

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ГАНЕБНЫЙ СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
В ЗАДАЧАХ С НЕИЗВЕСТНЫМ УРОВНЕМ
ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОМЕХИ**

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
В.С. Пацко

Екатеринбург — 2008

Оглавление

Введение	4
Список обозначений	9
1 Метод адаптивного управления	11
1.1 Постановка задачи	11
1.2 Основная идея метода	15
1.3 Алгебраические операции над стабильными мостами	17
1.4 Построение семейства $\{W_k\}$	20
1.5 Управление в скалярном случае с ограничением по модулю	21
1.6 Управление в векторном случае с независимыми покомпонентными ограничениями	24
1.7 Управление в случае произвольного ограничения	25
1.8 Случай двумерной эквивалентной игры	28
1.9 Разработанный комплекс программ	30
1.10 Пример	32
2 Доказательства теорем о гарантии	38
2.1 Теорема о гарантии в случае скалярного управления при помощи поверхности переключения	38
2.2 Теорема о гарантии для случая экстремального прицеливания	49
3 Две задачи об управлении самолетом в условиях ветрового возмущения	56
3.1 Модель динамики самолета	57
3.1.1 Дифференциальная система	57
3.1.2 Номинальное движение и линеаризация	62

3.1.3	Модель микровзрыва ветра	70
3.2	Задача о посадке самолета	71
3.2.1	Постановка задачи	71
3.2.2	Влияние нелинейностей и предположения об измерении скорости ветра	77
3.2.3	Результаты моделирования при микровзрыве ветра .	80
3.2.4	Результаты моделирования при постоянном ветре . .	85
3.3	Задача о преодолении препятствия по высоте	89
3.3.1	Постановка задачи	89
3.3.2	Влияние расчета прогнозируемого времени и нелинейности на результаты моделирования	94
3.3.3	Моделирование с постоянным ветром	95
3.3.4	Моделирование при микровзрыве ветра	102
	Приложение: дополнительные графики	105
	Литература	115

Введение

Диссертация посвящена разработке способа адаптивного управления для систем с неизвестным уровнем динамической помехи.

С содержательной точки зрения термин “адаптивное управление” означает, что система функционирует в условиях, когда свои собственные параметры или некоторые параметры, связанные с помехой, известны неточно и система “адаптируется”, “подстраивается” под эти неизвестные параметры, имея перед собой ту или иную основную цель управления. Круг подобных задач является очень широким. Конкретные исследования базируются, как правило, на некоторой более узкой математической теории. Например, широко используются результаты теории устойчивости и теории стабилизации.

Данная работа опирается на теорию антагонистических дифференциальных игр.

1. Теория антагонистических дифференциальных игр интенсивно развивается с начала 60-х годов прошлого века. Решающий вклад в ее становление внесли Н.Н. Красовский, Л.С. Понтрягин, А.И. Субботин, R. Isaacs, M.G. Crandall, P.L. Lions, А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, Б.Н. Пшеничный, А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько, L. Berkovitz, P. Bernhard, A. Blaquiere, J.V. Breakwell, W.H. Fleming, G. Leitmann.

Существенные теоретические результаты, в том числе в направлении разработки численных методов, получены в работах Э.Г. Альбрехта, В.Д. Батухтина, С.А. Брыкалова, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятникова, М.И. Зеликина, А.Ф. Клейменова, А.В. Кряжмского, Н.Ю. Лукьянова, А.А. Меликяна, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольского, В.В. Остапенко, А.Г. Пашкова, Н.Н. Петрова, Е.С. Половинкина, Н.Н. Субботиной, А.М. Тарасьева, В.Е. Третьякова, В.И. Ухоботова, В.Н. Ушакова, А.А. Чикрия, M. Bardi, T. Basar, A.E. Bryson, I. Capuzzo-Dolcetta, P.M. Cardaliaguet, R.J. Elliot, M. Falcone, Y.C. Ho, J. Lewin, A.W. Merz, G.J. Olsder, M. Quincampoix, E. Roxin, P. Saint-Pierre, J. Shinar, P. Soravia.

Основные принципиальные результаты опубликованы в работах [1, 2, 34, 35, 43, 44, 46, 48–50, 55, 58, 65, 70, 73]. Численным методам для нелинейных дифференциальных игр с геометрическими ограничениями на управления игроков посвящены работы [21, 39, 51, 53, 55–57, 59, 65, 84], для игр с линейной динамикой — работы [2, 5, 6, 9, 20, 37, 38, 42, 45, 63, 72].

2. Стандартной в теории антагонистических дифференциальных игр является задача с фиксированным моментом окончания, в которой цель первого игрока — приведение фазового вектора системы в момент окончания на некоторое терминальное множество, цель второго игрока противоположна. Множество разрешимости задачи (максимальный стабильный мост) обладает свойством: если движение начинается внутри этого множества, то первый игрок при правильном поведении гарантированно достигает цели игры, если же движение начинается вне этого множества, то второй игрок имеет возможность не допустить попадания движения на терминальное множество (теорема об альтернативе [35, 70]). Для игр с линейной динамикой, фиксированным моментом окончания и выпуклым терминальным множеством t -сечения максимальных стабильных мостов являются выпуклыми. Свойство выпуклости упрощает вычислительные алгоритмы [18, 23, 27, 40, 61, 79]. Линейность динамики и фиксация момента окончания позволяют переходить к эквивалентной дифференциальной игре, размерность фазового вектора которой совпадает с числом координат, в которых задается терминальное множество (по несущественным координатам терминальное множество цилиндрично). Особенно эффективными являются алгоритмы для случая, когда подпространство координат, определяющих терминальное множество, имеет малую размерность. Для двумерного случая такие алгоритмы описаны в [8, 20, 30, 71, 72], для трехмерного — в [22, 24, 25, 29, 52].

Подчеркнем, что стандартные постановки предполагают задание геометрических ограничений на управляющие воздействия как первого, так и второго игроков. Отметим также, что позиционное управление первого игрока, осуществляющего наведение, использует максимум своих возможностей — управляющие воздействия берутся с границы множества, задающего геометрическое ограничение.

3. Естественной сферой применения математических методов теории управления и методов антагонистических дифференциальных игр являются задачи об управлении самолетом в условиях ветровых возмущений. Большое влияние на развитие современных исследований в этой области оказали работы А. Miele [75–77]. В нашей стране методы теории диффе-

ренциальных игр впервые были применены к задачам об управлении самолетом при наличии ветровых возмущений В.М. Кейном [31, 32]. Задача об управлении на посадке рассматривалась в работах [4, 7, 10–13, 15–17, 19, 28, 33, 62, 78]. Задачи о взлете и о прекращении посадки исследовались в [14, 54, 64, 66, 74, 82].

В задачах об управлении самолетом (как и во многих других практических постановках) первый игрок трактуется как некое полезное управление, а второй игрок — как природная или информационная помеха. При использовании стандартного подхода возникает ряд вопросов. Во-первых, если ограничение на полезное управление, как правило, определяется вполне естественно (техническое ограничение на действие неких органов управления), то ограничение на природную помеху бывает сложно строго обосновать. Разработанные в рамках теории дифференциальных игр методы построения управления требуют задания обоих ограничений, и получаемое решение зависит от выбранных ограничений. Во-вторых, встает вопрос о целесообразности управления, всегда использующего максимум своих возможностей, так как природная и информационная помехи не являются антагонистами первому игроку. Они могут действовать оптимальным образом — в этом случае использование максимального управления оправдано, но в большинстве случаев их действие оптимальным не является, оно может быть достаточно слабым — в этом случае использование максимального допустимого управления явно является излишним.

4. В диссертации предложен метод управления, который, сохраняя идеологию гарантированных результатов, справляется с перечисленными проблемами. Считаем, что по постановке задачи задано терминальное множество и оговорено ограничение на полезное управление. Какое-либо ограничение на действие помехи по постановке задачи не предполагается. Вместо этого, в рамках предложенного метода, выбирается множество, имеющее смысл ожидаемого “разумного” ограничения на помеху. Предлагаемый метод с содержательной точки зрения обеспечивает следующее: 1) если уровень помехи не превосходит заданный ожидаемый уровень, то существует гарантия выполнения цели игры — приведения движения на терминальное множество; 2) при этом, если действует помеха малого уровня, то достижение цели игры происходит с использованием малого уровня полезного управления; 3) если помеха оказывается большей ожидаемого уровня, то гарантии выполнения цели игры нет, но существуют оценки терминального промаха.

Таким образом, формируемое управление подстраивается под динами-

ческую помеху неизвестного уровня. Поэтому называем его *адаптивным*. Возможно также употребление термина *робастное* управление [68].

Построение линейного робастного управления для H^∞ -задач на базе теории дифференциальных игр с линейно-квадратичным функционалом платы рассмотрено в [60]. Исследованы линейные робастные регуляторы в задачах L^1 -оптимизации [3, 47, 67]. Близкое к описанному понятие робастности использовано в [83].

Предлагаемый метод формирования адаптивного управления основан на построении семейства вложенных друг в друга стабильных мостов, каждый следующий из которых соответствует большему уровню помехи. Мосты строятся в рамках эквивалентной линейной дифференциальной игры, размерность фазового вектора которой совпадает с размерностью терминального множества. Специальные правила пропорциональности, доказанные в работе для линейных игр, позволяют построить все семейство мостов, вычислив лишь один “главный” максимальный стабильный мост и один дополнительный. Это является большим достоинством для численной реализации данного метода, так как численное построение мостов является ресурсоемкой операцией.

Рассмотрены три варианта построения управления обратной связи на основе полученного семейства мостов. Первый способ использует поверхность переключения и применим для случая скалярного полезного управления, ограниченного по модулю. Второй способ является эмпирическим расширением первого и предназначен для случая векторного управления с независимыми покомпонентными ограничениями. Третий способ опирается на метод экстремального прицеливания и может быть использован при произвольном ограничении на полезное управление.

Отметим, что общая идея метода — построение семейства вложенных мостов, соответствующих возрастающей помехе, — применима и для задач с нелинейной динамикой. Однако в этом случае не действуют правила пропорциональности, специфические для линейных задач, поэтому построение искомого семейства может быть весьма трудным.

5. Перейдем к изложению содержания диссертации по главам.

В первой главе дается постановка задачи, подробно описывается построение семейства мостов на основе свойств сохранения стабильности при алгебраических операциях над мостами, излагаются три способа конструирования управления на базе полученного семейства: для скалярного управления первого игрока с ограничением по модулю, в случае векторного

управления с независимыми покомпонентными ограничениями, при произвольном ограничении. Для первого и третьего способов сформулированы теоремы о гарантии. Описан разработанный комплекс программ для случая двумерной эквивалентной игры. В конце главы применение метода адаптивного управления продемонстрировано на модельной задаче конфликтно-управляемого маятника.

Во второй главе приведены доказательства двух теорем о гарантии, сформулированных в первой главе.

Третья глава посвящена результатам моделирования предложенного метода в задаче о посадке самолета и в задаче о преодолении самолетом препятствия по высоте. Приведены результаты моделирования для случаев постоянного ветрового возмущения и помехи, взятой из модели микро-взрыва ветра. Исследование задачи о посадке примыкает к работам, выполненным в 80-е годы в Институте математики и механики УрО РАН и Ленинградской академии гражданской авиации. Постановка задачи о преодолении препятствия предложена А.И. Красовым (фирма “Новые информационные технологии в авиации”, Санкт-Петербург).

6. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Разработка метода адаптивного управления, применимого для задач, в которых задано геометрическое ограничение на полезное управление, а какое-либо ограничение на динамическую неантагонистическую помеху неизвестно. Формулировка и доказательство теорем о гарантии для данного метода.

2) Создание комплекса программ численного построения трех вариантов адаптивного управления для случая двумерного терминального множества. Дополнительно комплекс позволяет вычислять максимальные стабильные мосты, множества достижимости и проводить моделирование движений под действием различных управлений и помех.

3) Применение разработанного комплекса к исследованию задачи о посадке самолета и задачи о преодолении препятствия по высоте при наличии ветрового возмущения.

Список обозначений

В диссертации есть некоторое перекрытие обозначений, поскольку в первой и второй главах используются обозначения стандартные для теории дифференциальных игр, а в третьей — стандартные в инженерной практике для самолетных задач.

Список обозначений для первой и второй глав:

\mathbf{x} — фазовый вектор исходной системы;

x — фазовый вектор эквивалентной системы;

t — время;

T — интервал времени игры;

ϑ — момент окончания игры;

u, v — управления первого и второго игроков (полезное управление и помеха);

P — ограничение на полезное управление;

Q_{\max} — “разумное” ограничение на ожидаемый уровень помехи;

M — терминальное (целевое) множество;

$W_{\text{main}}, W_{\text{add}}$ — главный и дополнительный мосты в процедуре построения адаптивного управления;

$\{W_k\}$ — семейство стабильных мостов при построении адаптивного управления;

$\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k, \mathcal{M}_k$ — параметры мостов семейства $\{W_k\}$;

V — функция с множествами уровня W_k .

Список обозначений для третьей главы:

x_g, y_g, z_g — продольная, вертикальная и боковая координаты самолета;

V_{xg}, V_{yg}, V_{zg} — соответствующие скорости;

ϑ, ψ, γ — углы тангажа, рыскания и крена;

α, β — углы атаки и скольжения;

$P, \delta_e, \delta_r, \delta_a$ — сила тяги; отклонения руля высоты, руля направления, элеронов;

$\delta_{ps}, \delta_{es}, \delta_{rs}, \delta_{as}$ — соответствующие командные положения — переменные полезного управления;

W_{xg}, W_{yg}, W_{zg} — компоненты скорости ветра — переменные возмущения;

u_δ — управление по углу тангажа в задаче о преодолении самолетом препятствия по высоте;

$u_{\delta p}$ — командное управление по тяге в задаче о преодолении препятствия;

t — текущее время;

τ — обратное время;

$\tilde{\tau}$ — оценка времени до момента окончания;

VM — вертикальный (продольный) канал;

LM — боковой канал;

x^{VM}, x^{LM} — фазовые векторы вертикальной и боковой линеаризованных систем;

ξ^{VM}, ξ^{LM} — фазовые векторы эквивалентных систем для вертикального и бокового каналов.

Глава 1

Метод адаптивного управления

Описывается постановка задачи с неизвестным уровнем динамической помехи. Предлагаемый метод адаптивного управления базируется на построении семейства вложенных стабильных мостов. Рассмотрены три варианта конструирования управления обратной связи, использующих данное семейство. Сформулированы теоремы о гарантии. Приведен раздел, посвященный разработанному комплексу программ. Глава заканчивается результатами моделирования, иллюстрирующими применение метода адаптивного управления к модельной задаче конфликтно-управляемого маятника.

1.1 Постановка задачи

Исходная игра. Рассмотрим линейную дифференциальную игру с фиксированным моментом окончания:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)u + \mathbf{C}(t)v \\ \mathbf{x} &\in R^m, \quad t \in T = [\vartheta_0, \vartheta], \quad M \subset R^n, \\ u &\in P \subset R^p, \quad v \in R^q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь \mathbf{x} — m -мерный фазовый вектор системы; ϑ — момент окончания игры; T — промежуток времени игры; M — терминальное (целевое) множество, представляющее собой выпуклый компакт в n -мерном пространстве; u и v — управления первого и второго игроков, трактуемые как полезное управление и помеха. Управление первого игрока ограничено выпуклым

компактом P , ограничение на управление второго игрока считается неизвестным. Матричнозначные функции \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} непрерывны. Считаем, что множество M содержит некоторую окрестность нуля своего пространства, множество P содержит нуль своего пространства.

Цель первого игрока — приведение выделенных $n \leq t$ компонент вектора \mathbf{x} на терминальное множество M в момент окончания ϑ , значения остальных компонент являются несущественными.

Если к игре (1.1) добавить ограничение $v \in Q$, то получится стандартная игра сближения-уклонения [35].

Требуется построить управление обратной связи первого игрока, называемое адаптивным, которое на содержательном уровне можно определить следующим образом.

Определение 1. *Адаптивным (робастным) управлением* будем называть управление обратной связи, не выходящее за ограничение P и удовлетворяющее условиям:

1. Если реализация помехи не превосходит некоторого *критического уровня*, а начальная позиция принадлежит некоторому оговоренному множеству, то управление должно гарантировать выполнение цели игры — приведение на терминальное множество.
2. При этом, чем меньше *уровень помехи* и чем ближе к нулю начальное положение, тем меньше должен быть *уровень управления*, гарантирующего приведение на терминальное множество.
3. Если же реализация помехи больше критического уровня, либо начальная точка находится далеко от нуля, то допускается отклонение от терминального множества — терминальный промах. В этом случае управление минимизирует промах.

Отметим, что если мы возьмем начальное положение $\mathbf{x}_0 = 0$ и зафиксируем управления игроков, равные нулю, то движение в силу линейности системы останется в нуле. Поскольку терминальное множество содержит некоторую окрестность нуля, такое движение реализует цель первого игрока. Теперь допустим небольшое отклонение начального положения от нуля и присутствие некоторой небольшой помехи. Мы хотим построить управление, которое, используя в этом случае лишь малую часть своих возможностей, гарантированно сохранит движение около нуля и приведет его на некоторую внутреннюю область терминального множества. С увеличением

начального отклонения и уровня помехи (вплоть до некоторого критического уровня) естественно увеличивается и уровень управления (вплоть до максимального ограничения P), требуемый для приведения на терминальное множество M . Допускается и дальнейшее увеличение уровня помехи, в этом случае желательно оценить множество терминального промаха.

Замечание 1. В рассматриваемой задаче мы не вводим какой-либо минимизируемый функционал. Вместо этого на содержательном уровне задаем условия, соответствующие естественным техническим требованиям — гарантированное выполнение цели игры и малое управление при малых помехах, — и постараемся предложить по возможности простой для численной реализации метод, удовлетворяющий этим условиям.

Эквивалентная игра. При помощи стандартного преобразования [35, с. 160] перейдем к системе, в правой части которой нет фазовой переменной:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, \\ x &\in R^n, \quad t \in T, \quad M \subset R^n, \quad u \in P, \quad v \in R^q. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Это преобразование позволяет также понизить размерность задачи до n — размерности подпространства терминального множества M .

Переход осуществляется при помощи равенств

$$x(t) = \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}(t), \quad B(t) = \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{B}(t), \quad C(t) = \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{C}(t),$$

где $\Phi_{n,m}(\vartheta, t)$ — n строк фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, соответствующие подпространству координат, в которых задано множество M .

В новой задаче первый игрок, как и прежде, пытается привести движение системы на терминальное множество M в момент окончания ϑ .

Формула $x = \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}$ дает значения n выделенных компонент фазового вектора системы (1.1) в момент ϑ при “свободном” движении этой системы (т.е. при нулевых управляющих воздействиях u, v) из положения \mathbf{x} в момент $t \leq \vartheta$. В теории антагонистических дифференциальных игр с геометрическими ограничениями на управления игроков игру с динамикой (1.2) называют эквивалентной по отношению к игре с динамикой (1.1). Это связано с тем, что оптимальная гарантия в позиции (t, \mathbf{x}) для игры (1.1) совпадает с оптимальной гарантией в игре (1.2) в позиции $(t, \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x})$. Более того, если для игры (1.2) построено управление $U(t, x)$, гарантирующее некоторый результат, то управление

$$\tilde{U}(t, \mathbf{x}) = U(t, \Phi_{n,m}(\vartheta, t)\mathbf{x}) \quad (1.3)$$

будет обеспечивать тот же результат в игре (1.1).

Мы также будем называть игру (1.2) эквивалентной. Все дальнейшие рассуждения будем проводить для игры (1.2). Полученное в результате управление при помощи (1.3) переносится на исходную игру (1.1).

Стабильные мосты. В последующем изложении нам понадобятся понятия стабильного и максимального стабильного мостов. Рассмотрим стандартную игру сближения-уклонения [35, 70]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= B(t)u + C(t)v, \\ x &\in R^n, \quad t \in T, \quad \mathcal{M} \subset R^n, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь дифференциальная система и промежуток времени взяты из игры (1.2). Терминальное множество \mathcal{M} и ограничения на управления игроков $\mathcal{P} \subset R^p$, $\mathcal{Q} \subset R^q$ — произвольные выпуклые компакты, которые будем рассматривать как параметры игры.

Ниже $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ будут обозначать измеримые функции времени со значениями в множествах \mathcal{P} и \mathcal{Q} , соответственно. Пусть $x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ — движение системы (1.4) (а следовательно, и системы (1.2)), выходящее в момент t_* из точки x_* под действием управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. Символом $E(t) = \{x \in R^n : (t, x) \in E\}$ обозначим сечение множества $E \subset T \times R^n$ в момент $t \in T$.

Следуя известному подходу [35, 70], дадим определения стабильного и максимального стабильного мостов.

Определение 2. Множество $W \subset T \times R^n$ называется *стабильным мостом* (u -стабильным мостом в терминологии [35]) для системы (1.4) с некоторыми фиксированными параметрами \mathcal{P} , \mathcal{Q} и \mathcal{M} , если $W(\vartheta) \subset \mathcal{M}$ и выполнено следующее свойство *стабильности*: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, любого $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и любого управления $v(\cdot)$, определенного на промежутке $[t_*, t^*]$, можно подобрать управление $u(\cdot)$ так, что пара $(t, x(t)) = (t, x(t; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))$ остается в множестве W в любой момент $t \in [t_*, t^*]$.

Определение 3. Максимальное по включению множество $W \subset T \times R^n$, $W(\vartheta) = \mathcal{M}$, обладающее свойством стабильности, называется *максимальным стабильным мостом*.

Согласно [35, 70], максимальный стабильный мост всегда существует и является замкнутым множеством. Его t -сечения выпуклы в силу линей-

ности системы (1.4) и выпуклости множества \mathcal{M} . Теорема об альтернативе [35, 70] утверждает: 1) если начальная позиция (t_0, x_0) принадлежит максимальному стабильному мосту, то при правильных действиях первого игрока движение придет на терминальное множество, что бы ни делал второй игрок; 2) если же начальная позиция не принадлежит мосту, то второй игрок гарантирует уклонение от терминального множества вне зависимости от действий первого игрока.

Процедуры численного построения максимальных стабильных мостов для случая $n = 2$ описаны в [20, 30, 71, 72], для случая $n = 3$ — в [22, 24, 25, 29, 52].

1.2 Основная идея метода

Рассмотрим семейство множеств $\{W_k\}$, $k \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K} \subset R_+$ — множество индексов), удовлетворяющее следующим свойствам:

1. Каждое множество W_k является стабильным мостом игры (1.4) с параметрами $(\mathcal{P}_k, \mathcal{Q}_k, \mathcal{M}_k)$.
2. Каждое следующее множество охватывает предыдущее: $W_{k_1} \subset W_{k_2}$ для любых $k_1 < k_2$. Объединение множеств W_k заполняет все пространство игры $T \times R^n$.
3. Для некоторого индекса k_{main} имеем

$$\mathcal{P}_{\text{main}} = P, \quad \mathcal{Q}_{\text{main}} = Q_{\text{max}}, \quad \mathcal{M}_{\text{main}} = M,$$

где P и M заданы по постановке задачи (1.2), а Q_{max} — выбираемое нами ограничение на помеху, которое выполняет роль критического уровня. Мост $W_{\text{main}} = W_{k_{\text{main}}}$ назовем главным.

4. Мосты, лежащие внутри главного, назовем внутренними. При любых $0 < k_1 < k_2 < k_{\text{main}}$ для них выполнены вложения

$$\begin{aligned} \{0\} \subset \mathcal{P}_{k_1} \subset \mathcal{P}_{k_2} \subset P, \quad \{0\} \subset \mathcal{Q}_{k_1} \subset \mathcal{Q}_{k_2} \subset Q_{\text{max}}, \\ \{0\} \subset \mathcal{M}_{k_1} \subset \mathcal{M}_{k_2} \subset M. \end{aligned}$$

5. Мосты, охватывающие главный, назовем внешними. Для них при $k_{\text{main}} < k_1 < k_2$ выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_{k_1} = \mathcal{P}_{k_2} = P, \quad Q_{\text{max}} \subset \mathcal{Q}_{k_1} \subset \mathcal{Q}_{k_2}, \quad M \subset \mathcal{M}_{k_1} \subset \mathcal{M}_{k_2}.$$

Таким образом, получаем семейство вложенных друг в друга стабильных мостов, соответствующих набору возрастающих параметров. Идея построения управления следующая. Пусть текущая позиция (t_*, x_*) находится вблизи границы некоторого моста W_{k_*} , который соответствует параметрам $(\mathcal{P}_{k_*}, \mathcal{Q}_{k_*}, M_{k_*})$. Будем каким-либо образом использовать этот мост для построения управления на малом промежутке времени. При этом управление будет ограничено соответствующим множеством \mathcal{P}_{k_*} , а рассчитывать будем на помеху уровня не более, чем \mathcal{Q}_{k_*} . Если реализация помехи действительно будет соответствовать уровню \mathcal{Q}_{k_*} и она будет вести себя “разумно”, то движение останется вблизи границы выбранного моста. Если же помеха слабее или не ведет себя оптимально, то движение уйдет внутрь. В случае, когда реализация помехи больше ограничения \mathcal{Q}_{k_*} , она, при правильном действии, имеет возможность увести движение от выбранного моста. Таким образом, в зависимости от действий помехи, на следующем шаге можем получить либо тот же мост, либо вложенный мост с меньшим индексом, либо охватывающий мост с большим индексом. Соответственно изменятся выбранный мост W_{k^*} , оценка ограничения на действующую помеху \mathcal{Q}_{k^*} , ограничение на используемое управление \mathcal{P}_{k^*} .

Следовательно, метод управления по текущей позиции оценивает уровень действующей помехи. Различные варианты развития движения проиллюстрированы на рис. 1.1.

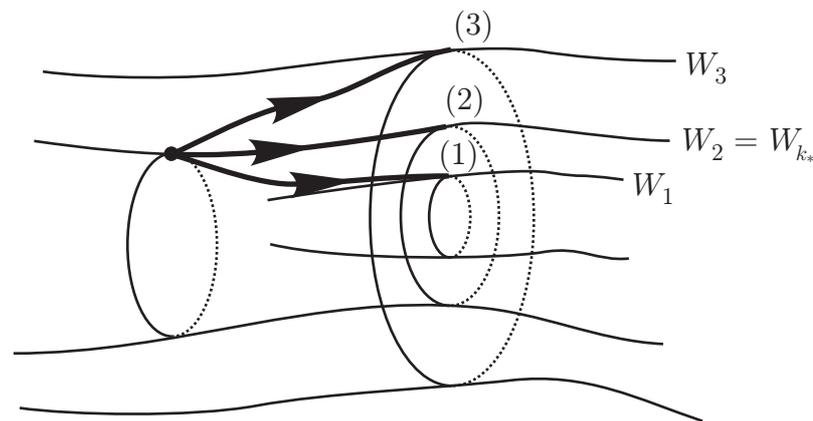


Рис. 1.1: Движение при адаптивном управлении: (1) если помеха слабее ожидаемой, (2) если помеха соответствует ожидаемой и действует близким к оптимальному способом, (3) если помеха сильнее ожидаемой.

Множество \mathcal{Q}_{\max} играет роль критического уровня помехи, при котором максимально допустимое управление, ограниченное множеством P , будет гарантировать приведение на заданное по постановке задачи множество M . Начальная позиция при этом может быть где угодно внутри главного мо-

ста W_{main} .

Очевидно, управление на основе семейства $\{W_k\}$ удовлетворяет содержательным требованиям к адаптивному управлению согласно определению 1. В следующих разделах будет описан эффективный метод построения семейства $\{W_k\}$ и даны три способа выбора управления при помощи этого семейства.

1.3 Алгебраические операции над стабильными мостами

Для метода построения семейства $\{W_k\}$, который будет описан в следующем разделе, нам понадобятся свойства сохранения стабильности при операциях сложения и умножения на скаляр. Доказательства этих свойств опираются только на определения стабильных и максимальных стабильных мостов.

Для множеств в пространстве $T \times R^n$ введем операции сложения и умножения на скаляр:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \{(t, x) \in T \times R^n : x \in E_1(t) + E_2(t)\}, \\ kE &= \{(t, x) \in T \times R^n : x \in kE(t)\}. \end{aligned}$$

Верны следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть W — стабильный мост игры (1.4) с некоторыми параметрами $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$, k — произвольное число. Тогда множество kW является стабильным мостом игры (1.4) с параметрами $(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$.

Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно. Ниже полагаем $k \neq 0$.

Зафиксируем произвольную позицию $(t_*, x_*) \in kW$ и момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Пусть второй игрок выбирает некоторое управление $v(t) \in k\mathcal{Q}$ на интервале $[t_*, t^*]$. Покажем, как можно выбрать управление $u(t) \in k\mathcal{P}$, $t \in [t_*, t^*]$, первого игрока, чтобы включение $(t^*, x(t^*)) \in kW$ выполнялось на движении $x(\cdot) = x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Обозначим $z_* = 1/k \cdot x_*$, $\bar{v}(t) = 1/k \cdot v(t)$. Имеем $(t_*, z_*) \in W$. Поскольку W является стабильным мостом, то каким бы ни было управление $\bar{v}(t) \in \mathcal{Q}$, $t \in [t_*, t^*]$, второго игрока, можно подобрать управление

$\bar{u}(t) \in \mathcal{P}$, $t \in [t_*, t^*]$, такое, что движение $z(\cdot) = x(\cdot; t_*, z_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))$ будет давать включение $(t^*, z(t^*)) \in W$.

Положим $u(t) = k\bar{u}(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Учитывая специфический вид системы (1.4) (отсутствие фазовой переменной в правой части и линейность по управлениям), получаем, что $x(t) = kz(t)$ для любого $t \in [t_*, t^*]$. Таким образом, $(t^*, x(t^*)) \in kW$, что и означает стабильность множества kW . \square

Утверждение 2. *Если в условиях утверждения 1 стабильный мост W является максимальным, то множество kW также будет максимальным стабильным мостом.*

Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно. Ниже полагаем $k \neq 0$.

Обозначим $\widetilde{W} = kW$. В силу утверждения 1 следует, что \widetilde{W} является стабильным мостом игры (1.4) с параметрами $(k\mathcal{P}, k\mathcal{Q}, k\mathcal{M})$.

Предположим, что \widetilde{W} не является максимальным стабильным мостом. Обозначим максимальный стабильный мост через $\widetilde{\mathbf{W}}$. Имеем $\widetilde{\mathbf{W}} \supset \widetilde{W}$, $\widetilde{\mathbf{W}} \neq \widetilde{W}$.

Рассмотрим множество $\mathbf{W} = 1/k \cdot \widetilde{\mathbf{W}}$. Имеем $\mathbf{W} \supset W$, $\mathbf{W} \neq W$. Из утверждения 1 получаем, что множество \mathbf{W} является стабильным мостом игры (1.4) с параметрами $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{M})$. Получаем противоречие: максимальный стабильный мост W вложен в стабильный мост \mathbf{W} этой же игры. \square

Утверждение 3. *Пусть W_1 и W_2 — стабильные мосты игры (1.4) с параметрами $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{M}_1)$ и $(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_2)$, соответственно. Предположим, что t -сечения этих множеств не пусты для всех $t \in T$. Тогда множество $W_1 + W_2$ является стабильным мостом игры (1.4) с параметрами $(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2, \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)$.*

Доказательство. Положим $\widetilde{W} = W_1 + W_2$. Возьмем произвольную позицию $(t_*, x_*) \in \widetilde{W}$ и произвольный момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$. Пусть второй игрок выбрал некоторое управление $v(t) \in \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$, $t \in [t_*, t^*]$. Ниже будет показано, как подобрать управление первого игрока $u(t) \in \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$, $t \in [t_*, t^*]$, что для движения $x(\cdot) = x(\cdot; t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ выполняется включение $(t^*, x(t^*)) \in \widetilde{W}$.

Выберем точки z_*^1 и z_*^2 так, что $(t_*, z_*^1) \in W_1$, $(t_*, z_*^2) \in W_2$ и $z_*^1 + z_*^2 = x_*$.

Зададим измеримые управления $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ второго игрока так, что $v_1(t) \in \mathcal{Q}_1$, $v_2(t) \in \mathcal{Q}_2$ и $v_1(t) + v_2(t) = v(t)$, $t \in [t_*, t^*]$.

Пусть $i = 1, 2$. Используя стабильность множества W_i , можно подобрать управление $u_i(t) \in \mathcal{P}_i$, $t \in [t_*, t^*]$, так, что движение $z^i(\cdot) =$

$x(\cdot; t_*, z_*^i, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$ удовлетворяет включению $(t^*, z^i(t^*)) \in W_i$.

Обозначим $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, $t \in [t_*, t^*]$. Учитывая вид системы (1.4), получаем $x(t) = z^1(t) + z^2(t)$. Поэтому $(t^*, x(t^*)) \in \widetilde{W}$, что означает стабильность множества $W_1 + W_2$. \square

Замечание 2. Сумма двух максимальных стабильных мостов является стабильным мостом, но не обязательно максимальным стабильным. Приведем контрпример.

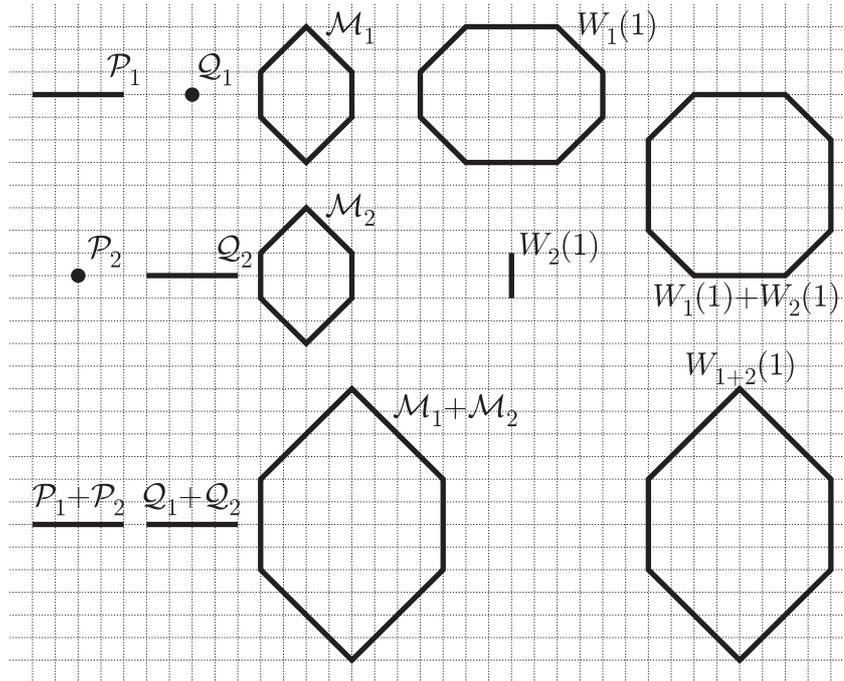


Рис. 1.2: Контрпример. Сумма двух максимальных стабильных мостов.

Рассмотрим игру с простыми движениями:

$$\dot{x} = u + v, \quad x \in R^2, \quad t \in [0, 1].$$

Возьмем два набора параметров, показанных на рис. 1.2: $P_1 = Q_2 = [-1, 1] \times \{0\}$, $P_2 = Q_1 = \{0, 0\}$, $M_1 = M_2$ — шестиугольники. В первом случае первый игрок при отсутствии второго будет увеличивать сечение моста, приведя его в момент окончания к восьмиугольнику $W_1(1)$. Во втором случае второй игрок будет мост сжимать, превратив его сечение в момент окончания в отрезок $W_2(1)$. Сумма этих двух сечений показана справа. Далее построим максимальный стабильный мост в игре с параметрами $(P_1 + P_2, Q_1 + Q_2, M_1 + M_2)$. Так как возможности игроков здесь равны, все сечения максимального стабильного моста W_{1+2} будут равняться терминальному множеству $M_1 + M_2$.

1.4 Построение семейства $\{W_k\}$

Выбор критического уровня помехи Q_{\max} . Главный мост. Выберем множество $Q_{\max} \subset R^q$ — выпуклый компакт, содержащий нуль. Это множество будет играть роль *критического уровня помехи* — максимального уровня, при котором еще гарантируется приведение на терминальное множество.

Построим главный мост W_{main} — максимальный стабильный мост игры (1.4) с параметрами (P, Q_{\max}, M) . Множество Q_{\max} следует выбирать так, чтобы для главного моста выполнялось условие

$$O(\varepsilon) \subset W_{\text{main}}(t), \quad \forall t \in T, \quad (1.5)$$

где $O(\varepsilon)$ — замкнутая окрестность нуля пространства R^n радиуса ε .

Дополнительный мост. Кроме главного, нам понадобится дополнительный мост W_{add} — максимальный стабильный мост, соответствующий ограничениям $\mathcal{P}_{\text{add}} = \{0\}$ (управление первого игрока нулевое), $Q_{\text{add}} = Q_{\max}$ и терминальному множеству \mathcal{M}_{add} , которое выбирается так, чтобы выполнялось аналогичное (1.5) вложение

$$O(\varepsilon) \subset W_{\text{add}}(t), \quad \forall t \in T. \quad (1.6)$$

Легко предложить (при зафиксированном ε) способ выбора минимального \mathcal{M}_{add} . Для этого рассмотрим трубку множества достижимости G за второго игрока в игре (1.4) с ограничением $v \in Q_{\max}$, выпущенную в начальный момент интервала T из окрестности нуля $O(\varepsilon)$. Поскольку управление первого игрока нулевое, множество достижимости будет совпадать с максимальным стабильным мостом, построенным от терминального множества $G(\vartheta)$. Полагаем $\mathcal{M}_{\text{add}} = G(\vartheta)$, $W_{\text{add}} = G$. Условие (1.6) выполняется автоматически.

В дальнейшем в качестве дополнительного моста W_{add} будем брать множество G . Чтобы подчеркнуть это, условимся писать M_G вместо \mathcal{M}_{add} .

Построение семейства стабильных мостов. Рассмотрим семейство множеств

$$W_k = \begin{cases} kW_{\text{main}}, & 0 \leq k \leq 1, \\ W_{\text{main}} + (k-1)W_{\text{add}}, & k > 1, \end{cases} \quad (1.7)$$

где $k \geq 0$ — действительные числа.

Из условий (1.5) и (1.6) получаем строгое вложение множеств друг в друга. Из утверждений раздела 1.3 следует, что множество W_k при $0 \leq k \leq 1$ является максимальным стабильным мостом, соответствующим параметрам (kP, kQ_{\max}, kM) , а при $k > 1$ — стабильным мостом, соответствующим $(P, kQ_{\max}, M + (k - 1)M_G)$. Т.е. семейство множеств $\{W_k\}$, построенное по формуле (1.7), удовлетворяет условиям раздела 1.2 (с множеством индексов $\mathcal{K} = [0, +\infty)$).

Подчеркнем, что построение множеств W_k согласно (1.7) опирается на вычисление одного максимального стабильного моста (главный мост) и одного множества достижимости (дополнительный мост), что делает такую схему очень удобной для численной реализации.

Зададим функцию $V : T \times R^n \rightarrow R$ — функцию уровня семейства $\{W_k\}$:

$$V(t, x) = \min\{k \geq 0 : (t, x) \in W_k\}.$$

Из соотношений (1.5) и (1.6) вытекает, что функция $x \mapsto V(t, x)$ для любого $t \in T$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\lambda = 1/\varepsilon$.

Замечание 3. Множество Q_{\max} задает форму ограничения на возмущение, управление же подстраивается под уровень действующей помехи, определяемый как kQ_{\max} . Увеличение Q_{\max} (пока это не противоречит условию (1.5)) увеличивает допустимую помеху, при которой гарантируется приведение на терминальное множество, но уменьшает размеры главного моста W_{main} — совокупность позиций, для которых обеспечивается эта гарантия.

Замечание 4. В этом разделе эффективное построение семейства $\{W_k\}$ предложено для линейных систем. Общую идею, описанную в разделе 1.2, можно применить и к нелинейным системам, если для них известны методы построения стабильных мостов. Однако неочевидным является вопрос, каким образом выбирать параметры мостов, чтобы обеспечить их вложенность друг в друга.

