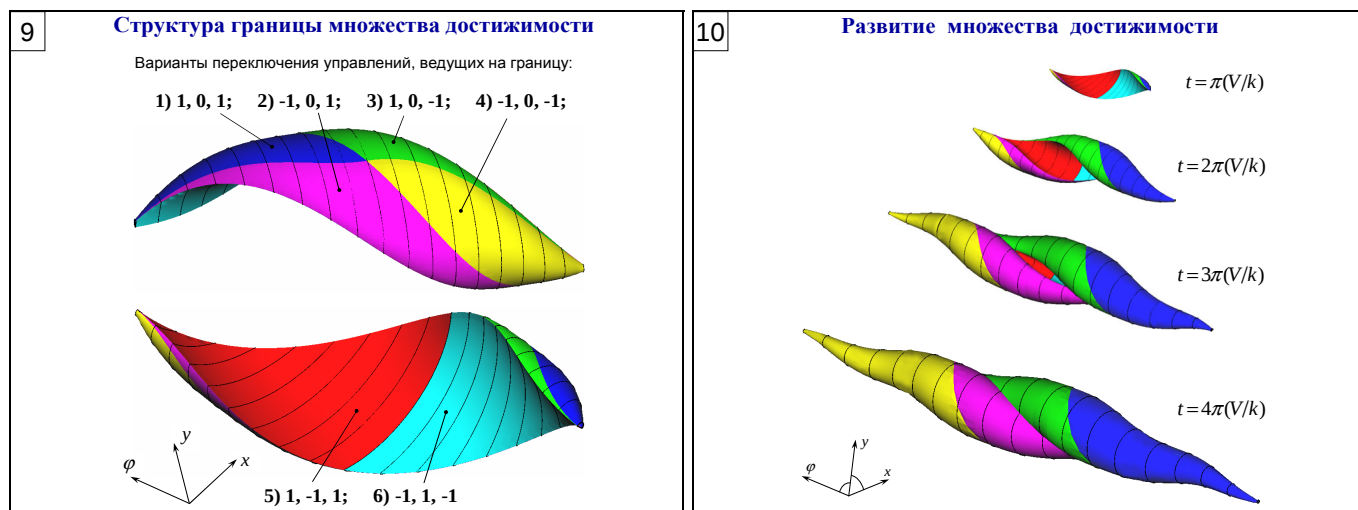
(Слайд 5) В первой главе рассматривается множество достижимости для трёхмерной нелинейной системы.

(Слайд 6) Динамика движения описывается следующей системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Здесь фазовые переменные x, y – геометрическое положение на плоскости, и фазовая координата φ – угол направления вектора скорости. Скорость считается постоянной по величине и есть также ограничение k на максимальное боковое ускорение. Под множеством достижимости системы в фиксированный момент времени T понимаем совокупность всех фазовых состояний, в каждое из которых можно перейти при помощи некоторого допустимого управления. Динамика системы нелинейная, поэтому множество достижимости невыпукло. Схематично такое множество достижимости показано на слайде в правой части.

7 Множество достижимости в проекции на плоскость геометрических координат (Е.И.Соккайне, G.Hall; Ю.И.Бердышев)    	8 Структура движений, ведущих на границу трехмерного множества достижимости ТЕОРЕМА: В каждую точку границы множества достижимости системы $\dot{x} = V \cos \varphi, \quad \dot{y} = V \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = \frac{k}{V} u$ можно перевестись при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений: 1) -1, 1, -1; 2) 1, -1, 1; 3) -1, 0, -1; 4) -1, 0, 1; 5) 1, 0, -1; 6) 1, 0, 1.
--	---

