

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ САМОЛЕТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

С.И. Кумков

Институт математики и механики УрО РАН
Россия, 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: kumkov@imm.uran.ru

В.С. Пацко

Институт математики и механики УрО РАН
Россия, 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: patsko@imm.uran.ru

С.Г. Пятко

Академия гражданской авиации
Россия, 196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38
E-mail: psg@nita.spb.su

В.М. Решетов

Институт математики и механики УрО РАН
Россия, 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: VMRes@imm.uran.ru

А.А. Федотов

Институт математики и механики УрО РАН
Россия, 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: andreyfedotov@mail.ru

Ключевые слова: задача наблюдения, нелинейная динамика, неточные замеры положения, геометрические ограничения на ошибки замеров, информационные множества, множество достижимости нелинейной системы, алгоритмы пересечения и выпукления, численные методы, программная реализация.

Key words: observation problem, nonlinear dynamics, disturbed measurements of position, geometric constraints on measurement errors, informational sets, attainability set of a nonlinear system, algorithms for intersection and convexification, numerical methods

Рассматривается способ построения оценки сверху для информационных множеств, характеризующих состояния самолета при его движении в горизонтальной плоскости. Информационные множества строятся в трехмерном фазовом пространстве на основе замеров геометрического положения с учетом известных ограничений на ошибку замеров. Предложенные алгоритмы позволяют вести вычисления информационных множеств в реальном масштабе времени. Изучена динамика изменения множества достижимости исследуемой нелинейной системы. Приведены результаты моделирования.

INFORMATIONAL SETS IN A PROBLEM OF OBSERVATION OF AIRCRAFT MOTION IN THE HORIZONTAL PLANE / S.I. Kumkov (Institute of Mathematics and Mechanics URB RAS, 16 S. Kovalevskaya str, Ekaterinburg

660219, Russia, E-mail: kumkov@imm.uran.ru), V.S. Patsko (Institute of Mathematics and Mechanics URB RAS, 16 S.Kovalevskaya str, Ekaterinburg 660219, Russia, E-mail: patsko@imm.uran.ru), S.G. Pyatko (Academy of Civil Aviation, 38 Pilotov str., S.-Petersburg 196210, Russia, E-mail: psg@nita.spb.su), V.M. Reshetov (Institute of Mathematics and Mechanics URB RAS, 16 S. Kovalevskaya str, Ekaterinburg 660219, Russia, E-mail: VMRes@imm.uran.ru), A.A. Fedotov (Institute of Mathematics and Mechanics URB RAS, 16 S. Kovalevskaya str, Ekaterinburg 660219, Russia, E-mail: andreyfedotov@mail.ru) The paper deals with a method of constructing the upper approximation for informational sets that characterize aircraft positions during its motion in the horizontal plane. The informational sets are constructed in the three-dimensional phase space on the basis of measurements of the aircraft geometrical positions and with taking into account the given constraints on the error of measurements. The algorithms elaborated allow to carry out computations of the informational sets in the real-time mode. For a nonlinear system under consideration, dynamics of the attainability sets variation is investigated. Results of numerical simulation are given.

1. Введение

В современной теории наблюдения и управления наряду с вероятностным подходом [1, 2] к описанию состояния динамической системы в условиях неточных замеров используется детерминированный подход, основанный на построении информационных множеств [3–7].

Под информационным множеством понимается совокупность состояний системы, совместных с полученными замерами. Информационное множество можно трактовать как «обобщенное» состояние системы.

В работе рассматривается в модельной постановке задача наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. Динамика движения описывается системой дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V; \quad V = \text{const} > 0, k = \text{const} > 0, |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь x, y – геометрические координаты, φ – угол направления вектора скорости, V – величина скорости, u – неизвестное управляющее воздействие. Угол φ отсчитывается от горизонтальной оси против часовой стрелки (рис. 1).

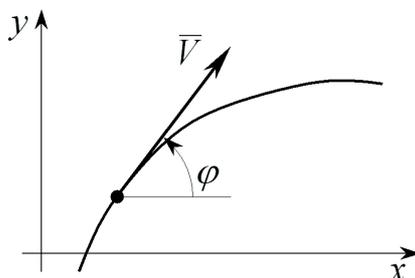


Рис. 1. Система координат

Текущая информация о движении самолета поступает в виде замеров его положения на плоскости x, y . Известны геометрические ограничения на ошибки замеров. Замеру, пришедшему в некоторый момент t_* , соответствует *множе-*

ство неопределенности $H(t_*)$ – совокупность всех фазовых состояний (x, y, φ) , совместных с полученным замером и заданными ограничениями на его ошибку. Предполагаем, что множество неопределенности цилиндрично по координате φ и имеет выпуклую проекцию на плоскость x, y . Совокупность всех фазовых состояний, совместных с множествами неопределенности, накопленными к моменту t , составляет *информационное множество* $I(t)$.

В дискретной схеме наблюдения на сетке моментов t_j информационное множество $I(t_j)$ получается пересечением *множества прогноза* $G(t_j)$ с множеством неопределенности $H(t_j)$. Множество $G(t_j)$ есть множество достижимости системы (1) в момент t_j , построенное от множества $I(t_{j-1})$, взятого в качестве начального для системы (1) в предыдущий момент наблюдения t_{j-1} ; множество $H(t_j)$ соответствует наблюдению в момент t_j . Предположим, что в момент t_{j-1} замер отсутствовал. Пусть $t_* < t_j$ – последний из моментов наблюдения, когда был замер. Тогда для построения множества прогноза $G(t_j)$ в качестве начального можно взять множество $I(t_*)$ в момент t_* .

