УПРАВЛЕНИЕ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

УДК 62-50

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ*

© 2003 г. С. И. Кумков, В. С. Пацко, С. Г. Пятко, В. М. Решетов, А. А. Федотов

Екатеринбург, Институт математики и механики УрО РАН,
Санкт-Петербург, Академия гражданской авиации

Поступила в редакцию 03.02.03 г.

Рассматривается построение оценки сверху для информационных множеств, характеризующих фазовые состояния самолета при его движении в горизонтальной плоскости. В основе лежит способ огрубления сверху множеств достижимости исследуемой нелинейной управляемой системы. Информационные множества строятся в трехмерном фазовом пространстве на основе замеров двумерного геометрического положения с учетом известных ограничений на ошибку замеров. Предложенные алгоритмы позволяют вести вычисления в реальном масштабе времени. Приведены результаты моделирования.

0. Введение. В современной теории наблюдения и управления наряду с вероятностным подходом [1] к описанию состояния динамической системы в условиях неточных замеров используется детерминированный подход, основанный на построении информационных множеств [2–7].

Под информационным множеством понимается совокупность всех фазовых состояний системы, совместных с полученными замерами. Информационное множество можно трактовать как "обобщенное" состояние системы.

В работе рассматривается в модельной постановке задача наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. Динамика движения описывается [8–12] системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\varphi, \\ \dot{y} &= V\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V; \end{aligned} \qquad (0.1)$$

$$V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0, \quad |u| \le 1.$$

Здесь x, y – геометрические координаты, φ – угол направления вектора скорости, V – величина скорости, u – неизвестное управляющее воздействие. Угол φ отсчитывается от горизонтальной оси против часовой стрелки (рис. 1).

Текущая информация о движении самолета поступает в виде замеров его положения на плоскости x, y. Известны геометрические ограничения на ошибки замеров. Замеру, пришедшему в некоторый момент t_*, соответствует множество неопределенности $H(t_*)$ – совокупность всех фазовых состояний (x, y, φ), совместных с полученным замером и заданными ограничениями на его ошибку. Предполагаем, что множество $H(t_*)$ цилиндрично по координате φ и имеет выпуклую проекцию на плоскость x, y. Совокупность всех фазовых состояний в момент t, совместных с множествами неопределенности, накопленными к этому моменту, составляет информационное множество $I(t)$.

В дискретной схеме наблюдения на сетке моментов t_j информационное множество $I(t_j)$ получается пересечением множества прогноза $G(t_j)$ с множеством неопределенности $H(t_j)$. Множество $G(t_j)$ есть множество достижимости [2–5, 7, 12] системы (0.1) в момент t_j, построенное от множества $I(t_{j-1})$, взятого в качестве начального для системы (0.1) в предыдущий момент наблюдения t_{j-1}. Множество $H(t_j)$ соответствует наблюдению в момент t_j.

Информационные множества в рассматриваемой задаче невыпуклые, поскольку не являются выпуклыми множества достижимости. В работе

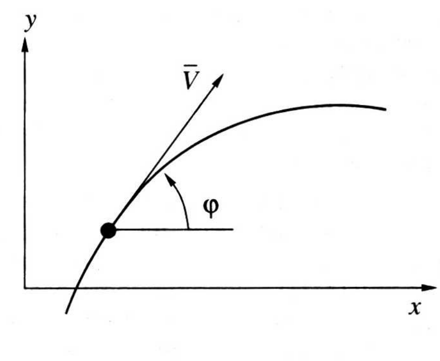

Рис. 1. Система координат.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00-01-00348, № 02-01-96424).

предложен вариант огрубления сверху множеств прогноза и, как следствие, информационных множеств. В численной процедуре расширенное множество прогноза $\mathbf{G}(t_j)$ и расширенное информационное множество $\mathbf{I}(t_j)$ представляются сеткой узлов по координате φ и набором сечений $\{\mathbf{G}_\varphi(t_j)\}$, соответственно $\{\mathbf{I}_\varphi(t_j)\}$ – в виде выпуклых многоугольников на плоскости x, y. Основными являются операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых многоугольников и операция пересечения выпуклых многоугольников. Разработанный алгоритм позволяет строить информационные множества в реальном времени.

Расширенное множество прогноза $\mathbf{G}(t_j)$ оценивает сверху множество достижимости $G(t_j)$ управляемой системы (0.1) с начальным множеством $\mathbf{I}(t_*)$, где $t_* < t_j$ – момент последнего замера. С целью изучения характера возникающей погрешности проведено сравнение трехмерных множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$, а также проанализированы их проекции на плоскость координат x, y. При этом в качестве начального множества бралась точка в трехмерном пространстве. Алгоритм построения трехмерного множества достижимости опирается на формулируемое в работе утверждение о числе переключений управления, ведущего на границу множества достижимости.

В заключительной части работы представлены результаты построения информационных множеств для различных вариантов геометрии множеств неопределенности и при различном числе вершин выпуклых многоугольников, аппроксимирующих сечения информационного множества.

Данная статья использует некоторые материалы работ [13, 14], посвященных в основном четырехмерному варианту динамики системы, в котором скорость V не предполагалась постоянной. Трехмерный вариант проще и на нем более прозрачными становятся предлагаемые идеи построения информационных множеств.

1. Постановка задачи о построении информационных множеств. Считаем, что динамика движения удовлетворяет системе (0.1). Значения координаты φ либо рассматриваются на бесконечной оси $(-\infty, \infty)$, либо вычисляются по модулю 2π. В последнем случае отождествляются значения φ, отличающиеся на величину, кратную 2π. Ниже будем писать формулы для первого случая изменения координаты φ. Во втором случае везде, где говорим о расчете значений φ, следует добавить обозначение $(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

В дискретные моменты времени поступают замеры положения самолета на плоскости x, y. Каждому замеру сопоставляется *множество неопределенности* (МН) – совокупность всех состояний (x, y, φ), совместных с данным замером при известных ограничениях на ошибку замера. Например, если в некоторый момент поступает замер $(\hat{x}, \hat{y})$ и максимальная радиальная ошибка замера есть σ, то неизвестное нам геометрическое состояние в этот момент находится в круге радиуса σ с центром в точке $(\hat{x}, \hat{y})$. МН такого замера представляет собой цилиндр в трехмерном пространстве с проекцией на плоскость x, y в виде указанного круга.

Условимся, что множество неопределенности $H(t)$ каждого текущего замера является цилиндрическим по координате φ и целиком задается своей проекцией $H^{\#}(t)$ на плоскость x, y

$$H(t) = H^{\#}(t) \times \{\varphi\}. \tag{1.1}$$

Множества $H^{\#}(t)$ в дальнейшем предполагаются выпуклыми.