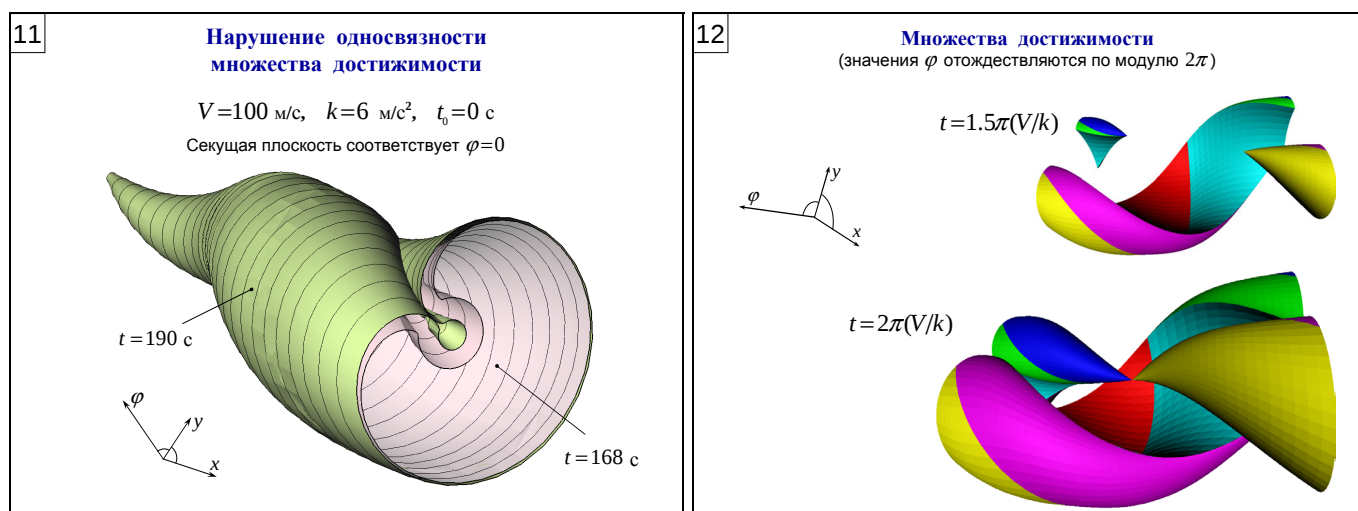
(Слайд 7) В проекции на плоскость геометрических координат такое множество достижимости было известно ранее. На слайде показан его вид для нескольких моментов времени. Но отсюда его трёхмерное представление никак не следует, получению которого и посвящена первая глава.

(Слайд 8) Был получен следующий теоретический результат, который даёт структуру движений, ведущих на границу трёхмерного множества достижимости. Итак, в каждую точку множества достижимости рассматриваемой системы можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом можно ограничиться лишь шестью вариантами, перечисленными в нижней части слайда.



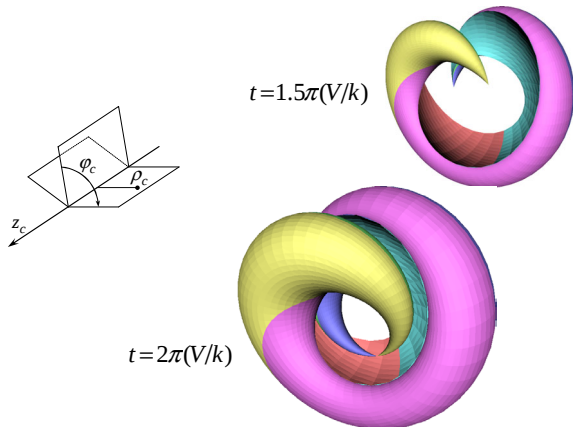
(Слайд 9) Каждый из шести вариантов по двум моментам переключения даёт двухпараметрическое семейство – поверхность в трёхмерном фазовом пространстве, которая определяет кусочек границы множества достижимости. На слайде в двух ракурсах показано численно построенное трёхмерное множество достижимости в некоторый момент времени. Оно составлено из кусочков, соответствующих шести вариантам переключений. Например, фрагмент границы, отмеченный красным цветом, образован движениями с управлением 1, -1, 1. В линии стыковки поверхностей ведут движения с одним переключением управления. В среднюю и крайние точки ведут движения без переключения.

(Слайд 10) На данном слайде показан вид множества достижимости для больших моментов времени. Здесь наблюдается характерное скручивание в фигуру, напоминающую чем-то раковину улитки.



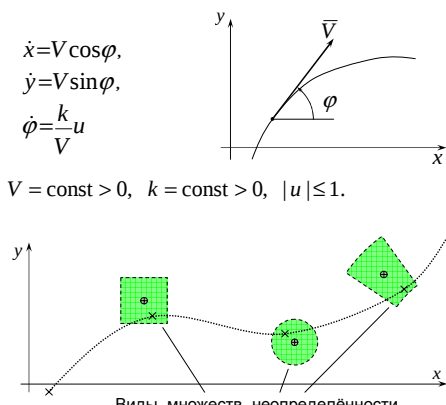
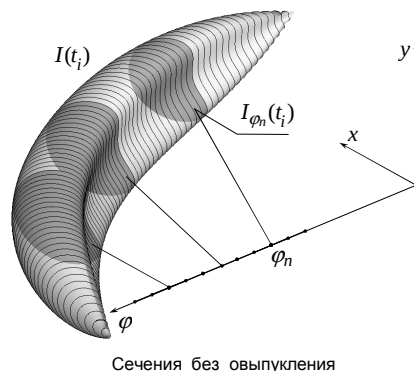
(Слайд 11) При численном исследовании было выявлено, что на некотором небольшом промежутке по времени множество достижимости не является односвязным. Здесь на срезе плоскостью $\varphi=0$ хорошо видно, что внутри множества достижимости на момент $t=190$ с есть полость, не принадлежащая ему.

(Слайд 12) Здесь показаны два трёхмерных множества достижимости для случая, когда значение угловой координаты φ отождествляется по модулю 2π .