Информационные множества в рассматриваемой задаче не являются выпуклыми. В работе предложен вариант их аппроксимации сверху. При этом аппроксимирующее информационное множество $\mathbf{I}(t_j)$ представляется сеткой узлов по координате φ и набором сечений $\{\mathbf{I}_\varphi(t_j)\}$ в виде выпуклых многоугольников на плоскости x, y . Основными при построении аппроксимирующих множеств являются операция пересечения выпуклых многоугольников и операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых многоугольников. Разработанные процедуры позволяют строить информационные множества в реальном времени.

В моменты t_j , в которые замеры отсутствуют, аппроксимирующее информационное множество $\mathbf{I}(t_j)$ совпадает с аппроксимирующим множеством прогноза $\mathbf{G}(t_j)$. Множество $\mathbf{G}(t_j)$ аппроксимирует сверху множество достижимости управляемой системы (1) с начальным множеством $\mathbf{I}(t_*)$, где $t_* < t_j$ – момент последнего замера. С целью изучения характера возникающей при этом погрешности исследовано в сравнении с аппроксимирующим множеством прогноза $\mathbf{G}(t)$ множество достижимости $G(t)$ системы (1), а также проанализированы их проекции на плоскость геометрических координат x, y . При этом в качестве начального множества в момент $t_0 = 0$ бралась точка в трехмерном пространстве. Алгоритм построения трехмерного множества достижимости опирается на формулируемое в работе утверждение о числе переключений управляющего воздействия, ведущего на границу множества достижимости.

В заключительной части работы представлены результаты построения информационных множеств для различных вариантов геометрических ограничений на ошибки замеров и при различном числе вершин выпуклых многоугольников, аппроксимирующих сечения информационного множества.

Данная статья во многом использует материалы работ [8, 9], посвященных в основном четырехмерному варианту динамики системы, в котором скорость V не предполагалась постоянной. Трехмерный вариант проще и на нем более про-

зрачными становятся предлагаемые авторами идеи построения информационных множеств.

2. Постановка задачи о построении информационных множеств

Считаем, что динамика движения удовлетворяет системе (1). Система (1) часто применяется (см., например, [10–13]) для описания движения самолета, автомобиля и других подобных объектов.

В дискретные моменты времени поступают замеры положения самолета на плоскости x, y . Каждому замеру сопоставляется *множество неопределенности* (МН) – совокупность состояний (x, y, φ) , совместных с данным замером при известных ограничениях на ошибку замера. Например, если в некоторый момент поступает замер (\hat{x}, \hat{y}) и максимальная радиальная ошибка замера есть σ , то неизвестное нам геометрическое состояние в этот момент лежит в круге радиуса σ с центром в точке (\hat{x}, \hat{y}) . МН такого замера представляет собой цилиндр в трехмерном пространстве с проекцией на плоскость x, y в виде указанного круга.

Считаем, что множество неопределенности $H(t)$ каждого текущего замера является цилиндрическим по координате φ и целиком задается своей проекцией $H^\#(t)$ на плоскость x, y :

$$(2) \quad H(t) = H^\#(t) \times \{\varphi\}.$$

Множества $H^\#(t)$ в дальнейшем будут предполагаться выпуклыми.

Под *информационным множеством* (ИМ) понимаем совокупность всех точечных состояний (x, y, φ) системы (1), совместных с имеющимися к данному моменту времени множествами неопределенности.

Требуется разработать алгоритм построения информационных множеств.

3. Схема построения информационных множеств

3.1. Формальное описание информационных множеств

Предполагаем известным начальное информационное множество $I(t_0)$. Оно формируется на основе предварительных сведений и по множеству неопределенности начального замера.

Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ построено, и следующий замер ожидается в момент $t^* > t_*$. Определим *множество прогноза* $G(t^*)$ как множество достижимости системы (1) в момент времени t^* из состояний, принадлежащих множеству $I(t_*)$ в момент t_* :

$$G(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), s \in I(t_*)} \xi(t^*; t_*, s, u(\cdot)).$$

Здесь $\xi(t^*; t_*, s, u(\cdot))$ – решение системы дифференциальных уравнений (1), дове-

денное до момента t^* , при начальном фазовом состоянии s в момент t_* и кусочно-непрерывном управлении $u(\cdot)$.

Множество неопределенности несет новую информацию о системе, поэтому $I(t^*)$ определяется как пересечение множества прогноза $G(t^*)$ и множества неопределенности $H(t^*)$ пришедшего замера:

$$(3) \quad I(t^*) = G(t^*) \cap H(t^*).$$

Если в момент t^* замер отсутствует, то операция пересечения не выполняется и полагается, что текущее информационное множество $I(t^*)$ совпадает с текущим множеством прогноза $G(t^*)$. Формально можно считать, что МН отсутствующего замера совпадает со всем пространством $\{x, y, \varphi\}$.

Таким образом, в каждый текущий момент ИМ определяется начальным множеством $I(t_0)$ и МН замеров, поступивших к этому моменту.

Система (1) нелинейна, множество прогноза невыпукло и имеет сложную структуру. Как следствие, достаточно сложно устроено пересечение (3). Для эффективного описания ИМ необходимо идти на некоторые упрощения, и мы сделаем их, используя разумным образом специфику системы.

3.2. Эквивалентное представление информационных множеств

Перепишем выражение (3), определяющее информационное множество, в удобном для нас эквивалентном виде.