1.5 Управление в скалярном случае с ограничением по модулю

Пусть управление первого игрока скалярное и ограничено по модулю:

$$P = \{u \in R : |u| \leq \mu\}.$$

Предположим, что вектор-функция $\mathbf{B}(t)$ липшицева с константой β , $\sigma = \max_{t \in T} |B(t)|$. В этом случае управление обратной связи можно строить при помощи *поверхности переключения*.

Через $\mathcal{A}(t, x)$ обозначим прямую в пространстве R^n , параллельную вектору $B(t)$ и проходящую через точку x :

$$\mathcal{A}(t, x) = \{z \in R^n : z = x + \alpha B(t), \alpha \in R\}.$$

Пусть

$$\mathcal{V}(t, x) = \min_{z \in \mathcal{A}(t, x)} V(t, z).$$

Минимум достигается, поскольку функция $x \mapsto V(t, x)$ непрерывна и уходит в бесконечность при $|x| \rightarrow \infty$. Так как эта функция является квазивыпуклой (т.е. ее множества Лебега выпуклы), то минимум реализуется либо в точке, либо на отрезке.

Если $B(t) = 0$, будем считать $\mathcal{V}(t, x) \equiv V(t, x)$.

Для любого $t \in T$ положим

$$\Pi(t) = \{x \in R^n : V(t, x) = \mathcal{V}(t, x)\}.$$

Введем также множества

$$\begin{aligned} \Pi_-(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_+(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B(t) \notin \Pi(t), \forall \alpha \leq 0\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Множество $\Pi(t)$ является замкнутым, множества $\Pi_-(t)$ и $\Pi_+(t)$ находятся по разные стороны от него. Эти три множества делят пространство R^n на три части.

Зададим функцию

$$\bar{V}(t, x) = \min\{V(t, x), 1\}$$

и многозначную функцию

$$\mathbf{U}^0(t, x) = \begin{cases} -\bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_-(t), \\ \bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_+(t), \\ [-\bar{V}(t, x)\mu, \bar{V}(t, x)\mu], & \text{если } x \in \Pi(t). \end{cases} \quad (1.9)$$

В качестве стратегии U первого игрока можно взять произвольную однозначную выборку из многозначной функции \mathbf{U}^0 :

$$U(t, x) \in \mathbf{U}^0(t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n.$$

Таким образом, управление $U(t, x)$ “переключается” на множестве $\Pi(t)$. Для простоты множество $\Pi(t)$ будем называть *поверхностью переключения*, соответствующей моменту t .

Ниже будет сформулирована теорема о гарантии, обеспечиваемой первому игроку произвольной однозначной выборкой $U \in \mathbf{U}^0$. Чтобы описать влияние малых неточностей при построении поверхности переключения $\Pi(t)$, будут рассмотрены множества $\Pi^r(t) \supset \Pi(t)$, $r > 0$, и определена многозначная функция \mathbf{U}^r такая, что $\mathbf{U}^0(t, x) \subset \mathbf{U}^r(t, x)$.

Если $B(t) \neq 0$, положим

$$\Pi^r(t) = \left\{ x \in R^n : x = z + \alpha \frac{B(t)}{|B(t)|}, z \in \Pi(t), |\alpha| \leq r \right\}.$$

Множество $\Pi^r(t)$ назовем геометрическим r -расширением множества $\Pi(t)$ в направлении вектора $B(t)$. Если $B(t) = 0$, будем считать $\Pi^r(t) = \Pi(t) = R^n$.

Введем множества $\Pi_-^r(t)$ и $\Pi_+^r(t)$, отличающиеся от множеств (1.8) заменой $\Pi(t)$ на $\Pi^r(t)$, и определим многозначную функцию $\mathbf{U}^r(t, x)$, отличающуюся от функции (1.9) заменой $\Pi(t)$ на $\Pi^r(t)$ и $\Pi_{\pm}(t)$ на $\Pi_{\pm}^r(t)$.

Пусть первый игрок применяет некоторую однозначную стратегию $U \in \mathbf{U}^r$ в дискретной схеме управления [35, 70] с шагом Δ . На каждом интервале дискретной схемы вырабатываемое управление постоянно. Выбирая программное управление $v(\cdot)$ второго игрока и начальную позицию (t_0, x_0) , получаем движение $t \mapsto x(t)$ системы (1.2).

Справедлива следующая теорема о гарантии.

Теорема 1. Пусть $r \geq 0$ и U — стратегия первого игрока такая, что $U(t, x) \in \mathbf{U}^r(t, x)$ для всех $(t, x) \in T \times R^n$. Выберем произвольно $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будет ограничено множеством k^*Q_{\max} , $k^* \geq 0$. Обозначим

$$s^* = \max\{k^*, V(t_0, x_0)\}.$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2), выходящее из точки x_0 в момент t_0 под воздействием стратегии U в дискретной схеме управления с шагом Δ и некоторого управления $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x^*(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

При этом значение $V(t, x^*(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Здесь

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) = 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(t - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.$$

Доказательство теоремы приведено во второй главе.

1.6 Управление в векторном случае с независимыми покомпонентными ограничениями

Пусть управление первого игрока векторное с независимыми покомпонентными ограничениями:

$$P = \{u \in R^p : |u_i| \leq \mu_i, 1 \leq i \leq p\}.$$

Тогда, по аналогии с предыдущим, можно использовать набор поверхностей переключения. Считаем, что векторы $B_i(t)$ — столбцы матрицы $B(t)$ — удовлетворяют условию Липшица.

Через $\mathcal{A}_i(t, x)$ обозначим прямую в пространстве R^n , параллельную вектору $B_i(t)$ и проходящую через точку x . Пусть

$$\mathcal{V}_i(t, x) = \min_{z \in \mathcal{A}_i(t, x)} V(t, z).$$

Положим

$$\begin{aligned} \Pi_i(t) &= \{x \in R^n : V(t, x) = \mathcal{V}_i(t, x)\}, \\ \Pi_{i-}(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B_i(t) \notin \Pi_i(t), \forall \alpha \geq 0\}, \\ \Pi_{i+}(t) &= \{x \in R^n : x + \alpha B_i(t) \notin \Pi_i(t), \forall \alpha \leq 0\}. \end{aligned}$$

Множество $\Pi_i(t)$ задает поверхность переключения для i -ой компоненты управления.

Зададим функцию

$$\bar{V}(t, x) = \min\{V(t, x), 1\}$$

и многозначную векторную функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^0(t, x) &= [\mathbf{U}_1^0(t, x), \mathbf{U}_2^0(t, x), \dots, \mathbf{U}_p^0(t, x)], \\ \mathbf{U}_i^0(t, x) &= \begin{cases} -\bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_{i-}(t), \\ \bar{V}(t, x)\mu, & \text{если } x \in \Pi_{i+}(t), \\ [-\bar{V}(t, x)\mu, \bar{V}(t, x)\mu], & \text{если } x \in \Pi_i(t). \end{cases} \end{aligned}$$

В качестве стратегии U первого игрока можно взять произвольную однозначную выборку из многозначной функции U^0 .

Этот метод является эмпирическим расширением предыдущего. Со строгой математической точки зрения он может давать ошибки в случае, когда поверхности переключения частично или полностью “слипаются” друг с другом (такое может происходить в точках негладкости границ мостов). Однако в практических задачах метод можно использовать, и он дает результаты сравнимые с результатами следующего метода.

1.7 Управление в случае произвольного ограничения

Пусть P — произвольное выпуклое компактное ограничение, содержащее нуль. Для выбора управления $u(t, x)$ будем использовать идею экстремального прицеливания [35, 36, 70].

Зафиксируем число $\rho > 0$ — расстояние прицеливания. Найдём $k = \min V(t, z)$ по z из шара радиуса ρ с центром в точке x . Число k является индексом наименьшего моста, находящегося от текущей точки на расстоянии, не превышающем ρ .

Пусть точка z на границе сечения $W_k(t)$ — ближайшая к точке x . В качестве управления $u(t, x)$ возьмём произвольный вектор из \mathcal{P}_k , дающий максимальное скалярное произведение с вектором прицеливания $l = z - x$:

$$u(t, x) \in \left\{ u^* \in \mathcal{P}_k : l' B(t) u^* = \max_{u \in \mathcal{P}_k} (l' B(t) u) \right\}.$$

Здесь \mathcal{P}_k — ограничение на управление первого игрока, соответствующее мосту W_k . Напомним, что $\mathcal{P}_k = \min(k, 1) \cdot P$.

Отметим, что если точка x отстоит от нуля на расстояние меньше ρ , то $u(t, x) = 0$, что означает прицеливание на мост W_0 , которому соответствует ограничение $\mathcal{P}_0 = \{0\}$.

Сформулируем теорему о гарантии. Предварительно введём несколько обозначений.

Множество достижимости за первого игрока обладает линейным ростом по t . В качестве оценки скорости возьмём

$$d = \max_{t \in [\vartheta_0, \vartheta]} \max_{u \in P} \|B(t)u\|.$$

Здесь $\|B(t)u\| = \sqrt{\sum_{j=1,p}(B_j(t)u_j)^2}$ — евклидова норма, p — размерность множества P , $B_j(t)$ — столбец с номером j матрицы $B(t)$, u_j — элемент с номером j вектора u .

Символом β обозначим максимум из констант Липшица для отображений $t \rightarrow B_j(t)$.

Пусть \varkappa — оценка по координатному отклонению множества P от нуля, т.е. $\max_j \max\{|u_j| : u \in P\}$.

Теорема 2. Пусть $\rho > 0$ и U — стратегия первого игрока, осуществляющая прицеливание при заданном расстоянии ρ . Выберем произвольно $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление $v(\cdot)$ второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будет ограничено множеством k^*Q_{\max} , $k^* \geq 0$. Обозначим

$$s^* = \max\{k^*, V(t_0, x_0)\}.$$

Пусть $x(\cdot)$ — движение системы (1.2), выходящее из точки x_0 в момент t_0 , порожденное стратегией U в дискретной схеме управления с шагом Δ и управлением $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s^* + E(t, t_0, \Delta, \rho), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

При этом значение $V(t, x(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x(t)) \leq s^* + E(t, t_0, \Delta, \rho) + \lambda\rho, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Здесь

$$E(t, t_0, \Delta, \rho) = \lambda\Delta \left((t - t_0) \left(p\beta\varkappa + \frac{2d^2}{\rho} + \frac{(p\beta\varkappa\Delta)^2}{2\rho} \right) + 2d \right).$$

Доказательство теоремы приведено во второй главе.

Замечание 5. Для построения управления при помощи экстремального прицеливания следует описать способ выбора наименьшего моста, отстоящего в текущий момент от заданной точки на расстояние, не большее ρ .

Сечения стабильных мостов описываем при помощи опорных функций. Значение опорной функции множества A на векторе l определяется в виде

$$\eta(l) = \max_{z \in A} l'z.$$

При численных построениях мы аппроксимируем выпуклые сечения мостов выпуклыми многогранниками (если фазовое пространство эквивалентной игры двумерное, то выпуклыми многоугольниками). Выпуклый

многогранник можно точно описать опорной функцией, если в качестве набора L единичных векторов l взять совокупность, содержащую нормали ко всем его граням. Соответственно, точка z принадлежит выпуклому многограннику, если она удовлетворяет системе неравенств

$$l'z \leq \eta(l), \quad \forall l \in L.$$

Мост, на который осуществляется прицеливание из текущей позиции (t, x) , определяется при помощи следующего алгоритма. Пусть сечение главного моста задается опорной функцией $\eta_{\text{main}}(l)$, сечение дополнительного моста — функцией $\eta_{\text{add}}(l)$. Предположим, что сечения этих мостов и сечения мостов W_k , ими порождаемых, описываются при помощи одного и того же набора векторов L .

- 1) Если $\|x\| \leq \rho$, то прицеливаемся на нулевой мост, $k = 0$.
- 2) Иначе определяем число \tilde{k} по формуле

$$\tilde{k} = \max_{l \in L} \frac{l'x - \rho}{\eta_{\text{main}}(l)}. \quad (1.10)$$

Если получившееся \tilde{k} не превосходит единицы, то для прицеливания используем мост $W_{\tilde{k}}$, т.е. принимаем $k = \tilde{k}$.

- 3) Если число \tilde{k} больше единицы, то

$$k = \max_{l \in L} \frac{l'x - \eta_{\text{main}}(l) - \rho}{\eta_{\text{add}}(l)} + 1. \quad (1.11)$$

Докажем сформулированное правило.

Предположим, что искомое сечение соответствует $k \leq 1$. Тогда оно задается формулой $W_k(t) = kW_{\text{main}}(t)$. Рассмотрим многогранник, получаемый из сечения $W_{\text{main}}(t)$ главного моста умножением на коэффициент k и увеличением по всем направлениям из L на расстояние ρ . Этот многогранник описывается системой неравенств

$$l'z \leq k\eta_{\text{main}}(l) + \rho, \quad l \in L,$$

причем точка x лежит на его границе. Стало быть,

$$l'x \leq k\eta_{\text{main}}(l) + \rho, \quad l \in L,$$

и при некотором $\hat{l} \in L$

$$\hat{l}'x = k\eta_{\text{main}}(\hat{l}) + \rho.$$

Следовательно,

$$k = \max_{l \in L} \frac{l'x - \rho}{\eta_{\text{main}}(l)}.$$

Получили значение, соответствующее формуле (1.10).

Пусть искомое сечение соответствует $k > 1$. Тогда $W_k(t) = W_{\text{main}}(t) + (k - 1)W_{\text{add}}(t)$. Аналогично предыдущему получаем

$$l'x \leq \eta_{\text{main}}(l) + (k - 1)\eta_{\text{add}}(l) + \rho, \quad l \in L,$$

и

$$\hat{l}'x = \eta_{\text{main}}(\hat{l}) + (k - 1)\eta_{\text{add}}(\hat{l}) + \rho,$$

при некотором $\hat{l} \in L$. Отсюда следует, что k вычисляется по формуле (1.11).

1.8 Случай двумерной эквивалентной игры

Если в исходной системе (1.1) множество M определяется лишь двумя координатами фазового вектора \mathbf{x} (т.е. $n = 2$), то при переходе к системе (1.2) получаем размерность фазового вектора x равную двум. Множества $W_k(t)$ в этом случае представляют собой множества на плоскости.

Для случая $n = 2$ разработаны [30] эффективные алгоритмы и программы построения максимальных стабильных мостов в линейных антагонистических дифференциальных играх. Эти программы используются при конструировании сечений максимальных стабильных мостов W_{main} и W_{add} .

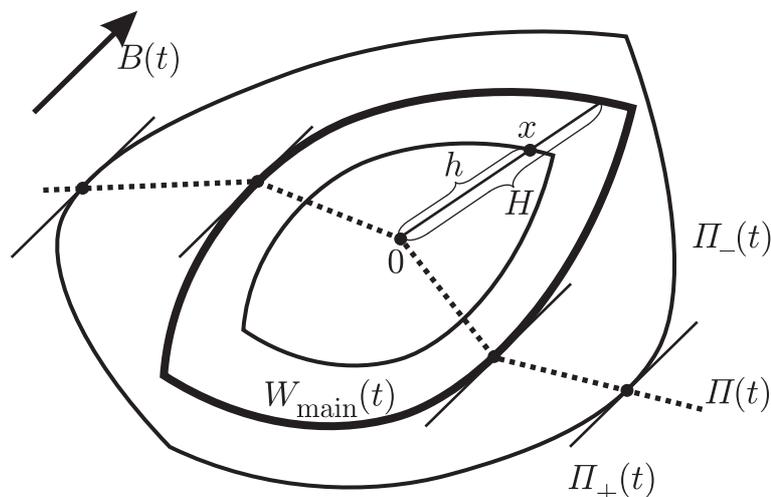


Рис. 1.3: Управление при помощи поверхности переключения в скалярном случае.

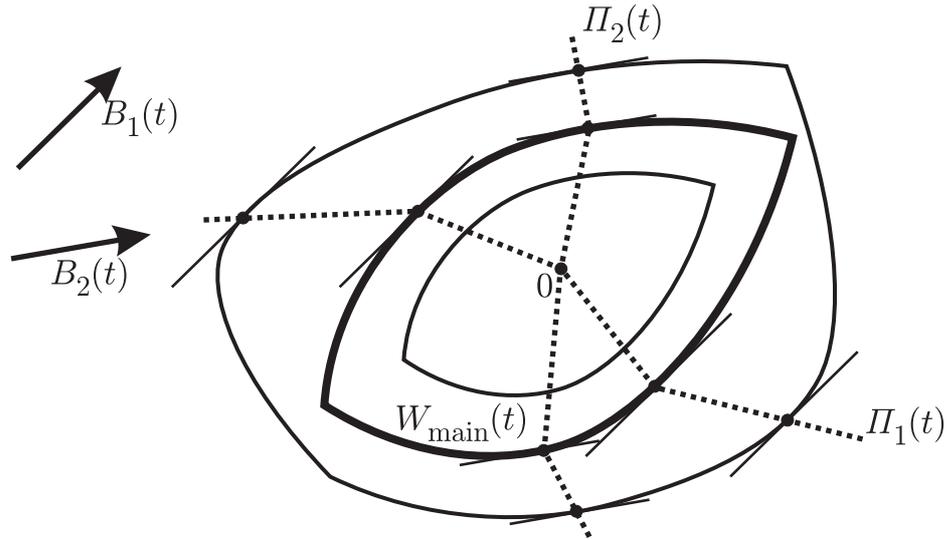


Рис. 1.4: Управление при помощи поверхности переключения в векторном случае.

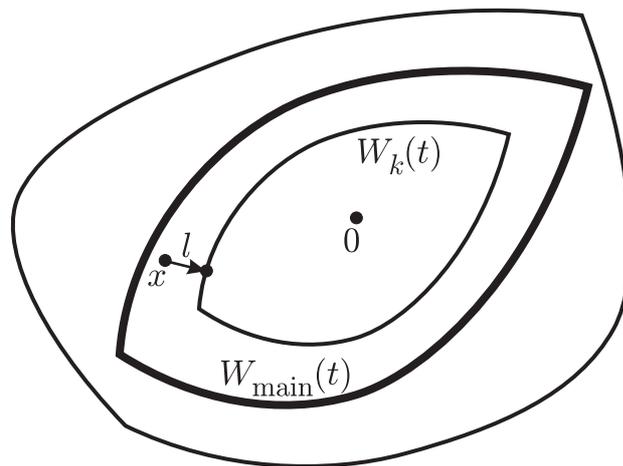


Рис. 1.5: Управление при помощи экстремального прицеливания.

На рис. 1.3 показана иллюстрация способа управления при помощи поверхности переключения при скалярном управлении. Множество $\Pi(t)$ назовем *линией переключения* для момента t . Выбор управляющего воздействия состоит из двух частей: выбор знака и выбор модуля. В каждый момент времени t имеем семейство вложенных множеств $W_k(t)$ на плоскости. На каждом из этих множеств найдем точки, для которых прямая, параллельная вектору $B(t)$, является опорной к множеству. Соединив эти точки, получим линию $\Pi(t)$, определяющую знак управления. Модуль управляющего воздействия задается формулой

$$|U(t, x)| = \begin{cases} (h/H)\mu, & x \in W_{\text{main}}(t), \\ \mu, & x \notin W_{\text{main}}(t). \end{cases}$$

Здесь $h = |x|$, а H — длина отрезка, проходящего через точку x и соеди-

няющего начало координат с границей множества $W_{\text{main}}(t)$.

Управление в векторном случае при помощи поверхностей переключения поясняется на рис. 1.4. Знак каждой из компонент управляющего воздействия определяется из положения текущей точки относительно соответствующей линии переключения. Модуль каждой из компонент управляющего воздействия определяется так же, как и в предыдущем способе.

На рис. 1.5 проиллюстрировано управление при помощи экстремального прицеливания. Определяется минимальный мост, отстоящий от текущей точки не далее фиксированного расстояния ρ . Выбирается вектор управления, дающий максимальный сдвиг в сторону ближайшей точки этого моста. Модуль управления соответствует ограничению, при котором построен выделенный мост.

1.9 Разработанный комплекс программ

На основе предложенного теоретического метода построения адаптивного управления создан комплекс программ, предназначенный для численного исследования задач, имеющих эквивалентный фазовый вектор размерности два. Это имеет место в случае линейной игры с фиксированным моментом окончания и фазовой переменной любой размерности, но с терминальным множеством, задаваемым двумя компонентами фазового вектора в момент окончания. Комплекс позволяет:

- численно строить адаптивное управление на основе поверхностей переключения в случае скалярного полезного управления, ограниченно по модулю, либо в случае векторного управления с независимыми покомпонентными ограничениями;
- строить адаптивное управление при помощи экстремального прицеливания в случае произвольного компактного ограничения на полезное управление;
- проводить моделирование движения линейных систем под действием произвольных управлений;
- численно строить максимальные стабильные мосты и множества достижимости в двумерном пространстве.

Комплекс реализован на языке программирования $C\#$ в системе *Visual Studio 2003*.

Комплекс состоит из нескольких библиотек и использующих их программ. Основная библиотека *Robust* реализует описанные выше вычисления. Перечислим ее основные компоненты.

1. Класс *Bridge* реализует вычисление максимального стабильного моста. На входе принимает: матрицы A , B , C , множества P , Q , два номера целевых фазовых переменных, двумерное терминальное множество M , интервал времени $[\vartheta_0, \vartheta]$ и шаг дискретной схемы Δ . На выходе: набор многоугольников, приближающих сечения максимального стабильного моста по времени.
2. Класс *ReachSet* реализует вычисление множества достижимости. На входе, соответственно, принимает: матрицы A , B , множество P , два номера целевых фазовых переменных, двумерное начальное множество Z_0 , интервал времени $[\vartheta_0, \vartheta]$ и шаг дискретной схемы Δ . На выходе: набор многоугольников, приближающих сечения множества достижимости.
3. Класс *RobustControl* вычисляет адаптивное управление на основе поверхностей переключения. Поддерживает интерфейс *IControl* — общий интерфейс всех классов, реализующих методы управления. На входе принимает те же параметры, что и класс *Bridge*. Используется из других классов через метод *GetControl(t, x)* интерфейса *IControl*.
4. Класс *RobustAimControl* вычисляет адаптивное управление на основе экстремального прицеливания. Входные параметры те же, что и для класса *RobustControl*, и дополнительно, расстояние прицеливания ρ . Используется через методы интерфейса *IControl*.
5. Класс *Simulator* проводит моделирование линейной дифференциальной игры. На входе принимает: матрицы A , B , C , начальную точку \mathbf{x}_0 , интервал времени $[\vartheta_0, \vartheta]$, шаг дискретной схемы Δ , два класса, реализующих интерфейс *IControl* и производящих управления первого и второго игроков.

Библиотека *Widgets* используется для графического вывода полученных результатов.

В библиотеке *Aircraft* содержатся нелинейная и линеаризованные системы динамики самолета. Задачам управления самолетом в условиях ветровых возмущений посвящена третья глава.

На основе этих библиотек создано несколько программ. Программа *AirSimulator* предназначена для моделирования задачи о посадке самолета,

программа *AirEvade1D* — для моделирования задачи о преодолении самолетом препятствия по высоте, программа *Missiles* — для задачи перехвата одного слабоманеврирующего объекта другим [80, 81].

Видеофайлы, показывающие результаты моделирования в движении, представлены в Интернете: для задачи о посадке самолета — на странице [99], для задачи о перехвате — на странице [100].

В заключение этого раздела отметим, что одно- и двумерные задачи являются наиболее простыми. На основе алгоритмов построения максимальных стабильных мостов в трехмерном [22, 24, 25, 52] и многомерном [18, 27] случаях могут быть созданы соответствующие реализации предложенного метода адаптивного управления. Вариант программы для трехмерного случая описан в [29].

1.10 Пример

Применение метода адаптивного управления к достаточно сложным задачам рассматривается в третьей главе. В этом разделе рассмотрим применение метода к модельной задаче конфликтно-управляемого маятника.

Динамику маятника запишем в линеаризованной форме

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 + v, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{x}_1 + u.$$

Промежуток времени T выберем равным $[0, 10]$, шаг дискретной схемы Δ возьмем 0.05. Управление первого игрока ограничим неравенством $|u| \leq 1$.

Для построения адаптивного управления следует выбрать критический уровень помехи Q_{\max} . Возьмем его в виде $|v| \leq 1$.

Для данной задачи управление можно строить при помощи поверхности переключения, как в разделе 1.5, либо при помощи экстремального прицеливания, как в разделе 1.7. Два этих способа дают практически одинаковые реализации управления. Для сравнения на рис. 1.6 показаны графики реализаций управления для случая синусоидальной помехи уровня 1.0. Как видно, два метода выбора управления дают одинаковые значения всюду, кроме нескольких тактов дискретной схемы. Поэтому в дальнейшем все моделирование будет проводиться для метода с поверхностью переключения из раздела 1.5. Сечение поверхности переключения в момент времени t называем линией переключения.

Два моста из семейства $\{W_k\}$ показаны на рис. 1.7. Представлены шесть сечений по времени на промежутке $[0, 10]$ с шагом 2. Сечения даны в ко-

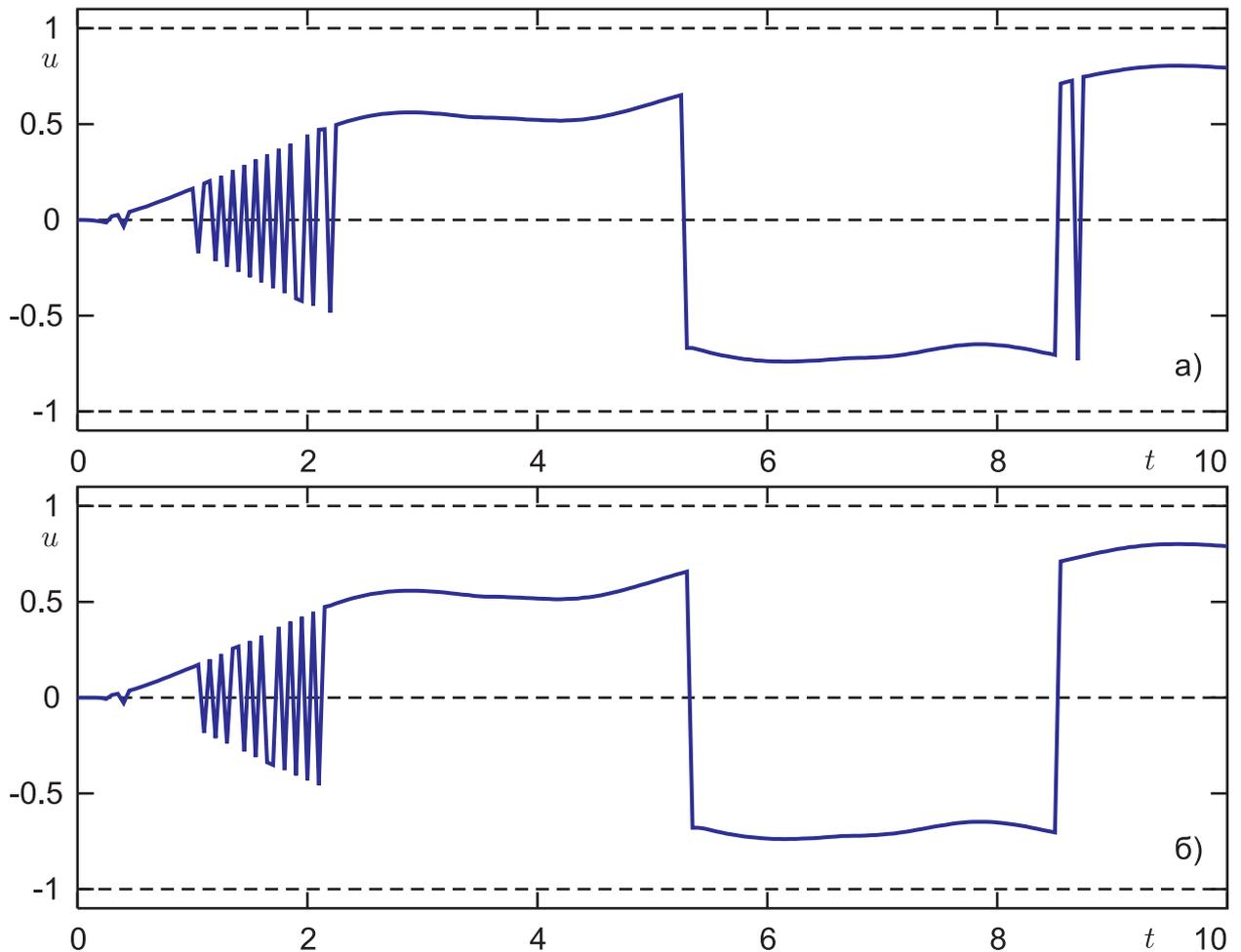


Рис. 1.6: Реализации управления для а) метода с поверхностью переключения, б) метода экстремального прицеливания.

ординатах x_1, x_2 эквивалентной системы (1.2). Жирной линией обозначен главный мост $W_{\text{main}} = W_1$, тонкой линией — мост $W_{1,1}$, пунктиром — линия переключения.

Для моделирования движения системы осталось задать начальное положение системы и какое-либо управление помехи. Начальное положение выберем нулевым и рассмотрим несколько вариантов поведения второго игрока.

Можно задать управление второго игрока как программное управление. Возьмем синусоиду с периодом 7 и с амплитудами 0.5, 1.0 и 1.2, что соответствует уровню в половину меньшему, чем ожидаемый Q_{max} ; уровню, соответствующему ожидаемому; и уровню большему. На рис. 1.8 показаны траектории реализовавшихся движений и графики управлений. Траектории системы в координатах x_1, x_2 эквивалентной игры (1.2) для трех вариантов помехи приведены на рис. 1.8а. Точками обозначены положения в момент окончания на фоне круга — терминального множества. На

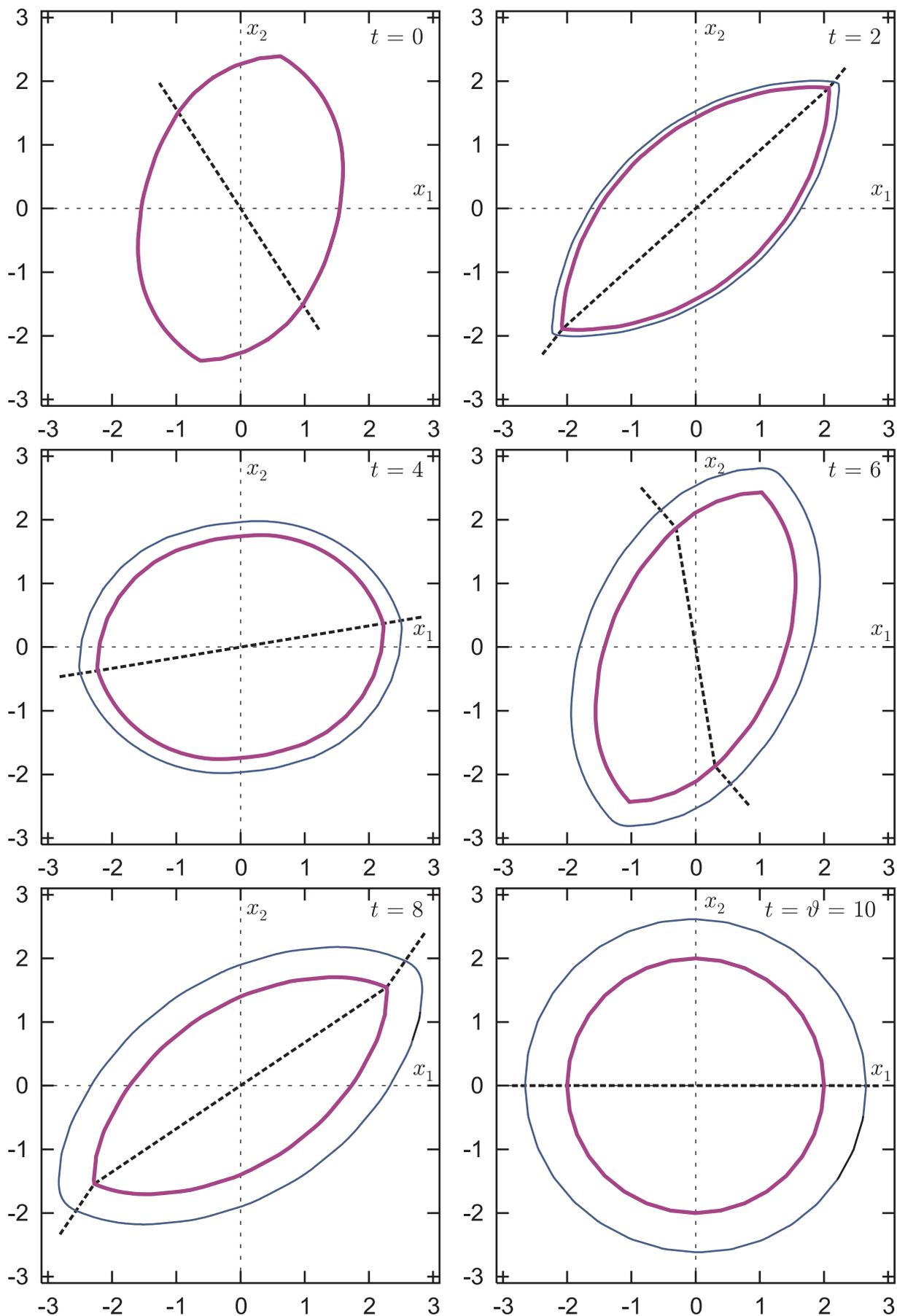
Рис. 1.7: Сечения мостов семейства $\{W_k\}$.

рис. 1.8б представлены те же траектории, но в исходных координатах \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 системы (1.1). Рис. 1.8в содержит графики реализаций управления первого игрока, пунктирными линиями показано ограничение $P = [-1, 1]$ на управление первого игрока. Рис. 1.8г дает графики реализаций помехи, пунктиром показан критический уровень помехи Q_{\max} .

Как видно, три представленных траектории выходят из одной точки, а затем под действием помех различного уровня расходятся. Поскольку действуют подобные помехи, то результирующие траектории, а также реализации управления получаются похожими, с разницей в уровнях, на которых происходит стабилизация. Все три движения приходят в момент окончания на терминальное множество, хотя в третьем случае это не гарантировалось.

Рассмотрим другой вариант помехи — “экстремальное” управление второго игрока [26]. Для этого зафиксируем ограничение на управление второго игрока и обратимся к стандартной дифференциальной игре с геометрическими ограничениями на управления обоих игроков и функцией платы в виде функции Минковского от терминального множества M . Для такой игры при помощи линий переключения можно построить оптимальное управление второго игрока, которое и будем называть экстремальным. Также, как и в случае с синусоидой, будем использовать три вида ограничений: $0.5 \cdot Q_{\max}$, $1.0 \cdot Q_{\max}$ и $1.2 \cdot Q_{\max}$.

Результаты моделирования представлены на рис. 1.9. Обозначения совпадают с обозначениями рис. 1.8. Естественно, экстремальная помеха оказывается хуже синусоиды. Она выводит движение системы на мост, ей соответствующий, при этом адаптивное управление выходит на соответствующий уровень. В дальнейшем управление и помеха, парируя друг друга, держат позицию системы на одном уровне — вблизи границы данного моста. В результате движение, порожденное помехой уровня $0.5 \cdot Q_{\max}$, приходит внутрь терминального множества, движение уровня $1.0 \cdot Q_{\max}$ — на его границу, а движение уровня $1.2 \cdot Q_{\max}$ заканчивается терминальным промахом, который можно оценить мостом $W_{1,2}$.

Обратим внимание, что реализация экстремального управления второго игрока имеет три переключения. Столько же нулей было у выбранной синусоидальной помехи. Синусоиды с большим и, в особенности, с меньшим периодом давали бы более хорошие результаты для первого игрока.

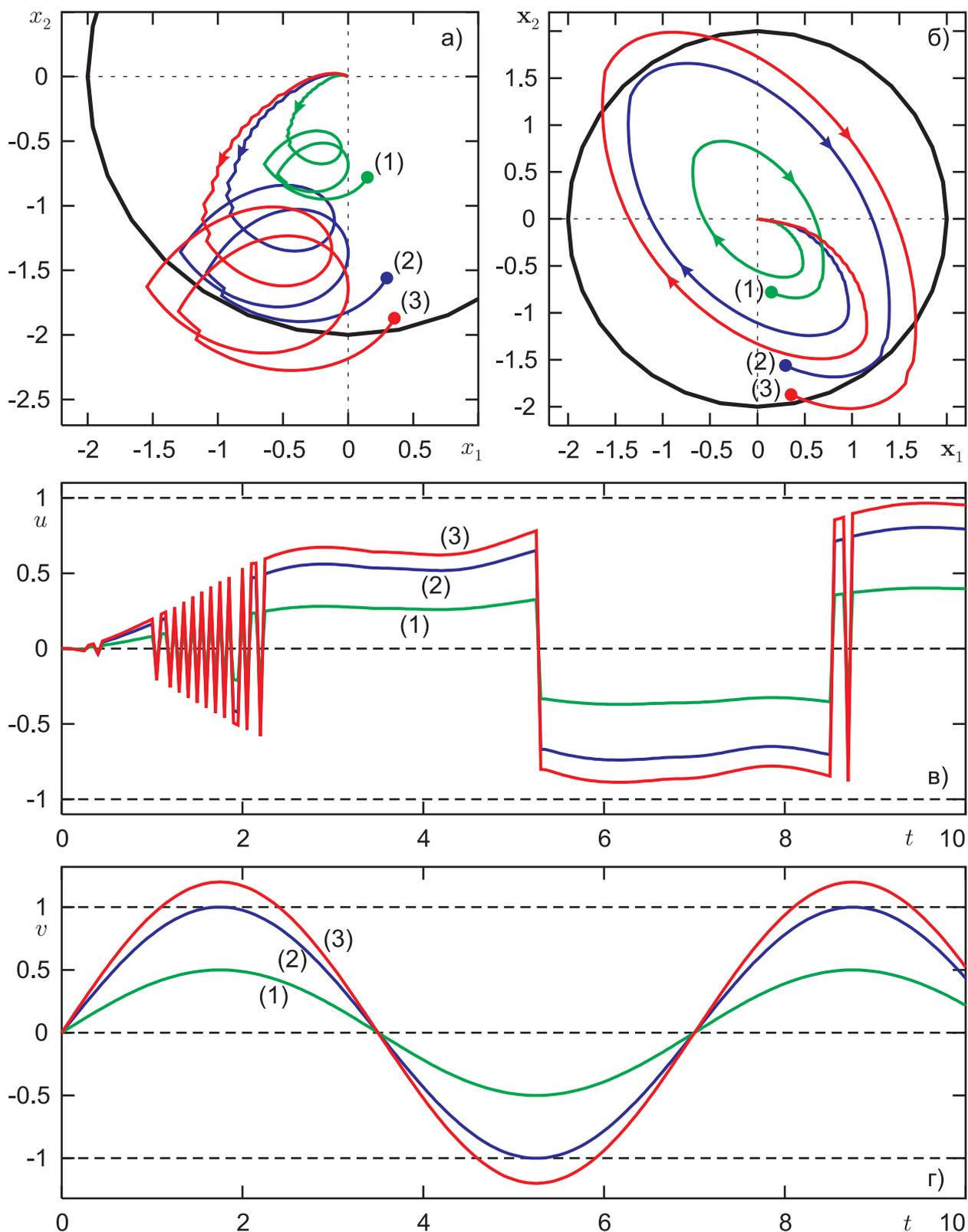


Рис. 1.8: Результаты моделирования при синусоидальной помехе: а) траектории движения в эквивалентных координатах x_1 , x_2 для случаев (1) синусоиды уровня 0.5, (2) уровня 1.0, (3) уровня 1.2; б) траектории тех же движений в исходных координатах x_1 , x_2 ; в) графики реализаций управления; г) графики реализаций помехи.