13 Множества достижимости в цилиндрических координатах 	14 Глава 2 Трёхмерные информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости
--	---

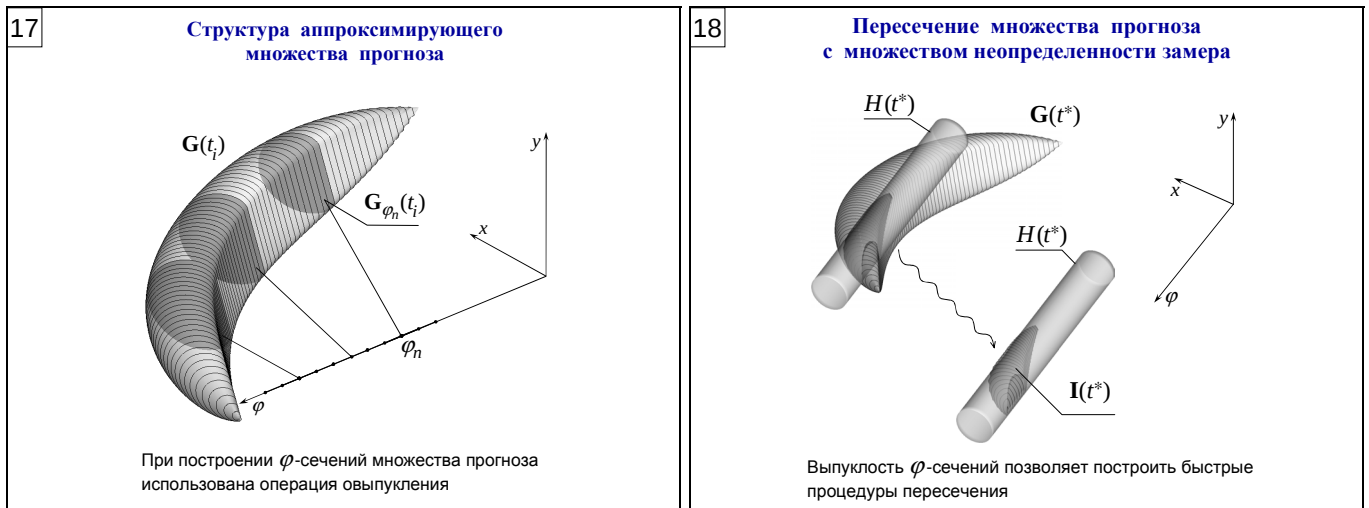
(Слайд 13) И ещё один вариант изображения трёхмерных множеств достижимости, в цилиндрических координатах. Показаны те же два множества, что и на предыдущем слайде.

(Слайд 14) Во второй главе рассматриваются алгоритмы построения трёхмерных информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости.

15 Описание динамики. Множества неопределённости замеров $\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V} u\end{aligned}$ $V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0, \quad u \leq 1.$  Виды множеств неопределённости	16 Структура точного множества прогноза  Сечения без овыпукления
--	---

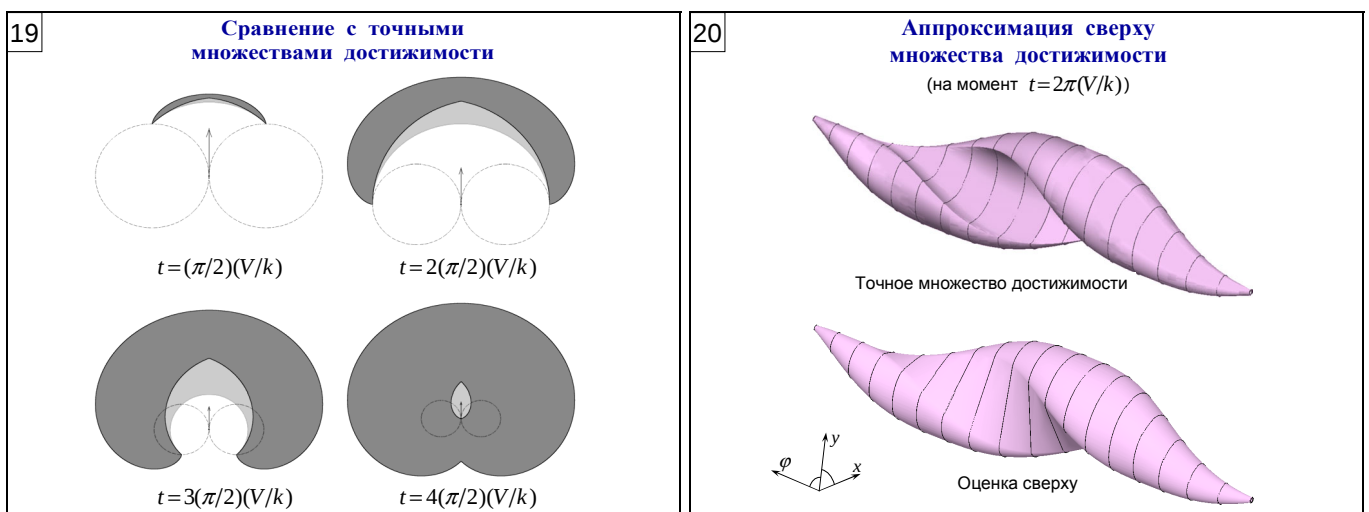
(Слайд 15) Здесь исследуется задача с той же динамикой, как и в первой главе. Считается, что поступают замеры положения на плоскости x, y и множества неопределённости замеров задаются проекцией на эту плоскость. В целом множества неопределённости являются цилиндрическими по координате φ . Источники замеров могут быть разными, как и форма множеств неопределённости. Это схематично показано в нижней части слайда. Здесь в проекции на плоскость геометрических координат множества неопределённости выделены зелёным цветом. Отметим специфику динамики системы. Первое – третье уравнение системы интегрируется независимо от первых двух. И второе – фазовые координаты x, y не входят в правые части уравнений динамики.