Рассмотрим проекцию $I^\diamond(t_*)$ множества $I(t_*)$ на ось φ . Каждой точке $\varphi \in I^\diamond(t_*)$ поставим в соответствие сечение $I_\varphi(t_*)$ информационного множества $I(t_*)$ плоскостью $\varphi = \text{const}$. Такие сечения будем рассматривать в проекции на плоскость x, y :

$$I_\varphi(t_*) = \{(x, y) : (x, y, \varphi) \in I(t_*)\}.$$

Информационное множество $I(t_*)$ представим проекцией $I^\diamond(t_*)$ на ось φ и множествами $I_\varphi(t_*)$ на плоскости x, y :

$$(4) \quad I(t_*) = \bigcup_{\varphi \in I^\diamond(t_*)} [I_\varphi(t_*) \times \varphi].$$

Аналогично запишем множество прогноза:

$$(5) \quad G(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [G_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \bar{\varphi}].$$

С учетом (2), (5) формулу (3) можно переписать следующим образом:

$$(6) \quad I(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [(G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*)) \times \bar{\varphi}].$$

Выражение (6) записано в таком же виде, что и (4). Это следует из того, что

$$I_{\bar{\varphi}}(t^*) = G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*),$$

$$I^\diamond(t^*) = \{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*) : G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*) \neq \emptyset\}.$$

Представление множеств $I(t_*)$, $G(t^*)$, $I(t^*)$ в виде (4), (5), (6) позволяет в дальнейшем перейти к сетке по φ и рассматривать только те сечения, которые соответствуют узлам сетки.

3.3. Учет специфики динамики движения

Покажем, как можно вычислять множества $G^\diamond(t^*)$ и $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ на основе множеств $I^\diamond(t_*)$ и $I_\varphi(t_*)$.

Зафиксируем управление $u(\cdot)$ на интервале $[t_*, t^*]$. Рассмотрим прогнозируемое множество $G(t^*, u(\cdot))$ при начальном множестве $I(t_*)$ и управлении $u(\cdot)$. Данное множество, как и множество $G(t^*)$, представим проекцией $G^\diamond(t^*, u(\cdot))$, на прямую φ и сечениями $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$.

Специфика динамики (1) состоит в том, что третье уравнение можно интегрировать независимо от первых двух:

$$\varphi(t) = \varphi(t_*) + \int_{t_*}^t ku(\tau)/V d\tau.$$

Следовательно,

$$G^\diamond(t^*, u(\cdot)) = \left\{ \varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(\tau)/V d\tau : \varphi \in I^\diamond(t_*) \right\}.$$

Зафиксируем дополнительно точку $\varphi \in I^\diamond(t_*)$. Фазовые координаты x, y отсутствуют в правой части системы (1), поэтому интегрирование первых двух уравнений для начальных состояний из $I_\varphi(t_*)$ означает перенос на один и тот же вектор. Полагая

$$(7) \quad \bar{\varphi} = \varphi(t^*) = \varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(\tau)/V d\tau,$$

имеем:

$$(8) \quad G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = I_\varphi(t_*) + \left(\int_{t_*}^{t^*} V \cos \varphi(\tau) d\tau, \int_{t_*}^{t^*} V \sin \varphi(\tau) d\tau \right)^T.$$

Здесь и далее верхний символ T означает транспонирование.

Перебирая $\varphi \in I^\diamond(t_*)$, получим по формуле (8) все сечения $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ прогнозируемого множества $G(t^*, u(\cdot))$.

Будем формально считать, что сечения $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ заданы для произвольных $\bar{\varphi}$. Если $\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*, u(\cdot))$, т.е. $\bar{\varphi}$ соответствует некоторому $\varphi \in I^\diamond(t_*)$ в силу (7), то сечение определяется формулой (8); иначе $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = \emptyset$.

Откажемся теперь от фиксации управления $u(\cdot)$. Множество $G^\diamond(t^*)$ есть множество достижимости в силу третьего уравнения системы (1) при начальном множестве $I^\diamond(t_*)$:

$$(9) \quad G^\diamond(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G^\diamond(t^*, u(\cdot)).$$

Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ вычисляются по формуле

$$(10) \quad G_{\bar{\varphi}}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)).$$

3.4. Овыпукление сечений

При нахождении сечений $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ имеем дело с объединением (10) множеств на плоскости x, y . Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$, $\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)$ пересекаются затем с множеством $H^\#(t^*)$. Трудность состоит в том, что множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ невыпуклы.

Условимся подменять множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ их выпуклыми оболочками. Таким образом, одновременно с операцией (10) объединения множеств $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$, вычисляем выпуклую оболочку. Получаем множество $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) = \text{conv } G_{\bar{\varphi}}(t^*)$. Положим

$$(11) \quad \mathbf{G}(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \bar{\varphi}],$$

$$(12) \quad \mathbf{I}(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*)) \times \bar{\varphi}].$$

Формулы (11), (12) написаны в предположении о применении операции овыпукления в момент t^* . Имеем $G(t^*) \subset \mathbf{G}(t^*)$ и $I(t^*) \subset \mathbf{I}(t^*)$.

Если овыпукление проводить с начального момента t_0 , то на момент t_* будем иметь множество $\mathbf{I}(t_*)$ с выпуклыми сечениями $\mathbf{I}_{\bar{\varphi}}(t_*)$. Поэтому при нахождении множества $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*)$ будем строить выпуклую оболочку объединения выпуклых множеств.

Далее речь пойдет о построении множеств $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{I}(t)$. Будем по-прежнему называть их множеством прогноза и информационным множеством.

4. Практическое построение информационных множеств

4.1. Введение элементов дискретизации

При численном нахождении информационных множеств мы вынуждены использовать некоторую дискретизацию построений. Опишем основные элементы дискретизации.

Пусть в момент t_* информационное множество $\mathbf{I}(t_*)$ построено и требуется построить множество $\mathbf{I}(t^*)$ для момента $t^* > t_*$ следующего замера.

Для нахождения множества $\mathbf{I}(t^*)$ сначала получим множество прогноза $\mathbf{G}(t^*)$. Чтобы построить $\mathbf{G}(t^*)$, разбиваем промежуток времени $[t^*, t_*]$ с постоянным шагом Δ . Управление $u(\cdot)$ считаем кусочно-постоянным на данном разбиении. При этом на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ разбиения управляющее воздействие u принимает лишь нулевое или крайнее значение: $u \in \{-1, 0, 1\}$. Выбор таких значений определяется тем, что при построении оптимальных движений, формирующих границу множества достижимости (множества прогноза), в соответствии с принципом максимума Понтрягина, используются крайние управ-

ляющие воздействия: $u = \pm 1$. Значение $u = 0$ реализуется на вырожденном оптимальном движении.