Под *информационным множеством* (ИМ) $I(t)$ понимаем совокупность всех состояний (x, y, φ) системы (0.1) в момент t, совместных с имеющимися к моменту t множествами неопределенности.

Требуется разработать алгоритм построения информационных множеств.

2. Схема построения информационных множеств. 2.1. Формальное описание информационных множеств. Предполагаем известным начальное информационное множество $I(t_0)$. Оно формируется на основе предварительных сведений и по МН начального замера.

Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ построено и следующий замер ожидается в момент $t^* > t_*$. Определим *множество прогноза* $G(t^*)$ как множество достижимости системы (0.1) в момент времени t^* из состояний, принадлежащих множеству $I(t_*)$ в момент t_*

$$G(t^*) = \bigcup_{u(\cdot),\, z \in I(t_*)} \xi(t^*; t_*, z, u(\cdot)).$$

Здесь $\xi(t^*; t_*, z, u(\cdot))$ – решение системы дифференциальных уравнений (0.1), доведенное до момента t^*, при начальном фазовом состоянии z в момент t_* и кусочно-непрерывном управлении $u(\cdot)$, удовлетворяющем при любом t условию $|u(t)| \le 1$.

МН несет новую информацию о системе, поэтому множество $I(t^*)$ определяется как пересечение множества прогноза $G(t^*)$ и множества неопределенности $H(t^*)$ пришедшего замера

$$I(t^*) = G(t^*) \cap H(t^*). \tag{2.1}$$

Если в момент t^* замер отсутствует, то операция пересечения не выполняется и полагается, что текущее информационное множество $I(t^*)$ совпадает с текущим множеством прогноза $G(t^*)$. Формально можно считать, что МН отсутствующего замера совпадает со всем пространством $\{x, y, \varphi\}$. Таким образом, в каждый текущий момент ИМ определяется начальным множеством $I(t_0)$ и МН замеров, поступивших к этому моменту.

Система (0.1) нелинейна, множество прогноза невыпукло и имеет сложную структуру. Как следствие, достаточно сложно устроено пересечение (2.1). Для эффективного описания ИМ необходимо идти на некоторые упрощения. Мы сделаем их, используя разумным образом специфику системы.

2.2. Эквивалентное представление информационных множеств. Перепишем выражение (2.1), определяющее ИМ, в удобном для нас эквивалентном виде. Рассмотрим проекцию $I^{\diamond}(t_*)$ множества $I(t_*)$ на ось φ. Каждой точке $\varphi \in I^{\diamond}(t_*)$ поставим в соответствие сечение $I_{\varphi}(t_*)$ информационного множества $I(t_*)$ плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$. Такие сечения будем рассматривать в проекции на плоскость x, y

$$I_{\varphi}(t_*) = \{(x, y) \colon (x, y, \varphi) \in I(t_*)\}.$$

Информационное множество $I(t_*)$ представим проекцией $I^{\diamond}(t_*)$ на ось φ и множествами $I_{\varphi}(t_*)$ на плоскости x, y

$$I(t_*) = \bigcup_{\varphi \in I^{\diamond}(t_*)} [I_{\varphi}(t_*) \times \{\varphi\}]. \tag{2.2}$$

Аналогично запишем множество прогноза

$$G(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)} [G_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \{\bar{\varphi}\}]. \tag{2.3}$$

С учетом (1.1), (2.3) формулу (2.1) можно переписать следующим образом:

$$I(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)} [(G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^{\#}(t^*)) \times \{\bar{\varphi}\}]. \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) записано в таком же виде, что и (2.2). Это следует из того, что

$$I_{\bar{\varphi}}(t^*) = G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^{\#}(t^*),$$

$$I^{\diamond}(t^*) = \{\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*) \colon G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^{\#}(t^*) \neq \varnothing\}.$$

Представление множеств $I(t_*)$, $G(t^*)$, $I(t^*)$ в виде (2.2)–(2.4) позволяет в дальнейшем перейти к сетке по координате φ и рассматривать только те сечения, которые соответствуют узлам сетки.

2.3. Учет специфики динамики движения. Покажем, как можно вычислять множества $G^{\diamond}(t^*)$ и $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ на основе множеств $I^{\diamond}(t_*)$ и $I_{\varphi}(t_*)$.

Зафиксируем управление $u(\cdot)$ на полуинтервале $[t_*, t^*)$. Рассмотрим прогнозируемое множество $G(t^*, u(\cdot))$ при начальном множестве $I(t_*)$ и управлении $u(\cdot)$. Данное множество, как и множество $G(t^*)$, представим проекцией $G^{\diamond}(t^*, u(\cdot))$ на прямую φ и сечениями $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$.

Фазовые координаты x, y отсутствуют в правой части системы (0.1). Поэтому третье уравнение можно проинтегрировать независимо от первых двух

$$\varphi(t) = \varphi(t_*) + \int_{t_*}^{t} ku(\tau)/V d\tau.$$

Следовательно,

$$G^{\diamond}(t^*, u(\cdot)) = \left\{\varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(t)/V dt \colon \varphi \in I^{\diamond}(t_*)\right\}.$$

Зафиксируем дополнительно значение $\varphi \in I^{\diamond}(t_*)$. Интегрирование первых двух уравнений системы (0.1) для начальных состояний из $I_{\varphi}(t_*)$ означает перенос каждой точки на один и тот же вектор. Полагая

$$\bar{\varphi} = \varphi(t^*) = \varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(\tau)/V d\tau, \tag{2.5}$$

имеем

$$G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = I_{\varphi}(t_*) + \left(\int_{t_*}^{t^*} V\cos\varphi(t)dt, \int_{t_*}^{t^*} V\sin\varphi(t)dt\right)^{\mathrm{T}}. \tag{2.6}$$

Здесь и далее верхний символ Т означает транспонирование.

Перебирая значения $\varphi \in I^{\diamond}(t_*)$, получим по формуле (2.6) все сечения $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ прогнозируемого множества $G(t^*, u(\cdot))$. Будем считать, что множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ заданы для произвольных значений $\bar{\varphi}$. Если $\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*, u(\cdot))$, т.е. $\bar{\varphi}$ соответствует в силу (2.5) некоторому $\varphi \in I^{\diamond}(t_*)$, то сечение определяется формулой (2.6); иначе $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = \varnothing$.