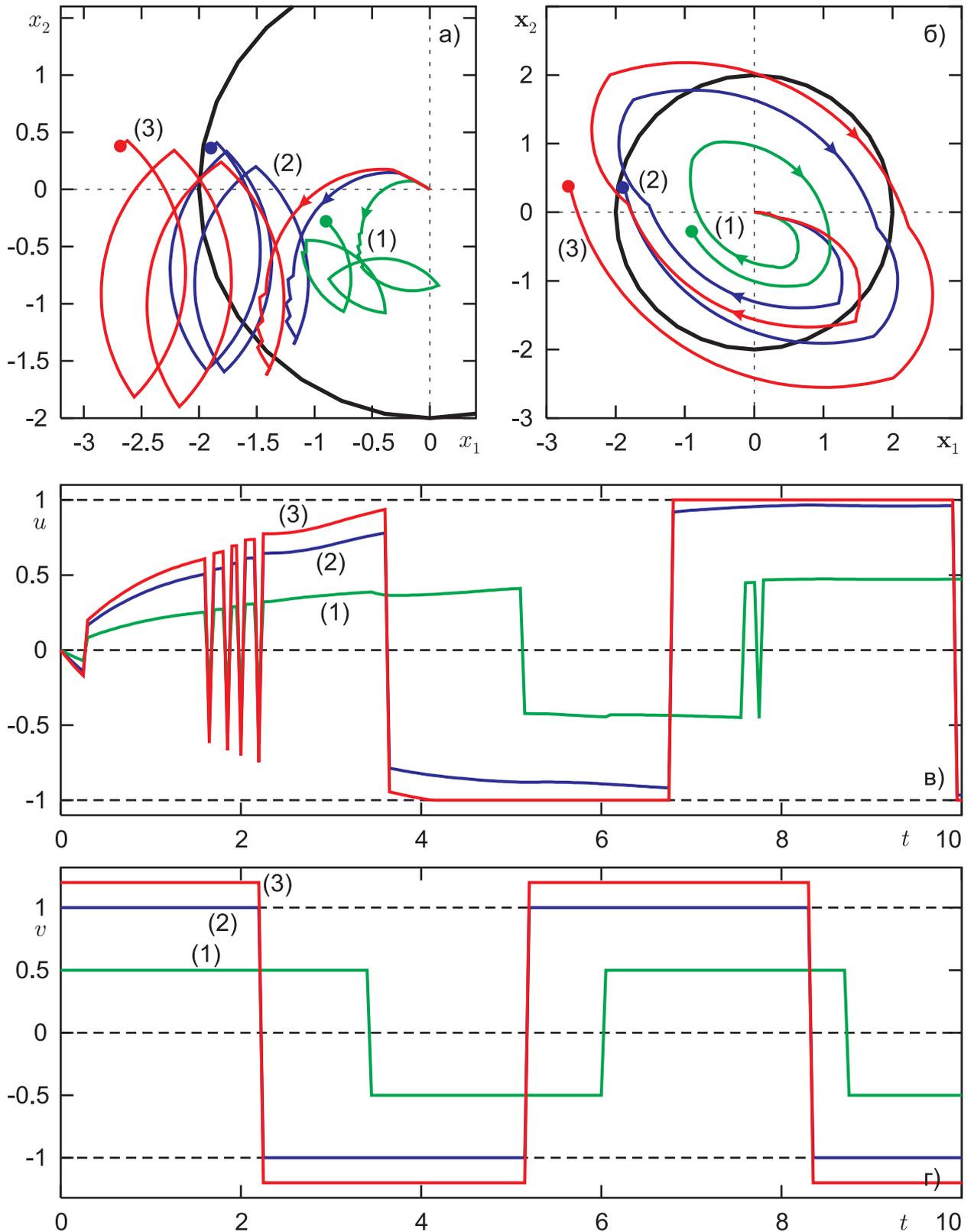


Рис. 1.9: Результаты моделирования при экстремальной помехе: а) траектории движения в эквивалентных координатах x_1, x_2 для случаев (1) экстремальной помехи уровня 0.5, (2) уровня 1.0, (3) уровня 1.2; б) траектории тех же движений в исходных координатах x_1, x_2 ; в) графики реализаций управления; г) графики реализаций помехи.

Глава 2

Доказательства теорем о гарантии

Приведены доказательства двух теорем о гарантии, сформулированных в первой главе. Первая теорема описывает случай, когда используется управление при помощи поверхности переключения. Вторая — когда используется вариант метода экстремального прицеливания для адаптивного управления.

2.1 Теорема о гарантии в случае скалярного управления при помощи поверхности переключения

Ниже приведено доказательство теоремы 1 из раздела 1.5. Для удобства повторим ее формулировку.

Теорема 1. Пусть $r \geq 0$ и U — стратегия первого игрока такая, что $U(t, x) \in \mathbf{U}^r(t, x)$ для всех $(t, x) \in T \times R^n$. Выберем произвольно $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будет ограничено множеством k^*Q_{\max} , $k^* \geq 0$. Обозначим

$$s^* = \max\{k^*, V(t_0, x_0)\}.$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2), выходящее из точки x_0 в момент t_0 под воздействием стратегии U в дискретной схеме управления с шагом Δ и некоторого управления $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x^*(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.1)$$

При этом значение $V(t, x^*(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + \Lambda(t, t_0, \Delta, r), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) = 2\lambda\sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)\beta\mu}(t - t_0) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r.$$

Приведенное доказательство использует некоторые элементы схемы рассуждений из [41].

Для записи изменения функции V вдоль движения $x(\cdot)$ системы (1.2) на некотором промежутке $[t_1, t_2]$ введем обозначение

$$\text{Var}(V, [t_1, t_2]) = V(t_2, x(t_2)) - V(t_1, x(t_1)). \quad (2.3)$$

Вспомогательные утверждения. Для компактных множеств X, Y в \mathbb{R}^n пусть

$$d(X, Y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} |x - y|$$

— хаусдорфово отклонение множества X от множества Y .

Символом $G_k(t; \bar{t}, \bar{x})$ при $k \geq 0$ обозначим множество достижимости системы (1.2) в момент $t \geq \bar{t}$ из состояния \bar{x} в момент \bar{t} с использованием всевозможных измеримых программных управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in kQ_{\max}$ на промежутке $[\bar{t}, t]$. Положим

$$\mathbf{G}_k(t; \bar{t}, \bar{x}) = G_k(t; \bar{t}, \bar{x}) + O(2(t - \bar{t})\sigma\mu).$$

Здесь $O(\varepsilon)$ — окрестность нуля радиуса ε .

Лемма 1. Пусть

$$k \geq 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \bar{x} \notin \text{int}W_k(\bar{t}), \quad \delta > 0, \quad \bar{t} + \delta \leq \vartheta. \quad (2.4)$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2) в силу программных управлений $u(t) \in P$, $v(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$\mathcal{V}(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\beta\mu\delta^2. \quad (2.5)$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$. Поскольку $\bar{x} \notin \text{int}W_k(\bar{t})$, то $c_* = V(\bar{t}, \bar{x}) \geq k$. Поэтому, используя свойства функции V , по управлению $v(\cdot)$ можно найти такое управление $u'(\cdot)$, что $u'(t) \in \bar{c}P \subset P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, и

при этом движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} и порождаемое управлениями $u'(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (2.6)$$

Имеем

$$\begin{aligned} x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t}) &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u'(t)) dt = \\ &= \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (B(t) - B(\hat{t}))(u(t) - u'(t)) dt + B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u'(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Символом π обозначим оператор ортогонального проектирования пространства R^n на подпространство, ортогональное вектору $B(\hat{t})$.

Принимая во внимание, что управления $u(t)$ и $u'(t)$ ограничены по модулю числом μ , функция $B(t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной β и $\pi B(\hat{t}) = 0$, из соотношения (2.7) получим

$$|\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})| \leq \beta \mu \delta^2. \quad (2.8)$$

Пусть \tilde{x} — ближайшая к множеству $W_{c_*}(\hat{t})$ точка на прямой $\mathcal{A}(\hat{t}, x^*(\hat{t}))$. Из включения $x'(\hat{t}) \in W_{c_*}(\hat{t})$, вытекающего из неравенства (2.6), и определения оператора π следует, что

$$d(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq |\pi \tilde{x} - \pi x'(\hat{t})| = |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})|.$$

Отсюда, учитывая липшицевость функции $x \rightarrow V(t, x)$ и равенство $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$, получаем

$$V(\hat{t}, \tilde{x}) \leq c_* + \lambda d(\{\tilde{x}\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda |\pi x^*(\hat{t}) - \pi x'(\hat{t})|.$$

Требуемое неравенство (2.5) вытекает из неравенства (2.8) и того, что

$$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\hat{t}, \tilde{x}).$$

□

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2.4). Предположим, что

$$\mathbf{G}_k(\bar{t} + \delta; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\bar{t} + \delta) \quad (\mathbf{G}_k(\bar{t} + \delta; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\bar{t} + \delta)).$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2) в силу постоянного управления

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu \quad (u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu) \quad (2.9)$$

и некоторого управления $v(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$V(\bar{t} + \delta, x^*(\bar{t} + \delta)) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \lambda\beta\mu\delta^2. \quad (2.10)$$

Доказательство. Обозначим $\hat{t} = \bar{t} + \delta$, $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. Как и в начальной части доказательства леммы 1, по заданному $v(\cdot)$ выберем управление $u'(\cdot)$, $u'(t) \in \bar{c}P$, где $\bar{c} = \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})$, так чтобы соответствующее движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} , удовлетворяло включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (2.11)$$

Так как $|u(t)| \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu$ и $\bar{c}P = \{u \in R : |u| \leq \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu\}$, то

$$|u(t)| \geq |u'(t)|, \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Положим

$$\tilde{z} = x'(\hat{t}) + B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u'(t)) dt. \quad (2.12)$$

Покажем, что

$$V(\hat{t}, \tilde{z}) \leq V(\hat{t}, x'(\hat{t})). \quad (2.13)$$

Рассмотрим случай

$$\mathbf{G}_k(\hat{t}; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_+(\hat{t}), \quad u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu.$$

Имеем $x'(\hat{t}) \in \Pi_+(\hat{t})$, $\tilde{z} \in \Pi_+(\hat{t})$. Поскольку $u(t) \geq u'(t)$, $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$, то при $B(\hat{t}) \neq 0$, используя представление (2.12), получаем, что точка \tilde{z} лежит на прямой $\mathcal{A}(\hat{t}, x'(\hat{t}))$ относительно точки $x'(\hat{t})$ в направлении вектора $B(\hat{t})$. Отсюда, учитывая квазивыпуклость функции $x \mapsto V(t, x)$, выводим неравенство (2.13).

В случае

$$\mathbf{G}_k(\hat{t}; \bar{t}, \bar{x}) \subset \Pi_-(\hat{t}), \quad u(t) \equiv -\bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu$$

неравенство (2.13) доказывается аналогично.

Поскольку правая часть неравенства (2.13) не превышает c_* , получаем включение $\tilde{z} \in W_{c_*}(\hat{t})$. Стало быть,

$$d(\{x^*(\hat{t})\}, W_{c_*}(\hat{t})) \leq |x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|.$$

Используя определение вектора \tilde{z} , имеем

$$x^*(\hat{t}) - \tilde{z} = x^*(t) - x'(\hat{t}) - B(\hat{t}) \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (u(t) - u'(t)) dt = \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} (B(t) - B(\hat{t})) (u(t) - u'(t)) dt.$$

Поэтому

$$|x^*(\hat{t}) - \tilde{z}| \leq \beta \mu \delta^2.$$

Требуемое неравенство (2.10) вытекает из того, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\hat{t}, \tilde{z}) + \lambda |x^*(\hat{t}) - \tilde{z}|, \quad V(\hat{t}, \tilde{z}) \leq V(\bar{t}, \bar{x}).$$

□

Лемма 3. Пусть

$$k \geq 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta].$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2) в силу постоянного управления (2.9) и некоторого управления $v(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Предположим, что

$$x^*(t) \in \Pi_+(t) \setminus \text{int}W_k(t) \quad (x^*(t) \in \Pi_-(t) \setminus \text{int}W_k(t))$$

при всех $t \in [\bar{t}, \hat{t}]$. Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (2.14)$$

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай, когда

$$u(t) \equiv \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})\mu, \quad x^*(t) \in \Pi_+(t) \setminus \text{int}W_k(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Предположим, что

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) > V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (2.15)$$

Пусть \tilde{t} — максимальный момент из промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$, когда $V(t, x^*(t)) = V(\bar{t}, \bar{x})$.

Разделим интервал $[\tilde{t}, \hat{t}]$ моментами t_1, t_2, \dots, t_m ($t_1 = \tilde{t}$, $t_m = \hat{t}$) с шагом δ так, чтобы для любых $n = 1, 2, \dots, m-1$ выполнялось соотношение

$$\mathbf{G}_k(t_{n+1}; t_n, x^*(t_n)) \subset \Pi_+(t_{n+1}).$$

Это можно сделать, опираясь на предположение о расположении точки $x^*(t)$ относительно поверхности переключения $\Pi(t)$. Отметим, что при любом n имеет место неравенство

$$V(t_n, x^*(t_n)) \geq V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (2.16)$$

Рассмотрим произвольный промежуток времени $[t_n, t_{n+1}]$. Символом $\tilde{x}_n(\cdot)$ обозначим движение системы (1.2) в силу постоянного управления $\tilde{u}_n(t) \equiv \bar{V}(t_n, x^*(t_n))\mu$ первого игрока и оговоренного в формулировке леммы управления $v(\cdot)$ второго игрока, выходящее в момент t_n из точки $x^*(t_n)$.

В силу леммы 2 имеем неравенство

$$V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) \leq V(t_n, x^*(t_n)) + \lambda\beta\mu\delta^2. \quad (2.17)$$

Оценим $V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1}))$ через $V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1}))$:

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \leq V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) + \lambda|\tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1})|. \quad (2.18)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1}) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} B(t)(\tilde{u}_n(t) - u(t))dt = \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} B(t)(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\mu dt, \end{aligned}$$

то

$$|\tilde{x}(t_{n+1}) - x^*(t_{n+1})| \leq \sigma\mu(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}))\delta. \quad (2.19)$$

Здесь воспользовались неравенством

$$\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) \geq \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}), \quad (2.20)$$

вытекающим из неравенства (2.16).

В силу соотношений (2.18), (2.19) получаем

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \leq V(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1})) + \lambda\beta\mu\delta(\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x})).$$

Согласно неравенству (2.20)

$$\bar{V}(t_n, x^*(t_n)) - \bar{V}(\bar{t}, \bar{x}) \leq V(t_n, x^*(t_n)) - V(\bar{t}, \bar{x}).$$

Из неравенства (2.17) и последних двух неравенств следует неравенство

$$V(t_{n+1}, x^*(t_{n+1})) \leq V(t_n, x^*(t_n)) + \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta(V(t_n, x^*(t_n)) - V(\bar{t}, \bar{x})),$$

которое запишем при помощи обозначения (2.3) в виде

$$\text{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]) \leq \lambda\beta\mu\delta^2 + \lambda\sigma\mu\delta\text{Var}(V, [\bar{t}, t_n]). \quad (2.21)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} \text{Var}(V, [\bar{t}, t_n]) &= \text{Var}(V, [t_1, t_n]) = \sum_{p=1}^{n-1} \text{Var}(V, [t_p, t_{p+1}]), \\ \text{Var}(V, [t_1, t_2]) &\leq \lambda\beta\mu\delta^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Займемся оценкой величины

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\bar{t}, \bar{x}) = \text{Var}(V, [t_1, t_m]) = \sum_{n=1}^{m-1} \text{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]). \quad (2.23)$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию

$$a_n = a_1 b^{n-1}, \quad n = 1, \dots, m-1; \quad a_1 = \lambda\beta\mu\delta^2, \quad b = 1 + \lambda\sigma\mu\delta. \quad (2.24)$$

Из соотношений (2.21), (2.22), (2.24) видно, что

$$\text{Var}(V, [t_n, t_{n+1}]) \leq a_n, \quad n = 1, \dots, m-1. \quad (2.25)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m-1} a_n &= a_1 \frac{b^{m-1} - 1}{b - 1} = \frac{\beta\delta}{\sigma} \left((1 + \lambda\sigma\mu\delta)^{(\hat{t}-\bar{t})/\delta} - 1 \right) \leq \\ &\leq \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu(\hat{t}-\bar{t})} - 1) \leq \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu(\hat{t}-\bar{t})} - 1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Здесь использовано равенство $m-1 = (\hat{t}-\bar{t})/\delta$.

Соотношения (2.23), (2.25), (2.26) приводят к неравенству

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + \frac{\beta\delta}{\sigma} (e^{\lambda\sigma\mu(\hat{t}-\bar{t})} - 1), \quad (2.27)$$

которое справедливо при разбиении промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$ с любым достаточно малым шагом δ . Получили противоречие с предположением (2.15).

Таким образом, оценка (2.14) доказана. \square

Следующая лемма дает тривиальную оценку изменения функции V вдоль движения системы (1.2) при некотором допустимом программном управлении первого игрока и ограниченном программном управлении второго игрока.

Лемма 4. Пусть

$$k \geq 0, \quad \bar{t} \in T, \quad \bar{x} \notin \text{int}W_k(\bar{t}), \quad \hat{t} \in (\bar{t}, \vartheta].$$

Пусть $x^*(\cdot)$ — движение системы (1.2) в силу программных управлений $u(t) \in P$ и $v(t) \in kQ_{\max}$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} . Тогда справедлива оценка

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}) + 2\lambda\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \quad (2.28)$$

Доказательство. Пусть $c_* = V(\bar{t}, \bar{x})$. По управлению $v(\cdot)$ построим такое управление $u'(\cdot)$, что $u'(t) \in P$ и движение $x'(\cdot)$, выходящее в момент \bar{t} из точки \bar{x} под действием $u'(\cdot)$ и $v(\cdot)$, удовлетворяет включению

$$x'(t) \in W_{c_*}(t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}].$$

Следовательно,

$$V(\hat{t}, x'(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, \bar{x}). \quad (2.29)$$

Поскольку

$$x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t}) = \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} B(t)(u(t) - u'(t))dt,$$

то

$$|x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t})| \leq 2\sigma\mu(\hat{t} - \bar{t}). \quad (2.30)$$

Учитывая условие Липшица для функции $x \mapsto V(t, x)$, имеем

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) - V(\hat{t}, x'(\hat{t})) \leq \lambda|x^*(\hat{t}) - x'(\hat{t})|.$$

Это вместе с неравенствами (2.29) и (2.30) дает неравенство (2.28). \square

Доказательство теоремы. Установим справедливость неравенства (2.2). При выполнении этого неравенства также выполняется и включение (2.1), поскольку

$$|U(t, x)| \leq \bar{V}(t, x)\mu = \min\{V(t, x), 1\}\mu.$$

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ выделим замкнутые интервалы, на которых $x^*(t) \notin \text{int}W_{k^*}(t)$. Вне этих интервалов имеем $V(t, x^*(t)) < k^* \leq s^*$, и неравенство (2.2) автоматически выполняется.

Пусть $[\xi, \zeta]$ — произвольный из указанных интервалов. Считаем, что его нельзя расширить влево с соблюдением условия $x^*(t) \notin \text{int}W_k(t)$. Тогда либо $V(\xi, x^*(\xi)) = k$, либо $V(\xi, x^*(\xi)) > k$. Последний случай возможен лишь при $\xi = t_0$.

Докажем соотношение (2.2) на промежутке $[\xi, \zeta]$.

1°. Пусть $\beta > 0$, $\sigma > 0$. Положим

$$h = \sqrt{(2\sigma\mu\Delta + r)/\beta\mu}. \quad (2.31)$$

А. Выделим вдоль движения $x^*(\cdot)$ “петли”, связанные с заходом в множество $\Pi^r(t)$. Определим также свободные промежутки.

Двигаясь от ξ к ζ , находим первый момент t , когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Такой момент назовем моментом начала первой петли и обозначим t_1 . Далее отмечаем момент \tilde{t}_1 окончания первой петли как последний момент t на промежутке $[t_1, t_1 + h] \cap [\xi, \zeta]$, в который $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Момент \tilde{t}_1 , в частности, может совпадать с t_1 .

В качестве момента t_2 начала второй петли возьмем первый момент $t \in [t_1 + h, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Затем отмечаем момент \tilde{t}_2 окончания второй петли как последний момент t на промежутке $[t_2, t_2 + h] \cap [\xi, \zeta]$, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$.

Продолжая такой процесс, получим набор петель на $[\xi, \zeta]$.

Удаляем из $[\xi, \zeta]$ внутренность промежутков построенных петель. Получаем упорядоченный набор отрезков времени. Каждый из них называем свободным промежутком. Он может быть вырожденным, т.е. состоящим из одной точки.

Если на $[\xi, \zeta]$ петли отсутствуют, то считаем $[\xi, \zeta]$ свободным промежутком.

Б. Пусть $[\tau, \eta]$ — некоторый свободный промежуток. Покажем, что приращение функции V на нем описывается неравенством

$$\text{Var}_f(V, [\tau, \eta]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta. \quad (2.32)$$

Нижний индекс f подчеркивает, что изменение функции V подсчитывается на свободном промежутке.

На внутренности свободного промежутка движение $x^*(\cdot)$ идет по одну сторону от множества

$$\Pi^r = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi^r(t)\},$$

а стало быть, и по одну сторону от множества

$$\Pi = \{(t, x) : t \in T, x \in \Pi(t)\}.$$

В момент t_Δ начала очередного дискрета времени при

$$x^*(t_\Delta) \in \Pi_+(t_\Delta) \quad (x^*(t_\Delta) \in \Pi_-(t_\Delta))$$

выбирается управление

$$u(t_\Delta) = \bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu \quad (u(t_\Delta) = -\bar{V}(t_\Delta, x^*(t_\Delta))\mu),$$

которое действует до начала следующего дискрета. В силу леммы 3 имеем $\text{Var}(V, [t_\Delta, t_\Delta + \Delta]) \leq 0$, если $t_\Delta + \Delta \leq \eta$, и $\text{Var}(V, [t_\Delta, \eta]) \leq 0$ в случае $t_\Delta + \Delta > \eta$.

Производя суммирование для всех дискретов времени, начинающихся на полуинтервале $[\tau, \eta)$, получаем

$$\text{Var}(V, [t_\Delta^{(1)}, \eta]) \leq 0.$$

Здесь $t_\Delta^{(1)}$ — начало первого дискрета на $[\tau, \eta)$.

Для промежутка $[\tau, t_\Delta^{(1)})$ в силу леммы 4 находим

$$\text{Var}(V, [\tau, t_\Delta^{(1)}]) \leq 2\lambda\sigma\mu(t_\Delta^{(1)} - \tau) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta.$$

Складывая два последних неравенства, приходим к оценке (2.32).

В. Будем говорить, что $[\tau, \eta]$ — промежуток вида E_1 , если он составлен из некоторой петли $[t_i, \tilde{t}_i]$ и примыкающего к ней справа свободного промежутка. Промежуток $[\tau, \eta]$ вида E_1 при дополнительном условии $\tau + h \leq \eta$ будем называть промежутком вида E_2 .

Оценим приращение функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_1 .

Рассмотрим промежуток петли $[t_i, \tilde{t}_i]$. Воспользовавшись леммой 1 при $\delta = \tilde{t}_i - t_i$, получим

$$\mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \leq V(t_i, x^*(t_i)) + \lambda\beta\mu(\tilde{t}_i - t_i)^2.$$

Поскольку $\tilde{t}_i - t_i \leq h$, то второе слагаемое в правой части можно заменить на $\lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i)$. Учитывая неравенство

$$V(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) \leq \mathcal{V}(\tilde{t}_i, x^*(\tilde{t}_i)) + \lambda r,$$

справедливое в силу неравенства $V(t, x) \leq \mathcal{V}(t, x) + \lambda r$ и включения $x^*(\tilde{t}_i) \in \Pi^r(\tilde{t}_i)$, приходим к соотношению

$$\text{Var}(V, [t_i, \tilde{t}_i]) \leq \lambda\beta\mu h(\tilde{t}_i - t_i) + \lambda r. \quad (2.33)$$

На свободном промежутке $[\tilde{t}_i, \eta]$ имеем неравенство (2.32) при $\tau = \tilde{t}_i$, объединяя которое с неравенством (2.33) с учетом соотношения $\tilde{t}_i - t_i \leq \eta - \tau$, получим

$$\text{Var}_1(V, [\tau, \eta]) \leq \lambda\beta\mu h(\eta - \tau) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \quad (2.34)$$

Нижний индекс 1 подчеркивает, что подсчет приращения функции V происходит на промежутке вида E_1 .

Перейдем к оценке приращения Var_2 функции V вдоль движения $x^*(\cdot)$ на промежутке вида E_2 . Поскольку в этом случае $\eta - \tau \geq h$, то из соотношения (2.31) следует неравенство

$$2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r \leq \lambda\beta\mu h(\eta - \tau).$$

Привлекая неравенство (2.34), получим

$$\text{Var}_2(V, [\tau, \eta]) \leq 2\lambda\beta\mu h(\eta - \tau). \quad (2.35)$$

Г. Рассмотрим промежуток $[\xi, t]$ ($t \leq \zeta$). Представим его составленным из первого свободного промежутка $[\xi, \bar{t}]$, конечного числа промежутков вида E_2 , идущих друг за другом от момента \bar{t} до некоторого момента \hat{t} (их суммарный промежуток времени есть $[\bar{t}, \hat{t}]$), и остаточного промежутка $[\hat{t}, t]$ вида E_1 . Применяя последовательно оценки (2.32), (2.35) и (2.34), имеем

$$\begin{aligned} \text{Var}(V, [\xi, t]) &= \text{Var}_f(V, [\xi, \bar{t}]) + \text{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) + \text{Var}_1(V, [\hat{t}, t]) \leq \\ &\leq 2\lambda\sigma\mu\Delta + 2\lambda\beta\mu h(\hat{t} - \bar{t}) + \lambda\beta\mu h(t - \hat{t}) + 2\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r = \\ &= 2\lambda\beta\mu h(t - \bar{t}) + 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \end{aligned}$$

Подставляя h по формуле (2.31), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, t]) \leq \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \quad (2.36)$$

2°. Пусть $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$. Двигаясь от ξ к t ($t \leq \zeta$), находим первый момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Обозначим его \bar{t} . Пусть \hat{t} — последний на $[\xi, t]$ момент, когда $x^*(t) \in \Pi^r(t)$. Имеем

$$x^*(t) \notin \Pi^r(t), \quad t \in [\xi, \bar{t}] \cup (\hat{t}, t].$$

Для промежутков $[\xi, \bar{t}]$ и $[\hat{t}, t]$, опираясь на леммы 3, 4 (так же, как при выводе неравенства (2.32)), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, \bar{t}]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta, \quad \text{Var}(V, [\hat{t}, t]) \leq 2\lambda\sigma\mu\Delta. \quad (2.37)$$

Для промежутка $[\bar{t}, \hat{t}]$, обращаясь к лемме 1 при $\beta = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, x^*(\bar{t})).$$

Поэтому, учитывая неравенство

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq \mathcal{V}(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda r,$$

приходим к оценке

$$\text{Var}(V, [\bar{t}, \hat{t}]) \leq \lambda r. \quad (2.38)$$

Объединяя неравенства (2.37), (2.38), получим

$$\text{Var}(V, [\xi, t]) \leq 4\lambda\sigma\mu\Delta + \lambda r. \quad (2.39)$$

3°. Опираясь на неравенство (2.36) для случая, когда $\beta > 0$, $\sigma > 0$, и на неравенство (2.39) в случае $\beta = 0$, $\sigma \geq 0$, имеем оценку

$$V(t, x^*(t)) \leq V(\xi, x^*(\xi)) + \Lambda(t, \xi, \Delta, r). \quad (2.40)$$

В момент ξ значение $V(\xi, x^*(\xi))$ функции V равняется либо k , либо $V(t_0, x_0)$. Таким образом,

$$V(\xi, x^*(\xi)) \leq \max\{k, V(t_0, x_0)\} = s.$$

Подставив это неравенство в соотношение (2.40) и приняв во внимание, что

$$\Lambda(t, t_0, \Delta, r) \geq \Lambda(t, \xi, \Delta, r),$$

получаем неравенство (2.2).

2.2 Теорема о гарантии для случая экстремального прицеливания

Ниже приведено доказательство теоремы 2 из раздела 1.7. Повторим ее формулировку.

Теорема 2. Пусть $\rho > 0$ и U — стратегия первого игрока, осуществляющая прицеливание при заданном расстоянии ρ . Выберем произвольно $t_0 \in T$, $x_0 \in R^n$ и $\Delta > 0$. Предположим, что управление $v(\cdot)$ второго игрока на промежутке $[t_0, \vartheta]$ будет ограничено множеством k^*Q_{\max} , $k^* \geq 0$. Обозначим

$$s^* = \max\{k^*, V(t_0, x_0)\}.$$

Пусть $x(\cdot)$ — движение системы (1.2), выходящее из точки x_0 в момент t_0 , порожденное стратегией U в дискретной схеме управления с

шагом Δ и управлением $v(\cdot)$. Тогда реализация $u(t) = U(t, x(t))$ управления первого игрока подчиняется включению

$$u(t) \in \min\{s^* + E(t, t_0, \Delta, \rho), 1\} \cdot P, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.41)$$

При этом значение $V(t, x(t))$ функции V удовлетворяет неравенству

$$V(t, x(t)) \leq s^* + E(t, t_0, \Delta, \rho) + \lambda\rho, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.42)$$

Здесь

$$E(t, t_0, \Delta, \rho) = \lambda\Delta \left((t - t_0) \left(p\beta\kappa + \frac{2d^2}{\rho} + \frac{(p\beta\kappa\Delta)^2}{2\rho} \right) + 2d \right).$$

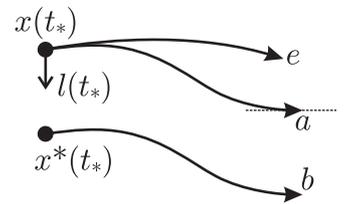
Доказательство. Пусть $x^*(t)$ — точка, на которую осуществляется прицеливание из точки $x(t)$. Для получения оценок (2.41) и (2.42) достаточно доказать оценку

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + E(t, t_0, \Delta, \rho). \quad (2.43)$$

Включение (2.41) вытекает из (2.43) с учетом правила построения экстремального прицеливания для адаптивного управления. Неравенство (2.42) следует из того, что точки $x(t)$ и $x^*(t)$ отстоят на расстояние, не большее ρ .

1. Пусть на некотором интервале $[t_*, t_* + \delta)$ действует экстремальное управление u^* первого игрока. Оно является постоянным и вырабатывается в момент t_* из условия прицеливания на сечение $W_{c_*}(t_*)$ моста, соответствующего индексу c_* . Расстояние от точки $x(t_*)$ до сечения $W_{c_*}(t_*)$ не превосходит ρ . Единичный вектор прицеливания $l(t_*)$ направлен из точки $x(t_*)$ к ближайшей на $W_{c_*}(t_*)$ точке $x^*(t_*)$.

Предположим, что помеха не превышает уровень c_*Q_{\max} , соответствующий мосту W_{c_*} . Пусть $v(\cdot)$ — реализация помехи на $[t_*, t_* + \delta)$. Из условия стабильности множества W_{c_*} подберем измеримую функцию $u(\cdot)$ со значениями в $\mathcal{P}_{c_*} = \min\{c_*, 1\} \cdot P$ так, чтобы получившееся движение, выходящее из точки $x^*(t_*)$, на $[t_*, t_* + \delta)$ шло по сечениям $W_{c_*}(t)$. Положение этого движения в момент $t_* + \delta$ обозначим через b .



Символом e обозначим положение в момент $t_* + \delta$ движения из точки $x(t_*)$ в силу постоянного экстремального управления u^* первого игрока и помехи $v(\cdot)$. Оценим расстояние между точками e и b .

Рассмотрим вспомогательное движение из точки $x(t_*)$, которое является копией движения в силу стабильности из точки $x^*(t_*)$. Обозначим через a его положение в момент $t_* + \delta$.

Вначале оценим превышение точки e над точкой a по направлению $l(t_*)$. Имеем

$$\begin{aligned} l'(t_*)(e - a) &= l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} B(t)u^* dt - l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} B(t)u(t) dt = \\ &= l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} B(t)(u^* - u(t)) dt = \\ &= l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} B(t_*)(u^* - u(t)) dt + l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B(t) - B(t_*))(u^* - u(t)) dt. \end{aligned}$$

Так как вектор u^* выбран из условия экстремального прицеливания по вектору $l(t_*)$, первый из интегралов в последней правой части неотрицателен. Поэтому

$$l'(t_*)(e - a) \geq l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B(t) - B(t_*))(u^* - u(t)) dt.$$

Вектор $l(t_*)$ — единичный. Имеем далее

$$\begin{aligned} \left| l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} (B(t) - B(t_*))(u^* - u(t)) dt \right| &= \\ &= \left| l'(t_*) \int_{t_*}^{t_*+\delta} \sum_{j=1}^p (B_j(t) - B_j(t_*))(u_j^* - u_j(t)) dt \right| \leq p\beta\delta^2/2 \cdot 2\kappa. \end{aligned}$$

В оценке стоит 2κ , т.е. покоординатный размах множества P .

Итак,

$$l'(t_*)(e - a) \geq -p\beta\kappa\delta^2.$$

Используем оценку снизу, поскольку нас интересует превышение точки e над точкой a по отношению к направлению $l(t_*)$.

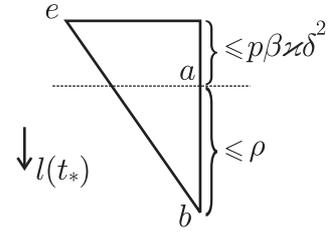
Расстояние ρ_δ между точками e и b оценивается неравенством

$$\rho_\delta \leq \sqrt{(\rho + p\beta\kappa\delta^2)^2 + (2d\delta)^2}. \quad (2.44)$$

Здесь учтено, что точки e и a принадлежат множеству достижимости первого игрока. Размах множества достижимости оценивается числом $2d\delta$.

Точка e может лежать по направлению $l(t_*)$ ниже точки b . Тогда

$$\rho_\delta = |e - b| \leq |e - a| \leq 2d\delta.$$

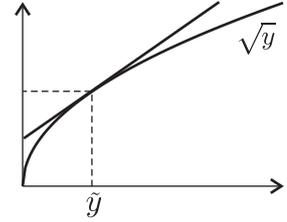


Получаем, что и в этом случае выполнена оценка (2.44).

2. Итак, получили оценку (2.44), которая справедлива при условии, что уровень помехи соответствует мосту, на который прицеливаемся.

Но оценка корнем неудобна для дальнейшего использования. Подменим ее более грубой оценкой. А именно

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{\tilde{y}} + \frac{1}{2\sqrt{\tilde{y}}}(y - \tilde{y}), \quad (2.45)$$



Такая оценка выполнена при всех $\tilde{y} > 0$ и $y \geq 0$.

В нашем случае возьмем $\tilde{y} = \rho^2$. В силу (2.44) и (2.45) получим

$$\begin{aligned} \rho_\delta &\leq \rho + \frac{1}{2\rho}((\rho + p\beta\kappa\delta^2)^2 + (2d\delta)^2 - \rho^2) = \\ &= \rho + \frac{1}{2\rho}(2 \cdot \rho \cdot p\beta\kappa\delta^2 + (p\beta\kappa\delta^2)^2 + (2d\delta)^2) = \rho + \delta^2 \left(p\beta\kappa + \frac{(p\beta\kappa\delta)^2}{2\rho} + \frac{2d^2}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\eta(\delta) = p\beta\kappa + \frac{(p\beta\kappa\delta)^2}{2\rho} + \frac{2d^2}{\rho}.$$

Таким образом,

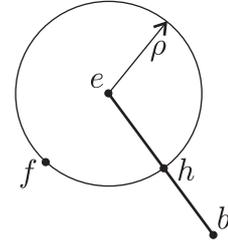
$$\rho_\delta \leq \rho + \delta^2\eta(\delta). \quad (2.46)$$

Мы оценили расстояние в момент $t_* + \delta$ от точки $x(t_* + \delta)$ до сечения $W_{c_*}(t_* + \delta)$ моста, на который прицеливались в момент t_* .

3. Оценим значение \bar{c} , которое соответствует моменту $t_* + \delta$ и представляет собой минимум функции $V(t_* + \delta, z)$ по z из шара радиуса ρ с центром в точке $x(t_* + \delta) = e$. Пусть f — точка минимума. Она является ближайшей к $x(t_* + \delta)$ точкой множества $W_{\bar{c}}(t_* + \delta)$.

Точка f может лежать как внутри шара радиуса ρ , так и на его границе. Но если она лежит внутри, то из определения функции V следует, что f является точкой глобального минимума (равного нулю).

1) Предположим, что точка $b \in W_{c_*}(t_* + \delta)$, о которой говорилось в пункте 1, расположена вне шара радиуса ρ с центром в точке e . Пусть h — точка на границе этого шара, принадлежащая отрезку eb . Имеем



$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_* + \delta, h).$$

Опираясь на (2.46), заключаем, что точка h отстоит от точки b на расстояние $\rho_\delta - \rho \leq \delta^2 \eta(\delta)$. Следовательно,

$$V(t_* + \delta, h) \leq V(t_* + \delta, b) + \lambda \delta^2 \eta(\delta).$$

Поскольку

$$V(t_* + \delta, b) \leq V(t_*, x^*(t_*)),$$

где $x^*(t_*)$ — точка, на которую прицеливались в момент t_* , то

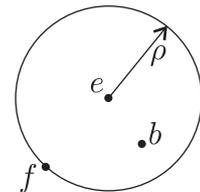
$$V(t_* + \delta, h) \leq V(t_*, x^*(t_*)) + \lambda \delta^2 \eta(\delta).$$

Получаем

$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_*, x^*(t_*)) + \lambda \delta^2 \eta(\delta). \quad (2.47)$$

2) Пусть точка b лежит в шаре радиуса ρ с центром в точке e . Тогда $V(t_* + \delta, f) \leq V(t_* + \delta, b)$ и значит

$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_*, x^*(t_*)). \quad (2.48)$$



Итак, для подпункта 1) справедлива оценка (2.47), для подпункта 2) — оценка (2.48). В итоге, всегда

$$V(t_* + \delta, f) \leq V(t_*, x^*(t_*)) + \lambda \delta^2 \eta(\delta). \quad (2.49)$$

Таким образом, оценили приращение функции V для точек прицеливания.

4. Пусть t — произвольный момент времени из промежутка $[t_0, \vartheta]$. Для доказательства неравенства (2.43) оценим изменение $V(\tau, x^*(\tau))$ на интервале $[t_0, t]$. Если $V(t, x^*(t)) \leq s^*$ в рассматриваемый момент t , то неравенство (2.43), очевидно, выполнено. Далее полагаем, что $V(t, x^*(t)) > s^*$.

Пусть \tilde{t} — момент последнего выхода точки $x^*(\tau)$ на промежутке $[t_0, t)$ на уровень s^* функции V .

При использовании первым игроком дискретной схемы управления выбор управляющего воздействия производится в начальный момент очередного дискрета длины Δ . Такие моменты называем дискретными. Предположим, что на (\tilde{t}, t) есть хотя бы один дискретный момент. Символом \bar{t} обозначим ближайший справа к \tilde{t} дискретный момент. Ближайший слева к t дискретный момент обозначим \hat{t} .

На $[\bar{t}, \hat{t}]$ идут полные дискреты. Их количество $(\hat{t} - \bar{t})/\Delta$. Получаем с учетом (2.49) оценку

$$V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) \leq V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) + \lambda(\hat{t} - \bar{t})\Delta\eta(\Delta). \quad (2.50)$$

На $[\hat{t}, t]$, снова с учетом (2.49), выполнена оценка

$$\begin{aligned} V(t, x^*(t)) &\leq V(\hat{t}, x^*(\hat{t})) + \lambda(t - \hat{t})^2\eta(t - \hat{t}) \leq \\ &\leq V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) + \lambda(t - \bar{t})\Delta\eta(\Delta). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Если на интервале (\tilde{t}, t) нет полных дискретных промежутков (т.е. $\bar{t} = \hat{t}$), то приращение функции V в оценке (2.50) получаем нулевым.