Примем $t_1 = t_*$ и $\mathbf{G}(t_1) = \mathbf{I}(t_*)$.

Множество прогноза $\mathbf{G}(t_{i+1})$ строим, опираясь на множество $\mathbf{G}(t_i)$.

Пересчет множества $\mathbf{G}(t_i)$ в множество $\mathbf{G}(t_{i+1})$ осуществляется следующим образом. Имеем на момент t_i набор узлов по φ . Каждому узлу соответствует выпуклый многоугольник $\mathbf{G}_\varphi(t_i)$. Используя управления $u = -1, 0, 1$, получим на момент t_{i+1} три узла новой сетки: $\bar{\varphi} = \varphi + \Delta ku/V$. Сечения, соответствующие этим узлам, имеют вид:

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t_{i+1}, u) = \begin{cases} \mathbf{G}_\varphi(t_i) + \frac{V^2}{ku} (\sin \bar{\varphi} - \sin \varphi, \cos \varphi - \cos \bar{\varphi})^T, & \text{если } u = \pm 1; \\ \mathbf{G}_\varphi(t_i) + \Delta V (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, & \text{если } u = 0. \end{cases}$$

При построении множества прогноза количество узлов на каждом шаге Δ может вырасти в три раза. Однако, поскольку все узлы расположены в интервале $[0, 2\pi]$, то какие-то из них оказываются близкими, что позволяет «объединять» их для ограничения общего количества сечений. Вместо каждой группы сечений с близкими значениями по φ , вводится одно сечение со средним значением φ , представляющее собой выпуклую оболочку объединения.

Так доходим до момента t^* и получаем множество $\mathbf{G}(t^*)$.

При поступлении в момент t^* замера формируется множество неопределенности $H(t^*)$. Оно цилиндрично по φ и целиком определяется проекцией $H^\#(t^*)$ на плоскость x, y .

Информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ получается путем пересечения каждого сечения $\mathbf{G}_\varphi(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^\#(t^*)$. Результаты непустых пересечений и составляют искомое множество $\mathbf{I}(t^*)$.

4.2. Аппроксимация многоугольниками

На плоскости x, y работаем с выпуклыми множествами $\mathbf{G}_\varphi(t)$, $\mathbf{I}_\varphi(t)$ и $H^\#(t)$. Для их представления будем использовать, применяя аппроксимацию сверху, выпуклые многоугольники. Будем брать на плоскости x, y фиксированный набор векторов, на которых будут заданы значения опорных функций многоугольников.

Опишем работу с выпуклыми многоугольниками, заданными на фиксированной сетке векторов (сетке нормалей). Зафиксируем упорядоченный и расположенный равномерно по углу набор из m единичных векторов n_1, \dots, n_m на плоскости x, y с отсчетом от оси x .

Для любого ограниченного, замкнутого множества D на плоскости в качестве аппроксимирующего его сверху будем брать многоугольник D_m , определяемый наборами значений ρ_i опорной функции множества D на векторах n_i :

$$D_m = \{(x, y) : (xn_{i_x} + yn_{i_y}) \leq \rho_i, i = 1, \dots, m\}.$$

При $m = 4$ имеем 4 вектора и аппроксимирующий многоугольник есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

4.3. Построение выпуклой оболочки объединения

Пусть многоугольники A и B заданы наборами $\rho_1^A, \dots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \dots, \rho_m^B$ значений опорных функций на фиксированной сетке из m векторов n_i . Выпуклая оболочка $\text{conv}(A \cup B)$ объединения таких многоугольников есть многоугольник, векторы нормалей которого не обязательно принадлежат сетке n_1, \dots, n_m . Будем аппроксимировать выпуклую оболочку $\text{conv}(A \cup B)$ многоугольником C , который определяется набором $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$:

$$\rho_i^C = \max(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \dots, m.$$

Многоугольник C является минимальным по включению среди многоугольников, содержащих объединение $A \cup B$ и заданных значениями опорной функции на векторах n_1, \dots, n_m .

4.4. Операция пересечения

Пересечение многоугольников A и B , заданных наборами $\rho_1^A, \dots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \dots, \rho_m^B$ значений опорных функций, осуществляется путем вычисления набора ρ_1, \dots, ρ_m :

$$\rho_i = \min(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \dots, m,$$

который и определяет многоугольник $C = A \cap B$ в виде пересечения полуплоскостей $(xn_{i_x} + yn_{i_y}) \leq \rho_i, \quad i = 1, \dots, m$.

Полученный набор ρ_1, \dots, ρ_m не обязательно совпадает с набором $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C , заданного на рассматриваемой фиксированной сетке векторов n_i . Кроме того, пересечение может быть пусто. Поэтому производится дополнительная обработка набора ρ_1, \dots, ρ_m , состоящая из двух шагов. В результате получаем искомый набор $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C на заданной фиксированной сетке векторов, либо выясняем, что результат пересечения есть пустое множество.

Шаг 1. Рассматриваем набор ρ_1, \dots, ρ_m как замкнутый список, в котором ρ_1 и ρ_m считаются соседними. Вычеркиваем из этого списка все элементы ρ_i , не совпадающие с соответствующими значениями ρ_i^C опорной функции множества $C = A \cap B$. При этом используем следующий критерий.

Пусть ρ_i, ρ_j и ρ_k – три последовательных элемента из рассматриваемого списка. Тогда, если

$$(13) \quad \frac{n_{k_y}(\rho_i n_{j_x} - \rho_j n_{i_x}) + n_{k_x}(\rho_j n_{i_y} - \rho_i n_{j_y})}{n_{i_y} n_{j_x} - n_{i_x} n_{j_y}} > \rho_k,$$

то вычеркиваем средний элемент ρ_j .