Откажемся теперь от фиксации управления $u(\cdot)$. Множество $G^{\diamond}(t^*)$ есть множество достижимости в силу третьего уравнения системы (0.1) при начальном множестве $I^{\diamond}(t_*)$

$$G^{\diamond}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G^{\diamond}(t^*, u(\cdot)).$$

Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ вычисляются по формуле

$$G_{\bar{\varphi}}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)). \tag{2.7}$$

2.4. Овыпукление сечений множества прогноза. При нахождении сечений $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ имеем дело с объединением (2.7) множеств на плоскости x, y. Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$, $\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)$, пересекаются затем с множеством $H^{\#}(t^*)$.

Трудность состоит в том, что множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ невыпуклы.

Условимся подменять каждое из множеств $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$, $\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)$, его выпуклой оболочкой. Таким образом, одновременно с операцией (2.7) объединения по $u(\cdot)$ множеств $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ вычисляем выпуклую оболочку. Получаем множество

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) = \operatorname{conv} G_{\bar{\varphi}}(t^*).$$

Обозначим

$$\mathbf{G}(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)} [\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \{\bar{\varphi}\}],$$

$$\mathbf{I}(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^{\diamond}(t^*)} [(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^{\#}(t^*)) \times \{\bar{\varphi}\}].$$

Имеем $\mathbf{G}(t^*) \supset G(t^*)$, $\mathbf{I}(t^*) \supset I(t^*)$.

Условимся проводить овыпукление, начиная с начального момента t_0. Тогда на момент t_* получим множество $\mathbf{I}(t_*)$ с выпуклыми сечениями $\mathbf{I}_{\varphi}(t_*)$. Следовательно, при нахождении множества $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*)$ будем строить выпуклую оболочку объединения выпуклых множеств.

Полагая выше в формулах для $\mathbf{G}(t^*)$ вместо t^* произвольное $t \in [t_*, t^*]$, получим множество $\mathbf{G}(t)$ на момент t. Вычислив $\mathbf{G}(\tilde{t})$ для некоторого момента $\tilde{t} \in (t_*, t^*)$, можно затем аналогично найти множество $\mathbf{G}(\hat{t}; \tilde{t}, \mathbf{G}(\tilde{t}))$, построенное на момент $\hat{t} \in (\tilde{t}, t^*]$ от начального множества $\mathbf{G}(\tilde{t})$. Очевидно, что $\mathbf{G}(\hat{t}; \tilde{t}, \mathbf{G}(\tilde{t})) \supset \mathbf{G}(\hat{t})$. Однако из отмеченного ранее специфического свойства системы (0.1) (отсутствие фазовых координат x, y в правой части) вытекает более сильное соотношение $\mathbf{G}(\hat{t}; \tilde{t}, \mathbf{G}(\tilde{t})) = \mathbf{G}(\hat{t})$. Таким образом, отображение $t \longrightarrow \mathbf{G}(t)$ обладает полугрупповым свойством.

Далее речь пойдет о построении множеств $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{I}(t)$. Опуская слово "расширенное", будем по-прежнему называть их (как и $G(t)$, $I(t)$) множеством прогноза и информационным множеством.

3. Практическое построение информационных множеств. При численном нахождении ИМ используем некоторую дискретизацию построений. Опишем основные элементы дискретизации.

3.1. Дискретизация по t, u, φ. Пусть в момент t_* информационное множество $\mathbf{I}(t_*)$ построено и требуется построить множество $\mathbf{I}(t^*)$ в момент $t^* > t_*$ следующего замера.

Сначала найдем множество прогноза $\mathbf{G}(t^*)$. С этой целью можно разбить промежуток времени $[t_*, t^*]$ с шагом Δ и рассмотреть кусочно-постоянные управления $u(\cdot)$, принимающие на каждом полуинтервале $[t^{(i)}, t^{(i+1)})$ полученного разбиения нулевое значение или одно из крайних: $u \in \{-1, 0, 1\}$. Выбор таких значений определяется тем, что экстремальные движения, формирующие границу множества достижимости, удовлетворяют [12] принципу максимума Понтрягина и, стало быть, образуются для системы (0.1) при помощи крайних управляющих воздействий $u = \pm 1$. Значение $u = 0$ реализуется на вырожденных участках экстремальных движений. Перебирая указанные кусочно-постоянные управления и проводя операцию овыпукления в момент t^*, приближенно просчитаем множество $\mathbf{G}(t^*)$.

Но более удобно, опираясь на полугрупповое свойство отображения $t \longrightarrow \mathbf{G}(t)$, рекуррентно пересчитывать множество $\mathbf{G}(t)$ с шагом Δ, пока не дойдем до момента t^*. При таком способе на каждом Δ-шаге используем три постоянных управления $u = -1$, 0, 1. Каждый шаг завершается операцией овыпукления.

Множество прогноза $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ на момент $t^{(i+1)}$ строим, опираясь на множество $\mathbf{G}(t^{(i)})$, построенное в момент $t^{(i)}$. При этом для момента $t^{(1)} = t_*$ формально полагаем $\mathbf{G}(t^{(1)}) = \mathbf{I}(t_*)$.

Пересчет множества $\mathbf{G}(t^{(i)})$ в множество $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ осуществляется следующим образом. Имеем на момент $t^{(i)}$ набор узлов по φ. Каждому узлу соответствует выпуклое множество $\mathbf{G}_{\varphi}(t^{(i)})$. Используя управления $u = -1$, 0, 1, получим на момент $t^{(i+1)}$ три узла новой сетки: $\bar{\varphi} = \varphi + \Delta ku/V$. Сечения, соответствующие этим узлам, имеют вид

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^{(i+1)}, u) =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{G}_{\varphi}(t^{(i)}) + \dfrac{V^2}{ku}(\sin\bar{\varphi} - \sin\varphi,\ \cos\varphi - \cos\bar{\varphi})^{\mathrm{T}}, \\ \text{если } u = \pm 1; \\ \mathbf{G}_{\varphi}(t^{(i)}) + \Delta V(\cos\varphi,\ \sin\varphi)^{\mathrm{T}}, \ \text{если } u = 0. \end{cases}$$

Таким образом, количество узлов новой сетки на шаге Δ может вырасти в 3 раза. Однако какие-то из узлов оказываются близкими, что позволяет "склеивать" их для ограничения общего количества сечений. Вместо каждой группы сечений с близкими значениями $\bar{\varphi}$ вводится одно сечение со средним значением координаты φ, представляющее собой выпуклую оболочку объединения сечений рассматриваемой группы. Набор результирующих сечений и составляет множество $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$.

Так доходим до момента t^* и получаем множество $\mathbf{G}(t^*)$.