Оценим приращение $V(\tau, x^*(\tau))$ на $[\tilde{t}, \bar{t}]$.

В момент \tilde{t} имеем $V(\tilde{t}, x^*(\tilde{t})) = s^*$. На $[\tilde{t}, \bar{t}]$ действует возмущение $v(\cdot)$. Его уровень не больше $k^* \leq s^*$. По функции $v(\cdot)$ находим управление $u_{st}(\cdot)$ так, что движение $x_{st}(\cdot)$ из точки $x^*(\tilde{t})$ в силу $u_{st}(\cdot)$, $v(\cdot)$ идет на $[\tilde{t}, \bar{t}]$ по мосту W_{s^*} .

Расхождение двух движений:

$$x(\bar{t}) - x_{st}(\bar{t}) = x(\tilde{t}) - x^*(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\bar{t}} B(\tau)u(\tau)d\tau - \int_{\tilde{t}}^{\bar{t}} B(\tau)u_{st}(\tau)d\tau.$$

Имеем

$$\left| \int_{\tilde{t}}^{\bar{t}} B(\tau)u(\tau)d\tau - \int_{\tilde{t}}^{\bar{t}} B(\tau)u_{st}(\tau)d\tau \right| \leq 2d(\tilde{t} - \bar{t}).$$

Следовательно,

$$|x(\bar{t}) - x_{st}(\bar{t})| \leq |x(\tilde{t}) - x^*(\tilde{t})| + 2d(\tilde{t} - \bar{t}) \leq \rho + 2d(\tilde{t} - \bar{t}). \quad (2.52)$$

1) Пусть точка $x_{st}(\bar{t})$ лежит вне шара радиуса ρ с центром в точке $x(\bar{t})$. Рассмотрим точку h на границе шара, принадлежащую отрезку, соединяющему точки $x(\bar{t})$ и $x_{st}(\bar{t})$. Учитывая (2.52), получим

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq V(\bar{t}, h) \leq V(\bar{t}, x_{st}(\bar{t})) + 2\lambda d(\bar{t} - \tilde{t}) \leq s^* + 2\lambda d\Delta.$$

2) Пусть точка $x_{st}(\bar{t})$ принадлежит шару радиуса ρ с центром в точке $x(\bar{t})$. Тогда

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq V(\bar{t}, x_{st}(\bar{t})) \leq s^*.$$

Таким образом, в случаях 1), 2) верна оценка

$$V(\bar{t}, x^*(\bar{t})) \leq s^* + 2\lambda d\Delta. \quad (2.53)$$

Собирая оценки (2.50), (2.51), (2.53), получаем

$$V(t, x^*(t)) \leq s^* + 2\lambda d\Delta + \lambda(t - \bar{t})\Delta\eta(\Delta).$$

Если на интервале (\tilde{t}, t) нет дискретных моментов, то оценки (2.50) и (2.51) не используются. В этом случае приращение функции V на $[\tilde{t}, t]$ описывается оценкой (2.53) при $\bar{t} = t$.

Учитывая, что

$$E(t, t_0, \Delta, \rho) = \lambda(t - t_0)\Delta\eta(\Delta) + 2\lambda d\Delta,$$

приходим к оценке (2.43).

Глава 3

Две задачи об управлении самолетом в условиях ветрового возмущения

В данной главе показано применение метода адаптивного управления к двум задачам, связанным с управлением самолетом при наличии неизвестных ветровых помех. В первой из них — задаче о посадке — рассматривается этап снижения самолета по глиссаде, который заканчивается при пересечении торца взлетно-посадочной полосы. В этот момент требуется обеспечить нахождение вертикального и бокового отклонений, а также соответствующих скоростей в заданных допустимых множествах. Вторая задача — об уклонении от вертикального препятствия — имеет дело с ситуацией, когда самолет, летящий на небольшой высоте, обнаруживает перед собой препятствие, которое необходимо обойти по высоте.

Моделирование движений проводится в рамках нелинейной дифференциальной системы, соответствующей средне-магистральному самолету. При построении адаптивного управления в обеих задачах используется линеаризация относительно соответствующего номинального движения. Предполагаем, что все фазовые переменные измеряются точно.

Глава начинается с описания нелинейной системы, процесса расчета номинального движения, формул линеаризации. Эта часть является общей для обеих задач. Далее рассматривается задача о посадке и в завершающей части — задача о преодолении

нии препятствия по высоте. Представлены результаты моделирования при различных ветровых помехах.

3.1 Модель динамики самолета

3.1.1 Дифференциальная система

1. Системы координат. При описании динамики самолета используется несколько систем координат.

Нормальная земная система координат связана с фиксированной точкой на поверхности земли. Полагаем, что в плоскости земли задано некоторое номинальное направление, которому соответствует ось x_g . Ось y_g направлена вертикально, ось z_g характеризует боковое отклонение от номинального направления (рис. 3.1).

Начало связанной системы координат совпадает с центром масс самолета. Ось x направлена вдоль строительной оси самолета, ось z — перпендикулярно оси x в плоскости крыльев, ось y — перпендикулярно плоскости xz .

Различаются также земная скорость — скорость самолета относительно земли, и воздушная скорость — скорость относительно окружающих воздушных масс.

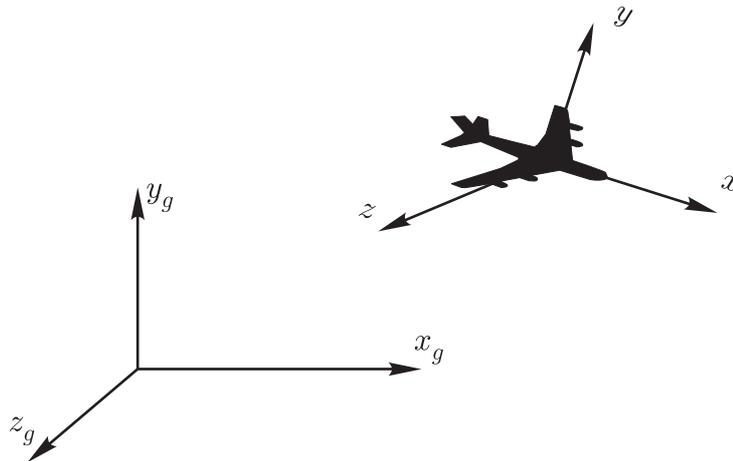


Рис. 3.1: Системы координат.

2. Основная часть дифференциальной системы. Для описания динамики самолета используется нелинейная 12-мерная модель [10, 78]. Эти уравнения следуют из законов механики и справедливы для любого сред-

него транспортного самолета:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_g &= V_{xg} \\
\dot{V}_{xg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \cos \psi \cos \vartheta + (P \sin \sigma + qSc_y) \times \\
&\quad (\sin \psi \sin \gamma - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta) + \\
&\quad qSc_z(\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]/m \\
\dot{y}_g &= V_{yg} \\
\dot{V}_{yg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \sin \vartheta + (P \sin \sigma + qSc_y) \times \\
&\quad \cos \vartheta \cos \gamma - qSc_z \cos \vartheta \sin \gamma]/m - g \\
\dot{z}_g &= V_{zg} \\
\dot{V}_{zg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x)(-\sin \psi \cos \vartheta) + (P \sin \sigma + qSc_y) \times \\
&\quad (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) + \\
&\quad qSc_z(\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]/m \\
\dot{\vartheta} &= \omega_z \cos \gamma + \omega_y \sin \gamma \\
\dot{\omega}_z &= [I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y]/I_z + M_z/I_z \\
\dot{\psi} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma)/\cos \vartheta \\
\dot{\omega}_y &= [(I_y - I_z)I_{xy}\omega_y + (I_z - I_x)I_x\omega_x]\omega_z/J + \\
&\quad (I_xM_y + I_{xy}M_x)/J + \omega_z I_{xy}(I_x\omega_y - I_{xy}\omega_x)/J \\
\dot{\gamma} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \tan \vartheta \\
\dot{\omega}_x &= [(I_y - I_z)I_y\omega_y + (I_z - I_x)I_{xy}\omega_x]\omega_z/J + \\
&\quad (I_yM_x + I_{xy}M_y)/J + I_{xy}\omega_z(I_{xy}\omega_y - I_y\omega_x)/J
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь:

x_g, y_g, z_g — продольная, вертикальная и боковая координаты центра масс самолета в нормальной земной системе координат;

V_{xg}, V_{yg}, V_{zg} — соответствующие земные скорости;

ϑ, ψ, γ — углы тангажа, рыскания и крена;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости вращения относительно осей связанной системы координат.

В правую часть входят следующие величины:

$q = \rho \widehat{V}^2/2$ — скоростной напор;

ρ — плотность воздуха;

$\widehat{V}_{xg} = V_{xg} - W_{xg}, \widehat{V}_{yg} = V_{yg} - W_{yg}, \widehat{V}_{zg} = V_{zg} - W_{zg}$ — составляющие воздушной скорости;

$\widehat{V} = (\widehat{V}_{xg}^2 + \widehat{V}_{yg}^2 + \widehat{V}_{zg}^2)^{1/2}$ — модуль воздушной скорости;

W_{xg}, W_{yg}, W_{zg} — составляющие скорости ветра;

I_x, I_y, I_z, I_{xy} — моменты инерции, $J^2 = I_x I_y - I_{xy}^2$;

$M_x = qSlm_x, M_y = qSlm_y, M_z = qSbm_z$ — моменты сил;

S — площадь крыла;

l — размах крыла;

b — средняя аэродинамическая хорда;

$c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$ — аэродинамические коэффициенты сил и моментов в связанной системе координат;

m — масса самолета;

g — ускорение свободного падения;

σ — угол установки двигателей.

Управление осуществляется за счет силы тяги P , отклонения элеронов δ_a , рулей высоты δ_e и направления δ_r . Величины $\delta_a, \delta_e, \delta_r$ входят в аэродинамические коэффициенты. Сила тяги и руль высоты в основном определяют движение самолета в вертикальной плоскости, элероны и руль направления — в боковой.

Ветровое возмущение влияет на воздушную скорость.

3. Аэродинамические коэффициенты и числовые параметры.

Углы атаки α и скольжения β вычисляются по следующим формулам:

$$\alpha = \arcsin\{[-\widehat{V}_{xg}(\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma) - \widehat{V}_{yg} \cos \vartheta \cos \gamma - \widehat{V}_{zg}(\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma)]/(\widehat{V} \cos \beta)\},$$

$$\beta = \arcsin\{[\widehat{V}_{xg}(\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma) - \widehat{V}_{yg} \cos \vartheta \sin \gamma + \widehat{V}_{zg}(\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma)]/\widehat{V}\}.$$

Численные выражения для аэродинамических коэффициентов и используемые числовые параметры взяты из [10, 78] и соответствуют самолету Ту-154.

Коэффициенты c_x, c_y, c_z в связанной системе координат задаются через

соответствующие коэффициенты \tilde{c}_x , \tilde{c}_y , \tilde{c}_z в полусвязанной системе:

$$\begin{aligned}c_x &= \tilde{c}_x \cos \alpha - \tilde{c}_y \sin \alpha, \\c_y &= \tilde{c}_y \cos \alpha + \tilde{c}_x \sin \alpha, \\c_z &= \tilde{c}_z, \\ \tilde{c}_x &= 0.21 + 0.004\alpha + 0.47 \cdot 10^{-3}\alpha^2, \\ \tilde{c}_y &= 0.65 + 0.09\alpha + 0.003\delta_e, \\ \tilde{c}_z &= -0.0115\beta - (0.0034 - 6 \cdot 10^{-5}\alpha)\delta_r.\end{aligned}$$

Полусвязанная система отличается от связанной поворотом в плоскости xy на угол атаки.

Коэффициенты m_x , m_y , m_z определяются соотношениями

$$\begin{aligned}m_x &= m_x^\beta \beta + m_x^r \delta_r + m_x^a \delta_a + (l/(2\hat{V}))(\pi/180)(m_x^x \omega_x + m_x^y \omega_y), \\m_x^\beta &= -(0.0035 + 0.0001\alpha), \\m_x^r &= -(0.0005 - 0.00003\alpha), \\m_x^a &= -0.0004, \\m_x^x &= -0.61 + 0.004\alpha, \\m_x^y &= -0.3 - 0.012\alpha, \\m_y &= m_y^\beta \beta + m_y^r \delta_r + m_y^a \delta_a + (l/(2\hat{V}))(\pi/180)(m_y^x \omega_x + m_y^y \omega_y), \\m_y^\beta &= -(0.004 + 0.00005\alpha), \\m_y^r &= -(0.00135 - 0.000015\alpha), \\m_y^a &= 0, \\m_y^x &= 0.015\alpha, \\m_y^y &= -0.21 - 0.005\alpha, \\m_z &= 0.033 - 0.017\alpha - 0.013\delta_e + 0.047\delta_{st} - 1.29\omega_z/\hat{V}.\end{aligned}$$

Здесь δ_{st} — отклонение стабилизатора. Стабилизатор — орган управления, функционально эквивалентный рулю высоты. При задании режима полета устанавливаются номинальные значения силы тяги и отклонения руля высоты. Чтобы сделать номинальное отклонения руля высоты нулевым, его заменяют отклонением стабилизатора.

В формулах, определяющих аэродинамические коэффициенты \tilde{c}_x , \tilde{c}_y , \tilde{c}_z , m_x , m_y , m_z , все угловые величины (а именно: α , β , δ_e , δ_r , δ_a , ω_x , ω_y , ω_z , δ_{st}) следует брать в градусах.

В расчетах использовались следующие численные значения:

$$\begin{aligned} m &= 75 \times 10^3 \text{ кг}, & g &= 9.81 \text{ м/с}^2, & S &= 201 \text{ м}^2 \\ l &= 37.55 \text{ м}, & b &= 5.285 \text{ м}, & \rho &= 1.207 \text{ кг/м}^3, \\ I_x &= 2.5 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_y &= 7.5 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_z &= 6.5 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{xy} &= 0.5 \times 10^6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & \sigma &= 1.72 \text{ град}. \end{aligned}$$

4. Инерционность управления. Для учета инерционности управления по рулю высоты, рулю направления и элеронам добавим к основной системе простейшие соотношения

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_e &= k_e(\delta_{es} - \delta_e), \\ \dot{\delta}_r &= k_r(\delta_{rs} - \delta_r), \\ \dot{\delta}_a &= k_a(\delta_{as} - \delta_a). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $k_e = k_r = k_a = 4$ [1/с]. Новыми управляющими воздействиями становятся командные значения δ_{es} , δ_{rs} , δ_{as} .

Инерционность обработки командного сигнала управления силой тяги опишем уравнением

$$\dot{P} = -k_p P + \bar{k}_p(\delta_{ps} + \bar{\delta}_p), \quad (3.3)$$

где $k_p = 1$ [1/с], $\bar{k}_p = 3538$ [Н/с·град], $\bar{\delta}_p = -41.3$ [град]. Такая форма записи ориентирована на случай, когда командный сигнал по силе тяги формируется при помощи ручки механизма управления тягой (ручка сектора газа). Другое описание, аналогичное (3.3), имеет вид

$$\dot{P} = k_p(u_{\delta p} - P), \quad (3.4)$$

где $k_p = 1$ [1/с]. Различие между (3.3) и (3.4) не носит принципиального характера. Соотношение (3.3) используется в задаче о посадке, соотношение (3.4) — в задаче о преодолении препятствия по высоте.

5. Инерционность ветра. Также можно ввести предположение об инерционности ветра:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{xg} &= 0.5(F_x - W_{xg}), \\ \dot{W}_{yg} &= 0.5(F_y - W_{yg}), \\ \dot{W}_{zg} &= 0.5(F_z - W_{zg}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Новыми управляющими воздействиями ветрового возмущения становятся F_x , F_y , F_z .

Предположение об инерционности ветра будет использовано в задаче о посадке при построении стратегии управления, так как иначе, при заданных терминальных множествах, наличие только одной составляющей W_{yg} , стесненной условием $|W_{yg}| \leq 3$ м/с, при остальных компонентах помехи равных нулю, уже приводит к обрыву главного моста т.е. второй игрок при правильном поведении гарантирует уклонение от терминального множества.

3.1.2 Номинальное движение и линеаризация

1. Расчет номинального прямолинейного движения. Ось x_g направим вдоль проекции прямолинейной номинальной траектории на плоскость земли. Режим полета задается при помощи \widehat{V}_0 — номинальной воздушной скорости и Θ — угла наклона траектории. Учитываются также предположения о номинальных значениях компонент скорости ветра. Полагаем равными нулю номинальные углы крена γ_0 и скольжения β_0 , а также угловые скорости ω_{x0} , ω_{y0} , ω_{z0} . На основании этих данных можно рассчитать номинальные скорости движения V_{xg0} и V_{yg0} , углы атаки α_0 , рыскания ψ_0 и тангажа ϑ_0 , силу тяги P_0 и отклонение стабилизатора δ_{st} .

1) При заданной ожидаемой продольной скорости ветра W_{xg0} (значения W_{zg0} , W_{yg0} равны нулю) сначала рассчитываем номинальные скорости по координатам, а также величины q и ε :

$$\begin{aligned} V_{xg0} &= W_{xg0} \cos^2 \Theta + \cos \Theta \sqrt{\widehat{V}_0^2 - W_{xg0}^2 \sin^2 \Theta}, \\ V_{yg0} &= V_{xg0} \operatorname{tg} \Theta, \\ q &= \rho \widehat{V}_0^2 / 2, \\ \varepsilon &= \arcsin(V_{yg0} / \widehat{V}_0). \end{aligned}$$

Поскольку $W_{zg0} = 0$, то $\psi_0 = 0$.

Далее используем итерационную процедуру. Воспользуемся формулами:

$$\vartheta = \alpha + \varepsilon, \quad (3.6)$$

$$P = \frac{qS(\tilde{c}_x \cos(\vartheta - \alpha) + \tilde{c}_y \sin(\vartheta - \alpha))}{\cos \sigma \cos \vartheta - \sin \sigma \sin \vartheta}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{c}_y = \frac{mg - P(\cos \sigma \sin \vartheta - \sin \sigma \cos \vartheta)}{qS \cos(\vartheta - \alpha)} + \frac{\tilde{c}_x \sin(\vartheta - \alpha)}{\cos(\vartheta - \alpha)}, \quad (3.8)$$

$$\tilde{c}_x = 0.21 + 0.004(180/\pi)\alpha + 0.47 \cdot 10^{-3}(180/\pi)^2 \alpha^2, \quad (3.9)$$

$$\tilde{c}_y = 0.65 + 0.09(180/\pi)\alpha. \quad (3.10)$$

Здесь углы берутся в радианах.

На первой итерации полагаем $P_{(0)} = 0$, $\alpha_{(0)} = 0$. Из (3.6) находим $\vartheta_{(0)} = \varepsilon$. Далее переходим к расчету следующей итерации. Порядок вычислений: $\tilde{c}_{x(1)}$ из (3.9), $\tilde{c}_{y(1)}$ из (3.8), $\alpha_{(1)}$ из (3.10), $\vartheta_{(1)} = \alpha_{(1)} + \varepsilon$ из (3.6), $P_{(1)}$ из (3.7). В итоге находим пять величин для следующего шага итерации.

Для задачи о посадке самолета параметры движения следующие:

$$\widehat{V}_0 = 72.2 \text{ м/с}, \quad \Theta = -2.66 \text{ град}, \quad W_{xg0} = -5 \text{ м/с}.$$

Получаемые номинальные значения:

$$\begin{aligned} V_{xg0} &= 67.13 \text{ м/с}, & V_{yg0} &= -3.13 \text{ м/с}, & \alpha_0 &= 5.42 \text{ град}, \\ \vartheta_0 &= 2.94 \text{ град}, & P_0 &= 124500 \text{ Н}, & \delta_{st} &= -1.26 \text{ град}. \end{aligned}$$

Номинальное значение δ_{ps0} определяется из равенства $k_p P_0 = \bar{k}_p(\delta_{ps} + \bar{\delta}_p)$. Получаем $\delta_{ps0} = 76.5$ град. Номинальные значения δ_{es0} , δ_{rs0} , δ_{as0} остальных управлений равны нулю.

Для задачи о преодолении препятствия на этапе горизонтального полета до обнаружения препятствия:

$$\widehat{V}_0 = 70 \text{ м/с}, \quad \Theta = 0 \text{ град}, \quad W_{xg0} = 0 \text{ м/с}.$$

Получаемые номинальные значения:

$$\begin{aligned} V_{xg0} &= 70 \text{ м/с}, & V_{yg0} &= 0 \text{ м/с}, & \alpha_0 &= \vartheta_0 = 6.14 \text{ град}, \\ P_0 &= 151400 \text{ Н}, & \delta_{st} &= -1.52 \text{ град}, & \delta_{es0} &= 0, & u_{\delta p0} &= P_0. \end{aligned}$$

После обнаружения препятствия, для параметров

$$\widehat{V}_0 = 70 \text{ м/с}, \quad \Theta = 4.09 \text{ град}, \quad W_{xg0} = 0 \text{ м/с},$$

используемых при моделировании, получаем

$$\begin{aligned} V_{xg0} &= 69.82 \text{ м/с}, & V_{yg0} &= 4.99 \text{ м/с}, & \alpha_0 &= 5.99 \text{ град}, & \vartheta_0 &= 10.07 \text{ град}, \\ P_0 &= 203300 \text{ Н}, & \delta_{st} &= -1.46 \text{ град}, & \delta_{es0} &= 0, & u_{\delta p0} &= P_0. \end{aligned}$$

2) Если заданы ожидаемые продольная W_{xg0} и боковая W_{zg0} скорости ветра (значение W_{yg0} равно нулю), то можно использовать следующую процедуру. В ней дополнительно определяется номинальный угол рыскания ψ_0 . Вычислим:

$$\begin{aligned} V_{xg0} &= W_{xg0} \cos^2 \Theta + \cos \Theta \sqrt{\widehat{V}_0^2 - W_{zg0}^2 - W_{xg0}^2 \sin^2 \Theta}, \\ V_{yg0} &= V_{xg0} \operatorname{tg} \Theta, \\ \widehat{V}_{xg0} &= V_{xg0} - W_{xg0}, & \widehat{V}_{yg0} &= V_{yg0}, & \widehat{V}_{zg0} &= -W_{zg0}, \\ q &= \rho \widehat{V}_0^2 / 2, \\ \psi_0 &= \operatorname{arctg}(-\widehat{V}_{zg0} / \widehat{V}_{xg0}), \\ \varepsilon &= \operatorname{arcsin} \frac{\widehat{V}_{yg0} \cos \psi_0}{\sqrt{\widehat{V}_{xg0}^2 + \widehat{V}_{yg0}^2 \cos^2 \psi_0}}. \end{aligned}$$

Используем формулы

$$\tilde{c}_y = 0.65 + 0.09(180/\pi)\alpha, \quad (3.11)$$

$$\vartheta = \varepsilon + \operatorname{arcsin} \frac{\widehat{V}_0 \sin \alpha \cos \psi_0}{\sqrt{\widehat{V}_{xg0}^2 + \widehat{V}_{yg0}^2 \cos^2 \psi_0}}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{c}_x = 0.21 + 0.004(180/\pi)\alpha + 0.47 \cdot 10^{-3}(180/\pi)^2 \alpha^2, \quad (3.13)$$

$$c_x = \tilde{c}_x \cos \alpha - \tilde{c}_y \sin \alpha, \quad (3.14)$$

$$P = (mg \sin \vartheta + qS c_x) / \cos \sigma, \quad (3.15)$$

$$c_y = (mg \cos \vartheta - P \sin \sigma) / qS, \quad (3.16)$$

$$\tilde{c}_y = c_y \cos \alpha - c_x \sin \alpha. \quad (3.17)$$

На первой итерации полагаем $\alpha_{(0)} = 0$. Находим $\vartheta_{(0)} = \varepsilon$ из (3.12), $\tilde{c}_{x(0)} = c_{x(0)} = 0.21$ из (3.13) и (3.14), $P_{(0)}$, $c_{y(0)}$, $\tilde{c}_{y(0)}$ получим из (3.15), (3.16), (3.17). Далее вычисляем $\alpha_{(1)}$, $\vartheta_{(1)}$, $\tilde{c}_{x(1)}$, $c_{x(1)}$, $P_{(1)}$, $c_{y(1)}$, $\tilde{c}_{y(1)}$ из (3.11), (3.12), (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.17).

2. Линеаризация нелинейной системы. После расчета номинальных движений проводим линеаризацию нелинейной системы, учитывая соотношения инерционности управления, согласно формулам из [10]. Полученная линейная система практически распадается на две подсистемы: продольно-вертикального и бокового движений. Вертикальный канал не оказывает влияния на боковой, а боковой оказывает влияние на вертикальный, но очень слабое, этим влиянием пренебрегаем.

Фазовые переменные линейных систем записываются с символом Δ , так как это системы в отклонениях. Вычисление номинальных значений скоростей, угла тангажа и силы тяги описано в предыдущем пункте, номинальные значения остальных координат нулевые.

Линейная система вертикального канала имеет вид:

$$\dot{x}^{VM} = A^{VM}x^{VM} + B^{VM}\delta^{VM} + C^{VM}w^{VM}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} x^{VM} &= (\Delta x_g, \Delta V_{xg}, \Delta y_g, \Delta V_{yg}, \Delta \vartheta, \Delta \omega_z, \Delta \delta_e, \Delta P/m)', \\ \delta^{VM} &= (\Delta \delta_{ps}, \Delta \delta_{es})', \quad w^{VM} = (\Delta W_{xg}, \Delta W_{yg})'. \end{aligned}$$

Ненулевые элементы матриц A^{VM} , B^{VM} , C^{VM} определяются по формулам

$$A_{1,2}^{VM} = 1,$$

$$A_{2,2}^{VM} = \frac{q_0 S}{m \widehat{V}_0} \left(-2(c_{x0} \cos \vartheta_0 + c_{y0} \sin \vartheta_0) - \frac{V_{yg0}}{\widehat{V}_0} (c_{x0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y0}^\alpha \sin \vartheta_0) \right),$$

$$A_{2,4}^{VM} = \frac{q_0 S}{m \widehat{V}_0} \left(-2 \frac{V_{yg0}}{\widehat{V}_0} (c_{x0} \cos \vartheta_0 + c_{y0} \sin \vartheta_0) + (c_{x0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y0}^\alpha \sin \vartheta_0) \right),$$

$$\begin{aligned} A_{2,5}^{VM} &= -\frac{P_0}{m} (\cos \sigma \sin \vartheta_0 + \sin \sigma \cos \vartheta_0) + \frac{q_0 S}{m} \left((c_{x0} \sin \vartheta_0 - c_{y0} \cos \vartheta_0) - \right. \\ &\quad \left. - (c_{x0}^\alpha \cos \vartheta_0 + c_{y0}^\alpha \sin \vartheta_0) \right), \end{aligned}$$

$$A_{2,7}^{VM} = \frac{q_0 S}{m} (-c_{x0}^{\delta_e} \cos \vartheta_0 - c_{y0}^{\delta_e} \sin \vartheta_0),$$

$$A_{2,8}^{VM} = \cos \sigma \cos \vartheta_0 - \sin \sigma \sin \vartheta_0,$$

$$A_{3,4}^{VM} = 1,$$

$$A_{4,2}^{VM} = \frac{q_0 S}{m \widehat{V}_0} \left(2(c_{y0} \cos \vartheta_0 - c_{x0} \sin \vartheta_0) + \frac{V_{yg0}}{\widehat{V}_0} (c_{y0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x0}^\alpha \sin \vartheta_0) \right),$$

$$\begin{aligned}
A_{4,4}^{VM} &= \frac{q_0 S}{m \widehat{V}_0} \left(2 \frac{V_{yg0}}{\widehat{V}_0} (c_{y0} \cos \vartheta_0 - c_{x0} \sin \vartheta_0) - (c_{y0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x0}^\alpha \sin \vartheta_0) \right), \\
A_{4,5}^{VM} &= \frac{P_0}{m} (\cos \sigma \cos \vartheta_0 - \sin \sigma \sin \vartheta_0) + \frac{q_0 S}{m} ((-c_{x0} \cos \vartheta_0 - c_{y0} \sin \vartheta_0) + \\
&\quad + (c_{y0}^\alpha \cos \vartheta_0 - c_{x0}^\alpha \sin \vartheta_0)), \\
A_{4,7}^{VM} &= \frac{q_0 S}{m} (c_{y0}^{\delta_e} \cos \vartheta_0 - c_{x0}^{\delta_e} \sin \vartheta_0), \\
A_{4,8}^{VM} &= \cos \sigma \sin \vartheta_0 + \sin \sigma \cos \vartheta_0, \\
A_{5,6}^{VM} &= 1, \\
A_{6,2}^{VM} &= q_0 S b / I_z \cdot V_{yg0} m_{z0}^\alpha / \widehat{V}_0^2, \\
A_{6,4}^{VM} &= q_0 S b / I_z \cdot (-m_{z0}^\alpha) / \widehat{V}_0, \\
A_{6,5}^{VM} &= q_0 S b / I_z \cdot m_{z0}^\alpha, \\
A_{6,6}^{VM} &= q_0 S b / I_z \cdot m_{z0}^{\omega_z}, \\
A_{6,7}^{VM} &= q_0 S b / I_z \cdot m_{z0}^{\delta_e}, \\
A_{7,7}^{VM} &= -k_e, \\
A_{8,8}^{VM} &= -k_p.
\end{aligned}$$

Здесь c_{x0}^α обозначает производную c_x по α в номинальной точке c_{x0} . Другие подобные величины имеют сходное значение.

$$\begin{aligned}
B_{7,2}^{VM} &= k_e, \\
C_{2,1}^{VM} &= -A_{2,2}^{VM}, & C_{2,2}^{VM} &= -A_{2,4}^{VM}, \\
C_{4,1}^{VM} &= -A_{4,2}^{VM}, & C_{4,2}^{VM} &= -A_{4,4}^{VM}, \\
C_{6,1}^{VM} &= -A_{6,2}^{VM}, & C_{6,2}^{VM} &= -A_{6,4}^{VM}.
\end{aligned}$$

В случае использования соотношения (3.3) получаем $B_{8,1}^{VM} = \bar{k}_p / m \cdot 180 / \pi$, при использовании (3.4) имеем $B_{8,1}^{VM} = k_p$.

Линейная система бокового канала:

$$\dot{x}^{LM} = A^{LM} x^{LM} + B^{LM} \delta^{LM} + C^{LM} w^{LM}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
x^{LM} &= (\Delta z_g, \Delta V_{zg}, \Delta \psi, \Delta \omega_y, \Delta \gamma, \Delta \omega_x, \Delta \delta_a, \Delta \delta_r)', \\
\delta^{LM} &= (\Delta \delta_{rs}, \Delta \delta_{as})', & w^{LM} &= \Delta W_{zg}.
\end{aligned}$$

Ненулевые элементы матриц A^{LM} , B^{LM} , C^{LM} :

$$A_{1,2}^{LM} = 1,$$

$$A_{2,2}^{LM} = \frac{q_0 S}{m \widehat{V}_0} c_{z0}^\beta,$$

$$A_{2,3}^{LM} = \frac{q_0 S V_{xg0}}{m \widehat{V}_0} c_{z0}^\beta,$$

$$A_{2,5}^{LM} = \cos \sigma \frac{P_0}{m} + \frac{q_0 S}{m} (c_{y0} + \sin \alpha_0 c_{z0}^\beta),$$

$$A_{2,7}^{LM} = q_0 S / m \cdot c_{z0}^{\delta_a},$$

$$A_{3,4}^{LM} = 1 / \cos \vartheta_0,$$

$$A_{4,2}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J \widehat{V}_0} \left(m_{y0}^\beta \frac{I_x}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,3}^{LM} = \frac{q_0 S l V_{xg0}}{J \widehat{V}_0} \left(m_{y0}^\beta \frac{I_x}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,4}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J} \left(m_{y0}^{\omega_y} \frac{I_x}{J} + m_{x0}^{\omega_y} \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,5}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J} \sin \alpha_0 \left(m_{y0}^\beta \frac{I_x}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,6}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J} \left(m_{y0}^{\omega_x} \frac{I_x}{J} + m_{x0}^{\omega_x} \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,7}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J} \left(m_{y0}^{\delta_a} \frac{I_x}{J} + m_{x0}^{\delta_a} \frac{I_{xy}}{J} \right),$$

$$A_{4,8}^{LM} = \frac{q_0 S l}{J} m_{x0}^{\delta_r} \frac{I_{xy}}{J},$$

$$A_{5,4}^{LM} = -\operatorname{tg} \vartheta_0,$$

$$A_{5,6}^{LM} = 1,$$

$$\begin{aligned}
A_{6,2}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J \widehat{V}_0} \left(m_{y0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,3}^{LM} &= \frac{q_0 Sl V_{xg0}}{J \widehat{V}_0} \left(m_{y0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,4}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J} \left(m_{y0}^{\omega_y} \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^{\omega_y} \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,5}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J} \sin \alpha_0 \left(m_{y0}^\beta \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^\beta \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,6}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J} \left(m_{y0}^{\omega_x} \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^{\omega_x} \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,7}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J} \left(m_{y0}^{\delta_a} \frac{I_{xy}}{J} + m_{x0}^{\delta_a} \frac{I_y}{J} \right), \\
A_{6,8}^{LM} &= \frac{q_0 Sl}{J} m_{x0}^{\delta_r} \frac{I_y}{J}, \\
A_{7,7}^{LM} &= -k_a, \\
A_{8,8}^{LM} &= -k_r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{7,1}^{LM} &= k_a, & B_{8,2}^{LM} &= k_r, \\
C_{2,1}^{LM} &= -A_{2,2}^{LM}, & C_{4,1}^{LM} &= -A_{4,2}^{LM}, \\
C_{6,1}^{LM} &= -A_{6,2}^{LM}.
\end{aligned}$$

Отметим, что при вычислении номинальных значений аэродинамических коэффициентов сил и моментов, а также номинальных значений для их производных угловые величины следует брать в радианах.

В вертикальном канале управляющими воздействиями являются командное отклонение руля высоты $\Delta \delta_{es}$ и командное отклонение силы тяги ($\Delta \delta_{ps}$ при использовании уравнения (3.3) и $\Delta u_{\delta p}$ в случае (3.4)), возмущение — продольный ΔW_{xg} и вертикальный ΔW_{yg} ветер. Есть еще одно управление — стабилизатор δ_{st} , эквивалентный рулю высоты. Полагаем, что он устанавливается в номинальное положение и при моделировании не меняется. В боковом канале управляющие воздействия — командные отклонения руля направления $\Delta \delta_{rs}$ и элеронов $\Delta \delta_{as}$, возмущение — боковой ветер ΔW_{zg} .

Для задачи о посадке самолета, при рассчитанных ранее параметрах

номинального движения, получаем матрицы:

$$A^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0501 & 0 & -0.0973 & -2.6422 & 0 & 0.0628 & 0.9971 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2409 & 0 & -0.6387 & 45.2782 & 0 & 1.4479 & 0.0813 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0003 & 0 & 0.0069 & -0.5008 & -0.5263 & -0.3830 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$C^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0501 & 0 & -0.2409 & 0 & -0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0973 & 0 & 0.6387 & 0 & -0.0069 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$A^{LM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0769 & -5.5553 & 0 & 9.2719 & 0 & -1.4853 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0129 & -0.9339 & -0.2588 & -0.0883 & -0.0303 & -0.2456 & -0.0460 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0514 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0331 & -2.3865 & -0.9534 & -0.2256 & -1.4592 & -0.2327 & -0.6894 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^{LM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}'$$

$$C^{LM} = [0 \ 0.0769 \ 0 \ 0.0129 \ 0 \ 0.0331 \ 0 \ 0]'$$

Для задачи о преодолении препятствия, при горизонтальном полете:

$$A^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0752 & 0 & -0.0350 & -7.835 & 0 & 0.0627 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3175 & 0 & -0.574 & 40.04 & 0 & 1.4479 & 0.08 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00048 & 0 & 0.00647 & -0.4362 & -0.4912 & -0.383 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$C^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0752 & 0 & -0.3175 & 0 & 0.00048 & 0 & 0 \\ 0 & 0.035 & 0 & 0.574 & 0 & -0.00647 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

На этапе обхода препятствия, при заданных условиях моделирования (описанных в разделе 3.3):

$$A^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0738 & 0 & -0.0337 & -7.826 & 0 & 0.0971 & 0.9789 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3083 & 0 & -0.5970 & 43.11 & 0 & 1.3588 & 0.2044 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00048 & 0 & 0.00672 & -0.4707 & -0.5103 & -0.3600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

$$C^{VM} = \begin{bmatrix} 0 & 0.0738 & 0 & -0.3083 & 0 & 0.00048 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0337 & 0 & 0.5970 & 0 & -0.00672 & 0 & 0 \end{bmatrix}'.$$

3.1.3 Модель микровзрыва ветра

При моделировании в качестве ветровой помехи часто будем брать модель микровзрыва ветра. Микровзрыв ветра — это природное явление, которое возникает, когда нисходящий поток воздуха ударяется о землю и далее расходится горизонтально с образованием вихрей. Когда самолет проходит зону микровзрыва, сначала он попадает в поток встречного ветра, который в течение достаточно быстрого времени — десятков секунд — меняется на нисходящий, затем на попутный. Такое изменение является очень сложным с точки зрения аэродинамики самолета. Встречный поток воздуха увеличивает воздушную скорость и, соответственно, подъемную силу, попутный или нисходящий поток — наоборот. Резкая смена направления ветра со встречного на попутный приводит к резкому падению подъемной силы.

Для моделирования используется модель микровзрыва ветра из статьи [69]. Модель основана на теории гидродинамики. В пространстве задается тор, рис. 3.2. Вне тора создается турбулентность, внутри же происходит пропорциональное уменьшение скорости ветра при приближении к основному кольцу тора. Параметры микровзрыва: \mathcal{V} — скорость ветра в центральной точке (эта скорость не является максимальной, у края тора скорость ветра может быть до двух раз больше), h — высота центральной точки, R — радиус основного кольца тора, $R_C = 0.8h$ — радиус кольца тора, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0 — положение центра тора в плоскости земли.

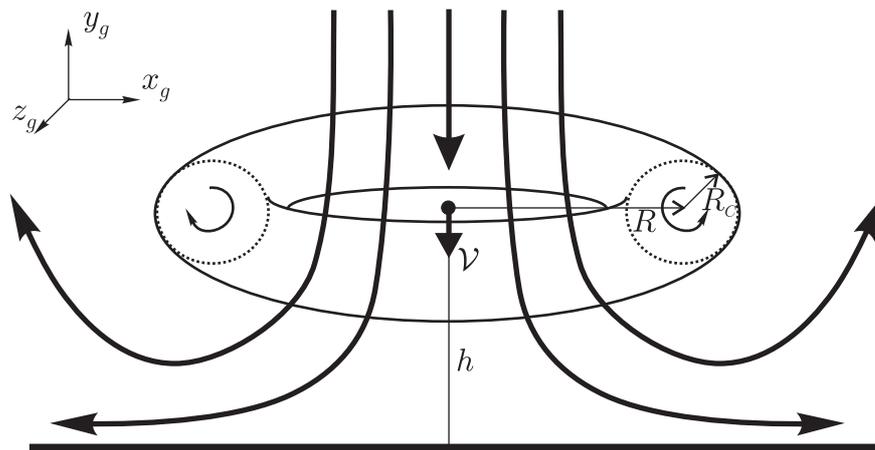


Рис. 3.2: Модель микровзрыва ветра.

3.2 Задача о посадке самолета

3.2.1 Постановка задачи

Известно, что самыми сложными и опасными этапами полета являются взлет и посадка. Применение метода адаптивного управления к задаче о посадке является естественным: во-первых, требуется гарантированное успешное завершение движения вне зависимости от действий ветровой помехи (заклученной в разумных пределах); во-вторых, в большинстве случаев ветер не является экстремальным, тогда требуется обеспечить небольшие управляющие воздействия и небольшие перегрузки.