Так продолжаем до получения набора, при котором условие (13) не является выполненным для любой тройки соседних векторов.

Если после очередного вычеркивания некоторого элемента ρ_j угол между соседними векторами n_i и n_k стал больше или равен π , т.е. если выполнено условие

$$(14) \quad n_{i_y} n_{k_x} - n_{i_x} n_{k_y} \leq 0,$$

то результат пересечения есть пустое множество, и выполнение операции пересечения завершается. При практической реализации данного алгоритма условие (14) необходимо проверять с некоторым запасом.

После завершения первого шага получаем список $\{\rho_i^C\}$, каждому элементу которого соответствует сторона многоугольника C .

Шаг 2. Список $\{\rho_i^C\}$ дополняем недостающими значениями опорной функции на фиксированной сетке n_1, \dots, n_m векторов и получаем искомое представление множества $C = A \cap B$ в виде набора $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$. При этом используем следующий способ дополнения.

Пусть между соседними ρ_i и ρ_k есть недостающие значения опорной функции. Вычисляем точку (x, y) пересечения соответствующих соседних сторон. Недостающие промежуточные значения опорной функции далее считаем по формуле

$$\rho_j = xn_{j_x} + yn_{j_y}.$$

В случае $m=4$ дополнительная обработка (шаг 1, шаг 2) набора $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ сводится лишь к проверке невырожденности пересечения множеств A и B по одновременному выполнению двух неравенств $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_2 + \rho_4 > 0$.

Подобные описанному алгоритмы построения опорной функции пересечения многоугольников на плоскости широко используются в вычислительной практике [14, 15].

5. Сравнение с точными построениями

Для того чтобы пояснить характер погрешности, вносимой операцией выпукления, сравним множество достижимости $G(t)$ системы (1) в фиксированный момент t , с множеством $\mathbf{G}(t)$, просчитанным при помощи алгоритма построения множества прогноза и использующего на каждом Δ -шаге описанные процедуры выпукления. При этом условимся, что в момент $t_0=0$ начальное множество есть точка в трехмерном пространстве x, y, φ , т.е. в начальный момент оговорены геометрическое положение и направление скорости.

В работе [16] приведены формулы, описывающие границу проекции на плоскость x, y множества достижимости $G(t)$ системы (1). Обозначим такую проекцию символом $G^\#(t)$. Проекцию на плоскость x, y множества прогноза, строящегося по предлагаемому в работе алгоритму, обозначим $\mathbf{G}^\#(t)$. Проведем сравнение множеств $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$.

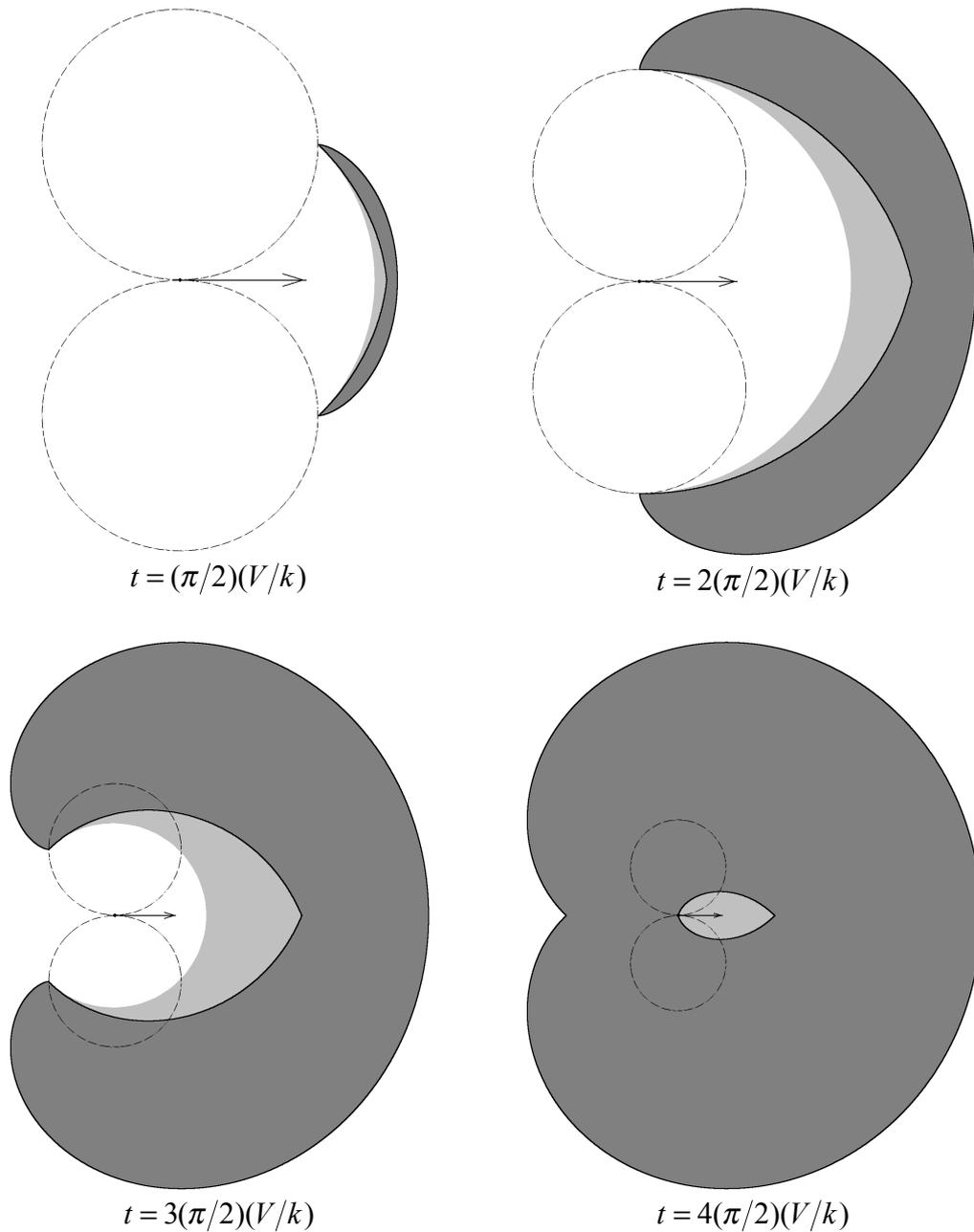


Рис. 2. Сравнение с точным множеством достижимости в проекции на плоскость геометрических координат