(Слайд 16) Множества прогноза для рассматриваемой нелинейной системы невыпуклы. Более того, как было показано в первой главе, φ -сечения таких множеств также зачастую являются невыпуклыми множествами на плоскости. Тем не менее, специфика динамики, показанная на предыдущем слайде, позволяет разработать эффективный алгоритм построения аппроксимации сверху множеств прогноза.



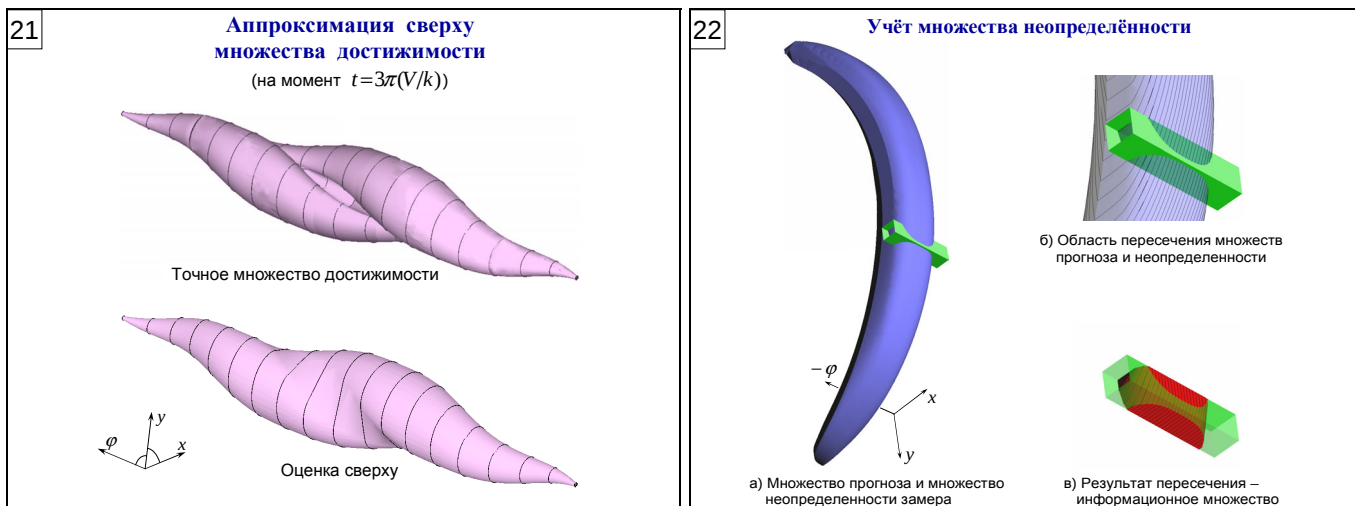
(Слайд 17) При работе с оценкой сверху множеств прогноза имеем дело уже с выпуклыми φ -сечениями. Это существенно облегчает численную реализацию, позволяя использовать выпуклые плоские многоугольники для представления φ -сечений множества прогноза. При этом можно использовать равномерную сетку по координате φ .

(Слайд 18) Для пересечения оценки сверху множества прогноза с множеством неопределённости замера считается, что множество неопределённости является выпуклым. Аппроксимация сверху множества прогноза в целом невыпукло, но состоит из выпуклых φ -сечений. Поэтому результат пересечения – новое информационное множество будет составлено из выпуклых φ -сечений. Таким образом, при рекуррентном пересчёте будем всегда иметь дело с выпуклыми φ -сечениями.