Будем рассматривать предпоследний этап захода на посадку, когда самолет снижается по прямолинейной глиссаде. Этот этап заканчивается при пересечении торца взлетно-посадочной полосы (ВПП), рис. 3.3. За ним следует снижение до касания шасси, короткий период пробег на колесах главной стойки шасси, затем этап пробег на всех колесах.

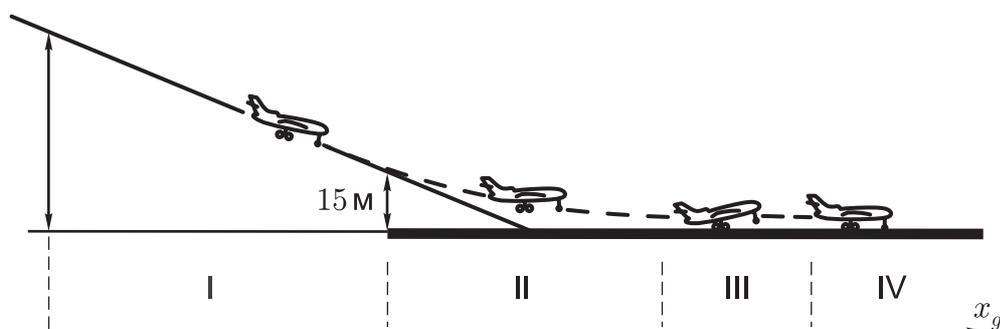


Рис. 3.3: Этапы посадки самолета.

1. Моделирование движения. Моделирование движения самолета проводится в исходной нелинейной системе (3.1) с добавлением уравнений (3.2), (3.3), учитывающих инерционность отработки управляющих воздействий.

2. Глиссада и прогнозируемое обратное время. Из точки, расположенной на высоте 15 м над торцом ВПП, выпускаем под углом $2^\circ 40'$ прямолинейную глиссаду — номинальную траекторию движения. Рассчитываем параметры номинального движения по глиссаде.

Вводится прогнозируемое обратное время $\tilde{\tau} = (x_{RW} - x_g(t))/V_{xg}(t)$, где x_{RW} — положение торца ВПП. Моментом останова моделирования, соответственно, считаем $\tilde{\tau} = 0$.

3. Предположение об инерционности ветра. Проводится линеаризация нелинейной системы относительно номинального движения. Затем добавляем к линеаризованным системам уравнения инерционности ветра (3.5).

Добавление уравнений инерционности ветра приводит к появлению в линейных системах трех новых фазовых переменных — компонент скорости ветра, которые при построении управления требуется как-то задавать. Если считать, что скорость ветра замеряется, то эти переменные при построении управления задаются точно. Если нет, полагаем их нулевыми. В дальнейшем будем использовать первый вариант. Различия при моделировании первого и второго вариантов представлены в разделе 3.2.2.

4. Вспомогательные дифференциальные игры. Ставятся две вспомогательные линейные дифференциальные игры с фиксированным моментом окончания.

Для вертикального канала:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{VM} &= A^{VM+}x^{VM} + B^{VM+}\delta^{VM} + C^{VM+}F^{VM}, \\ x^{VM} &\in R^{10}, \quad t \in [-\tau_0, 0], \quad x^{VM}(0) \in M^{VM}, \\ |\Delta\delta_{ps}| &\leq \delta_{ps}^*, \quad |\Delta\delta_{es}| \leq \delta_{es}^*, \quad |F_x^{VM}| \leq W_{xg}^*, \quad |F_y^{VM}| \leq W_{yg}^*. \end{aligned}$$

Здесь x^{VM} — 10-мерный фазовый вектор, включающий шесть фазовых переменных, две переменные, описывающие инерционность управления, и две переменные, описывающие инерционность ветра. Матрицы A^{VM+} , B^{VM+} ,

C^{VM+} соответствуют матрицам A^{VM} , B^{VM} , C^{VM} с добавлением к ним соотношений, описывающих инерционность ветра. Через τ_0 обозначается время, необходимое для достижения торца ВПП при номинальном движении. Полезное управление и помеха ограничены значениями

$$\begin{aligned} \delta_{ps}^* &= 0.47 \text{ рад (27 град)}, & \delta_{es}^* &= 0.17 \text{ рад (10 град)}, \\ W_{xg}^* &= 6 \text{ м/с}, & W_{yg}^* &= 4 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Целевое множество M^{VM} представляет собой шестиугольник в пространстве $y_g \times V_{yg}$ с вершинами

$$(-3, 0), (-3, 1), (0, 1), (3, 0), (3, -1), (0, -1).$$

Момент окончания полагаем равным нулю. Ограничения на помеху трактуются как “предполагаемые”, “разумно заданные”. Их описание требуется для построения адаптивного управления.

Для бокового канала:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{LM} &= A^{LM+}x^{LM} + B^{LM+}\delta^{LM} + C^{LM+}F^{LM}, \\ x^{LM} &\in R^9, \quad t \in [-\tau_0, 0], \quad x^{LM}(0) \in M^{LM}, \\ |\Delta\delta_{rs}| &\leq \delta_{rs}^*, \quad |\Delta\delta_{as}| \leq \delta_{as}^*, \quad |F_z^{LM}| \leq W_{zg}^*. \end{aligned}$$

Здесь x^{LM} — 9-мерный фазовый вектор, включающий шесть фазовых переменных, две переменные, описывающие инерционность управления, и одну, описывающую инерционность ветра. Полезное управление и помеха ограничены значениями

$$\delta_{rs}^* = 0.17 \text{ рад (10 град)}, \quad \delta_{as}^* = 0.17 \text{ рад (10 град)}, \quad W_{zg}^* = 10 \text{ м/с}.$$

Целевое множество M^{LM} представляет собой шестиугольник в пространстве $z_g \times V_{zg}$ с вершинами

$$(-6, 0), (-6, 1.5), (0, 1.5), (6, 0), (6, -1.5), (0, -1.5).$$

Так как стабильные мосты в рассматриваемых играх значительно изменяются только на некотором начальном промежутке обратного времени $\tau = -t$, а затем лишь монотонно увеличиваются, будем вычислять их только до момента $\tau = 15$ с. Момент $\tau = 15$ с соответствует времени номинального прохождения высоты принятия решения (60 м), после которой прерывать процесс посадки запрещено. Для бóльших моментов τ будем

брать сечение, найденное для $\tau = 15$ с. Положение в плоскости эквивалентной игры при $\tau > 15$ с будем задавать при помощи фундаментальной матрицы, вычисленной в момент $\tau = 15$ с.

Отметим также, что при построении управления вместо абсолютного обратного времени используем прогнозируемое обратное время $\tilde{\tau}$, которое зависит от продольной скорости и, соответственно, изменяется неравномерно. Это приводит к некоторым дополнительным погрешностям.

5. Построение управления. С помощью стандартного преобразования перейдем к эквивалентным играм вида (1.2).

Для вертикального канала:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^{VM} &= D^{VM+}(t)\delta^{VM} + E^{VM+}(t)F^{VM}, \\ \xi^{VM} &\in R^2, \quad t \in [-\tau_0, 0], \quad \xi^{VM}(0) \in M^{VM}, \\ |\Delta\delta_{ps}| &\leq \delta_{ps}^*, \quad |\Delta\delta_{es}| \leq \delta_{es}^*, \quad |F_x^{VM}| \leq W_{xg}^*, \quad |F_y^{VM}| \leq W_{yg}^*.\end{aligned}$$

Здесь фазовый вектор ξ^{VM} в момент окончания совпадает с вектором, составленным из третьей и четвертой координат (вертикальное отклонение Δy_g и вертикальная скорость ΔV_{yg}) исходной системы вертикального канала.

Для бокового канала:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^{LM} &= D^{LM+}(t)\delta^{LM} + E^{LM+}(t)F^{LM}, \\ \xi^{LM} &\in R^2, \quad t \in [-\tau_0, 0], \quad \xi^{LM}(0) \in M^{LM}, \\ |\Delta\delta_{rs}| &\leq \delta_{rs}^*, \quad |\Delta\delta_{as}| \leq \delta_{as}^*, \quad |F_z^{LM}| \leq W_{zg}^*.\end{aligned}$$

Двумерный фазовый вектор ξ^{LM} в момент окончания совпадает с вектором, составленным из первой и второй координат (боковое отклонение Δz_g и боковая скорость ΔV_{zg}) исходной системы бокового канала.

В двух указанных играх строим главный и дополнительный стабильные мосты. На их основе по формуле (1.7) раздела 1.4 получаем семейство множеств $\{W_k\}$.

Далее строим адаптивное управление на основе экстремального прицеливания по правилу, описанному в разделе 1.7. Внутри главного моста уровень управления выбирается пропорционально расстоянию до его границы, вне — максимально возможный.

На рис. 3.4 и 3.5 показаны сечения главного моста для вертикального и бокового каналов.

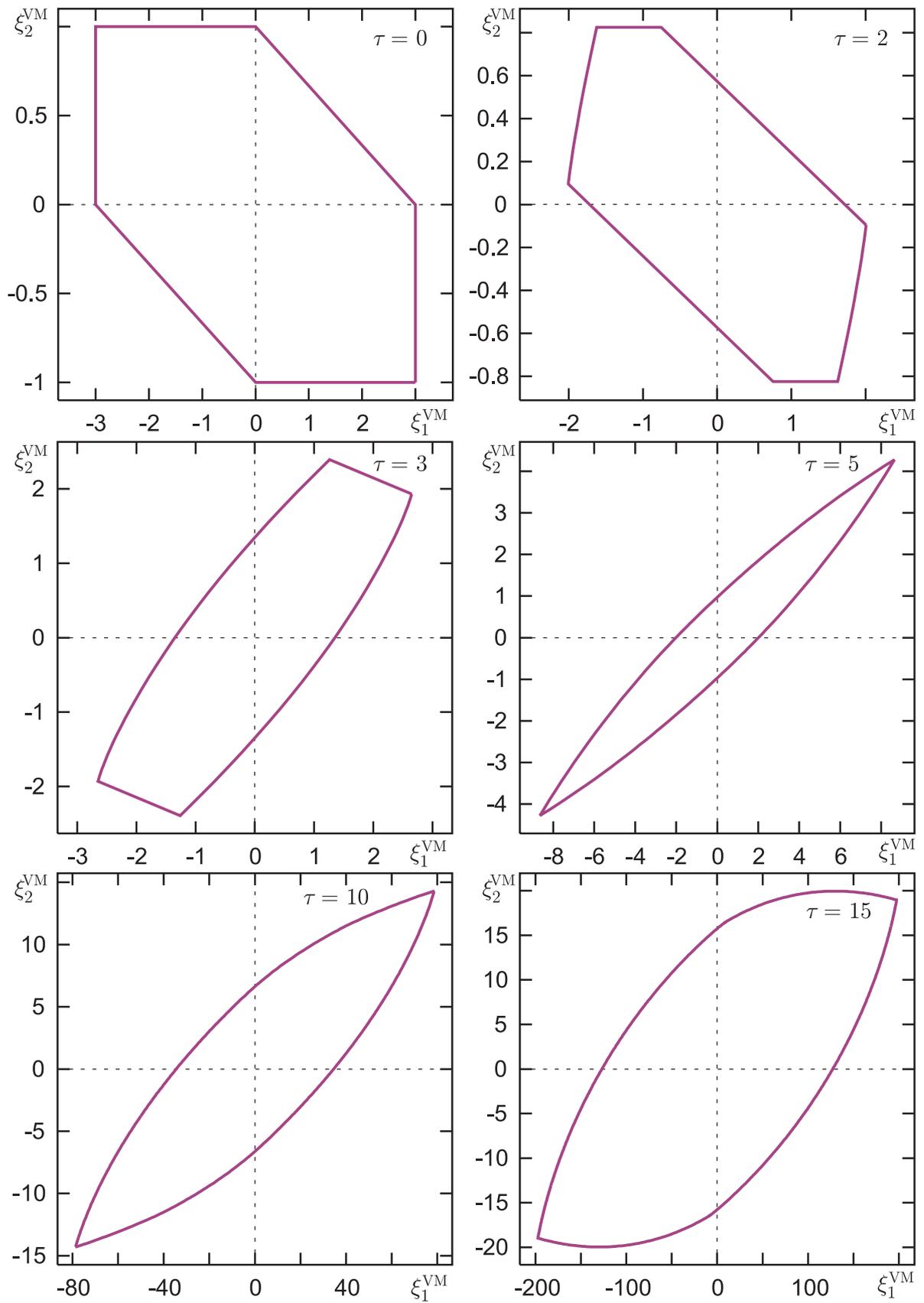


Рис. 3.4: Несколько сечений главного моста вертикального канала.

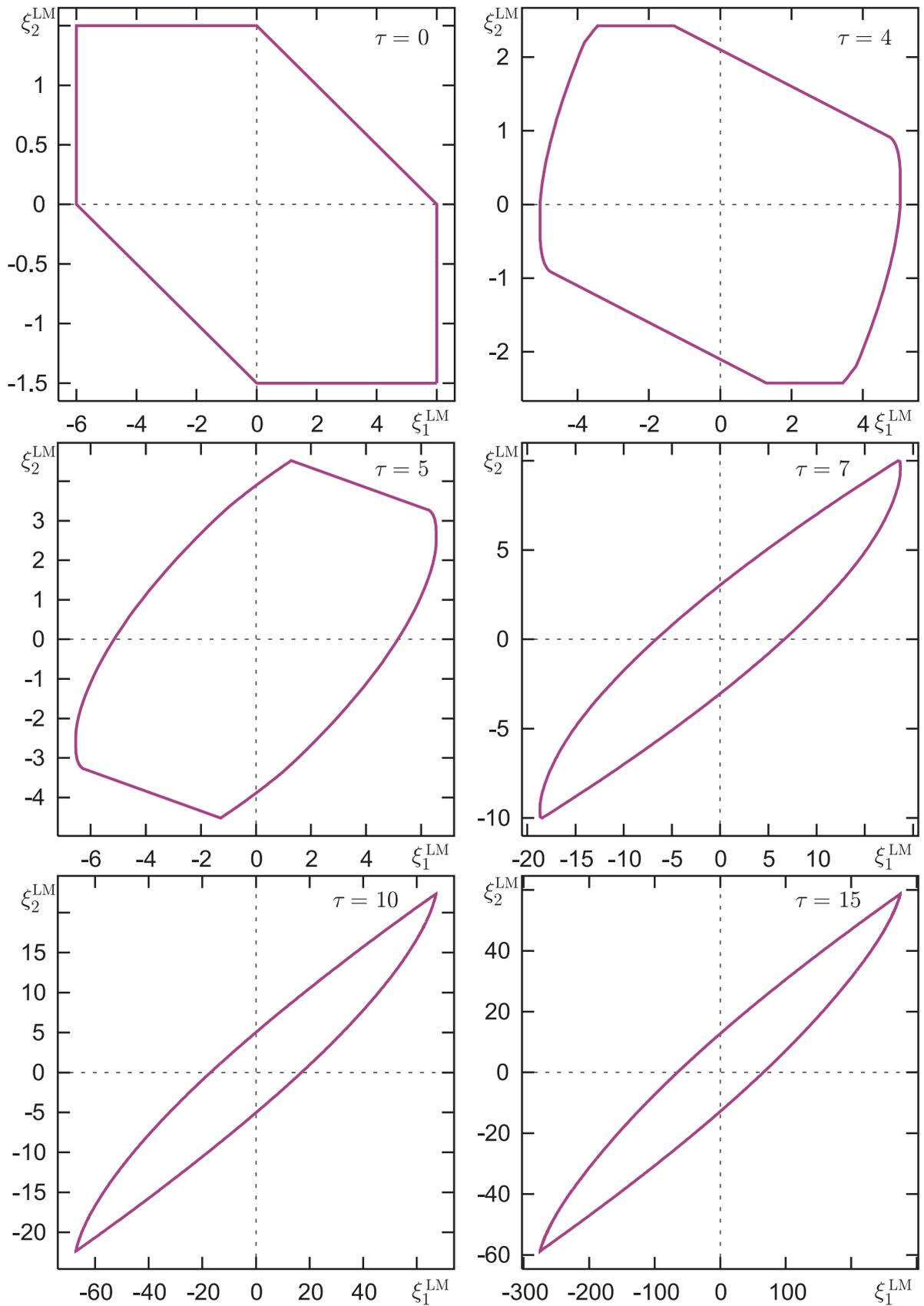


Рис. 3.5: Несколько сечений главного моста бокового канала.

3.2.2 Влияние нелинейностей и предположения об измерении скорости ветра

В этом разделе собраны сравнительные результаты моделирования, которые позволяют оценить влияние отклонений от стандартной линейной дифференциальной игры, используемой для построения управления.

При переходе к линейной системе учитываем дополнительно три уравнения, описывающие инерционность ветра. Мы можем считать, что скорость ветра измеряется точно, и тогда при построении управления трем новым фазовым переменным придаем их истинное значение. Либо можем считать, что ветер нам неизвестен, и полагать эти переменные нулевыми.

Начальная точка: 8000 м от торца ВПП по оси x_g , 40 м вверх и 80 м вбок от глиссады.

На рис. 3.6 представлены результаты моделирования линейной системы бокового канала, проведенного при постоянном ветре $W_{zg} = 8$ м/с. Линии красного цвета соответствуют ситуации с измерением скорости ветра, зеленого — без измерения. На рисунке показаны: траектория системы в плоскости эквивалентной игры (с увеличенным фрагментом участка с терминальным множеством), фазовая траектория системы в плоскости $\Delta z_g \times \Delta V_{zg}$ (также с увеличенным фрагментом), графики управлений. Для последних по горизонтальной оси откладываем прямое время, возрастающее от нулевого начального момента.

Как видно, траектории очень похожи и идут достаточно близко, кроме промежутка близкого к моменту окончания, где они расходятся. Расхождение достаточно сильное и приводит к терминальному промаху.

Моделирование движения в рамках нелинейной системы демонстрирует другой характер отклонения от идеализированного результата. Считаем, что скорость ветра замеряется. Результаты моделирования представлены на рис. 3.7. Ветровое возмущение бралось из модели микровзрыва. Красный цвет соответствует движению нелинейной системы, зеленого — линейной. Приведены графики траекторий и управлений в вертикальном канале.

Хотя видны расхождения в траекториях, терминальные точки оказываются достаточно близко, иногда за счет чуть более сильного управления.

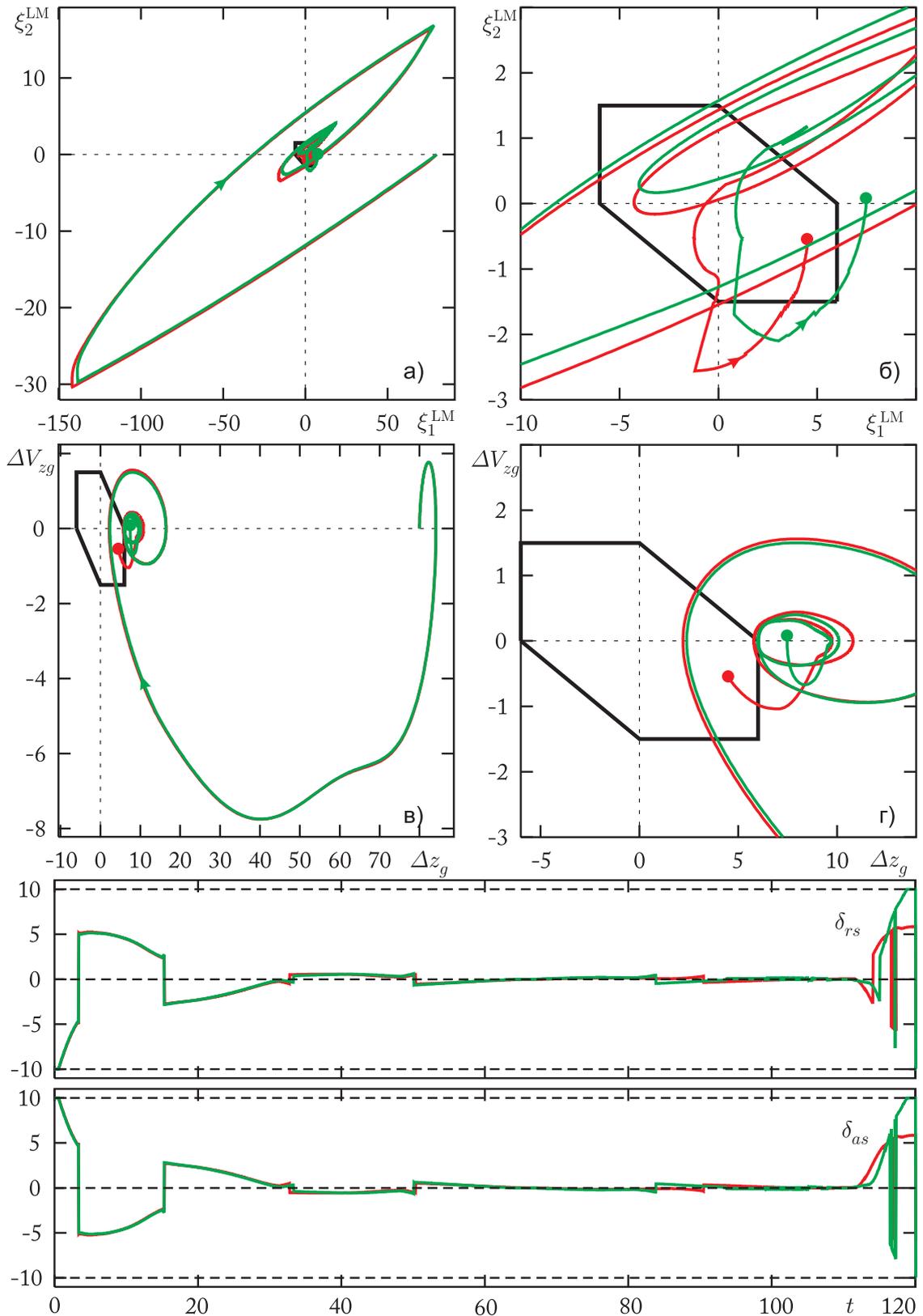


Рис. 3.6: Влияние измерения скорости ветра на результаты моделирования линейной системы бокового канала: а) траектория в координатах эквивалентной системы, б) увеличенный фрагмент с терминальным множеством, в) траектория в координатах $\Delta z_g \times \Delta V_{zg}$, г) увеличенный фрагмент; графики управлений. Красный цвет — с измерением скорости ветра, зеленый — без измерения.

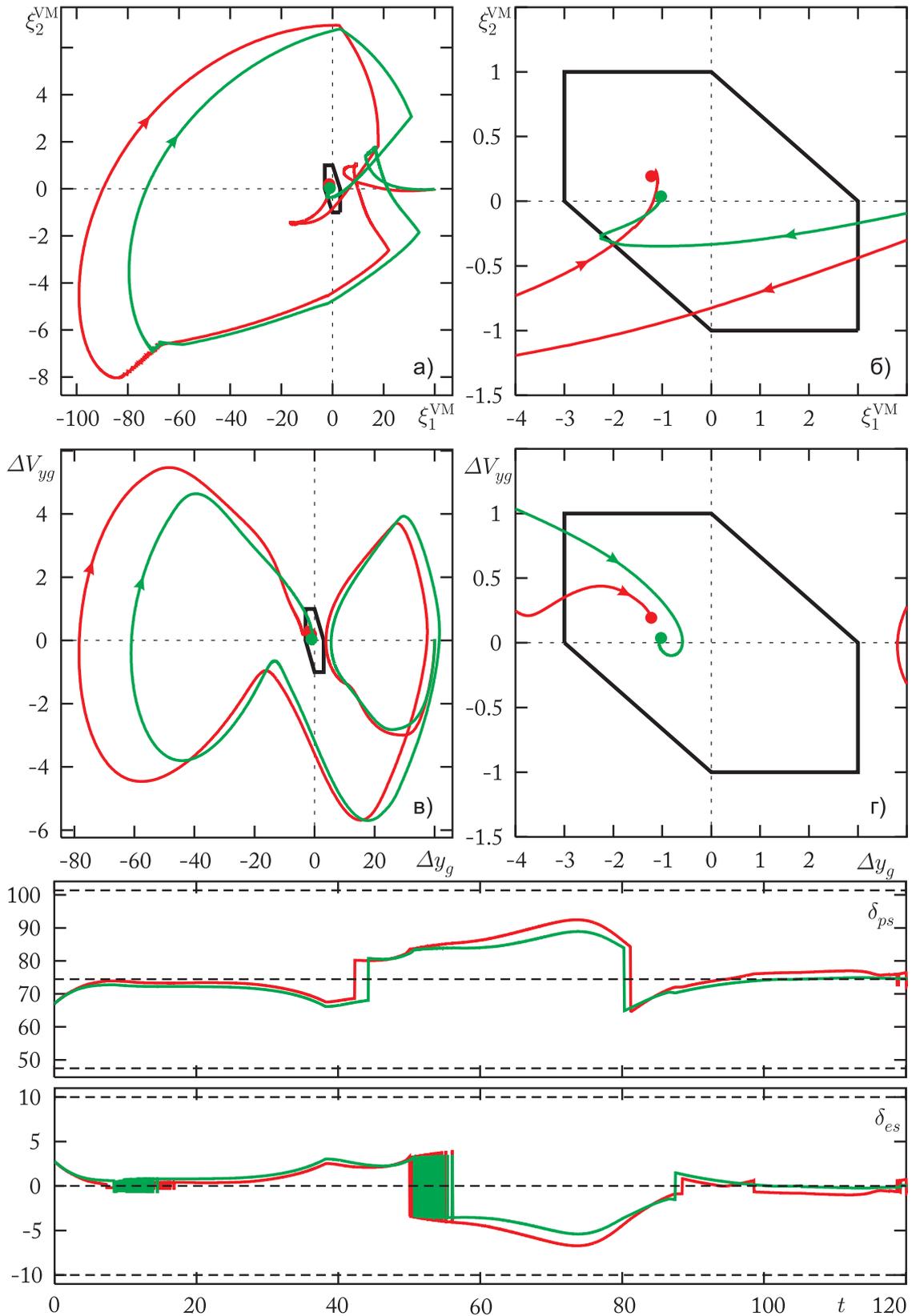


Рис. 3.7: Влияние нелинейности системы на результаты моделирования вертикального канала: а) траектория в координатах эквивалентной системы, б) увеличенный фрагмент с терминальным множеством, в) траектория в координатах $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$, г) увеличенный фрагмент; графики управлений. Красный цвет — нелинейная система, зеленый — линейная.

3.2.3 Результаты моделирования при микровзрыве ветра

Представим результаты моделирования при двух вариантах микровзрыва ветра. Параметры микровзрыва 1: скорость в центральной точке — 10 м/с, радиус основного кольца тора — 1200 м, высота центральной точки — 600 м, расстояние от ВПП по продольной координате (вдоль глиссады) — 4000 м, боковое отклонение от линии глиссады — 500 м. Микровзрыв 2 отличается большей скоростью ветра — 15 м/с — и более близким расположением его центра к ВПП — 2500 м. Т.е. второй микровзрыв является более сильным.

Моделирование проводится в нелинейной системе. При построении управления считаем, что скорость ветра замеряется.

Начальное положение расположено по оси x_g на расстоянии 8000 м от торца ВПП и отклонено от номинальной позиции на 40 м вверх и на 80 м в сторону.

Ниже на всех рисунках зеленой линией обозначены траектории и графики, порожденные микровзрывом 1, красной — микровзрывом 2. Терминальные множества показаны жирной черной линией. На графиках полезного управления черными пунктирными линиями обозначены максимально допустимые ограничения и номинальное значение, на графиках ветрового возмущения — ожидаемые максимальные значения и номинал, на графиках изменения фазовых координат только одна пунктирная линия — номинальное значение.

На рис. 3.8 приведены результаты, относящиеся к вертикальному каналу. Показаны: траектории движения в координатах двумерной эквивалентной системы, на соседнем графике — увеличенный фрагмент с терминальным множеством; траектории движения на фазовой плоскости $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$, также с увеличенным фрагментом; графики управлений вертикального канала — ручки силы тяги δ_{ps} и командного положения руля высоты δ_{es} . На рис. 3.9 аналогично приведены результаты для бокового канала. На рис. 3.10 — графики высоты y_g и бокового отклонения z_g , графики компонент W_{xg} , W_{yg} , W_{zg} ветрового возмущения. Графики остальных фазовых переменных представлены в приложении.

Видно, что скорость ветра на некоторых участках значительно превышала ожидаемые значения. Несмотря на это, в случае слабого микровзрыва управление успешно справилось с возмущением, движения пришли на терминальные множества в обоих каналах. Формально, и при сильном микровзрыве терминальные условия выполнены. Обратим, однако, внимание на

график изменения высоты — он показывает неудовлетворительный результат. Примерно за 20 сек до момента пролета торца ВПП происходит столкновение с землей. Объяснение: очень существенное изменение продольной и вертикальной составляющих скорости ветра произошло на небольшой высоте. Проявился также и недостаток нашего метода: мы не можем напрямую учесть фазовое ограничение по высоте.

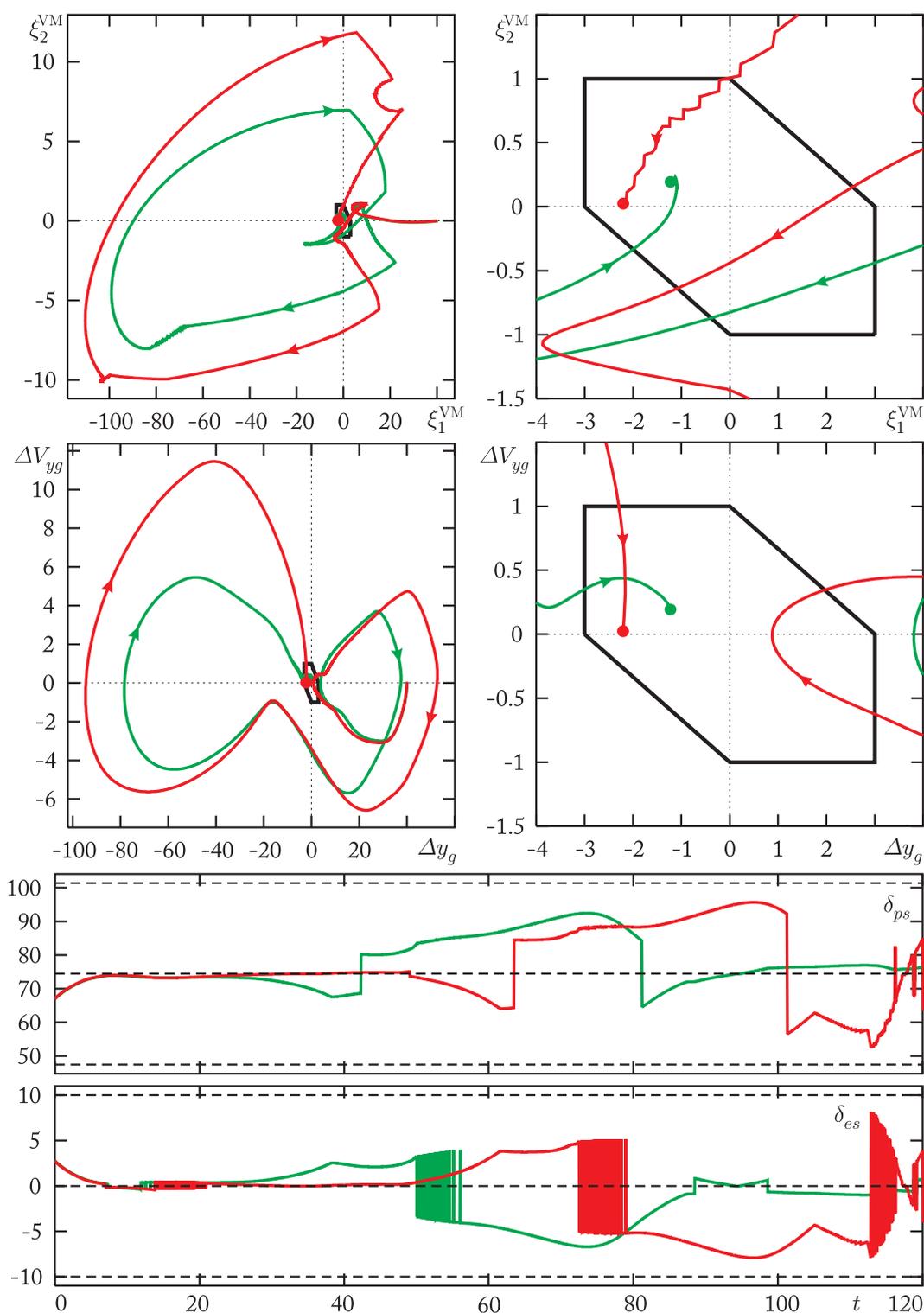


Рис. 3.8: Моделирование с микровзрывом ветра. Траектории вертикального канала: слева — траектории в координатах эквивалентной системы и траектории на фазовой плоскости $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$, справа — увеличенные фрагменты вблизи терминального множества, внизу — графики командных отклонений ручки силы тяги δ_{ps} (град) и руля высоты δ_{es} (град). Зеленый цвет — микровзрыв 1, красный — микровзрыв 2.

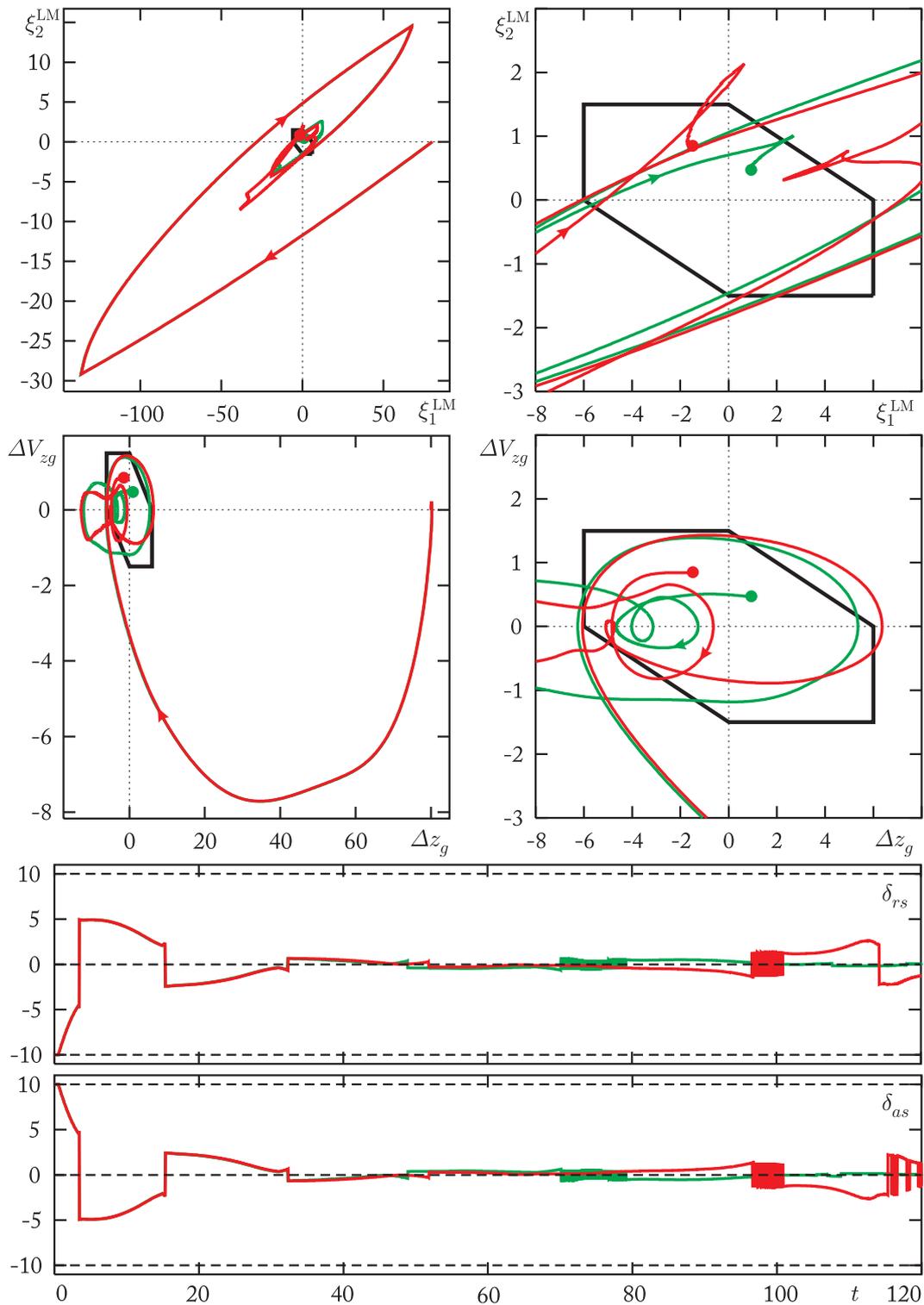


Рис. 3.9: Моделирование с микровзрывом ветра. Траектории бокового канала: слева — траектории в координатах эквивалентной системы и траектории на фазовой плоскости $\Delta z_g \times \Delta V_{zg}$, справа — увеличенные фрагменты вблизи терминального множества, внизу — графики командных отклонений руля высоты δ_{rs} (град) и элеронов δ_{as} (град). Зеленый цвет — микровзрыв 1, красный — микровзрыв 2.

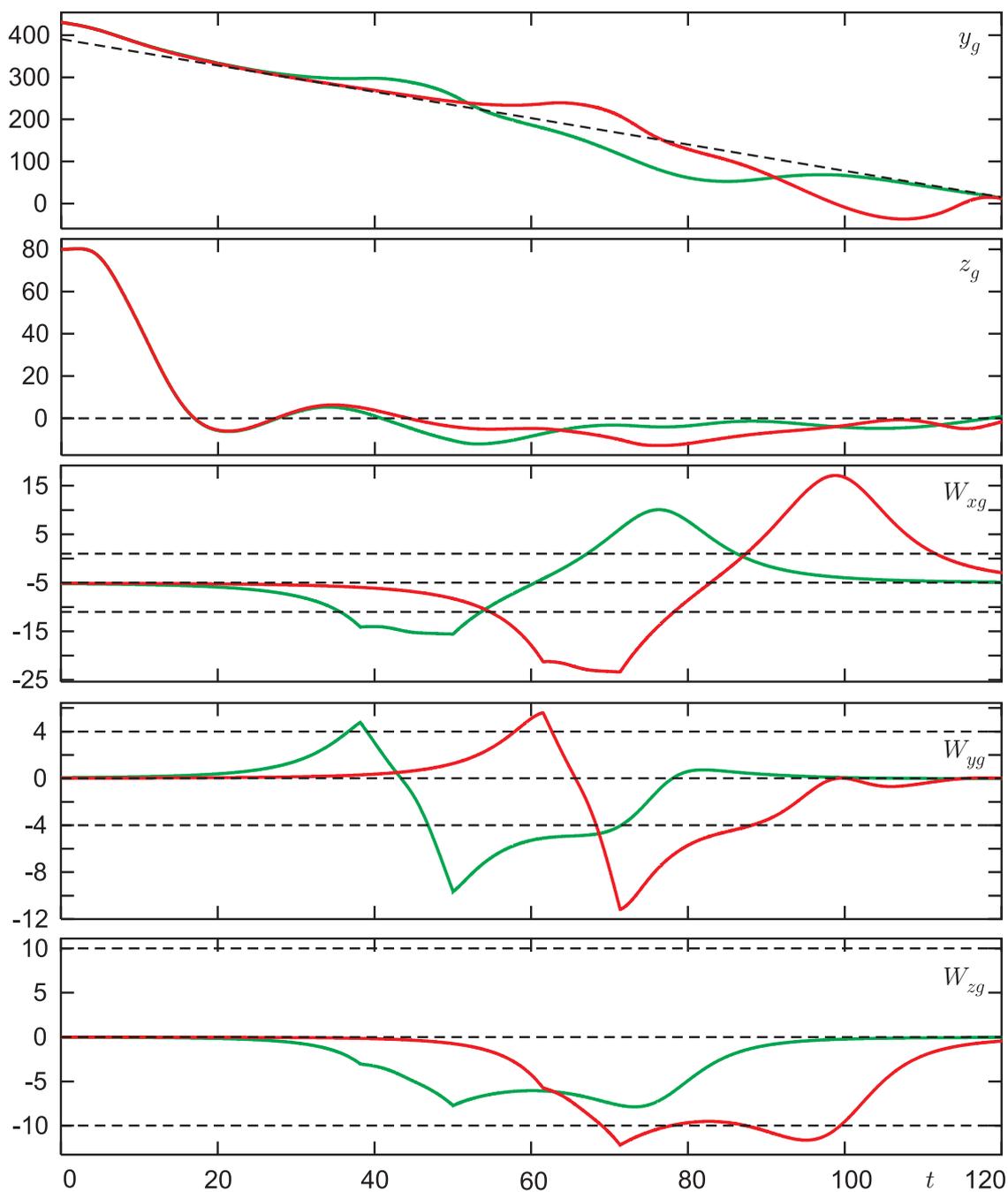


Рис. 3.10: Моделирование с микровзрывом ветра. Графики: высоты y_g (м), бокового отклонения z_g (м), продольной W_{xg} (м/с), вертикальной W_{yg} (м/с) и боковой W_{zg} (м/с) компонент скорости ветра. Зеленый цвет — микровзрыв 1, красный — микровзрыв 2.