Не теряя общности, считаем равными нулю начальное геометрическое положение и начальный угол. На рис. 2 изображены множества $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$, построенные для моментов $t = q(\pi/2)(V/k)$, $q = 1, 2, 3, 4$. Данные моменты соответствуют времени поворота вектора скорости на угол $q(\pi/2)$ при движении с максимальным боковым ускорением. Для каждого момента времени используем свой масштаб изображения. Траектории движения с экстремальными управлениями $u = -1$ и $u = 1$ представляют собой окружности радиусом V^2/k . Вектор начальной скорости показан стрелочкой. Множества $G^\#(t)$ выделены контуром и темной заливкой, а множества $\mathbf{G}^\#(t)$ – светлой заливкой. Множества $\mathbf{G}^\#(t)$

построены с малым шагом Δ по времени и при числе $m = 64$ нормалей в многоугольниках. Использовалась достаточно мелкая сетка по φ в промежутке $[-2\pi, 2\pi]$. Видно, что «внешние» границы множеств $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$ практически совпадают, а «внутренние» отличаются. Имеет место вложение $G^\#(t) \subset \mathbf{G}^\#(t)$.

Рис. 3 показывает зависимость точности построения от количества нормалей. Построения сделаны для момента $t = (5\pi/4)(V/k)$ при числе нормалей $m = 12$ и $m = 24$. При использовании m больше, чем 24, картина существенно не меняется.

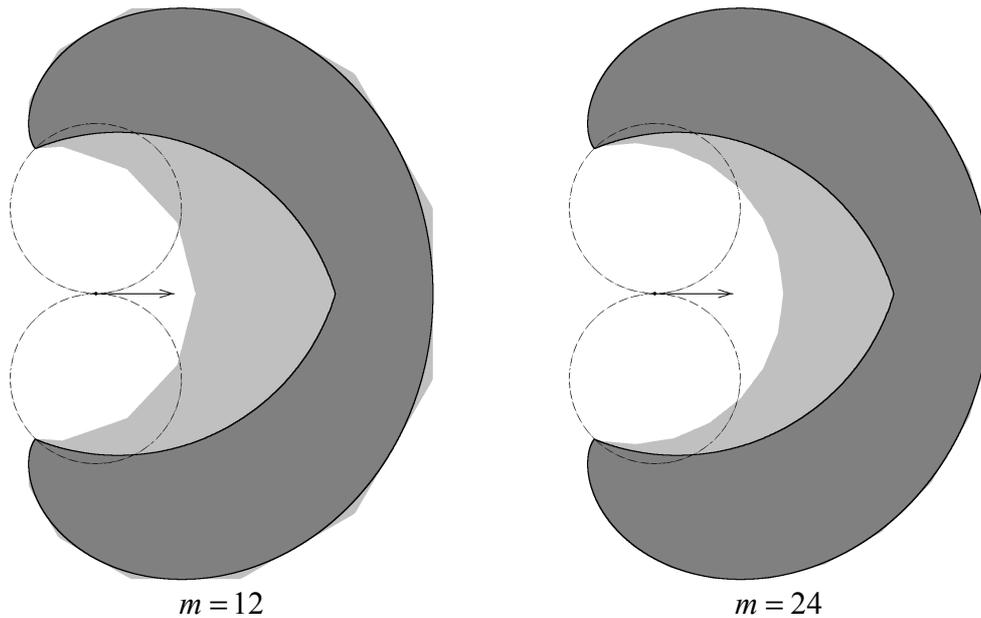


Рис. 3. Влияние числа нормалей на точность построений

Перейдем теперь к сравнению трехмерных множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема. В каждую точку границы множества достижимости $G(t)$ системы (1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления $u(\cdot)$ с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$(15) \quad \begin{array}{lll} 1) 1, 0, 1; & 2) -1, 0, 1; & 3) 1, 0, -1; \\ 4) -1, 0, -1; & 5) 1, -1, 1; & 6) -1, 1, -1. \end{array}$$

Эта теорема позволяет численно с хорошей точностью построить границу множества достижимости $G(t)$ в трехмерном фазовом пространстве.

На рис. 4 показана с двух ракурсов граница множества $G(t)$ для момента времени $t = \pi(V/k)$. Цветом отмечены участки границы с различным характером управляющего воздействия. Синим цветом показан участок, соответствующий варианту, в котором управление последовательно во времени принимает значения $1, 0, 1$. Фиолетовый цвет соответствует участку для варианта с последовательностью управлений $-1, 0, 1$ и т.д.

В точку стыковки участков 1–4 ведет постоянное управление, тождественно равно нулю. В точки линий, лежащих на стыке пар поверхностей 1,2; 1,3; 2,4; 2,5; 2,6; 3,4; 3,5; 3,6, ведет управление с одним переключением. В любую точку линии, являющейся общей для участков 5 и 6, ведут два движения, каждое с двумя переключениями. На этой линии поверхности 5,6 имеют негладкую стыковку. Угол стыковки не очень большой и на рисунке не заметен.