При поступлении в момент t^* замера формируется множество неопределенности $H(t^*)$. Оно цилиндрично по координате φ и целиком определяется проекцией $H^{\#}(t^*)$ на плоскость x, y.

Информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ получается путем пересечения каждого сечения $\mathbf{G}_\varphi(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^\#(t^*)$. Результаты непустых пересечений и составляют искомое множество $\mathbf{I}(t^*)$.

3.2. Аппроксимация многоугольниками. На плоскости x, y работаем с выпуклыми множествами $\mathbf{G}_\varphi(t)$, $\mathbf{I}_\varphi(t)$ и $H^\#(t)$. Для их представления используем, применяя аппроксимацию сверху, выпуклые многоугольники.

Зафиксируем расположенный равномерно по углу набор из m единичных векторов $n_1, \ldots, n_m$ (сетка нормалей) на плоскости x, y с отсчетом против часовой стрелки от оси x.

Для любого ограниченного, замкнутого множества D на плоскости в качестве аппроксимирующего его сверху будем брать многоугольник D_m, определяемый набором значений ρ_i опорной функции множества D на векторах n_i

$$D_m = \{(x, y)^{\mathrm{T}}: xn_{ix} + yn_{iy} \le \rho_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

При $m = 4$ имеем четыре вектора, и аппроксимирующий многоугольник есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Использование только логических операций для работы с прямоугольниками выделяет этот случай особо в плане минимизации затрат памяти и машинного времени.

3.3. Построение выпуклой оболочки объединения. Пусть выпуклые многоугольники A и B заданы наборами $\rho_1^A, \ldots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \ldots, \rho_m^B$ значений опорных функций на фиксированной сетке из m векторов n_i. Выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(A \cup B)$ объединения таких многоугольников есть многоугольник, векторы нормалей которого не обязательно принадлежат сетке $n_1, \ldots, n_m$. Будем аппроксимировать сверху выпуклую оболочку $\mathrm{conv}(A \cup B)$ выпуклым многоугольником C, который определяется набором $\rho_1^C, \ldots, \rho_m^C$

$$\rho_i^C = \max(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Многоугольник C является минимальным по включению среди многоугольников, содержащих объединение $A \cup B$ и заданных значениями опорной функции на векторах $n_1, \ldots, n_m$.

3.4. Операция пересечения. Пересечение выпуклых многоугольников A и B, заданных наборами $\rho_1^A, \ldots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \ldots, \rho_m^B$ значений опорных функций, осуществляется путем вычисления набора $\rho_1, \ldots, \rho_m$

$$\rho_i = \min(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \ldots, m,$$

который и определяет многоугольник $C = A \cap B$ в виде пересечения полуплоскостей $(xn_{ix} + yn_{iy}) \le \rho_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Полученный набор $\rho_1, \ldots, \rho_m$ не обязательно совпадает с набором $\rho_1^C, \ldots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C, заданного на рассматриваемой фиксированной сетке векторов n_i. Кроме того, пересечение может быть пусто. Для получения искомого набора $\rho_1^C, \ldots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C на заданной фиксированной сетке векторов производится дополнительная обработка набора $\rho_1, \ldots, \rho_m$, состоящая из двух шагов.

Шаг 1. Рассматриваем набор $\rho_1, \ldots, \rho_m$ как замкнутый список, в котором элементы ρ_1 и ρ_m считаются соседними. Вычеркиваем из этого списка все элементы ρ_i, не совпадающие с соответствующими значениями ρ_i^C опорной функции множества $C = A \cap B$.

При этом используем следующий критерий. Пусть ρ_s, ρ_j и ρ_k – три последовательных элемента из рассматриваемого списка. Находим точку $(x_{sj}, y_{sj})^{\mathrm{T}}$ пересечения границ полуплоскостей, заданных парами (n_s, ρ_s) и (n_j, ρ_j)

$$(x_{sj}, y_{sj})^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\rho_s n_{jy} - \rho_j n_{sy}}{n_{sx} n_{jy} - n_{jx} n_{sy}}, \frac{\rho_j n_{sx} - \rho_s n_{jx}}{n_{sx} n_{jy} - n_{jx} n_{sy}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Если точка $(x_{sj}, y_{sj})^{\mathrm{T}}$ не принадлежит полуплоскости, заданной парой (n_k, ρ_k), т.е. если

$$x_{sj} n_{kx} + y_{sj} n_{ky} > \rho_k,$$

то вычеркиваем средний элемент ρ_j. Если же точка $(x_{sj}, y_{sj})^{\mathrm{T}}$ принадлежит (рис. 2) этой полуплоскости, т.е. если выполнено соотношение

$$x_{sj} n_{kx} + y_{sj} n_{ky} \le \rho_k, \tag{3.1}$$

то переходим к рассмотрению следующей тройки.

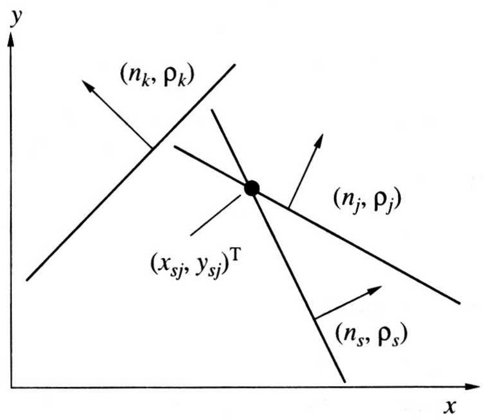

Рис. 2. Пояснение к процедуре пересечения.

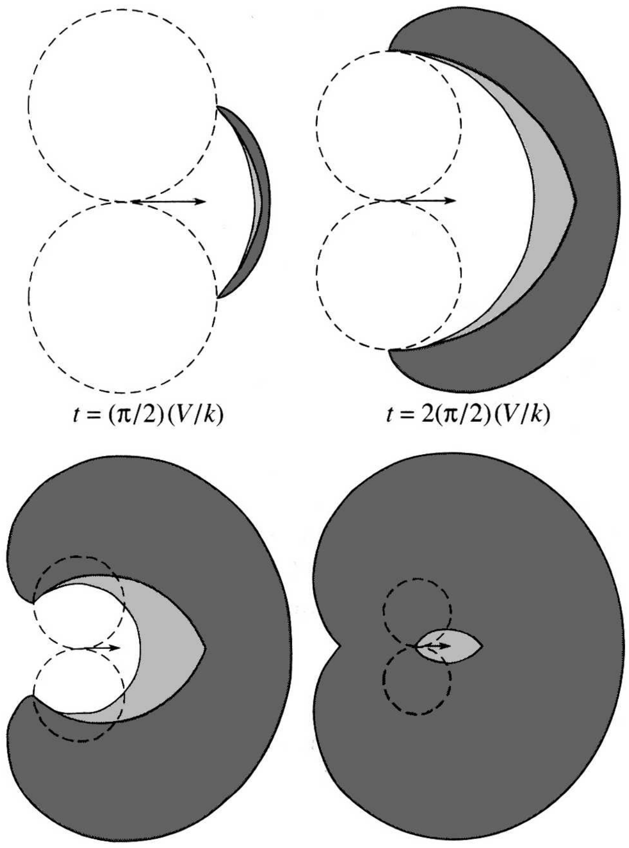

Рис. 3. Сравнение с точным множеством достижимости в проекции на плоскость x, y.