3.2.4 Результаты моделирования при постоянном ветре

В этом разделе представлены результаты для трех вариантов постоянного ветра. Вариант 1: $W_{xg} = W_{yg} = W_{zg} = 0$ — ветер отсутствует. Вариант 2: $W_{xg} = 6$, $W_{yg} = 0$, $W_{zg} = 7$ — продольный попутный ветер равный максимально ожидаемому, вертикальный ветер отсутствует, боковой ветер меньше максимально ожидаемого 10 м/с. Вариант 3: $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -4$, $W_{zg} = -7$ — вертикальный нисходящий ветер равный максимально ожидаемому, продольный ветер отсутствует, боковой ветер направлен в другую сторону по сравнению с предыдущим вариантом.

Начальная точка такая же, как и в предыдущем разделе.

На всех рисунках, представленных ниже, зеленой линией обозначаются траектории и графики, соответствующие варианту 1, синей — варианту 2, красной — варианту 3. Жирной черной линией показаны терминальные множества. На графиках полезного управления черными пунктирными линиями обозначены максимально допустимые ограничения и номинальное значение, на графиках ветрового возмущения — ожидаемые максимальные значения и номинал, на графиках фазовых координат только одна пунктирная линия — номинальное значение.

На рис. 3.11 приведены результаты, относящиеся к вертикальному каналу. Показаны: траектории движения нелинейной системы в координатах двумерной эквивалентной игры, на соседнем графике — увеличенный фрагмент с терминальным множеством; траектории движения на фазовой плоскости $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$, также с увеличенным фрагментом; графики управлений вертикального канала — ручки силы тяги δ_{ps} и командного положения руля высоты δ_{es} . На рис. 3.12 аналогично приведены результаты для бокового канала. На рис. 3.13 — графики высоты y_g и бокового отклонения z_g , графики компонент W_{xg} , W_{yg} , W_{zg} ветрового возмущения. Графики остальных фазовых переменных представлены в приложении.

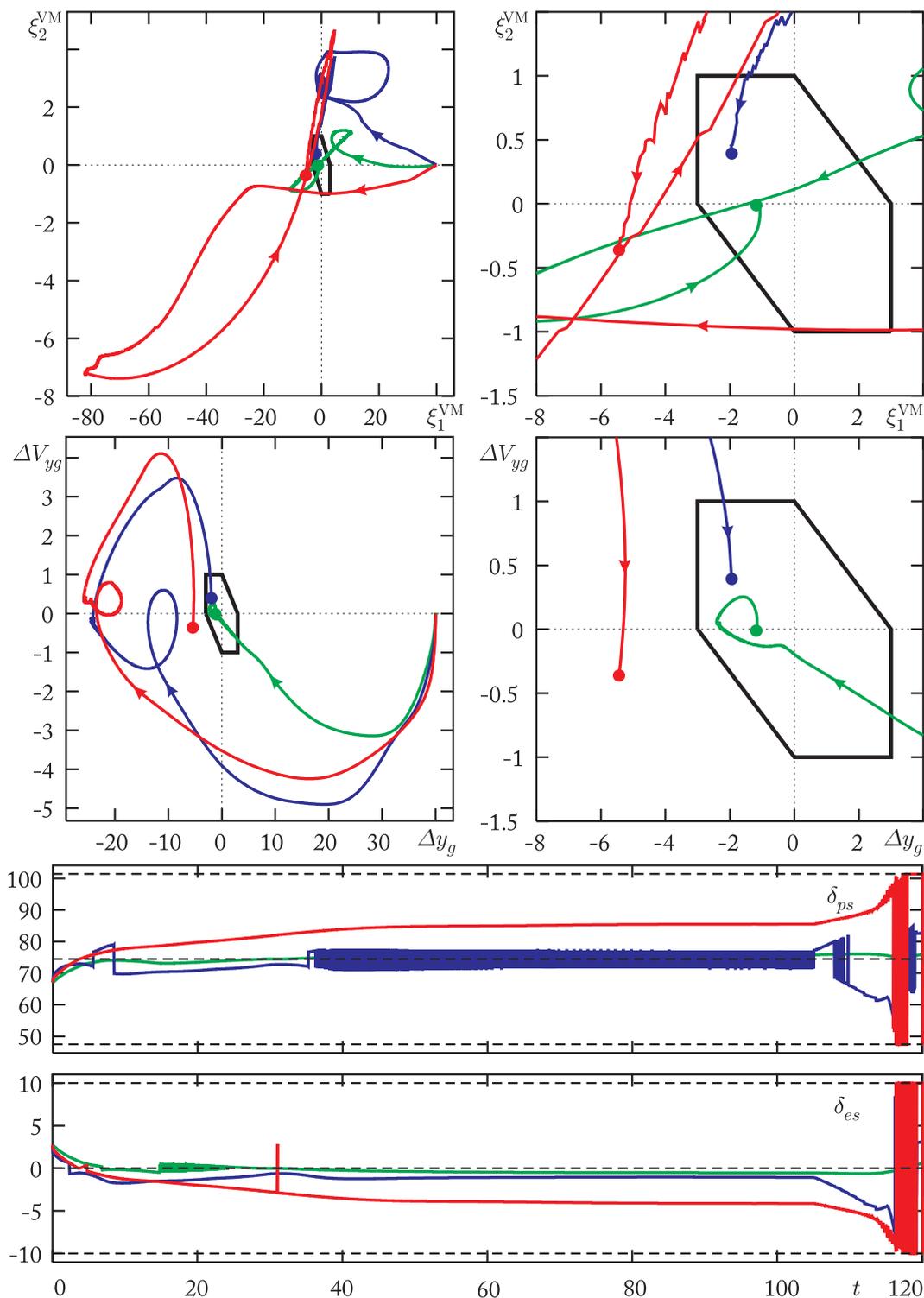


Рис. 3.11: Моделирование при постоянном ветре. Траектории вертикального канала: слева — траектории в координатах эквивалентной системы и траектории на фазовой плоскости $\Delta y_g \times \Delta V_{yg}$, справа — увеличенные фрагменты вблизи терминального множества, внизу — графики командных положений ручки силы тяги δ_{ps} (град) и руля высоты δ_{es} (град). Зеленый цвет соответствует ветровой помехе $W_{xg} = W_{yg} = W_{zg} = 0$, синий — $W_{xg} = 6$, $W_{yg} = 0$, $W_{zg} = 7$, красный — $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -4$, $W_{zg} = -7$.

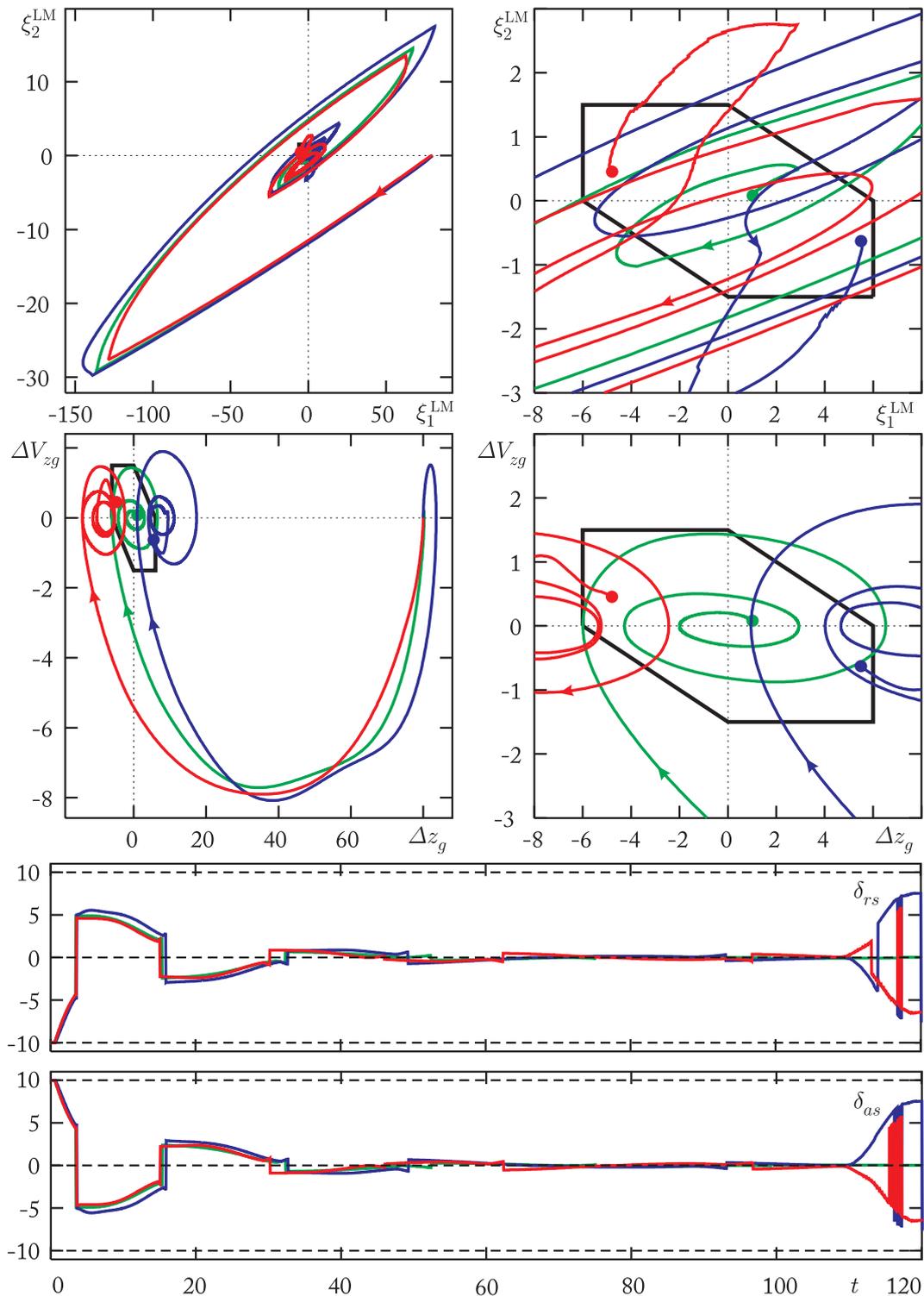


Рис. 3.12: Моделирование при постоянном ветре. Траектории бокового канала: слева — траектории в координатах эквивалентной системы и траектории на фазовой плоскости $\Delta z_g \times \Delta V_{zg}$, справа — увеличенные фрагменты вблизи терминального множества, внизу — графики командных отклонений руля высоты δ_{rs} (град) и элеронов δ_{as} (град). Зеленый цвет соответствует ветровой помехе $W_{xg} = W_{yg} = W_{zg} = 0$, синий — $W_{xg} = 6$, $W_{yg} = 0$, $W_{zg} = 7$, красный — $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -4$, $W_{zg} = -7$.

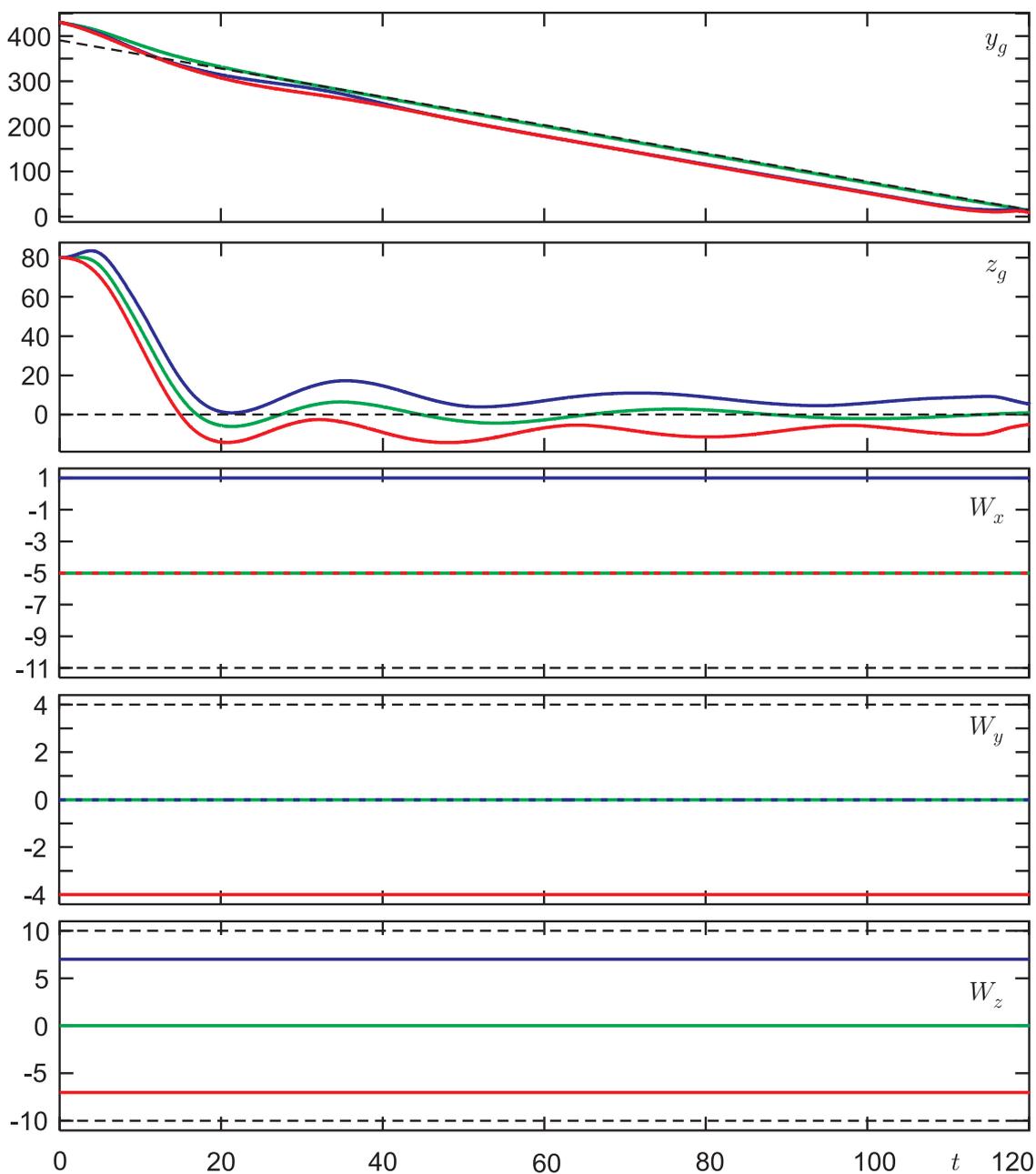


Рис. 3.13: Моделирование при постоянном ветром. Графики: высоты y_g (м), бокового отклонения z_g (м), продольной W_{xg} (м/с), вертикальной W_{yg} (м/с) и боковой W_{zg} (м/с) компонент скорости ветра. Зеленый цвет соответствует ветровой помехе $W_{xg} = W_{yg} = W_{zg} = 0$, синий — $W_{xg} = 6$, $W_{yg} = 0$, $W_{zg} = 7$, красный — $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -4$, $W_{zg} = -7$.

3.3 Задача о преодолении препятствия по высоте

3.3.1 Постановка задачи

Рассматривается задача о предотвращении столкновения самолета с наземным препятствием. Уклонение производится по высоте, соответственно движение самолета рассматривается в вертикальной плоскости. Допускаются внезапные ветровые возмущения.

Моделирование движения проводится в рамках системы (3.1) с учетом инерционности управляющих органов (3.2). Так как рассматривается только вертикальный канал, используются восемь фазовых переменных:

$$\mathbf{x} = (x_g, V_{xg}, y_g, V_{yg}, \vartheta, \omega_z, P, \delta_e)'$$

Управление осуществляется за счет командных отклонений по силе тяги и рулю высоты. На систему действуют возмущения W_{xg} и W_{yg} — продольный и вертикальный ветер.

Управление рулем высоты зададим по закону

$$\delta_{es} = -k_1(u_\delta - \vartheta - k_2(\widehat{V} - \widehat{V}_0)) + k_3\omega_z. \quad (3.18)$$

Здесь $k_1 = 1$, $k_2 = 0.0075$, $k_3 = 0.2$ — коэффициенты, \widehat{V} и \widehat{V}_0 — текущая воздушная и номинальная воздушная скорости, u_δ — новое управление, имеющее смысл целевого угла тангажа. Новое управление вводится по следующим соображениям. Возможности руля высоты достаточно велики, и гораздо более важным является сохранение угла тангажа в заданных пределах. Но поскольку угол тангажа является фазовой переменной и непосредственный контроль над ним невозможен во вводимой далее эквивалентной системе, рассматривается новое фиктивное управление — целевой угол тангажа, на который накладываются ограничения. При помощи (3.18) строится закон управления рулем высоты, который приближает реальный угол тангажа к целевому. Целевой угол тангажа и сила тяги используются, чтобы хорошо обойти препятствие.

Полагаем, что препятствие находится в точке x_M по горизонтальной оси x_g и высота самолета в момент пролета над препятствием должна быть не меньше величины y_M , учитывающей высоту препятствия и требования к минимальной высоте пролета.

Введем прогнозируемое обратное время $\tilde{\tau} = (x_M - x_g(t))/V_{xg}(t)$. В момент пролета препятствия имеем $\tilde{\tau} = 0$.

1. Линеаризация относительно опорной прямой. В момент начала маневра уклонения в геометрических координатах x_g, y_g строится опорная прямая, проходящая от точки начального положения самолета (x_{g0}, y_{g0}) до точки положения препятствия (x_M, y_M) .

Производится расчет параметров номинального движения, соответствующего подъему по опорной прямой. Задается вектор разностных координат — отклонение текущего положения \mathbf{x} от соответствующего данному моменту времени вектора номинальных координат на опорной прямой.

Относительно опорной прямой проводится линеаризация исходной нелинейной системы:

$$\dot{x}^{VM} = A^{VM*}x^{VM} + B^{VM*}\delta + C^{VM*}w. \quad (3.19)$$

В линейной системе вектор управления δ состоит из компонент: u_p — командное отклонение значения силы тяги от номинала ($u_p = \Delta u_{\delta p} = u_{\delta p} - P_0$), u^* — отклонение целевого угла тангажа от номинала ($u^* = u_{\delta} - \vartheta_0$). Вектор w составлен из воздействий $\Delta W_{xg}, \Delta W_{yg}$, отсчитываемых от номинальных значений.

Матрицы $A^{VM*}, B^{VM*}, C^{VM*}$ соответствуют матрицам A^{VM}, B^{VM}, C^{VM} (описанным в разделе 3.1.2) с добавлением соотношения (3.18).

Линейная система используется при построении адаптивного управления, моделирование движения самолета будет проводиться в исходной нелинейной системе.

2. Одномерная дифференциальная игра. Рассмотрим линейную дифференциальную игру с динамикой (3.19) и фиксированным моментом окончания, который удобно считать равным нулю. Цель первого игрока состоит в том, чтобы в момент окончания компонента Δy_g фазового вектора x^{VM} была неотрицательной. Желаемое для первого игрока ограничение компоненты Δy_g сверху введем позже.

Целевой угол тангажа u_{δ} в нелинейной системе изменяется в пределах $0 \leq u_{\delta} \leq 20$ град, соответственно управление u^* в линейной системе (т.к. это система в отклонениях) изменяется в пределах $\mu_1 = 0^\circ - \vartheta_0 \leq u^* \leq 20^\circ - \vartheta_0 = \mu_2$.

Командная величина u_p силы тяги в линейной системе заключена в пределах $0 \leq u_p \leq \mu_p$, где $\mu_p = 1.2m = 9 \times 10^4$ Н, m — масса самолета. Поясним такое ограничение. Номинальному движению вдоль восходящей опорной прямой соответствует тяга P_0 . Запас по тяге описываем при помощи соотношения $(P_{max} - P_0)/m = 1.2$, т.е. $P_{max} - P_0 = 1.2m$. Эту величину

и берем в качестве μ_p . Равное нулю левое крайнее значение для u_p означает, что тягу нельзя сбрасывать ниже номинального значения во время маневра преодоления препятствия.

Стандартным образом перейдем к *одномерной* эквивалентной динамике

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D^{VM^*}(t)\delta + E^{VM^*}(t)w, \\ \xi &= \Phi_3(0, t)x^{VM}, \quad D^{VM^*}(t) = \Phi_3(0, t)B^{VM^*}, \quad E^{VM^*}(t) = \Phi_3(0, t)C^{VM^*}, \end{aligned}$$

где $\Phi_3(0, t)$ — третья строка фундаментальной матрицы Коши для системы $\dot{x}^{VM} = A^{VM^*}x^{VM}$. Фазовая переменная ξ имеет смысл прогноза по высоте на момент преодоления препятствия.

3. Построение моста. Перед построением главного стабильного моста задаем предполагаемое ограничение на помеху. Пусть $\tau = -t$ — обратное время. В пространстве $\tau \times \xi$ рассматриваются два семейства полупроницаемых [1] линий (рис. 3.14). Линии одного семейства отличаются друг от друга лишь вертикальным переносом. Линии семейства I гарантируют, что ветровое возмущение, дающее в эквивалентной системе максимальный сдвиг вниз, можно компенсировать управлением первого игрока, так что движение не перейдет сверху вниз через эту линию. Линии семейства II, соответственно, гарантируют, что для ветра, в эквивалентной системе дающего максимальное смещение вверх, найдется управление, запрещающее движению пересечь эту линию снизу вверх. Любые две непересекающиеся полупроницаемые линии порождают максимальный стабильный мост: линия из семейства I образует его нижнюю границу, линия из II — верхнюю.

В качестве нижней границы главного моста возьмем полупроницаемую линию семейства I, проходящую через точку $\tau = 0, \xi = 0$, поскольку наша задача состоит в том, чтобы гарантированно оказаться выше такой точки. Обозначим эту линию $\Gamma(\tau)$, ее максимум — через Γ_m . Верхнюю границу будем выбирать так, чтобы она не пересекалась с нижней.

В силу одномерности фазовой переменной ξ построение главного моста является очень простым. Отпадает также необходимость построения дополнительного моста, что требуется в общем случае при конструировании адаптивного управления.

4. Построение управления. Из смысла полупроницаемых линий следует, что если текущая позиция находится на нижней границе главного моста, то надо выбирать управление в эквивалентной системе, дающее

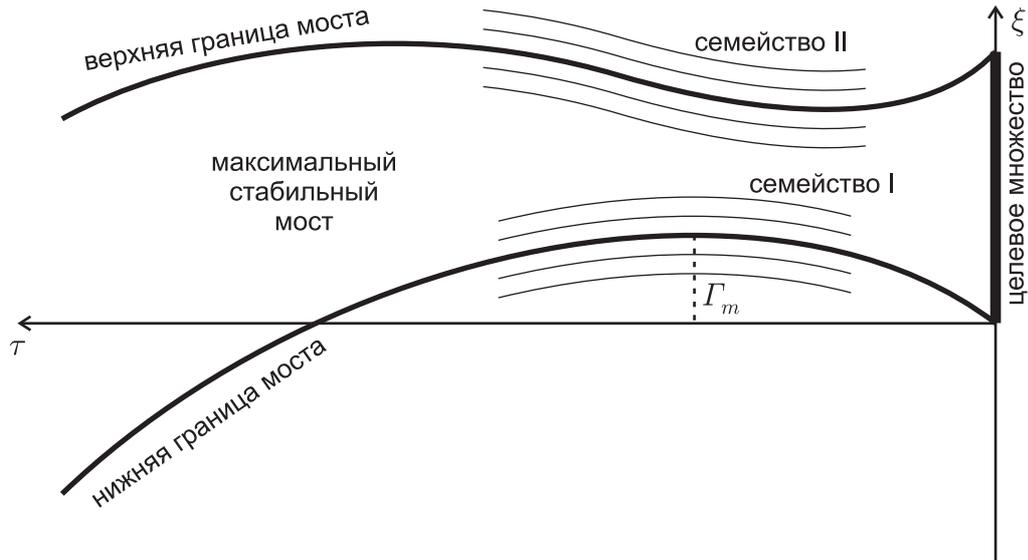


Рис. 3.14: Два семейства полупроницаемых линий. Построение главного моста.

максимальное смещение вверх. Соответственно, если текущая позиция на верхней границе, то надо брать управление, обеспечивающее максимальное смещение вниз. Это гарантирует, что если начальная позиция находится в пределах моста и ветровое возмущение не превосходит выбранных ограничений, то движение останется внутри и придет на отрезок выше целевой точки $\xi = 0$.

Таким образом, на границах моста управление задается вполне определенным образом и использует максимальные значения. Внутри же моста управление можно выбирать в достаточной степени произвольно. Естественно использовать линию переключения, на которой управление меняет свой знак.

Линию переключения возьмем горизонтальной: $\tilde{z} = \tilde{z}(\tau) = \Gamma_m + \varepsilon$, где ε — некоторое фиксированное расстояние от линии переключения до нижней границы моста, рис. 3.15. Верхнюю границу $\bar{\Gamma}(\tau)$ расположим также на расстоянии ε .

Горизонтальная линия переключения соответствует стабильному мосту с нулевым управлением и нулевой помехой. Метод адаптивного управления основан на том, что можно построить семейство стабильных мостов с возрастающими ограничениями на управление и помеху — от нулевых ограничений до максимально доступных. Используя это семейство и ориентируясь на текущее положение, подбирается уровень управления, соответствующий действующему уровню помехи.

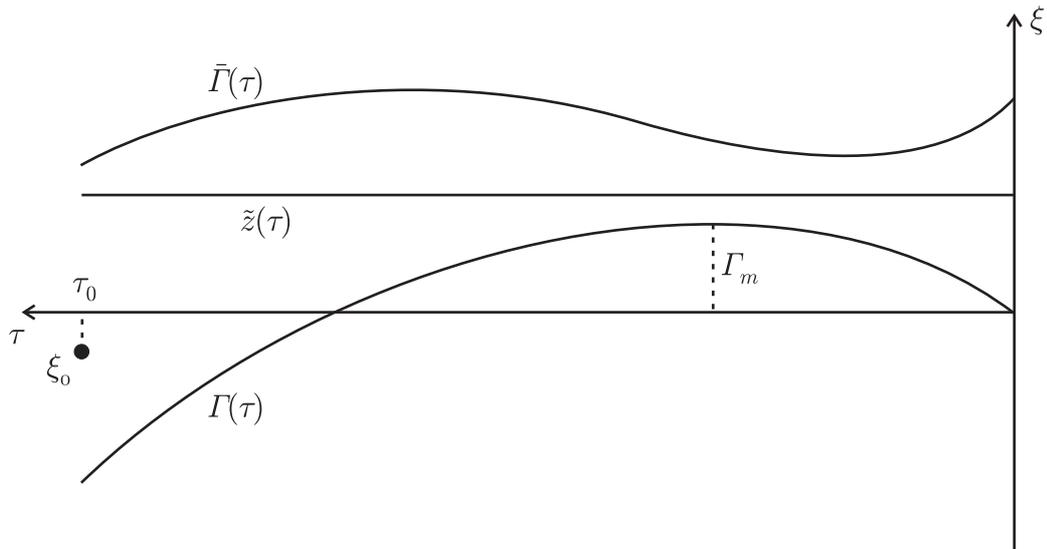


Рис. 3.15: Кривые, используемые для построения управления.

Управления u^* , u_p выберем в виде

$$u^* = \begin{cases} \mu_2, & \xi(\tau) \leq \Gamma(\tau), \\ \mu_2 \cdot (\xi(\tau) - \tilde{z}) / (\Gamma(\tau) - \tilde{z}), & \Gamma(\tau) < \xi(\tau) < \tilde{z}, \\ \mu_1 \cdot (\xi(\tau) - \tilde{z}) / (\bar{\Gamma}(\tau) - \tilde{z}), & \tilde{z} \leq \xi(\tau) < \bar{\Gamma}(\tau), \\ \mu_1, & \xi(\tau) \geq \bar{\Gamma}(\tau), \end{cases}$$

$$u_p = \begin{cases} \mu_p, & \xi(\tau) \leq \Gamma(\tau), \\ \mu_p \cdot (\xi(\tau) - \tilde{z}) / (\Gamma(\tau) - \tilde{z}), & \Gamma(\tau) < \xi(\tau) < \tilde{z}, \\ 0, & \xi(\tau) \geq \tilde{z}. \end{cases}$$

Управления принимают крайние значения вне границ моста и пропорционально меняются внутри. Поскольку одно из крайних значений управления силой тяги равняется нулю, то выше линии переключения изменения по силе тяги нет, управление остается нулевым.

5. Числовые данные и особенности постановки. Пусть до момента обнаружения препятствия самолет движется горизонтально в установившемся режиме. Продольная скорость равняется 70 м/с, угол тангажа, сила тяги и стабилизатор находятся в номинальном для горизонтального полета положении, ветровое возмущение отсутствует.

Предположим, что расстояние до препятствия в момент обнаружения составляет 1400 м. Начальную высоту положим равной 30 м, целевую высоту — 130 м.

Строим опорную прямую, для которой рассчитываются новые номинальные продольная и вертикальная скорости (из условия, чтобы они в

“сумме” давали 70 м/с), угол тангажа, сила тяги, положение стабилизатора. При расчете полагаем номинальное ветровое возмущение нулевым. Хотя геометрические координаты в начальный момент обнаружения препятствия (его принимаем за момент начала моделирования) находятся на опорной прямой, т.е. в своем номинальном положении, начальная точка в эквивалентной системе не является нулевой, поскольку угол тангажа и сила тяги соответствуют старым номинальным значениям горизонтального полета. Считаем, что положение стабилизатора меняется на новое мгновенно, а сила тяги возрастает до нового номинала постепенно, согласно своему дифференциальному уравнению.

Поскольку расстояние до препятствия составляет 1400 м, а номинальная горизонтальная скорость равна примерно 70 м/с, то номинальное время τ_0 до встречи с препятствием составляет примерно 20 с.

Предполагаемые ограничения на действия ветра следующие: для продольного ветра берем $|W_{xg}| \leq 10$ м/с, для вертикального — $|W_{yg}| \leq 5$ м/с.

Шаг дискретной схемы построения управления и шаг моделирования — 0.1 с. Значение ε взято равным 3.

3.3.2 Влияние расчета прогнозируемого времени и нелинейности на результаты моделирования

Данный раздел посвящен иллюстрации влияния на результаты моделирования 1) расчета прогнозируемого времени $\tilde{\tau}$, 2) нелинейности системы.

Изначально метод управления построен для линейной дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания. Содержательно, полагаем продольную скорость примерно постоянной и, соответственно, примерно определенным время пролета препятствия. Но при моделировании процесса движения (в линейной или нелинейной системе) мы вычисляем прогнозируемое время $\tilde{\tau} = (x_M - x_g(t))/V_{xg}(t)$ до пролета препятствия. Принимаем это значение за величину обратного времени в нашей вспомогательной дифференциальной игре и рассчитываем свое состояние в ней согласно этому времени. Выбираем далее управляющие воздействия u^* , u_p и используем их в моделируемой системе на очередном шаге дискретной схемы управления. Таким образом, истинный момент пролета препятствия является плавающим и зависит от начального положения и, главным образом, от реализации ветрового возмущения. Отклонение от номинального момента, который закладывается в исходные данные для вспомогательной

дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания, может составлять 1–1.5 с.

Отход от идеализированной схемы расчета времени приводит к отклонению получаемого движения от движения в идеализированной системе. Поэтому даже при моделировании линейной системы мы можем (при некоторых ветровых возмущениях) получить выход за пределы используемого максимального стабильного моста.

При моделировании нелинейной системы к указанному фактору добавляется фактор отличия нелинейной динамики от линеаризованной.

Влияние двух этих факторов продемонстрировано на следующем примере. Проведено моделирование при постоянном ветре $W_{xg} = 10$ м/с, $W_{yg} = -5$ м/с. На рис. 3.16 представлены графики движения в эквивалентной системе. Сплошными тонкими линиями обозначены границы $\Gamma(\tau)$, $\bar{\Gamma}(\tau)$ главного моста и горизонтальная линия переключения \tilde{z} . Горизонтальная нулевая линия размечена пунктиром. Показаны три траектории. Для первой из них моделирование сделано в линейной системе, движущейся в абсолютном времени, т.е. с фиксированным моментом окончания, отстоящим от начального момента на 20 с. Во втором случае — в линейной системе с расчетом прогнозируемого времени, т.е. критерий окончания — равенство $x_g = x_M$. В третьем — в нелинейной системе с прогнозируемым временем.

3.3.3 Моделирование с постоянным ветром

Дальнейшее моделирование проведено в нелинейной системе с оценкой прогнозируемого времени.

В данном разделе представлены результаты моделирования при постоянном ветре. Как показывает исследование фундаментальной матрицы, в линейной дифференциальной игре постоянный ветер на крайних значениях (при оговоренных ограничениях на помеху) является наихудшим в смысле наибольшего отклонения вверх или вниз по высоте в момент окончания.

Рассмотрены шесть вариантов ветровых возмущений в пределах выбранных ограничений: (1) $W_{xg} = 10$ м/с, $W_{yg} = -5$ м/с — наихудшее возмущение, направляющее движение системы вниз, (2) $W_{xg} = 10$ м/с, $W_{yg} = 0$ — максимальный допустимый попутный ветер, (3) $W_{xg} = W_{yg} = 0$ — отсутствие ветра, (4) $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -5$ м/с — максимальный допустимый нисходящий ветер, (5) $W_{xg} = 5$ м/с, $W_{yg} = -2$ м/с — ветер средней силы, (6) $W_{xg} = -10$ м/с, $W_{yg} = 5$ м/с — наихудший ветер, направляющий

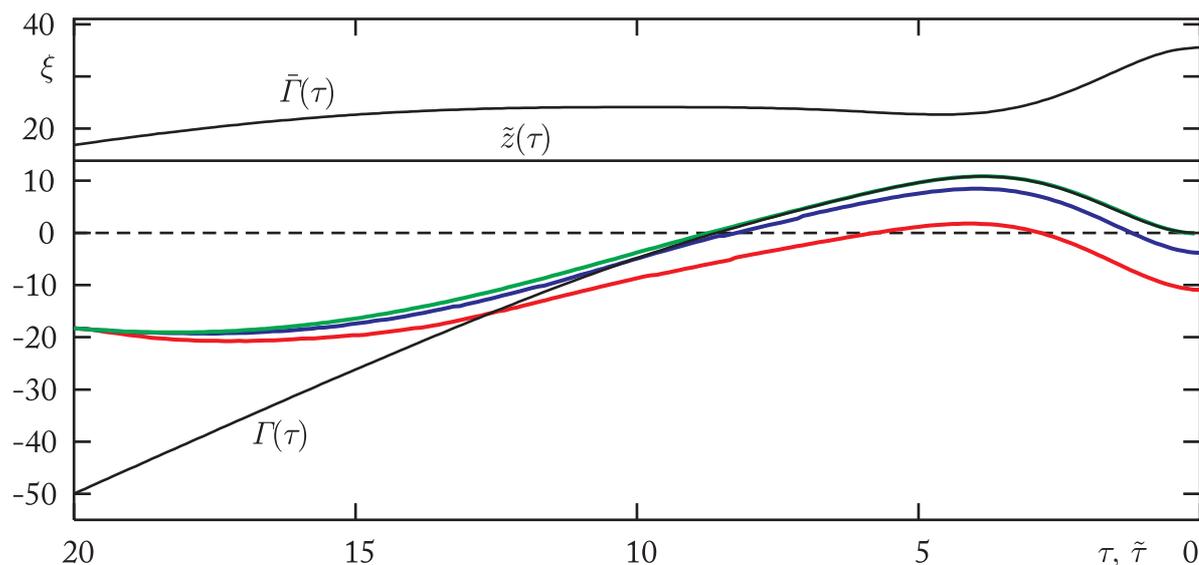


Рис. 3.16: Влияние отклонений от идеализированной игры на поведение траекторий. Горизонтальная ось — обратное время, она же служит для обозначения прогнозируемого обратного времени; вертикальная — фазовая переменная эквивалентной игры. Тонкими линиями изображены: $\Gamma(\tau)$ — нижняя граница моста, $\bar{\Gamma}(\tau)$ — верхняя граница моста, \tilde{z} — горизонтальная линия переключения. Зеленая линия соответствует моделированию движения в линейной игре с фиксированным моментом окончания, синяя — линейной системе с оценкой прогнозируемого времени, красная — нелинейной системе с прогнозируемым временем.

движение системы вверх.

На всех нижерасположенных рисунках цветными линиями обозначены траектории и графики, соответствующие различным вариантам помехи. На плоскости $\tau \times \xi$ эквивалентной игры тонкими сплошными линиями изображены нижняя и верхняя границы главного моста, а также горизонтальная линия переключения. Пунктиром показана выходящая из нуля горизонтальная линия. На графике высоты, представленном на плоскости $x_g \times y_g$ геометрических координат, пунктиром обозначена опорная прямая. На остальных графиках горизонтальная ось соответствует абсолютному времени. Так как моделирование заканчивается в момент прохода препятствия, а он зависит от действий ветровой помехи, графики обрываются в различные моменты. На графиках отклонения руля высоты δ_e , целевого угла тангажа u_δ пунктирными линиями обозначены уровни минимального, номинального и максимального значений. На графиках силы тяги P вспомогательных линий только две, поскольку минимальное значение совпадает с номинальным. Начальная величина силы тяги меньше номинального

уровня, поскольку в начальный момент времени самолет двигался горизонтально. Минимальный и максимальный уровни, показанные на графиках отклонения руля высоты δ_e , в расчетах не учитываются, принимаются во внимание только ограничения на новое управление — целевой угол тангажа. На графике угла тангажа ϑ пунктирной линией обозначено номинальное положение.

На рис. 3.17, 3.18 представлены результаты моделирования для первых трех вариантов помехи. Соответствующие кривые обозначены красным, синим и зеленым цветами. На рис. 3.17 сверху расположен график движения в плоскости эквивалентной игры, снизу — график высоты. На рис. 3.18 собраны графики силы тяги P , отклонения руля высоты δ_e , управления — целевого угла тангажа u_δ , а также график реализовавшегося угла тангажа ϑ . Дополнительные графики представлены в приложении.

Как видно, при ветре $W_{xg} = 10$, $W_{yg} = -5$, соответствующем предельному ограничению, для которого построен главный мост, движение в плоскости эквивалентной игры выходит за границы моста, поэтому в момент пролета препятствия высота оказывается меньше целевой. С ветром $W_{xg} = 10$, $W_{yg} = 0$ управление справляется удачно. При моделировании без ветра движение идет по линии переключения.

Результаты для случаев (4), (5), (6) представлены на рис. 3.19, 3.20.