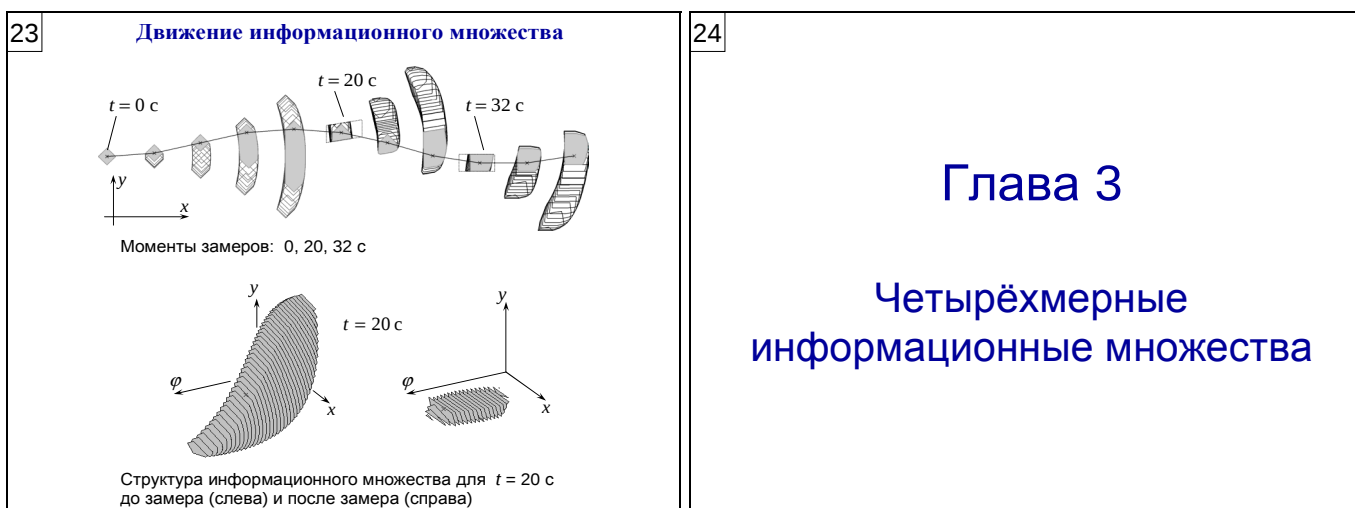
(Слайд 19) Конечно, сразу возникает вопрос: А на сколько точно выполняются построения за счёт используемой аппроксимации сверху? На данном слайде показано сравнение между точными множествами прогноза и их аппроксимациями сверху в проекции на плоскость x, y . Начальное состояние – точка в трёхмерном фазовом пространстве. Точное множество достижимости, посчитанное по формулам из работы Ю.И.Бердышева, показано тёмной заливкой и обведено чёрной линией. Аппроксимация сверху показана светлой заливкой, которая видна лишь во внутренней части множества прогноза. Надо отметить, что во внешней части отличий нет, а с внутренней стороны нельзя сказать, что погрешность очень большая, особенно если речь идёт о небольших моментах времени.

(Слайд 20) На данном слайде показано такое же сравнение для трёхмерного варианта. Есть отличие лишь в той части, где нет выпуклости.



(Слайд 21) Для бóльших моментов времени получается аналогичная картина. Отличие точного и аппроксимирующего множеств имеется лишь в тыльной части.

(Слайд 22) На этом слайде показано, как численно выполняется операция по учёту множества неопределённости замера в некоторый момент времени. В левой части слайда синим цветом показано множество прогноза и зелёным цветом – множество неопределённости. Область пересечения и результат пересечения показаны более крупным планом в правой части слайда.



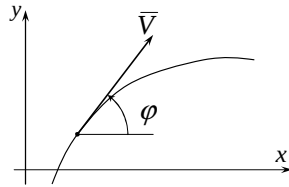
(Слайд 23) Для нескольких моментов по времени в проекции на плоскость x, y движение информационного множества показано в верхней части слайда. Это результаты численного моделирования. Видно, что в целом информационные множества не являются выпуклыми, но состоят из выпуклых сечений. В момент прихода замера происходит высечка, дальше информационное множество снова растёт до следующего замера, и т.д. В нижней части слайда показано послойное изображение информационного множества до и после учёта замера на момент $t=20$ с.

(Слайд 24) Третья глава посвящена построению четырёхмерных информационных множеств для модели движения с переменной скоростью.

25

Динамика движения

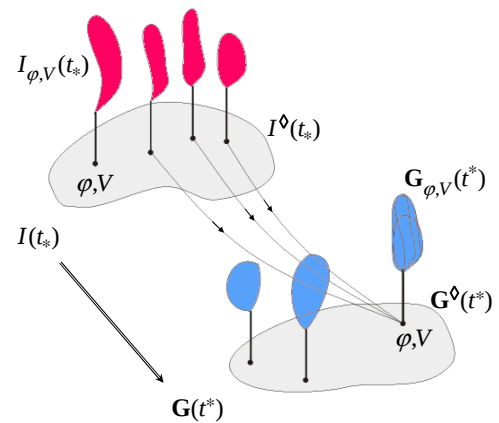
$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V, \\ \dot{V} &= w\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}|u| &\leq 1, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2, \quad \mu_1 < 0, \quad \mu_2 > 0, \\ k &= \text{const} > 0, \quad V \geq \text{const} > 0\end{aligned}$$