Так продолжаем до получения набора, при котором условие (3.1) выполнено для любой тройки соседних векторов.

Если после очередного вычеркивания некоторого элемента ρ_j угол между соседними векторами n_s и n_k стал больше или равен π, т.е. если выполнено условие

$$n_{sx}n_{ky} - n_{kx}n_{sy} \le 0, \qquad (3.2)$$

то результат пересечения есть пустое множество и выполнение операции пересечения завершается. При практической реализации данного алгоритма условие (3.2) необходимо проверять с некоторым запасом.

После завершения первого шага получаем список $\{\rho_i^C\}$, каждому элементу которого соответствует сторона многоугольника C.

Ш а г 2. Список $\{\rho_i^C\}$ дополняем недостающими значениями опорной функции на фиксированной сетке векторов $n_1, \ldots, n_m$ и получаем искомое представление множества $C = A \cap B$ в виде набора $\rho_1^C, \ldots, \rho_m^C$. При этом используем следующий способ дополнения.

Пусть между соседними элементами ρ_s и ρ_k есть недостающие значения опорной функции.

Вычисляем вершину $(x, y)^{\mathrm{T}}$ многоугольника C, соответствующую сторонам с нормалями n_s и n_k. Недостающие на промежуточных векторах n_j (между n_s и n_k) значения ρ_j опорной функции просчитываем по формуле

$$\rho_j = xn_{jx} + yn_{jy}.$$

В случае $m = 4$ дополнительная обработка (шаг 1 и 2) набора $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ сводится лишь к проверке невырожденности пересечения множеств A и B по одновременному выполнению двух неравенств $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_2 + \rho_4 > 0$.

Подобные описанному алгоритмы построения опорной функции пересечения многоугольников на плоскости широко используются в вычислительной практике [15, 16].

4. Сравнение с точными построениями. Для того чтобы пояснить характер погрешности, вносимой операцией овыпукления, применяемой при построении множеств прогноза $\mathbf{G}(t)$, сравним множество $\mathbf{G}(t)$ с точным множеством прогноза (или, что то же самое, с точным множеством достижимости) $G(t)$. При этом условимся, что в момент $t_0 = 0$ начальное множество есть точка в трехмерном пространстве $\{x, y, \varphi\}$, т.е. в начальный момент оговорены геометрическое положение и направление скорости.

В работе [17] приведены формулы, описывающие границу проекции на плоскость x, y множества достижимости $G(t)$ системы (0.1). Обозначим такую проекцию символом $G^{\#}(t)$. Проекцию на плоскость x, y множества прогноза $\mathbf{G}(t)$, строящегося по предлагаемому в работе алгоритму с элементами овыпуклления на каждом Δ-шаге, обозначим $\mathbf{G}^{\#}(t)$. Проведем сравнение множеств $G^{\#}(t)$ и $\mathbf{G}^{\#}(t)$. Не теряя общности, считаем равными нулю начальное геометрическое положение и начальный угол вектора скорости.

На рис. 3 изображены множества $G^{\#}(t)$ и $\mathbf{G}^{\#}(t)$, построенные для моментов $t = q(\pi/2)(V/k)$, $q = 1, 2, 3, 4$. Данные моменты соответствуют времени поворота вектора скорости на угол $q(\pi/2)$ при движении с максимальным боковым ускорением. Для каждого момента используем свой масштаб изображения. Траектории движения с экстремальными управлениями $u = -1$ и 1 представляют собой окружности радиусом V^2/k. Вектор начальной скорости показан стрелочкой. Множества $G^{\#}(t)$ выделены контуром и темной заливкой, а множества $\mathbf{G}^{\#}(t)$ – светлой заливкой. Множества $\mathbf{G}^{\#}(t)$ построены с малым шагом Δ по времени и при числе нормалей $m = 64$ в многоугольниках. Использовалась достаточно мелкая сетка по φ в промежутке $[-2\pi, 2\pi]$.

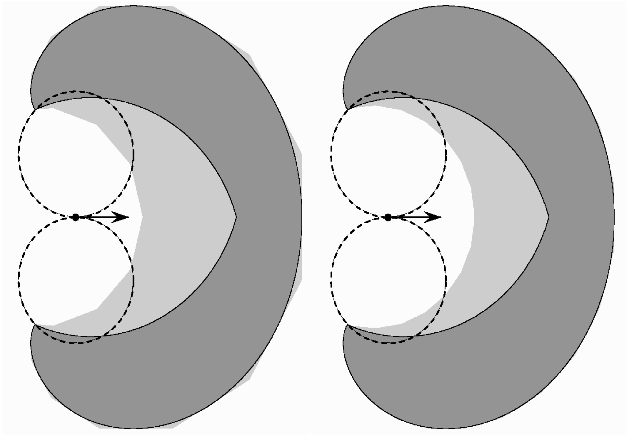

Рис. 4. Влияние числа нормалей на построение множества $\mathbf{G}^{\#}(t)$.

Склеивание по модулю 2π не проводилось. Видно, что "внешние" участки границ множеств $G^{\#}(t)$ и $\mathbf{G}^{\#}(t)$ практически совпадают, а "внутренние" отличаются. Имеет место вложение $G^{\#}(t) \subset \mathbf{G}^{\#}(t)$.

Рисунок 4 показывает зависимость результатов построения множества $\mathbf{G}^{\#}(t)$ от количества нормалей. Построения сделаны для момента $t = (5\pi/4)(V/k)$ при числе нормалей $m = 12$ и 24. Если число нормалей m больше, чем 24, картина существенно не меняется.

Перейдем к сравнению трехмерных множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$. Справедливо [18] следующее утверждение.