Видно, что возмущения $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -5$ и $W_{xg} = 5$, $W_{yg} = -2$ дают практически одинаковый результат, а помеха $W_{xg} = -10$, $W_{yg} = 5$ уводит движение вверх, но не далее верхней границы моста.

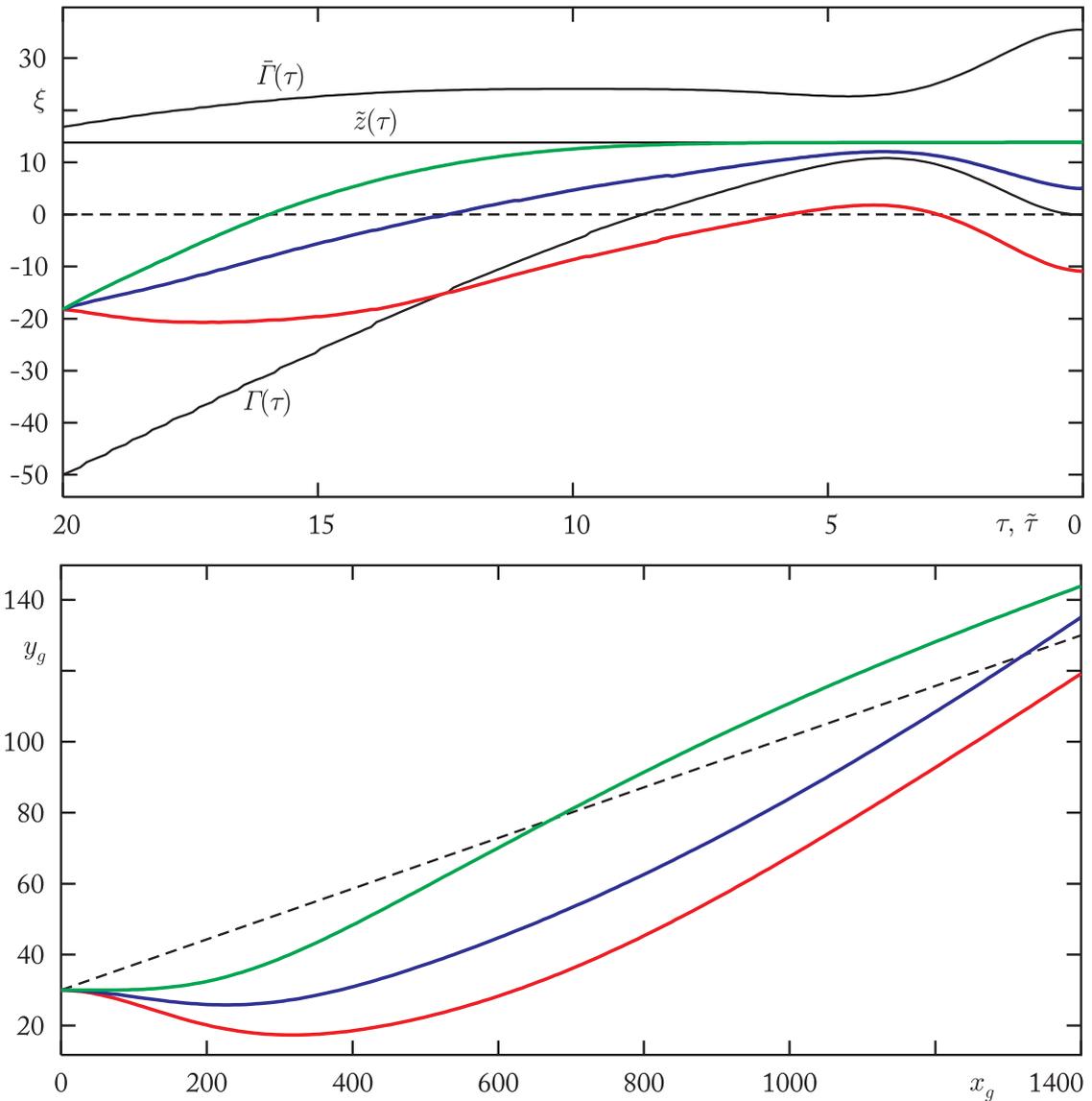


Рис. 3.17: Моделирование с постоянным ветром, случаи (1), (2), (3). Сверху показана плоскость эквивалентной игры, снизу — график высоты. Красной линией обозначено движение при ветре $W_{xg} = 10$, $W_{yg} = -5$, синей — $W_{xg} = 10$, $W_{yg} = 0$, зеленой — движение при отсутствии ветра.

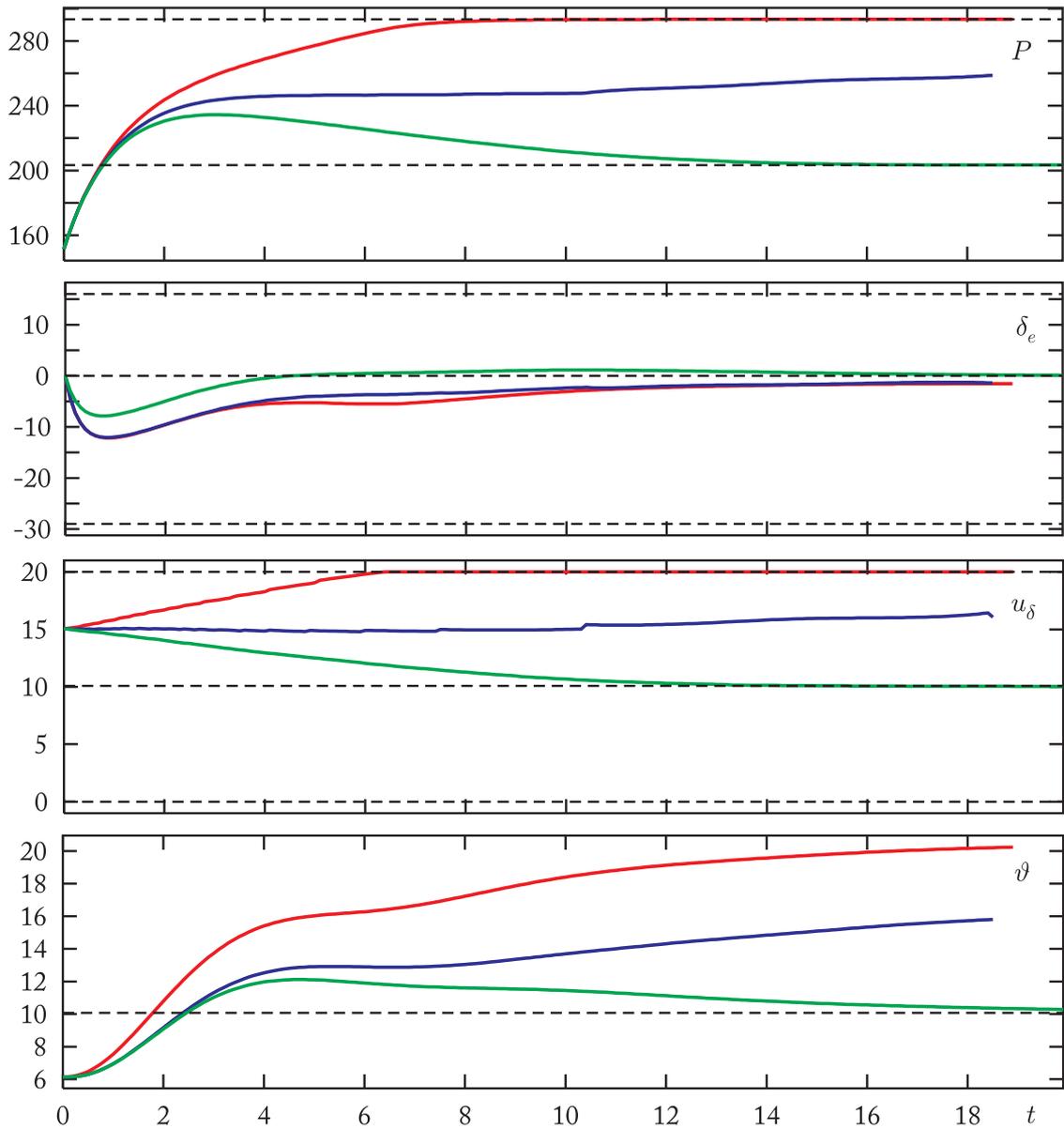


Рис. 3.18: Моделирование с постоянным ветром, случаи (1), (2), (3). Графики силы тяги P ($\times 1000$ Н), отклонения руля высоты δ_e (град), целевого угла тангажа u_δ (град), реализовавшегося угла тангажа ϑ (град).

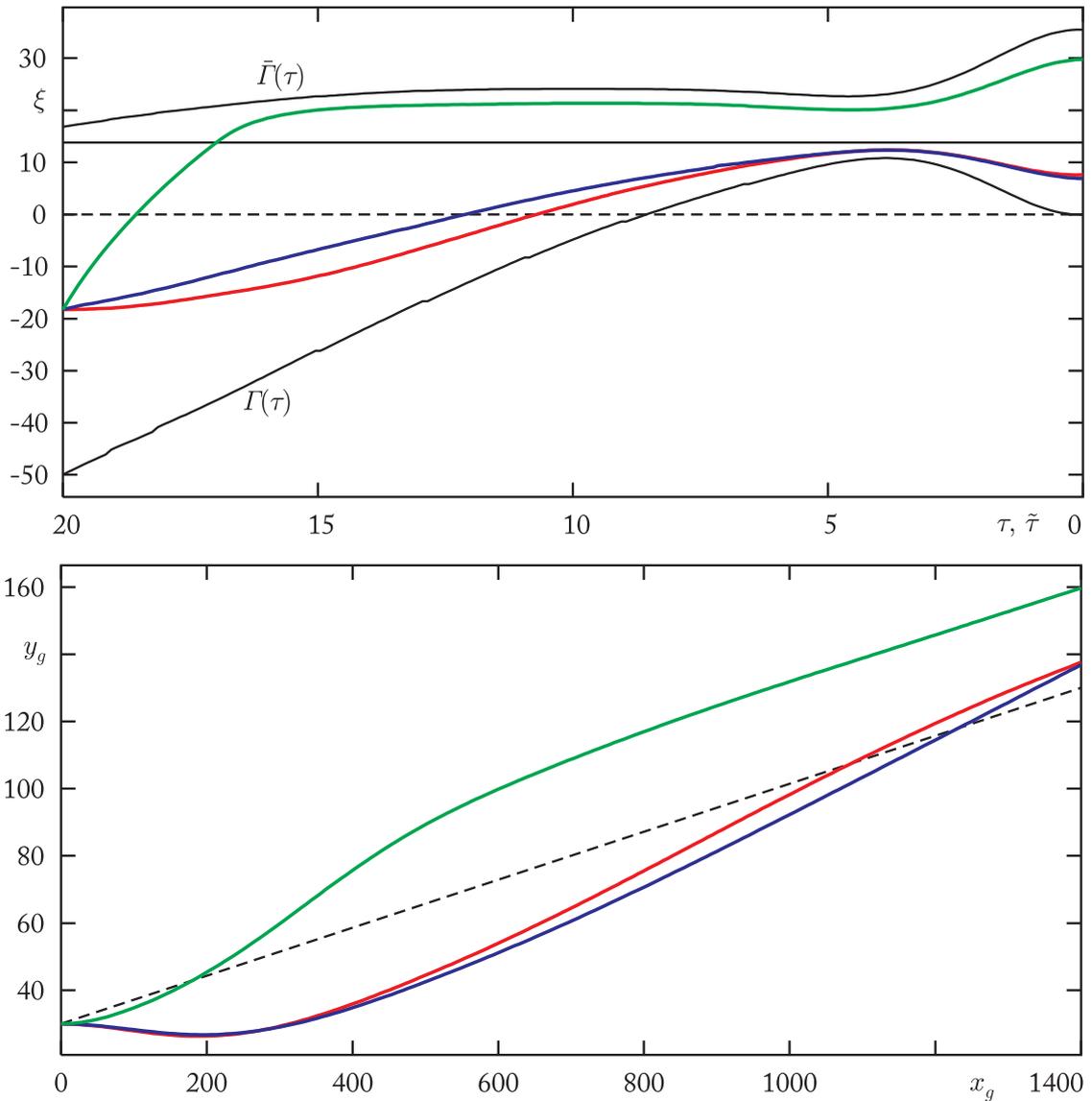


Рис. 3.19: Моделирование с постоянным ветром, случаи (4), (5), (6). Сверху показана плоскость эквивалентной игры, снизу — график высоты. Красной линией обозначено движение при ветре $W_{xg} = 0$, $W_{yg} = -5$, синей — $W_{xg} = 5$, $W_{yg} = -2$, зеленой — $W_{xg} = -10$, $W_{yg} = 5$.

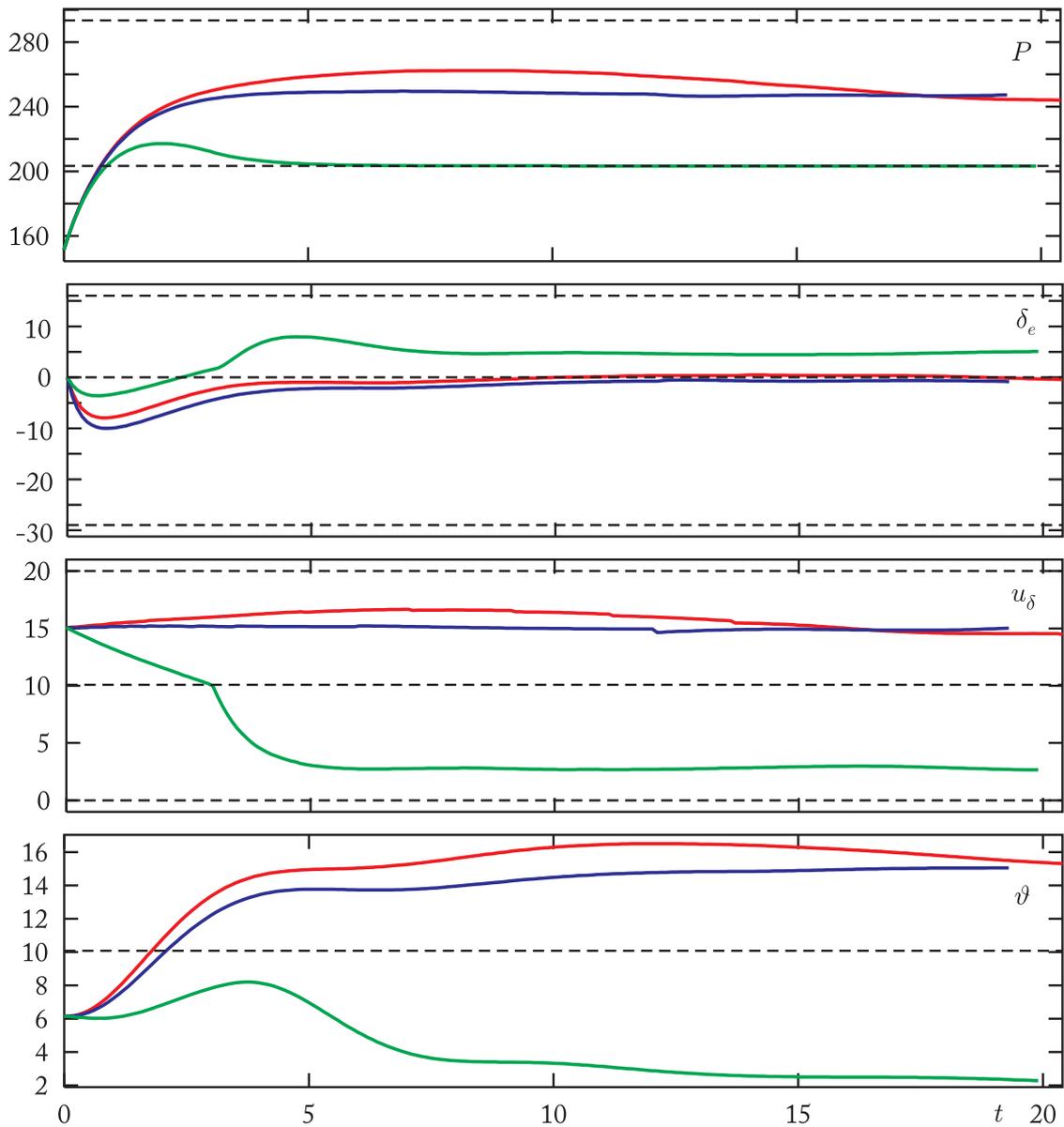


Рис. 3.20: Моделирование с постоянным ветром, случаи (4), (5), (6). Графики силы тяги P ($\times 1000$ Н), отклонения руля высоты δ_e (град), целевого угла тангажа u_δ (град), реализовавшегося угла тангажа ϑ (град).

3.3.4 Моделирование при микровзрыве ветра

Представим результаты моделирования при микровзрыве ветра. Параметры микровзрыва: высота центральной точки — 400 м, радиус основного тора — 800 м, центральная точка расположена на оси x_g на расстоянии 200 м от начального положения самолета. Сила микровзрыва — скорость ветра в центральной точке — бралась в двух вариантах: 8 и 4 м/с.

На рис. 3.21, 3.22 показаны результаты моделирования. Представлены графики, аналогичные графикам предыдущего раздела, а также графики ветровых возмущений.

Видно, что в случае сильного микровзрыва ветер выходил за предполагаемые ограничения, тем не менее предложенный способ адаптивного управления успешно с ним справился.

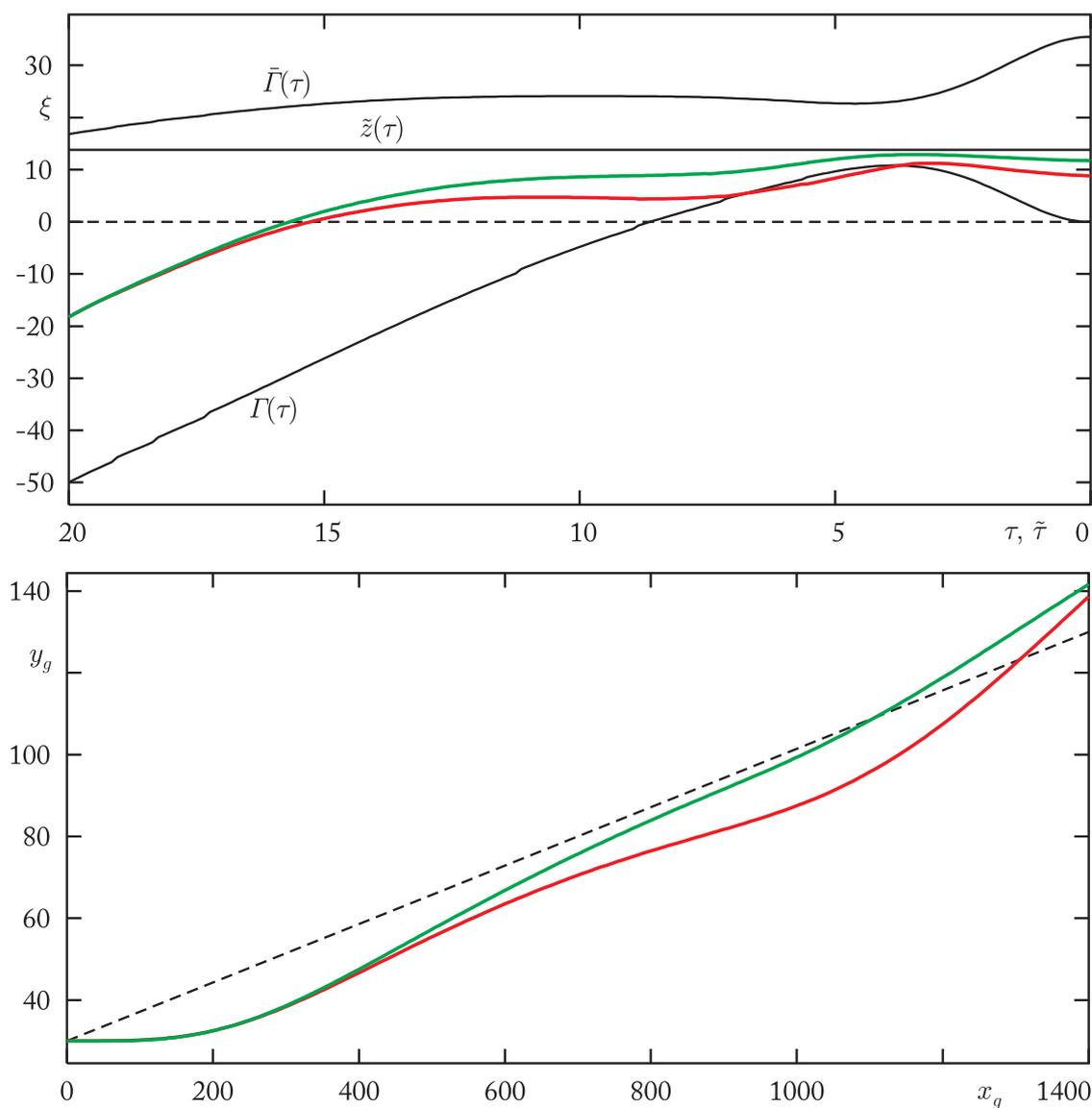


Рис. 3.21: Моделирование при микровзрыве ветра. Сверху показана плоскость эквивалентной игры, снизу — график высоты. Красной линией обозначено движение при силе микровзрыва 8 м/с, зеленой — при силе 4 м/с.

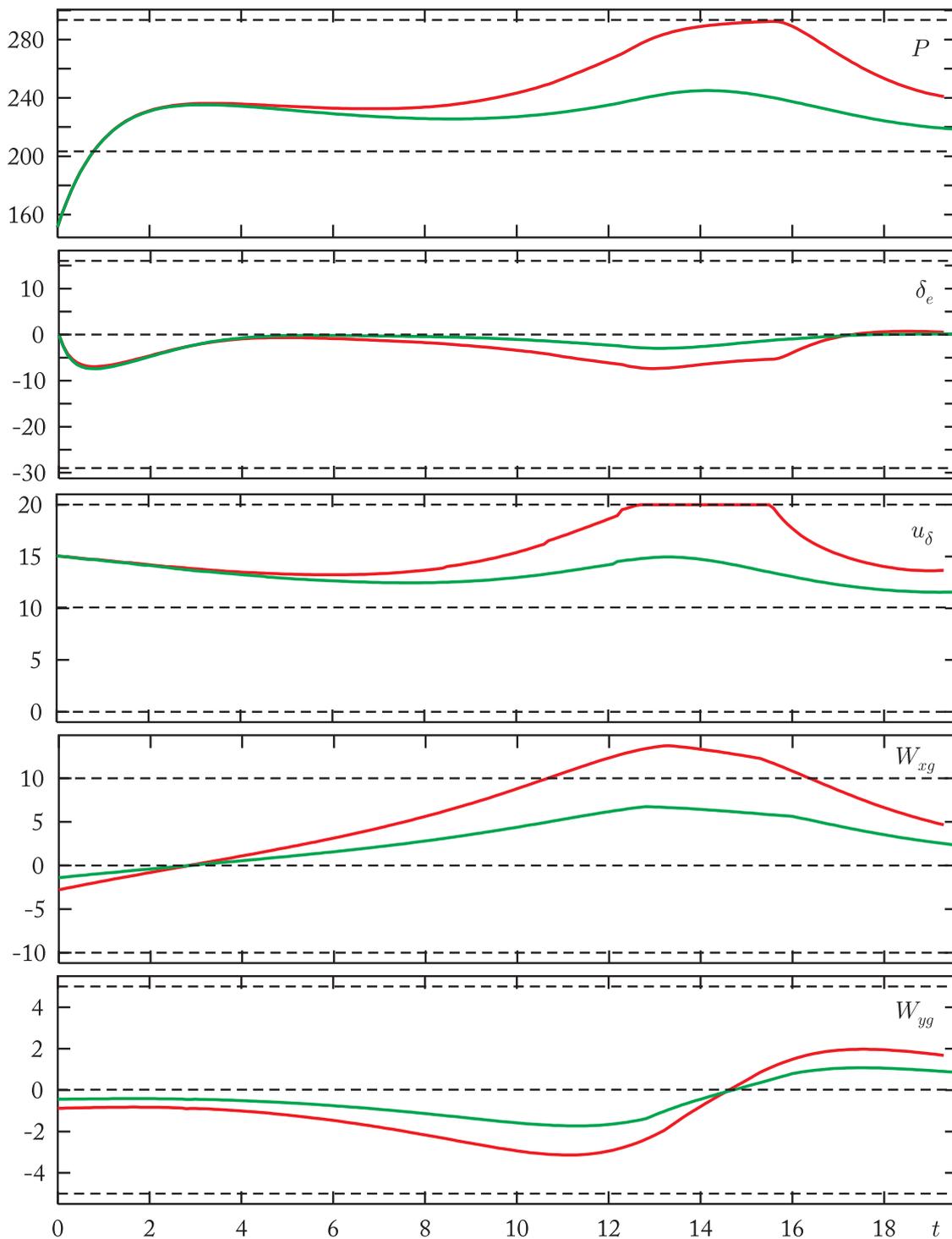


Рис. 3.22: Моделирование при микровзрыве ветра. Графики силы тяги P ($\times 1000$ Н), отклонения руля высоты δ_e (град), целевого угла тангажа u_δ (град), продольной W_{xg} (м/с) и вертикальной W_{yg} (м/с) компонент скорости ветра.

Приложение: дополнительные графики

В приложении собраны дополнительные графики моделирования задач о посадке и о преодолении препятствия по высоте. В третьей главе были представлены основные графики, иллюстрирующие действие адаптивного управления: траектории в плоскости эквивалентной игры и в фазовой плоскости целевых координат, графики полезного управления и помехи, некоторых фазовых координат. Графики, представляющие более узкий интерес, помещены здесь.

На рис. А.1–А.6 показаны графики для задачи о посадке, а именно: рис. А.1–А.3 дают результаты моделирования при микровзрыве ветра, рис. А.4–А.6 — при постоянном ветре. Параметры микровзрывов и постоянной ветровой помехи приведены в третьей главе. На рис. А.1, А.4 представлены графики компонент V_{xg} , V_{yg} , V_{zg} земной скорости, величины воздушной скорости \hat{V} , углов атаки α и скольжения β . На рис. А.2, А.5 — графики углов тангажа ϑ , рыскания ψ и крена γ , а также соответствующих угловых скоростей ω_z , ω_y , ω_x . Графики отклонений управляющих органов — силы тяги P , руля высоты δ_e , руля направления δ_r и элеронов δ_a , — полученные после отработки командного сигнала, представлены на рис. А.3, А.6.

На рис. А.7–А.9 показаны графики для задачи о преодолении препятствия. Рис. А.7 соответствует случаю постоянных ветровых помех (1), (2), (3), рис. А.8 — случаю постоянных помех (4), (5), (6), рис. А.9 — двум вариантам микровзрыва ветра. Представлены графики продольной V_{xg} и вертикальной V_{yg} скоростей, угла атаки α , вертикальной перегрузки n_y (подсчитывается по формуле $n_y = \frac{dV_{yg}}{dt}/g + 1$).

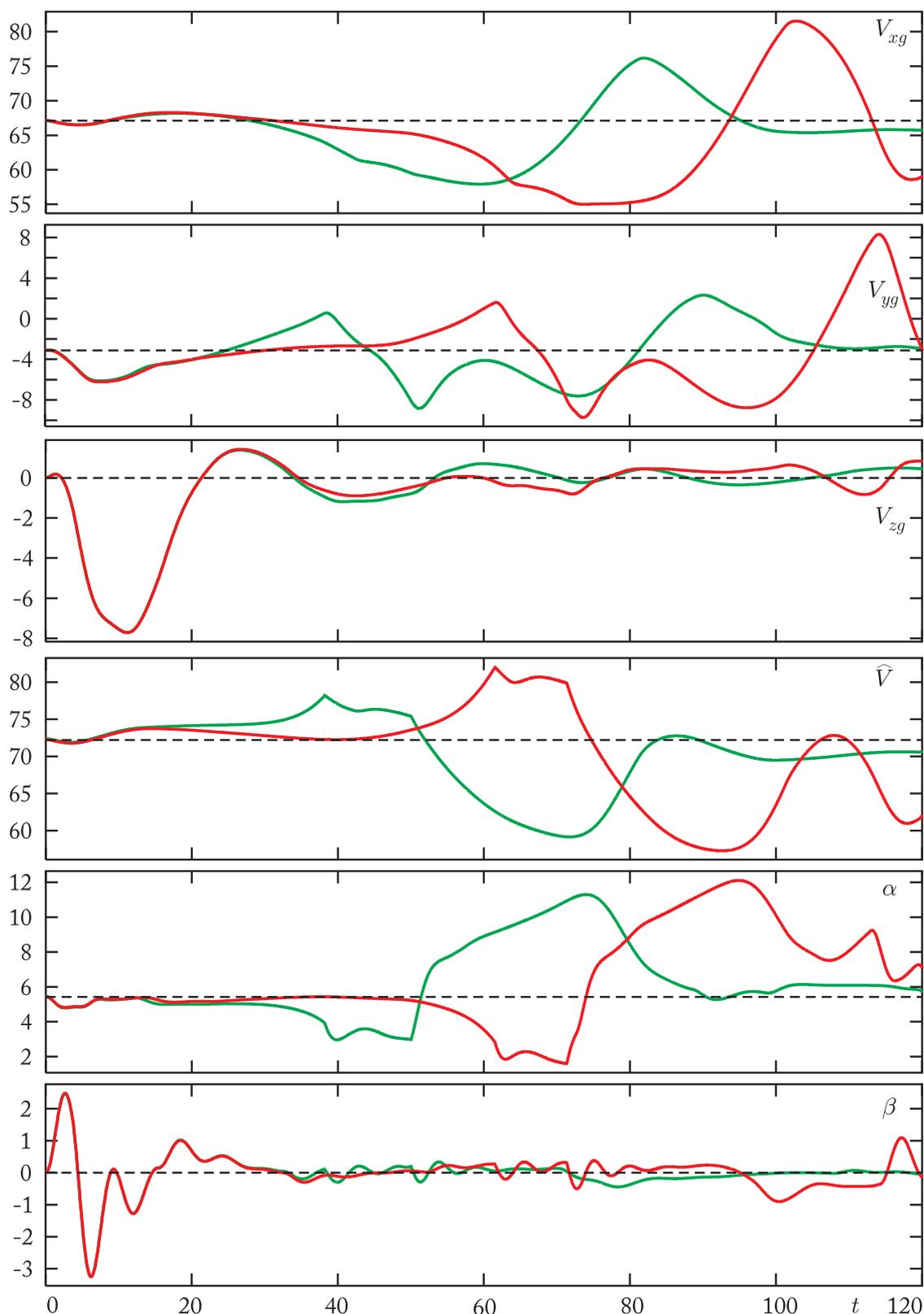


Рис. А.1: Задача о посадке самолета, моделирование с микровзрывом ветра. Графики продольной V_{xg} (м/с), вертикальной V_{yg} (м/с), боковой V_{zg} (м/с) и воздушной \hat{V} (м/с) скоростей, углов атаки α (град) и скольжения β (град). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие микровзрыву 1, красным — микровзрыву 2.

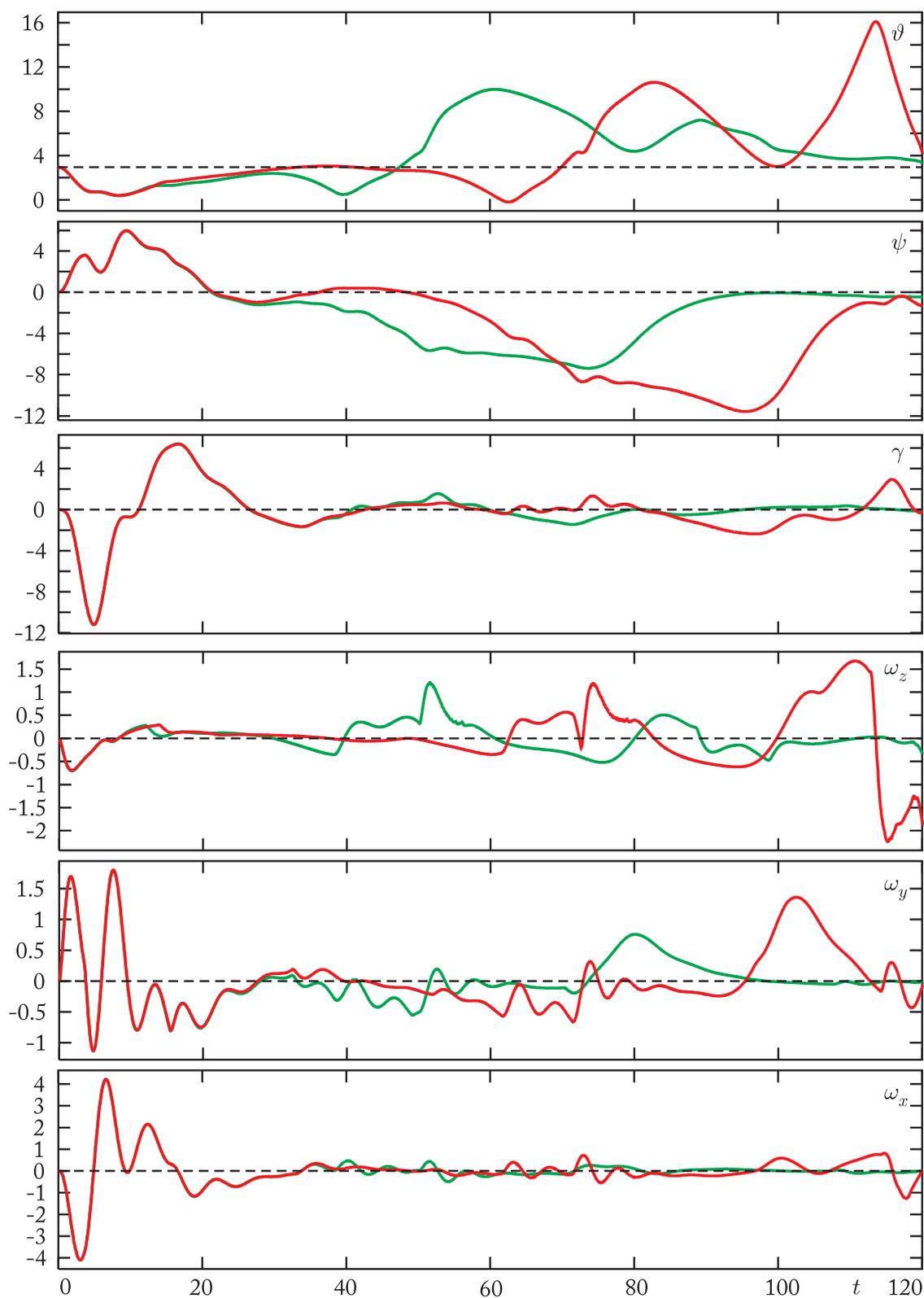


Рис. А.2: Задача о посадке самолета, моделирование с микровзрывом ветра. Графики углов тангажа ϑ (град), рыскания ψ (град) и крена γ (град), соответствующих угловых скоростей ω_z (град/с), ω_y (град/с), ω_x (град/с). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие микровзрыву 1, красным — микровзрыву 2.

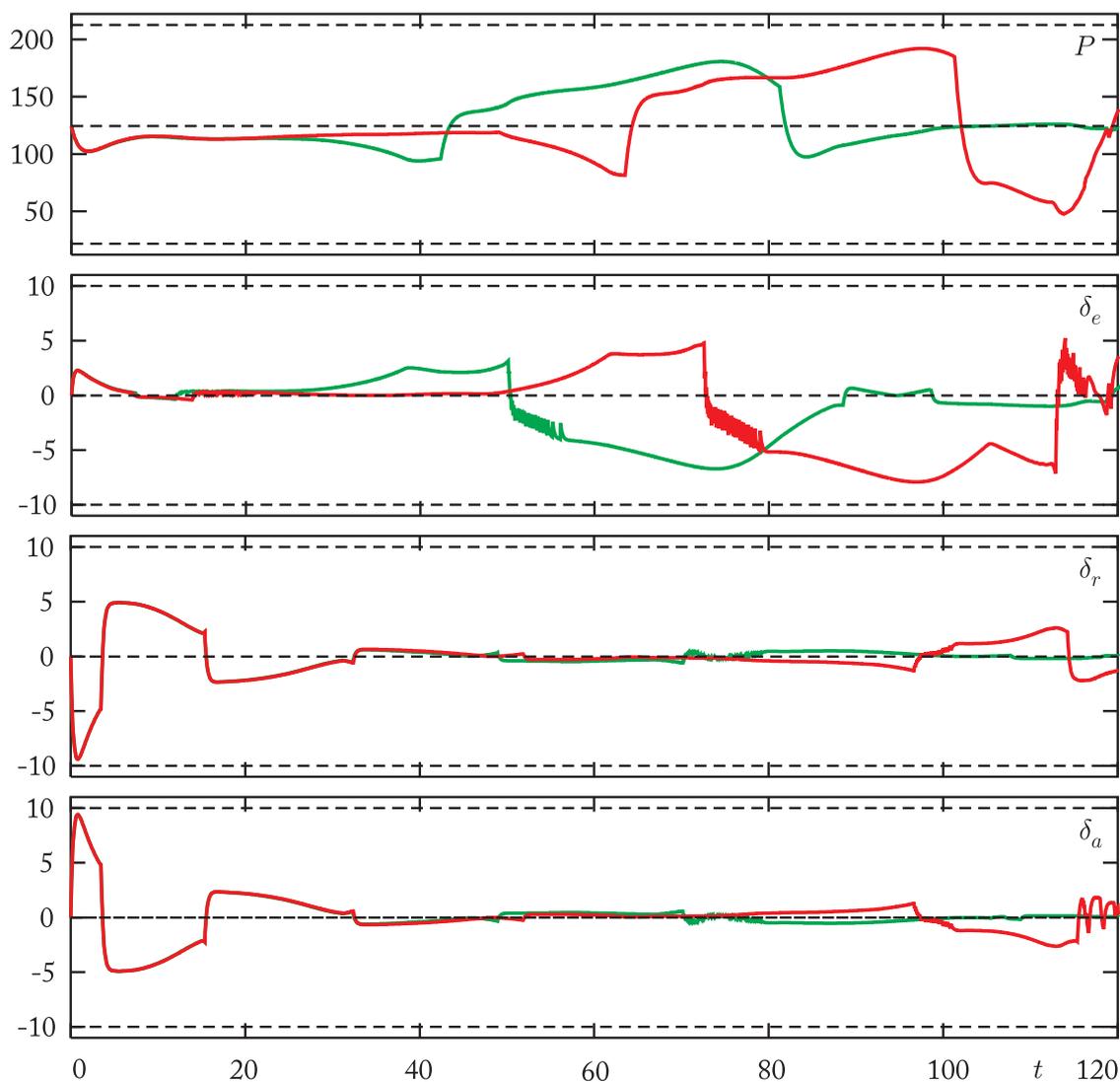


Рис. А.3: Задача о посадке самолета, моделирование с микровзрывом ветра. Графики силы тяги P ($\times 1000$ Н), отклонений руля высоты δ_e (град), руля направления δ_r (град), элеронов δ_a (град). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие микровзрыву 1, красным — микровзрыву 2.