26

Процедура прогноза

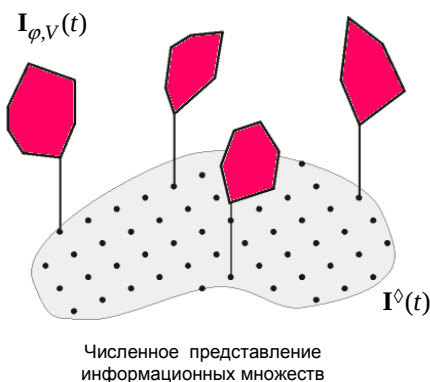


(Слайд 25) В описании динамики движения добавилось четвёртое уравнение. Считается, что продольное ускорение ограничено параметрами μ_1, μ_2 . При этом отмеченная ранее специфика динамики сохранилась. Первое – третье и четвёртое уравнения можно интегрировать независимо от первых двух. И второе – фазовые переменные x, y отсутствуют в правой части уравнений системы. Это позволяет разработать аналогичный алгоритм построения оценки сверху информационных множеств, имеющий дело с выпуклыми (φ, V) -сечениями.

(Слайд 26) На данном слайде поясняется алгоритм пересчёта информационного множества на шаге по времени. При численной реализации информационное множество представляется в виде набора узлов на плоскости φ, V и соответствующих выпуклых многоугольников на плоскости x, y . При пересчёте таких множеств узлы на плоскости φ, V переносятся в силу допустимых управлений на новый момент времени. Здесь близкие узлы группируются, а соответствующие перенесённые множества на плоскости x, y объединяются с овыпуклением, как показано в правой нижней части слайда.

27

Сетка и многоугольники



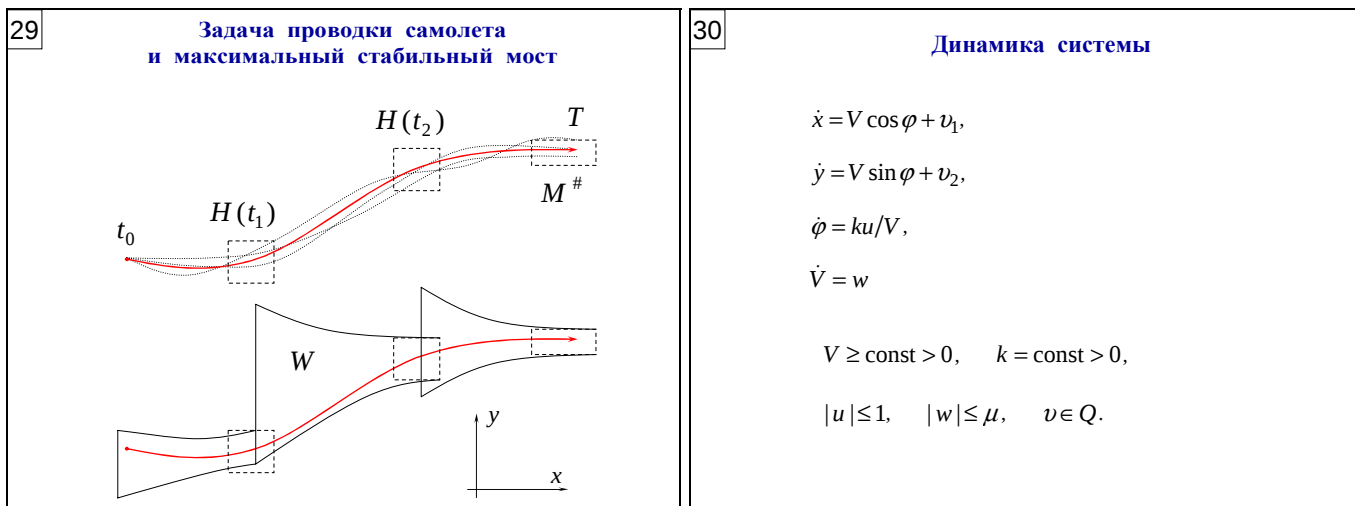
28

Глава 4

Построение множества разрешимости в задаче проводки самолёта при ветровом возмущении