Т е о р е м а. В каждую точку границы множества достижимости $G(t)$ системы (0.1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления $u(\cdot)$ с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений

$$\begin{array}{lll} 1)\ 1, 0, 1; & 2)\ -1, 0, 1; & 3)\ 1, 0, -1; \\ 4)\ -1, 0, -1; & 5)\ 1, -1, 1; & 6)\ -1, 1, -1. \end{array} \qquad (4.1)$$

Эта теорема позволяет численно с хорошей точностью построить границу множества достижимости $G(t)$ в трехмерном фазовом пространстве.

На рис. 5–7 для трех моментов времени $t = h\pi(V/k)$, $h = 2, 3, 4$, изображены (для каждого момента в своем масштабе) множество достижимости $G(t)$ и его оценка сверху $\mathbf{G}(t)$, просчитанная по алгоритмам построения множества прогноза. Тонкими линиями показаны некоторые φ-сечения. При просчете множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ отождествле-

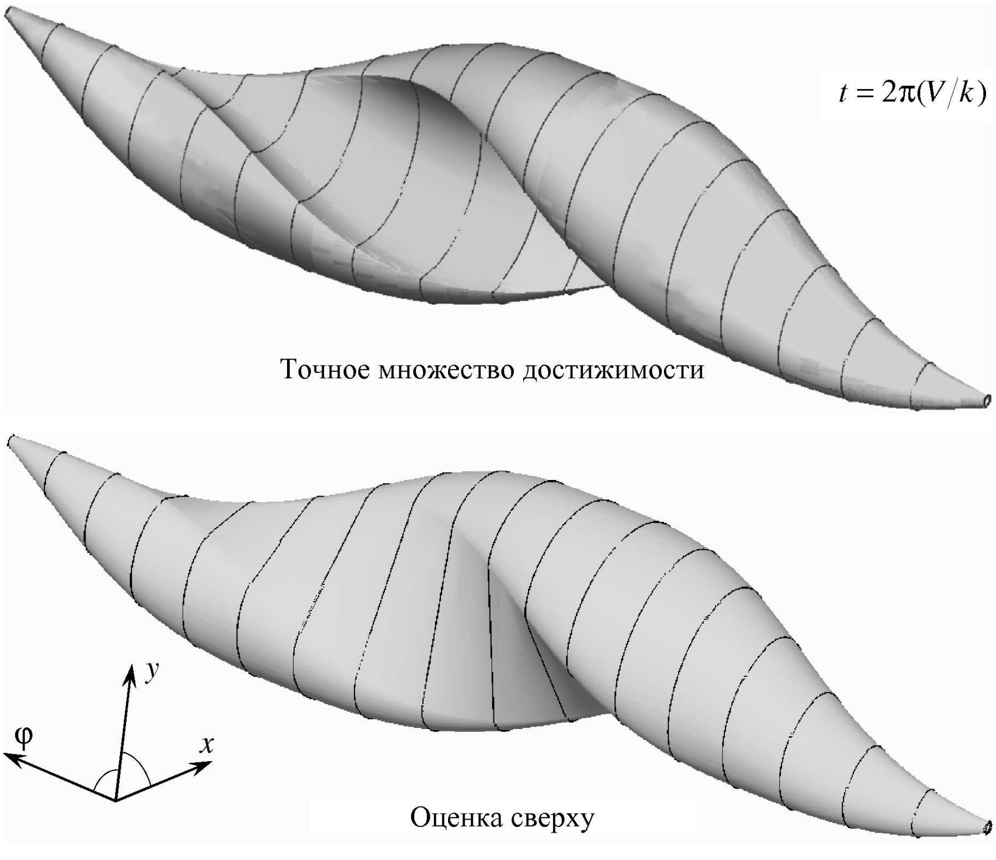

Рис. 5. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 2\pi(V/k)$.

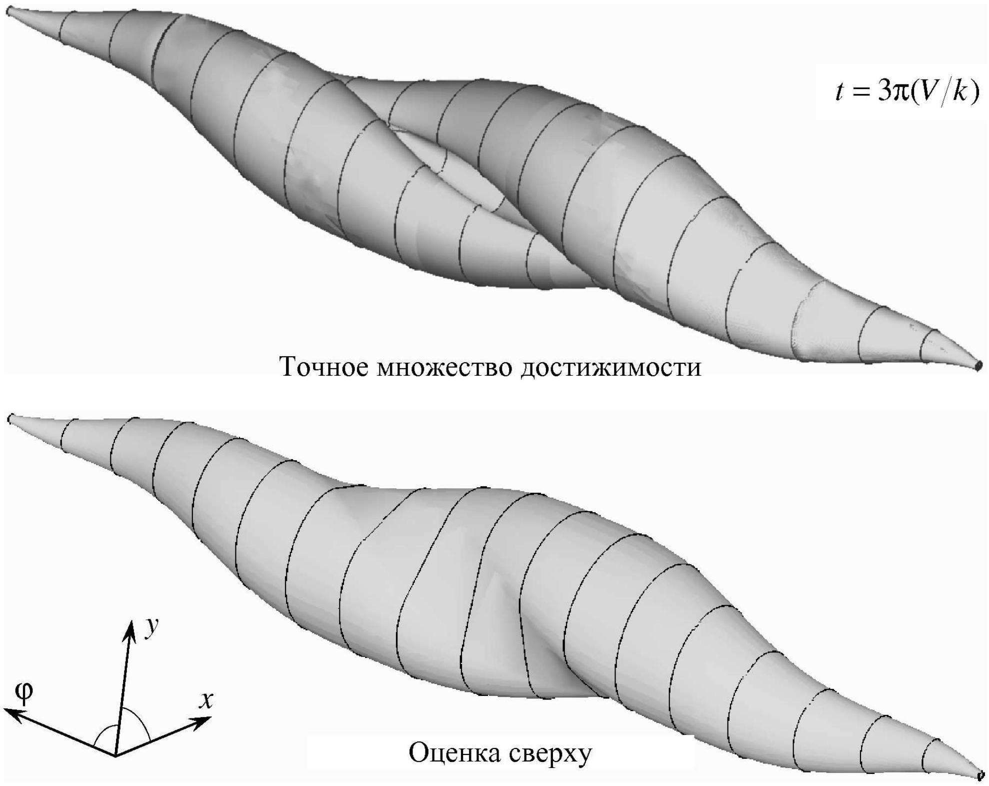

Рис. 6. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 3\pi(V/k)$.