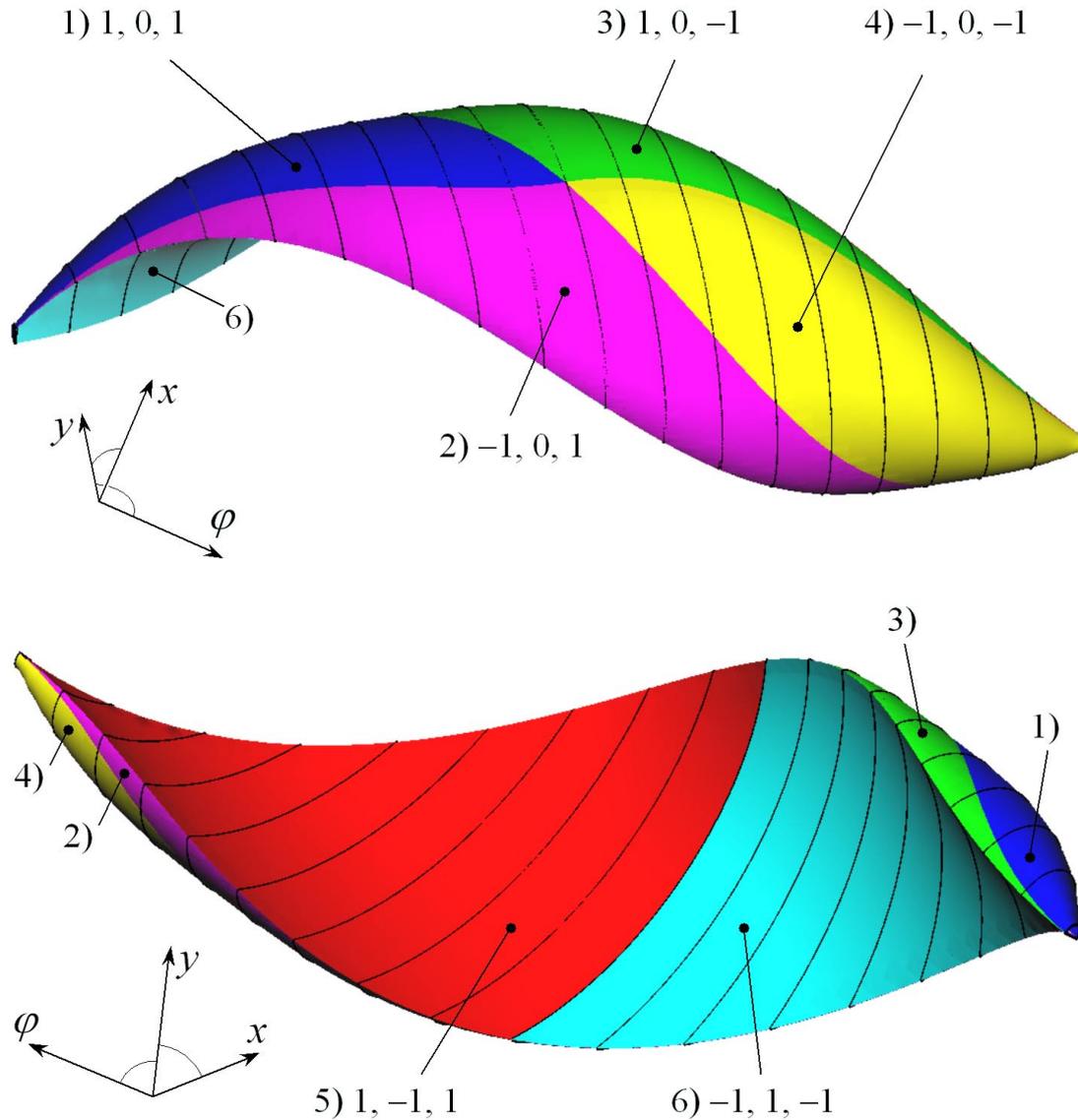


Рис. 4. Структура границы множества достижимости для момента $t = \pi(V/k)$

На рис. 5 показаны в одном ракурсе множества достижимости $G(t)$ для четырех моментов времени $t = h\pi(V/k)$, $h = 1, 2, 3, 4$. Четко прослеживается изменение структуры границы множества достижимости. С увеличением времени внешняя граница «затягивает» внутреннюю и образуется фигура, похожая на улитку.