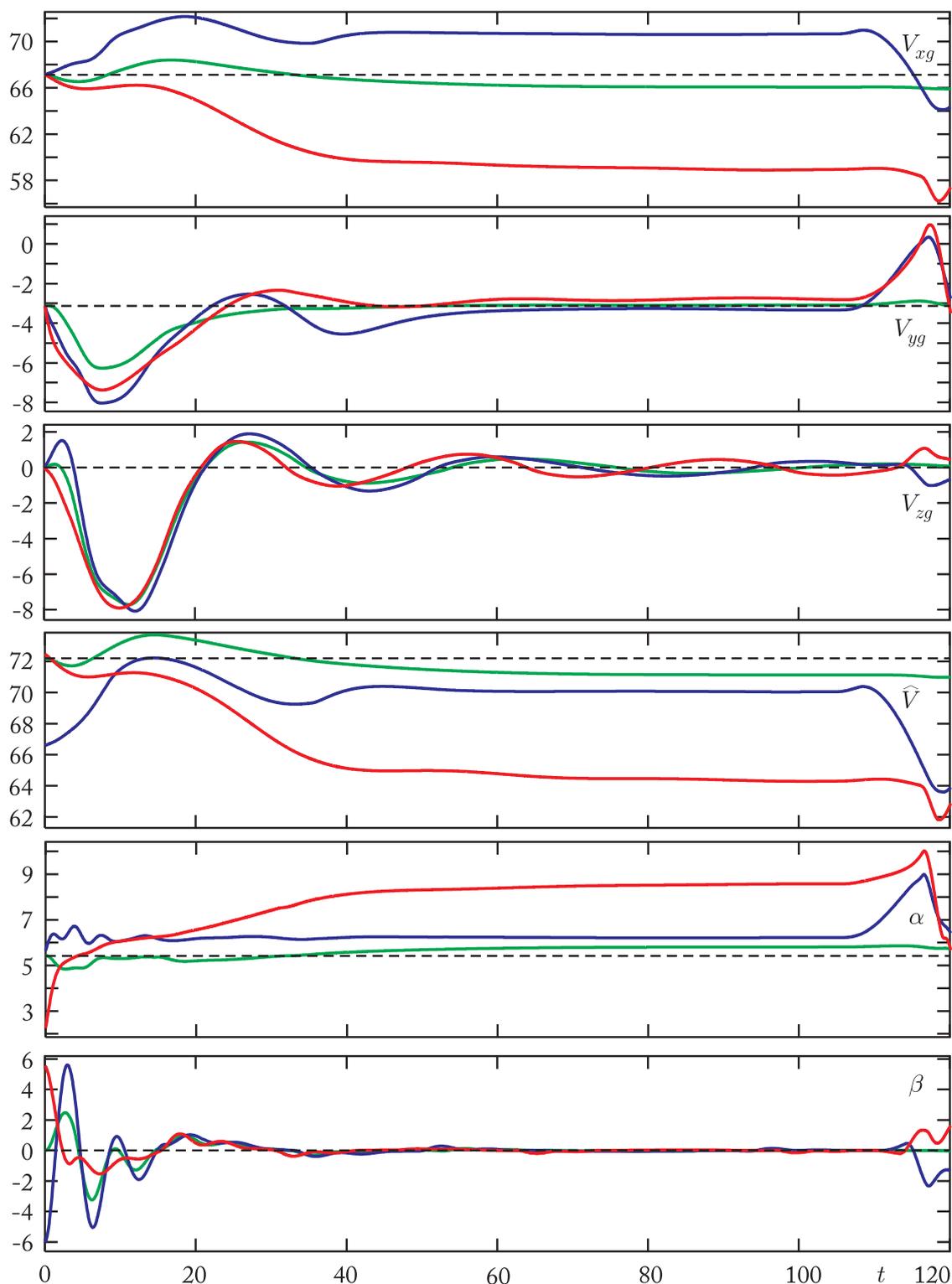


Рис. А.4: Задача о посадке самолета, моделирование с постоянным ветром. Графики продольной V_{xg} (м/с), вертикальной V_{yg} (м/с), боковой V_{zg} (м/с) и воздушной \hat{V} (м/с) скоростей, углов атаки α (град) и скольжения β (град). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие ветру $W_x = W_y = W_z = 0$, синим — $W_x = 6, W_y = 0, W_z = 7$, красным — $W_x = 0, W_y = -4, W_z = -7$.

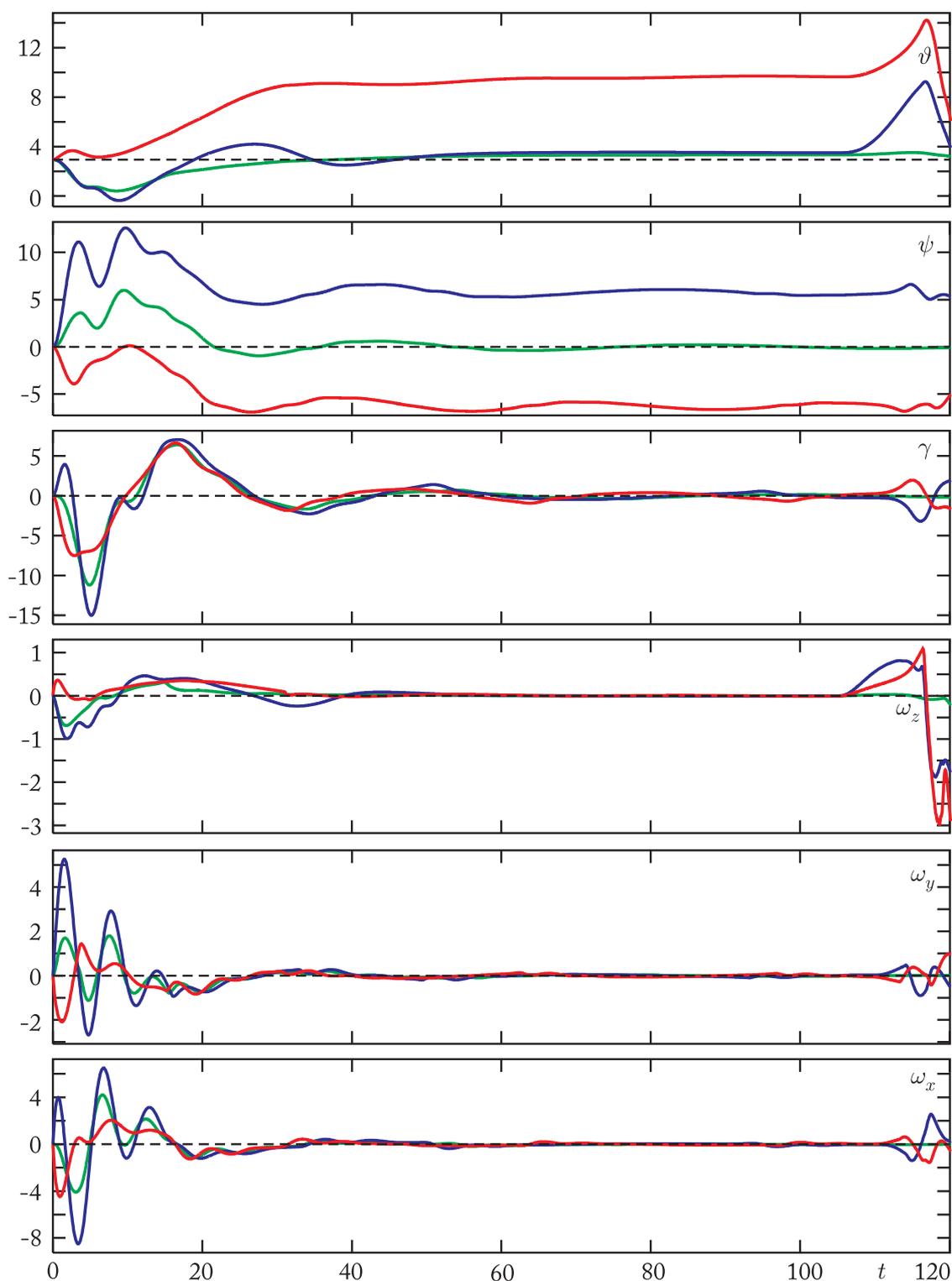


Рис. А.5: Задача о посадке самолета, моделирование с постоянным ветром. Графики углов тангажа ϑ (град), рыскания ψ (град) и крена γ (град), соответствующих угловых скоростей ω_z (град/с), ω_y (град/с), ω_x (град/с). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие ветру $W_x = W_y = W_z = 0$, синим — $W_x = 6, W_y = 0, W_z = 7$, красным — $W_x = 0, W_y = -4, W_z = -7$.

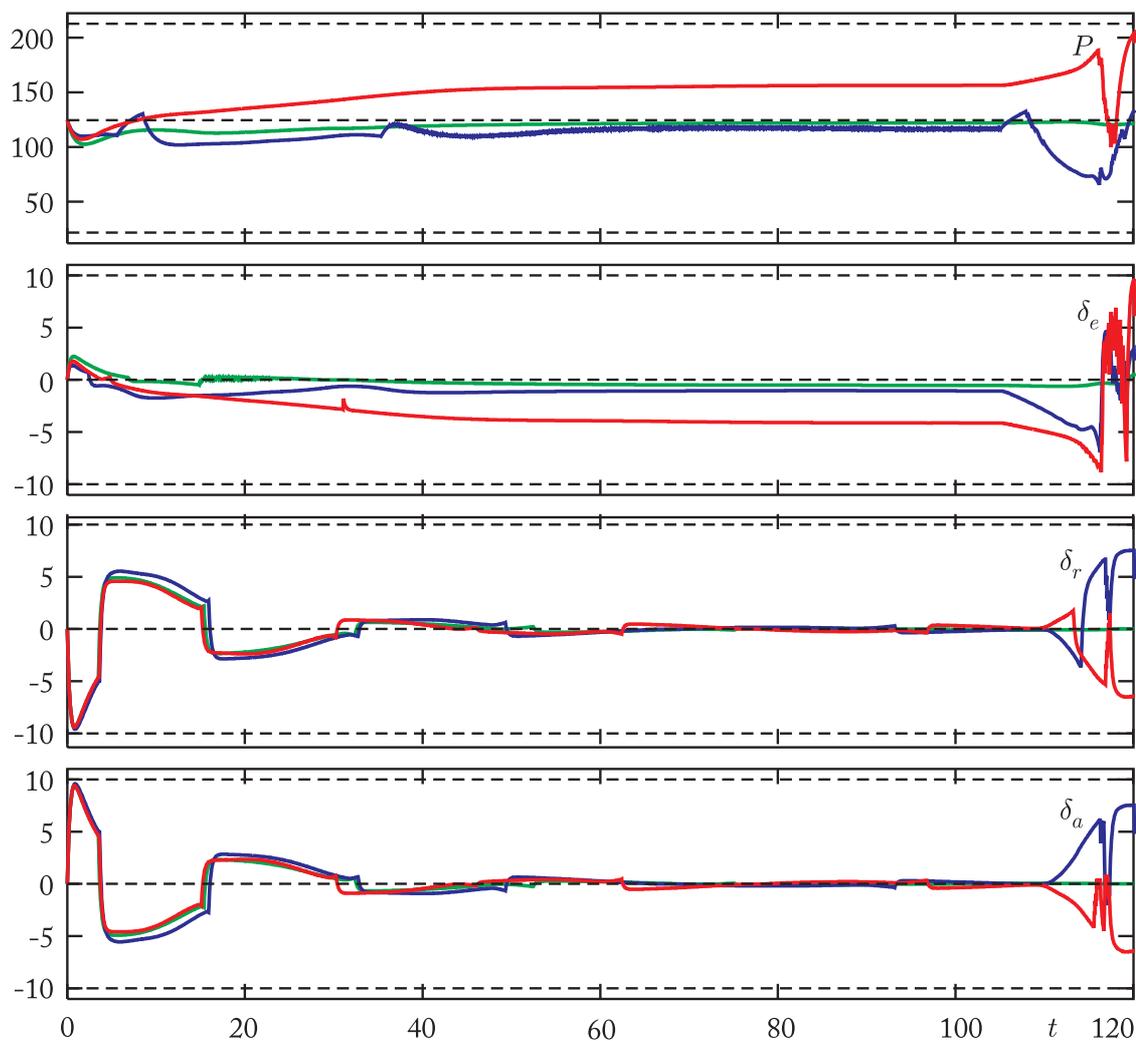


Рис. А.6: Задача о посадке самолета, моделирование с постоянным ветром. Графики силы тяги P ($\times 1000$ Н), отклонений руля высоты δ_e (град), руля направления δ_r (град), элеронов δ_a (град). Зеленым цветом показаны кривые, соответствующие ветру $W_x = W_y = W_z = 0$, синим — $W_x = 6, W_y = 0, W_z = 7$, красным — $W_x = 0, W_y = -4, W_z = -7$.

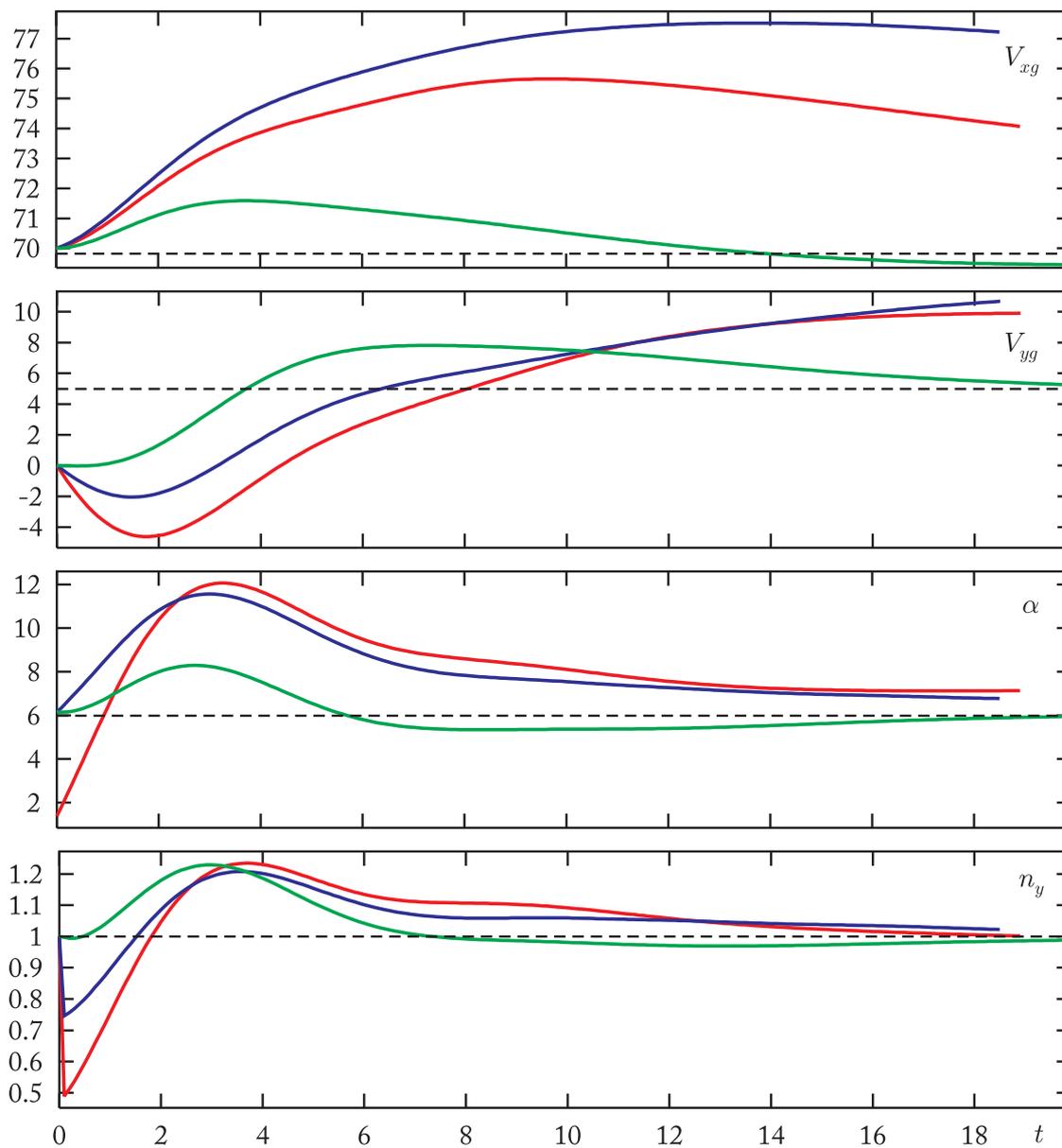


Рис. А.7: Задача о преодолении препятствия, моделирование с постоянным ветром, случаи (1), (2), (3). Графики продольной V_{xg} (м/с) и вертикальной V_{yg} (м/с) скоростей, угла атаки α (град), вертикальной перегрузки n_y (безр). Красной линией обозначено движение при ветре $W_x = 10, W_y = -5$, синей — $W_x = 10, W_y = 0$, зеленой — движение при отсутствии ветра.

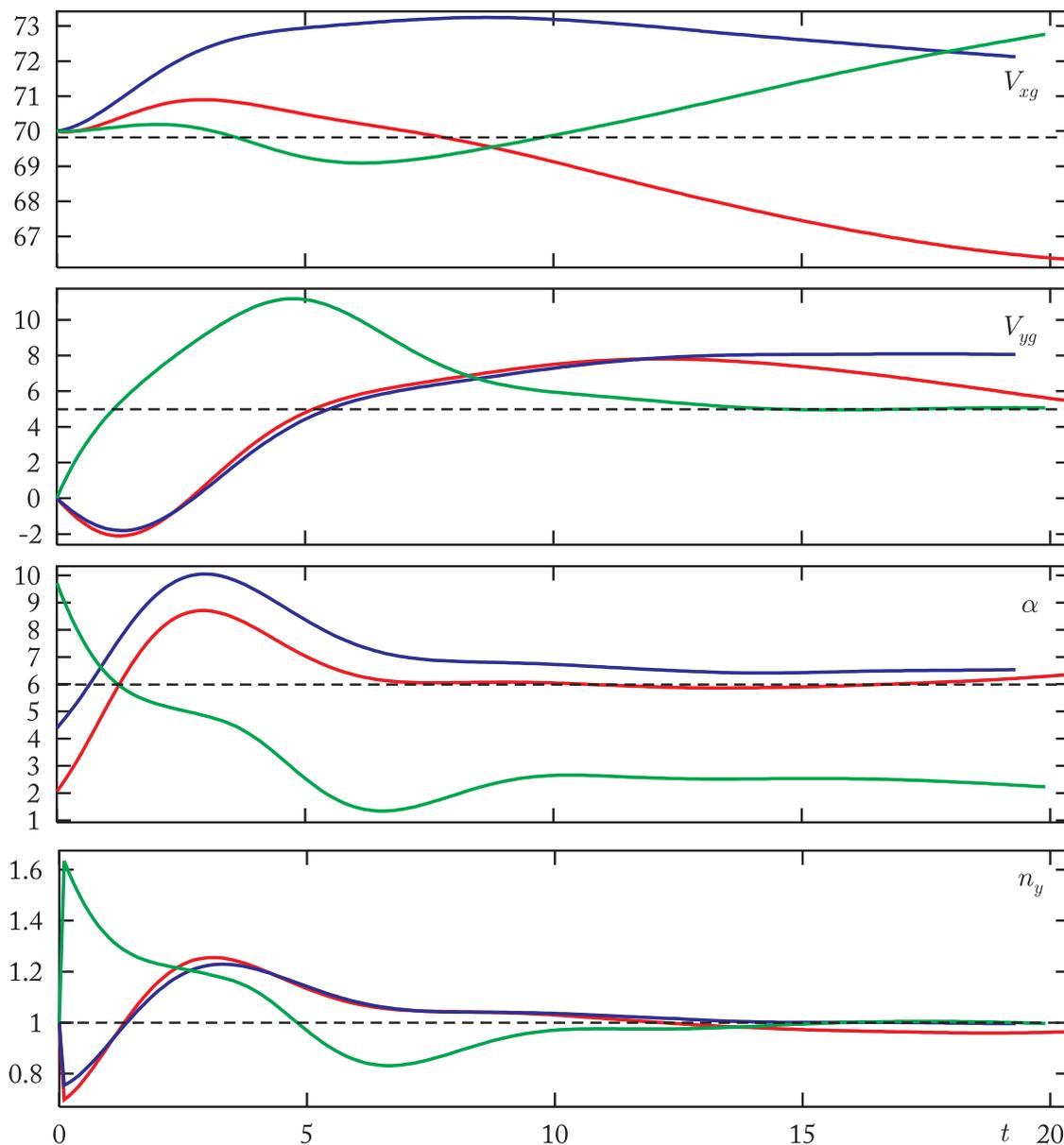


Рис. А.8: Задача о преодолении препятствия, моделирование с постоянным ветром, случаи (4), (5), (6). Графики продольной V_{xg} (м/с) и вертикальной V_{yg} (м/с) скоростей, угла атаки α (град), вертикальной перегрузки n_y (безр). Красной линией обозначено движение при ветре $W_x = 0, W_y = -5$, синей — $W_x = 5, W_y = -2$, зеленой — $W_x = -10, W_y = 5$.

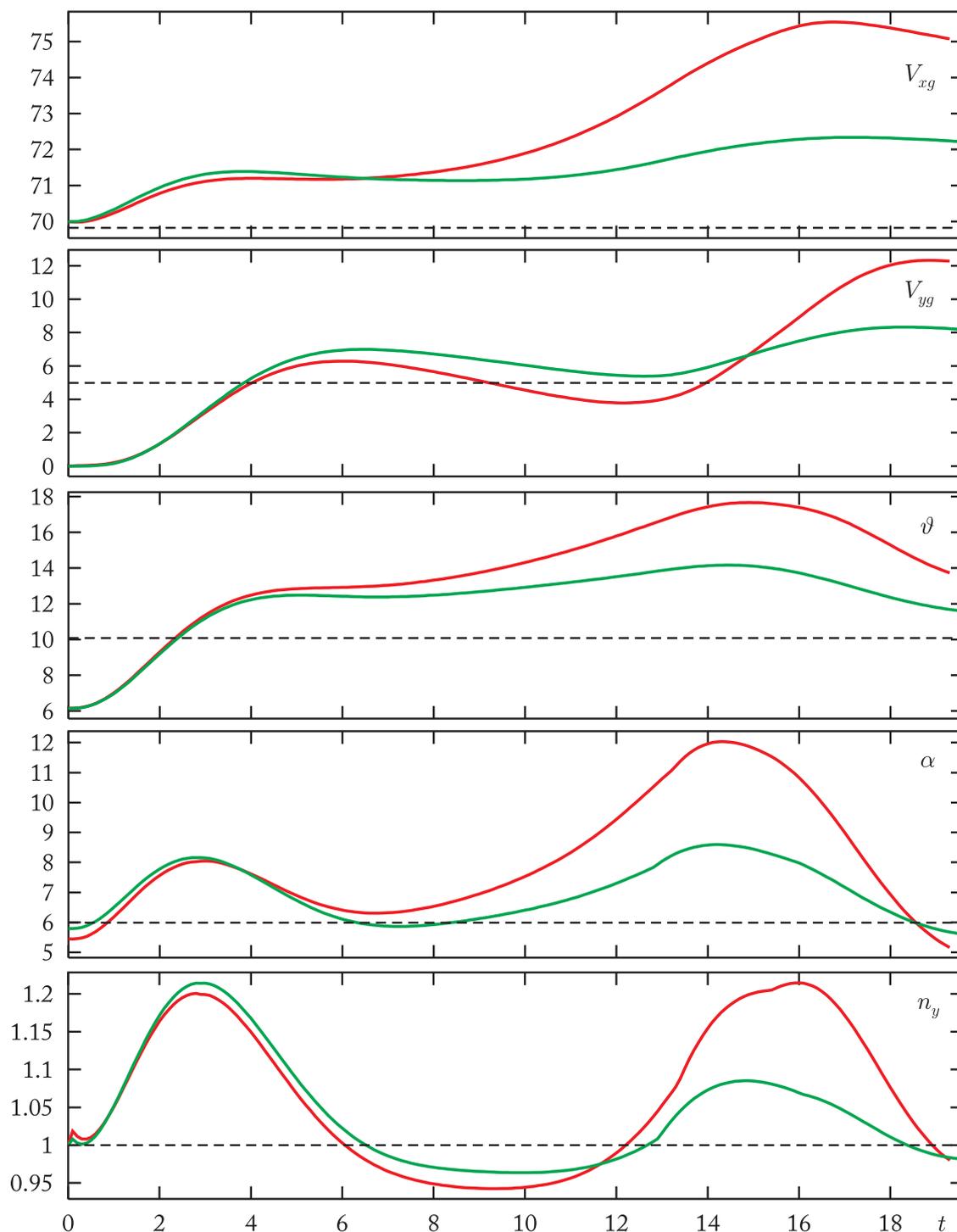


Рис. А.9: Задача о преодолении препятствия, моделирование при микровзрыве ветра. Графики продольной V_{xg} (м/с) и вертикальной V_{yg} (м/с) скоростей, реализовавшегося угла тангажа ϑ (град), угла атаки α (град), вертикальной перегрузки n_y (безр). Красной линией обозначено движение при силе микровзрыва 8 м/с, зеленой — при силе 4 м/с.

Литература

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М: Мир, 1967. — 480 с. = Isaacs R. Differential Games — N.Y.: Wiley, 1965.
- [2] Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко. — Свердловск, 1984. — 295 с.
- [3] Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1996. — 224 с.
- [4] Боткин Н.Д., Кейн В.М., Красов А.И., Пацко В.С. Управление боковым движением самолета на посадке в условиях ветрового возмущения. — Отчет о НИР, № гос. регистрации 81104592, инв. № 02830078880, Ленинград–Свердловск, 1983. — 78 с.
- [5] Боткин Н.Д., Пацко В.С. Позиционное управление в линейной дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, № 4, 1983. — С. 78–85.
- [6] Боткин Н.Д. Погрешность аппроксимации в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика, № 12, 1984. — С. 5–12.
- [7] Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Модельная задача об управлении боковым движением самолета на посадке // ПММ, Т. 48, Вып. 4, 1984. — С. 560–567.
- [8] Боткин Н.Д., Зарх М.А. Оценка погрешности построения множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре // В сборнике [2]. — С. 39–80.
- [9] Боткин Н.Д., Пацко В.С. Численное решение линейных дифференциальных игр // Differential Equations and Applications, I, I. Dimovski and J. Stoyanov (Eds.), Rousse, Bulgaria, 1985. — С. 543–546.

- [10] Боткин Н.Д., Пацко В.С. Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений. — Отчет о НИР, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880044271, Свердловск, 1987. — 46 с.
- [11] Боткин Н.Д., Пацко В.С., Турова В.Л. Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений. — Отчет о НИР, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880054701, Свердловск, 1987. — 58 с.
- [12] Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Решение задачи о посадке самолета в минимаксной постановке // Оптимизация управления летательными аппаратами и их системами: Сб. научн. трудов, М.: Изд-во МАИ, 1988. — С. 8–15.
- [13] Боткин Н.Д., Кейн В.М., Пацко В.С. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче управления самолетом на посадке // Позиционное управление с гарантированным результатом: Сб. научн. трудов, ред. А.И. Субботин, А.М. Тарасьев, Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988. — С. 33–44.
- [14] Боткин Н.Д., Красов А.И. Позиционное управление в модельной задаче о разбеге самолета // Позиционное управление с гарантированным результатом: Сб. научн. трудов, ред. А.И. Субботин, А.М. Тарасьев, Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1988. — С. 22–32.
- [15] Боткин Н.Д., Турова В.Л. Разработка пакета прикладных программ синтеза экстремальных ветровых возмущений на этапе посадки — Отчет о НИР, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880069889, Свердловск, 1988. — 39 с.
- [16] Боткин Н.Д., Турова В.Л., Иванов А.Г. Рекомендации по имитации экстремальных ветровых возмущений. — Отчет о НИР, № гос. регистрации 188003467, инв. № 02880045178, Свердловск, 1988. — 51 с.
- [17] Боткин Н.Д., Жуков С.П., Красов А.И. Комбинированный способ управления самолетом на посадке // Управление в динамических системах: Сб. научн. трудов, ред. А.И. Субботин, В.Н. Ушаков, Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1990. — С. 18–30.
- [18] Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А. Алгоритмы построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерно-

- сти // Труды Института математики и механики, Т. 2, Екатеринбург, 1992. — С. 128–134.
- [19] Боткин Н.Д., Зарх М.А., Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах // Изв. РАН, Техническая кибернетика, № 1, 1993. — С. 68–76.
- [20] Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г. Методы решения дифференциальных игр // Математическое моделирование, 1993. — С. 296–316.
- [21] Жаринов А.Н., Кумков С.С. Численное построение стабильных мостов в нелинейных дифференциальных играх // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 35-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2004. — С. 233–237.
- [22] Зарх М.А., Пацко В.С. Построение максимальных стабильных мостов в линейной дифференциальной игре // Синтез оптимального управления в игровых системах, Свердловск, 1986. — С. 46–61.
- [23] Зарх М.А., Пацко В.С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом: Сб. науч. трудов, Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. — С. 37–70.
- [24] Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение дифференциальной игры наведения третьего порядка // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1987. — С. 162–169.
- [25] Зарх М.А. Пакет программ для решения трехмерных дифференциальных игр // Анализ и синтез динамических систем в условиях неопределенности: Сб. научн. трудов, М.: Изд-во МАИ, 1990. — С. 35–41.
- [26] Зарх М.А. Универсальная стратегия второго игрока в линейной дифференциальной игре // ПММ, Т. 54, Вып. 3, 1990. — С. 395–400.
- [27] Зарх М.А., Иванов А.Г. Построение функции цены игры в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Труды Института математики и механики, Т. 2, Екатеринбург, 1992. — С. 140–155.

- [28] Иванов А.Г. Моделирование движения самолета на этапе посадки // Проблемы управления с гарантированным результатом: Сб. научн. трудов, ред. А.И. Субботин, С.А. Брыкалов, Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1992. — С. 15–26.
- [29] Иванов А.Г., Ушаков А.В. Адаптивное управление в трехмерных линейных системах при неизвестном уровне динамической помехи // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы II Международной научной конференции, Воронеж: ВГТУ, 2007. — С. 81.
- [30] Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // В сборнике [2]. — С. 127–158.
- [31] Кейн В.М., Париков А.Н., Смуров М.Ю. Об одном способе оптимального управления по методу экстремального прицеливания // ПММ, Т. 44, Вып. 3, 1980. — С. 434–440.
- [32] Кейн В.М. Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. — М.: Наука, 1985. — 248 с.
- [33] Кейн В.М., Пацко В.С., Турова В.Л. Задача о посадке самолета в условиях сдвига ветра // Управление в динамических системах: Сб. научн. трудов, ред. А.И. Субботин, В.Н. Ушаков, Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1990. — С. 52–64.
- [34] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
- [35] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
- [36] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. — М.: Наука, 1985. — 520 с.
- [37] Кумков С.С. О разработке параллельной программы решения линейных дифференциальных игр // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений, Вып. 3. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — С. 145–164.

- [38] Куржанский А.Б. Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Труды Математического института им. Стеклова, Т. 224, 1999. — С. 234–238.
- [39] Михалев Д.К., Ушаков В.Н. О двух алгоритмах приближенного построения множества позиционного поглощения в игровой задаче сближения // Автоматика и телемеханика, № 11, 2007. — С. 178–193.
- [40] Никольский М.С. О приближенном вычислении геометрической разности множеств // Вестник Московского университета, Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика, № 1, 2003. — С. 49–54.
- [41] Пацко В.С. Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания // ПММ, Т. 68. Вып. 4, 2004. — С. 653–666.
- [42] Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимость альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Московского университета. Вычислительная математика и кибернетика, № 1, 1978. — С. 82–90.
- [43] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры. 1 // Докл. АН СССР, Т. 174, № 6, 1967. — С. 1278–1280.
- [44] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры. 2 // Докл. АН СССР, Т. 175, № 4, 1967. — С. 764–766.
- [45] Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник, Т. 192, № 10, 2001. — С. 95–122.
- [46] Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, № 2, 1970. — С. 54–63.
- [47] Соколов В.Ф. Робастное управление в l_1 -постановке: верификация модели и оценивание весов возмущений // Автоматика и телемеханика, № 11, 2003. — С. 138–151.
- [48] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизации гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
- [49] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991. — 216 с.

- [50] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 336 с.
- [51] Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // ПММ, Т. 51, Вып. 2, 1987. — С. 216–222.
- [52] Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Приближенное построение множества позиционного поглощения в линейной задаче сближения с выпуклой целью в R^3 // Управление в динамических системах, Свердловск: УрО АН СССР, 1990. — С. 93–100.
- [53] Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики, Т. 1, Екатеринбург: УрО РАН, 1992. — С. 160–177.
- [54] Турова В.Л. Применение численных методов теории дифференциальных игр к задаче о взлете и прекращении посадки самолета // Труды Института математики и механики УрО РАН, Т. 2, 1992. — С. 188–201.
- [55] Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, № 4, 1980. — С. 29–36.
- [56] Ушаков В.Н., Хрипунов А.И. О приближенном построении решения в игровых задачах управления // ПММ, Т. 61, № 3, 1997. — С. 413–421.
- [57] Ушаков В.Н., Успенский А.А., Токманцев Т.Б. Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Труды Института математики и механики, Екатеринбург: УрО РАН, Т. 10, № 2, 2004. — С. 155–177.
- [58] Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. — Birkhäuser, Boston, 1997. — 570 p.
- [59] Bardi M., Falcone M., Soravia P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games, Vol. 4. — Birkhäuser, Boston, 1999. — pp. 105–175.

- [60] Basar T., Bernhard P. H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems. A Dynamic Game Approach. — Birkhäuser, Boston, 1991. — 224 p.
- [61] Botkin N.D. Evaluation of numerical construction error in differential game with fixed terminal time // Problems of Control and Information Theory, Vol. 11, № 4, 1982. — pp. 283–295.
- [62] Botkin N.D., Kein V.M., Patsko V.S., Turova V.L. Aircraft landing control in the presence of windshear // Problems of Control and Information Theory, Vol. 18, № 4, 1989. — pp. 223–235.
- [63] Botkin N.D., Zarkh M.A., Patsko V.S. Numerical solution of linear differential games // Differential Games — Developments in Modelling and Computation, Lecture Notes in Control and Information Sciences, № 156, Berlin–New York: Springer-Verlag, 1991. — pp. 226–234.
- [64] Bulirsch R., Montrone F., Pesch H.J. Abort landing in the presence of windshear as a minimax control problem // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 70, № 1, 1991. — pp. 1–23.
- [65] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games, Vol. 4. — Birkhäuser, Boston, 1999. — pp. 177–247.
- [66] Chen Y.H., Pandey S. Robust control strategy for take-off performance in windshear // Optimal Control Applications and Methods, Vol. 10, № 1, 1989. — pp. 65–79.
- [67] Dahleh M.A., Pearson J.B. L^1 -optimal compensators for continuous-time systems // IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 32, № 10, 1987. — pp. 889–895.
- [68] Future directions in control theory. A mathematical perspective. // Report of the Panel on Future Directions in Control Theory, W.H. Fleming (Ed.) — SIAM Reports on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia: SIAM, 1988. — 98 p.
- [69] Ivan M. A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe windshear // AIAA Flight Simulation Technologies Conf., St.Louis, Miss., 1985. — pp. 57–61.

- [70] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems*. — N.Y.: Springer, 1988. — 518 p.
- [71] Kumkov S.S., Patsko V.S. Backward procedures in linear differential games of small dimension // *Modern Applied Mathematics Techniques in Circuits, Systems and Control*. — Mastorakis N. (Ed.), World Scientific and Engineering Society Press, 1999. — pp. 138–143.
- [72] Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. On level sets with “narrow” throats in linear differential games // *International Game Theory Review*, Vol. 7, No. 3, September 2005. — pp. 285–312.
- [73] Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. — Birkhäuser, Boston, 1997. — 321 p.
- [74] Leitmann G., Pandey S. Aircraft control for flight in an uncertain environment: Take-off in windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 70, № 1, 1991. — pp. 25–55.
- [75] Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 49, № 1, 1986. — pp. 1–45.
- [76] Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., Melvin W.W. Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 55, № 2, 1987. — pp. 165–202.
- [77] Miele A., Wang T., Wang H., Melvin W.W. Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 57, № 1, 1988. — pp. 1–40.
- [78] Patsko V.S., Botkin N.D., Kein V.M., Turova V.L., Zarkh M.A. Control of an aircraft landing in windshear // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 83, № 2, 1994. — pp. 237–267.
- [79] Patsko V.S. Special aspects of convex hull constructions in linear differential games of small dimension // *Control Applications of Optimization, A Postprint Volume from the IFAC Workshop, Haifa, Israel, Pergamon, 1995*. — pp. 19–24.
- [80] Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 43, No. 3, 1984. — pp. 431–458.

- [81] Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader — a linear game with elliptical vectograms // Proceedings of the Seventh International Symposium on Dynamic Games, Yokosuka, Japan, 1996. — pp. 855–868.
- [82] Suebe N., Moitie R., Leitmann G. Aircraft taking-off in windshear: a viability approach // Set-Valued Analysis, Vol. 8, 2000. — pp. 163–180.
- [83] Turetsky V., Glizer V.Y. Robust state-feedback controllability of linear systems to a hyperplane in a class of bounded controls // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 123, № 3, 2004. — pp. 639–667.
- [84] Ushakov V. Construction of solutions in differential games of pursuit-evasion // Lecture Notes in Nonlinear Analysis, Vol. 2. Differential Inclusions and Optimal Control. — Nicholas Copernicus University, Torun, 1998. — pp. 269–281.

Публикации автора по теме диссертации

- [85] Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // ПММ, Т. 70, Вып. 5, 2006. — С. 753–770.
- [86] Ганебный С.А. Построение робастного управления в линейных дифференциальных играх // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 36-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2005. — С. 253–257.
- [87] Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С., Пятко С.Г. Построение робастного управления в дифференциальных играх. Применение к задаче управления самолетом на посадке // Труды Международной конференции “Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)”, Минск, Беларусь, Институт математики НАН Беларуси, Т. 2, 2005. — С. 29–34.
- [88] Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С., Пятко С.Г. Робастное управление в игровых задачах с линейной динамикой. Препринт. — Институт математики и механики, Екатеринбург, 2005. — 53 с.
- [89] Ganebny S.A., Krasov A.I., Kumkov S.S., Patsko V.S. Robust Control in a Problem of Aircraft Landing under Wind Disturbances // Proceed-

- ings of the 13th IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation (CAO'06), Paris-Cachan, France, 2006. — pp. 431–436.
- [90] Ганебный С.А. Управление самолетом на посадке в условиях ветрового возмущения // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 37-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2006. — С. 311–315.
- [91] Ганебный С.А. Управление самолетом на посадке в условиях ветрового возмущения // Известия Института математики и информатики, Т. 37, № 3, Ижевск, 2006. — С. 23–24.
- [92] Ganebny S.A., Krasov A.I., Kumkov S.S., Patsko V.S. Robust Control in a Problem of Aircraft Landing under Wind Disturbances // International Journal of Tomography and Statistics, Special Issue on Control Applications of Optimisation, Vol. 7, No. F07, 2007. — pp. 37–46.
- [93] Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S., Pyatko S.G. Constructing Robust Control in Differential Games. Application to Aircraft Control during Landing // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 9: Advances in Dynamic Games and Applications, S. Jorgensen, M. Quincampoix, and T.L. Vincent (Eds.), Birkhäuser, Boston, 2007. — pp. 69–92.
- [94] Ганебный С.А. Построение робастного управления на основе методов теории дифференциальных игр // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2007. — С. 281–285.
- [95] Ганебный С.А., Красов А.И., Пацко В.С., Смольникова М.А. Задача преодоления самолетом препятствия по высоте. — Отчет о НИР, Разработка алгоритмов и программ обработки и анализа информации в системе УВД, Том 3, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2008. — 35 с.
- [96] Ганебный С.А., Смольникова М.А. Применение методов теории дифференциальных игр к задаче о преодолении самолетом препятствия по высоте // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург: УрО РАН, 2008. — С. 240–244.
- [97] Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S. Feedback control in problems with unknown level of dynamic disturbance // Advances in Mechanics: Dynamics and Control: Proceedings of the 14th International Workshop on

Dynamics and Control, Institute for Problems in Mechanics RAS, M.: Nauka, 2008. — pp. 125–132.

- [98] Ganebny S.A., Kumkov S.S., Patsko V.S. Extremal aiming in problems with unknown level of dynamic disturbance // Proceedings of the 13th International Symposium on Dynamic Games and Applications, Wroclaw, Poland, 2008. — 7 с. (на диске)
- [99] <http://home.imm.uran.ru/sector3/isdg2006/>
- [100] <http://home.imm.uran.ru/sector3/Israel2007/>