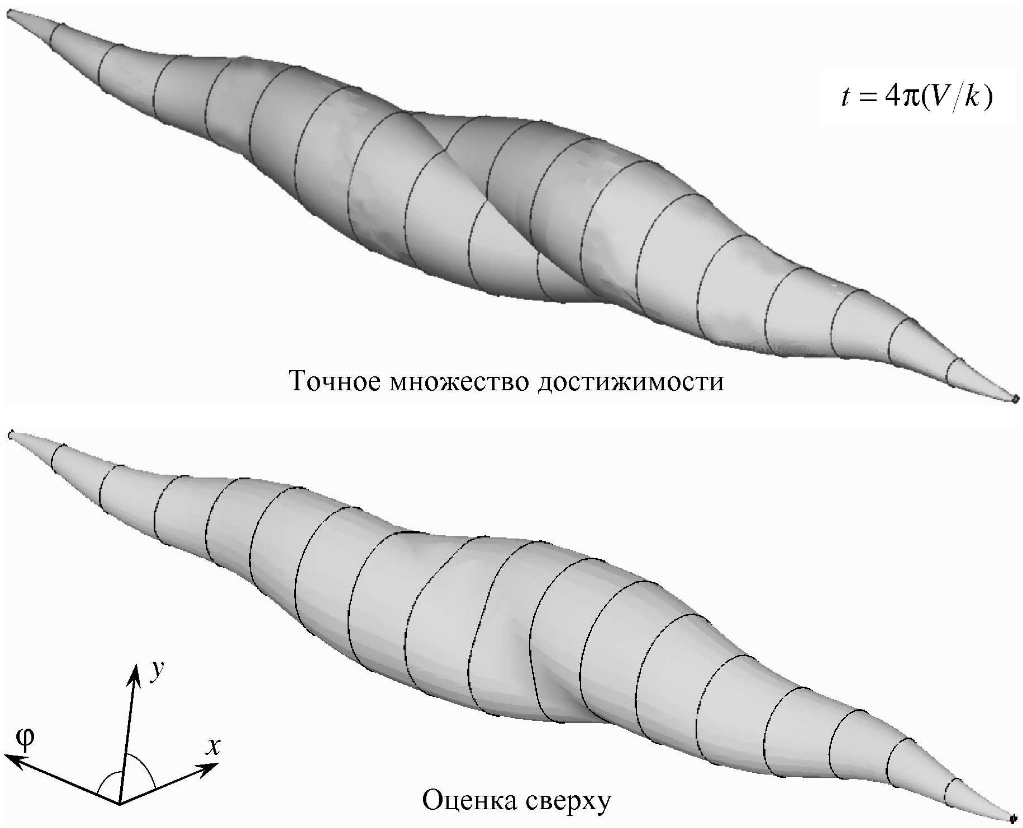

Рис. 7. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 4\pi(V/k)$.

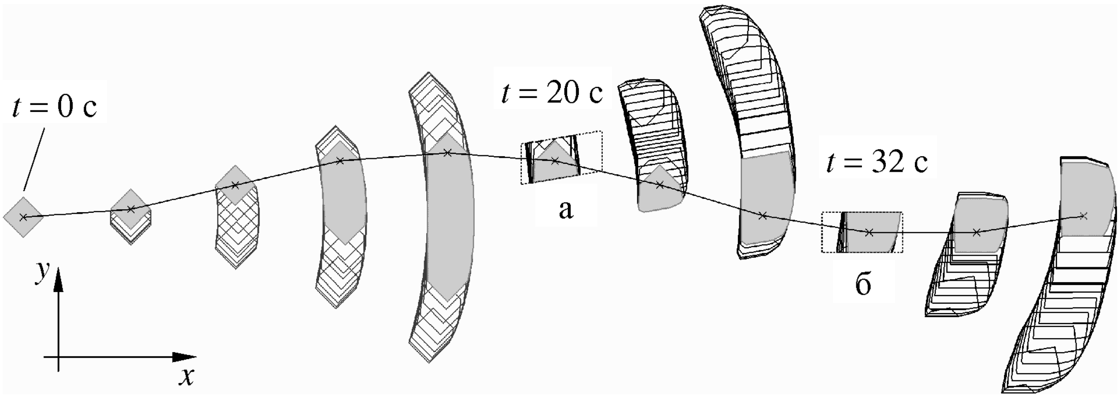

Рис. 8. Движение информационного множества в проекции на плоскость x, y.

ние значений координаты φ по модулю 2π не проводилось.

Подчеркнем, что при построении множества $\mathbf{G}(t)$ точное множество достижимости $G(t)$ считается неизвестным. Видно, что погрешность за счет операции овыпукления проявляется лишь с одной стороны поверхности, ограничивающей точное множество. По сути, каждое φ-сечение множества $\mathbf{G}(t)$ совпадает с выпуклой оболочкой соответствующего φ-сечения множества $G(t)$.

В задачах с неполной информацией приходится строить трехмерное множество прогноза от весьма произвольного начального множества. Описанный в работе алгоритм построения множества прогноза хотя и не дает точного множества достижимости, но оценивает его сверху и является весьма простым для реализации.

5. Результаты моделирования движения информационных множеств. Для первого примера были взяты параметры: $V = 400$ м/с, $k = 15$ м/с^2, $\Delta = 1$ с, $m = 60$. Начальное информационное множество $\mathbf{I}(0)$ имело только одно φ-сечение в форме квадрата. Таким образом, в начальный момент времени $t_0 = 0$ считалось известным направление скорости. При $t \geq 0$ задавалось истинное движение фазовой точки в трехмерном пространстве. Относительно этого движения формировались замеры. К ним привязывались МН с оговоренной формой проекций $H^{\#}(t)$ на плоскость x, y (ограничения на ошибку замера явно не выписывались).

На рис. 8 показана общая картина изменения ИМ на промежутке времени 0–40 с в проекции на плоскость x, y. Траектория истинного движения изображена сплошной линией. Замеры приходят в моменты 20 и 32 с. Предполагаем, что проекции $H^{\#}(20)$ и $H^{\#}(32)$ множеств неопределенности – параллелограмм (*а*) и прямоугольник (*б*). В ИМ для наглядности представлены не все сечения, а лишь каждое второе. Из тех же соображений показаны ИМ только на каждом четвертом шаге по времени: $\mathbf{I}(0)$, $\mathbf{I}(4)$, $\mathbf{I}(8)$, …, $\mathbf{I}(40)$. Крестиками отмечены положения истинной точки в эти же моменты. Выделены сечения ИМ, наиболее близкие по φ к соответствующим истинным значениям.

На рис. 9 более детально, в трехмерном пространстве изображены ИМ на моменты 20 и 32 с. Для каждого из этих моментов показаны два множества: до учета замера (множество прогноза) и после учета замера.

В рассмотренном примере диапазон значений φ, используемых для построения множеств прогноза, был меньше 2π. Поэтому не было необходимости в склеивании значений φ по модулю 2π.