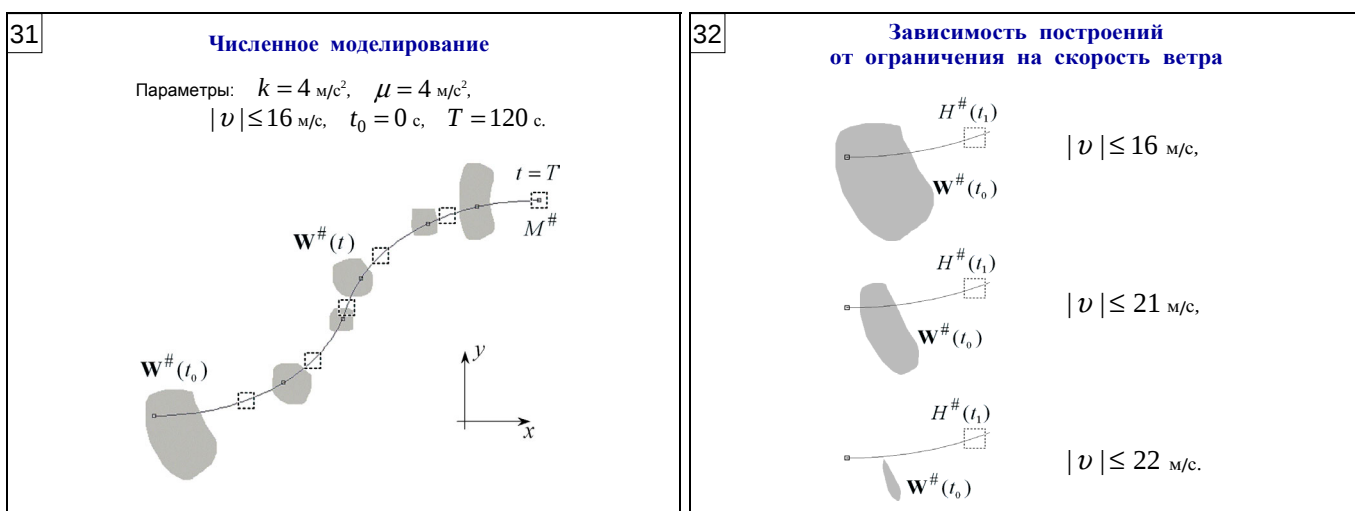
(Слайд 27) Используется сетка (показана серым цветом) на плоскости φ, V и выпуклые многоугольники (показаны красным цветом) на плоскости геометрических координат.

(Слайд 28) Я уже говорил, что попятные процедуры в дифференциальных играх во многом схожи с процедурами рекуррентного пересчёта информационных множеств. И вот как раз в четвёртой главе рассматривается игровая задача проводки самолёта при ветровом возмущении.



(Слайд 29) Движущемуся объекту необходимо пройти через фазовые ограничения и в фиксированный момент времени T попасть на терминальное множество $M^\#$, как показано в верхней части слайда. Здесь используется конструкция типа стабильный мост, показанная в нижней части слайда. Построения ведутся в обратном времени, и мы получаем оценку сверху множества разрешимости на начальный момент времени t_0 . Множество разрешимости – это совокупность фазовых состояний, из которых возможен перевод на терминальное множество в фиксированный момент времени T при любой помехе. Используется алгоритм, подобный алгоритму построения информационных множеств в третьей главе.

(Слайд 30) Отличие в описании динамики для рассматриваемой задачи заключается в том, что в правую часть системы входит неизвестная помеха, трактуемая как ветровое ограничение. Помеха ограничена множеством Q .

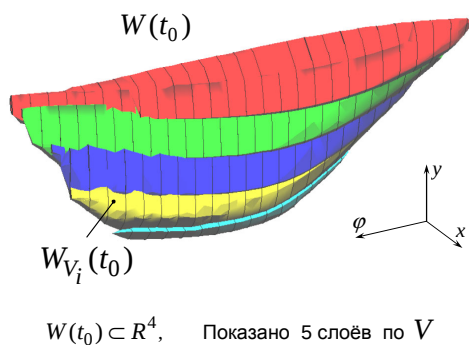


(Слайд 31) На следующем слайде представлены результаты численного моделирования в проекции на плоскость x, y . Здесь пунктирные квадратики – это фазовые ограничения. Крайний правый квадратик – это терминальное множество. Серые множества – это оценка сверху множеств разрешимости для некоторых моментов времени, в том числе и для начального (слева).

(Слайд 32) Было проведено численное исследование влияния уровня ветрового ограничения на размеры «серых» множеств. На данном слайде приведены результаты на начальный момент времени для трёх ограничений на величину $|v|$. Видно, что при увеличении ограничения размер множеств уменьшается. И есть момент, когда наступает вырождение, что говорит о невозможности гарантированного перевода при таком уровне ветрового возмущения.

33

Сечение моста в начальный момент



34

Приложение

Апостериорное построение информационных множеств и эталонной траектории

(Слайд 33) Перед этим были показаны картинки в проекции на плоскость x, y , но на самом деле построения ведутся в четырёхмерном фазовом пространстве. И это показано на данном слайде. Здесь несколько слоёв по V выделено разными цветами. В целом это оценка сверху множества разрешимости для начального момента времени t_0 .

(Слайд 34) И, наконец, приложение. Здесь рассматриваются достаточно большие интервалы времени поступления замеров.