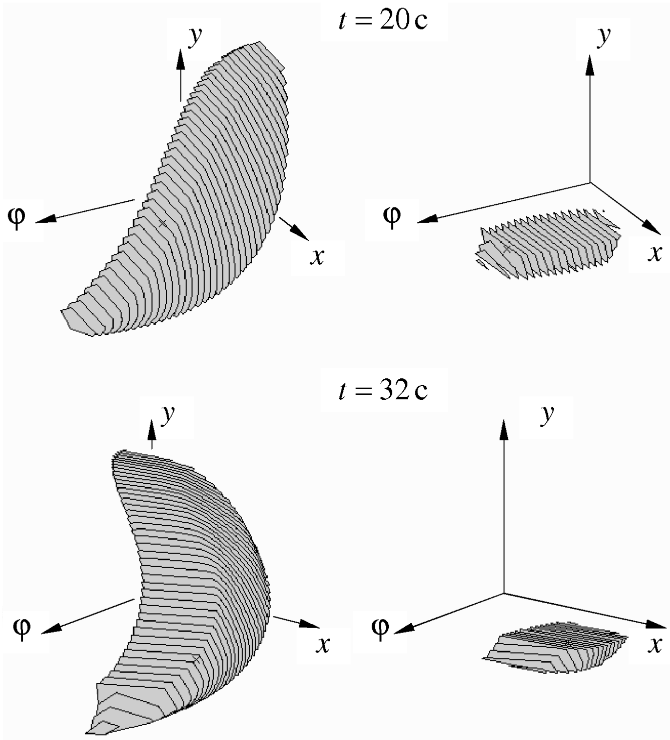

Рис. 9. Информационное множество до и после замера.

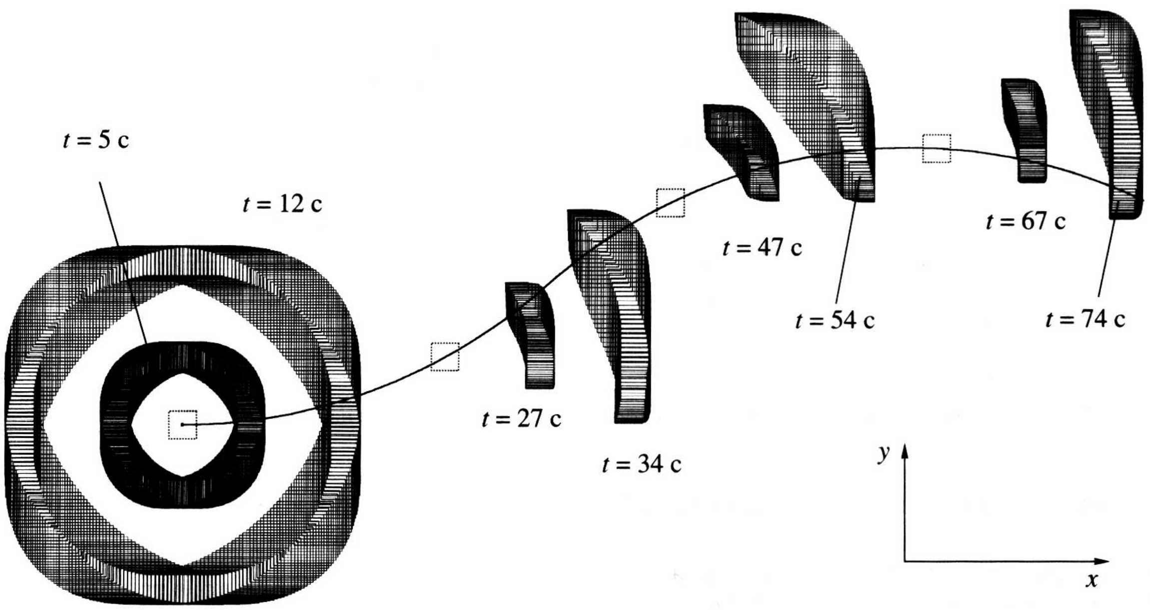

Рис. 10. Динамика изменения информационного множества в проекции на плоскость x, y. Случай прямоугольных φ-сечений.

Результаты моделирования, где φ-сечения ИМ задавались в виде прямоугольников со сторонами, ориентированными по осям x, y, приведены на рис. 10. Построение ИМ осуществлялось на участке времени 80 с. Использовались следующие параметры: $V = 200$ м/с, $k = 5$ м/с^2, $\Delta = 1$ с. Замеры поступали с интервалом 20 с, соответствующие МН имели форму квадрата со стороной 400 м. Начальное ИМ формировалось по МН начального замера и состояло из 360 одинаковых φ-сечений в полуинтервале $[0, 2\pi)$. При просчете множеств прогноза проводилось склеивание значений φ по модулю 2π.

Траектория истинного движения имела два разворота в разные стороны. МН поступающих замеров отмечены пунктиром. Показаны проекции ИМ на плоскость x, y для моментов 5, 12, 27, 34, 47, 54, 67, 74 с. Проекция начального ИМ совпадает с МН замера в начальный момент. До прихода второго замера неопределенность по φ сохраняется в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Поэтому соответствующие ИМ в проекции на плоскость x, y имеют кольцеобразный вид.

Заключение. В рамках модельной задачи наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости предложен способ оценивания сверху множества всех возможных фазовых состояний, совместных с полученными замерами и известными ограничениями на ошибку замеров. Приведены результаты численного моделирования, характеризующие погрешность метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
2. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
5. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
6. Bounding Approaches to System Identification / Eds Milanese M., Norton J., Walter E. London: Plenum Press, 1996.
7. *Kurzhanski A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.
8. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
9. *Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.* Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Тр. Второго Междунар. симпоз. ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства. Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н. Петрова, И.С. Уколова. М.: Наука, 1971.
10. *Pecsvaradi T.* Optimal Horizontal Guidace Law for Aircraft in the Terminal Area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. AC-17. № 6.
11. *Бердышев Ю.И.* Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. Свердловск. Институт математики и механики УНЦ АН СССР, 1973.

12. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

13. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И. и др.* Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств // Научные доклады. Академия гражданской авиации. С.-Петербург; ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1999.

14. *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г. и др.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Труды института математики и механики. Т. 6. № 2. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.

15. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.

16. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.

17. *Бердышев Ю.И.* Об одной задаче построения области достижимости для нелинейной системы третьего порядка // Методы построения множеств достижимости и конструкции расширений. Екатеринбург: Изд-во УГТУ–УПИ, 2001.

18. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. № 3.