35

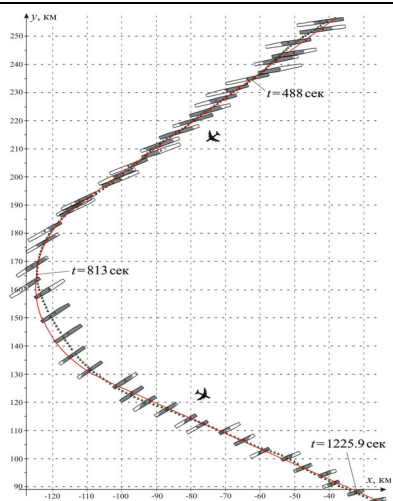
Фрагмент движения для модельного варианта

Красная линия показывает модельную траекторию.

Квадратики – отметки замеров. «Прямоугольники» – множества неопределённости замеров.

Серая заливка – проекции информационных множеств на плоскость геометрических координат.

Зелёные треугольники – отметки «эталонной» траектории, проведённой в трубке информационных множеств.



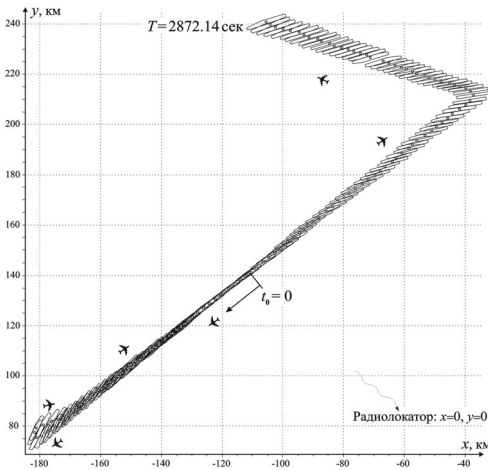
36

Исходные данные для построения информационных множеств

Время движения:
 $T = 2872.14$ сек

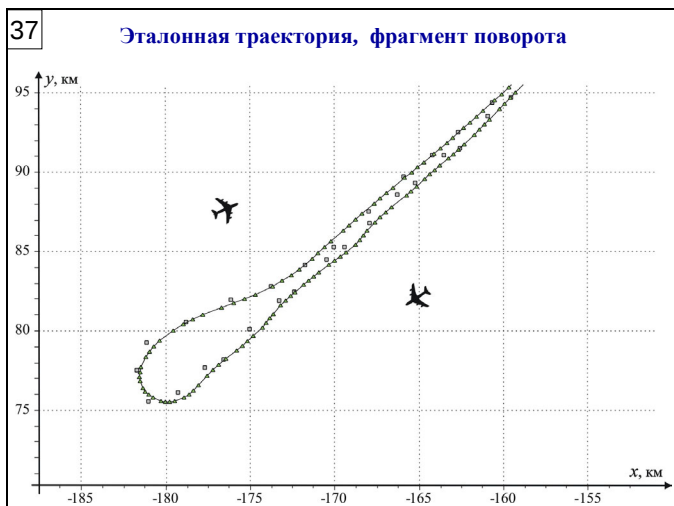
Квадратики – отметки замеров.

«Прямоугольники» – множества неопределённости замеров.



(Слайд 35) На данном слайде показан фрагмент модельного движения. Красная линия – это модельная траектория, относительно которой случайным образом подкидывались радиолокационные замеры. Модельная траектория и замеры были сформированы сотрудником отдела динамических систем Кумковым Сергеем Ивановичем. Вообще этот материал приведён для того, чтобы показать, как здесь выглядят информационные множества, они выделены серым цветом. А вообще цель построений заключалась в получении некоей «эталонной» траектории, проходящей через трубку информационных множеств. Здесь такая «эталонная» траектория показана зелёными треугольниками.

(Слайд 36) Рассмотрен ещё один пример, базирующийся на данных реальных наблюдений. Это замеры, поступившие с реального радиолокатора. Движение идёт из центра влево вниз, затем поворот, движение в обратную сторону и вверх ещё один поворот. Здесь также была построена трубка информационных множеств, и далее через неё проведена «эталонная» траектория.



38

Основные результаты

Доказана теорема о числе и характере переключений управления, ведущего на границу множества достижимости нелинейной системы третьего порядка, описывающей движение самолёта в горизонтальной плоскости.

Исследована структура границы множества достижимости рассматриваемой нелинейной системы третьего порядка.

Предложен способ аппроксимации сверху информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости. Реализованы алгоритмы для трёхмерного и четырёхмерного случаев.

Предложен алгоритм построения оценки сверху множества разрешимости в игровой задаче проводки самолёта через заданные области.

(Слайд 37) На данном слайде показан фрагмент «эталонной» траектории – зелёные треугольники, соединённые сплошной линией.

(Слайд 38) Основные результаты. В работе доказана теорема о числе и характере переключения управлений, ведущих на границу множества достижимости. Исследована структура такого множества достижимости. Предложен способ аппроксимации сверху информационных множеств, реализован алгоритм для трёхмерного и четырёхмерного случаев. Предложен алгоритм построения сверху множества разрешимости в игровой задаче проводки самолёта.

Благодарю за внимание!