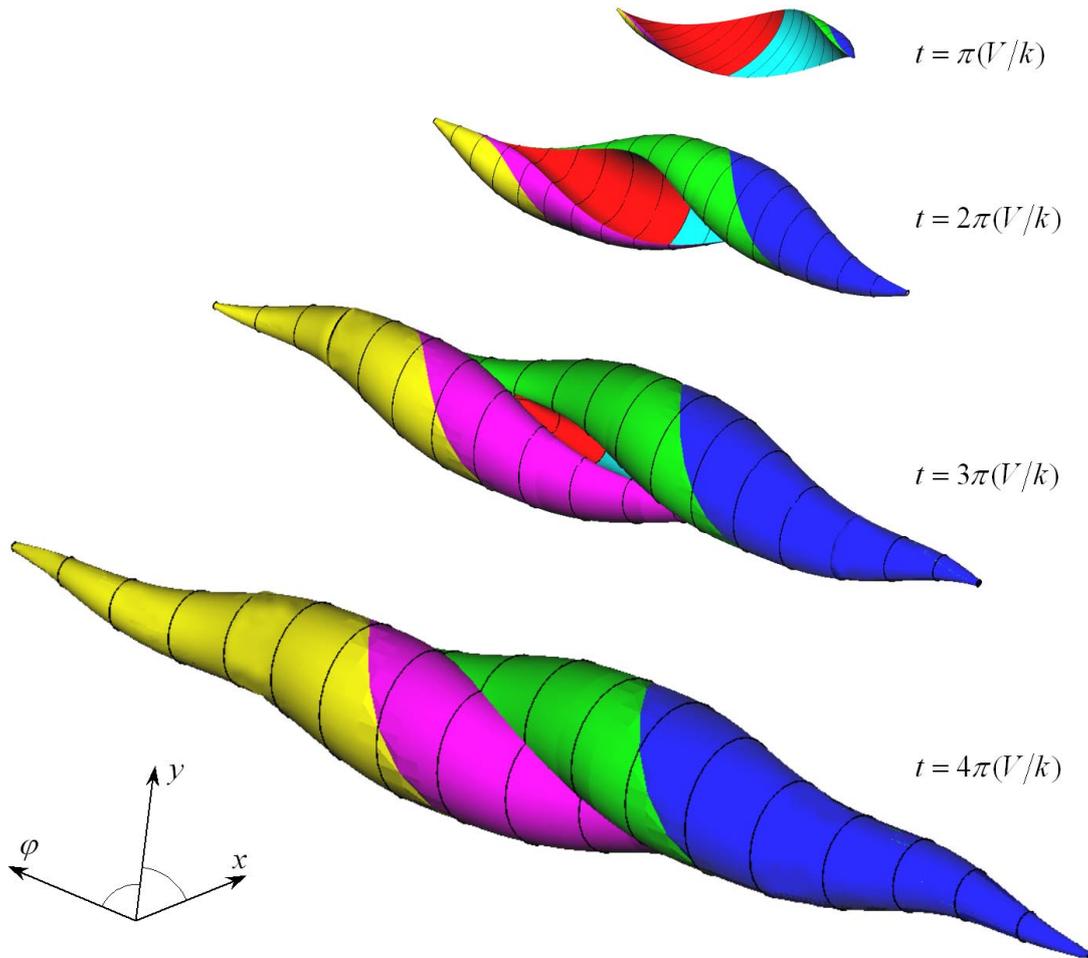


Рис. 5. Развитие множества достижимости

На рис. 6–8 для трех моментов времени $t = h\pi(V/k)$, $h = 2, 3, 4$ изображены множество достижимости $G(t)$ и его аппроксимация сверху $\mathbf{G}(t)$, просчитанная по алгоритмам построения множества прогноза. Отметим, что при просчете аппроксимирующего множества точное множество достижимости считается неизвестным. Видно, что погрешность за счет операций выпуклениия проявляется лишь с одной стороны поверхности, ограничивающей точное множество. По сути, каждое φ -сечение аппроксимирующего множества совпадает с выпуклой оболочкой соответствующего φ -сечения точного множества достижимости.

При просчете трехмерных множеств значение координаты φ промежутком $[0, 2\pi]$ не ограничивалось. Т.е. не отождествлялись значения координаты φ , отличающиеся на величину кратную 2π .

Подчеркнем, что граница множества $G^\#(t)$ описывается удобными формулами лишь при точечном начальном множестве. В задачах с неполной информацией приходится строить множество прогноза от весьма произвольного начального множества. Более того, построения приходится вести в трехмерном пространстве x, y, φ . Описанный в данной работе алгоритм построения множества прогноза хотя и не дает точного множества достижимости, но оценивает его сверху и является весьма простым для реализации.

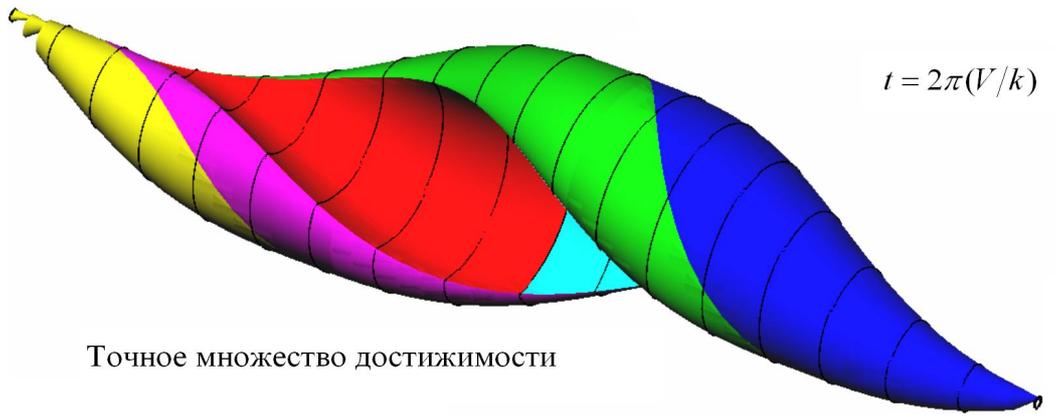


Рис. 6. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 2\pi(V/k)$

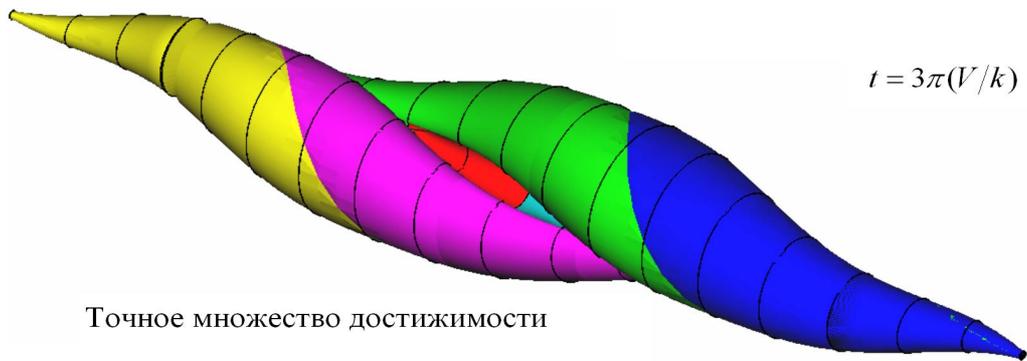


Рис. 7. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 3\pi(V/k)$

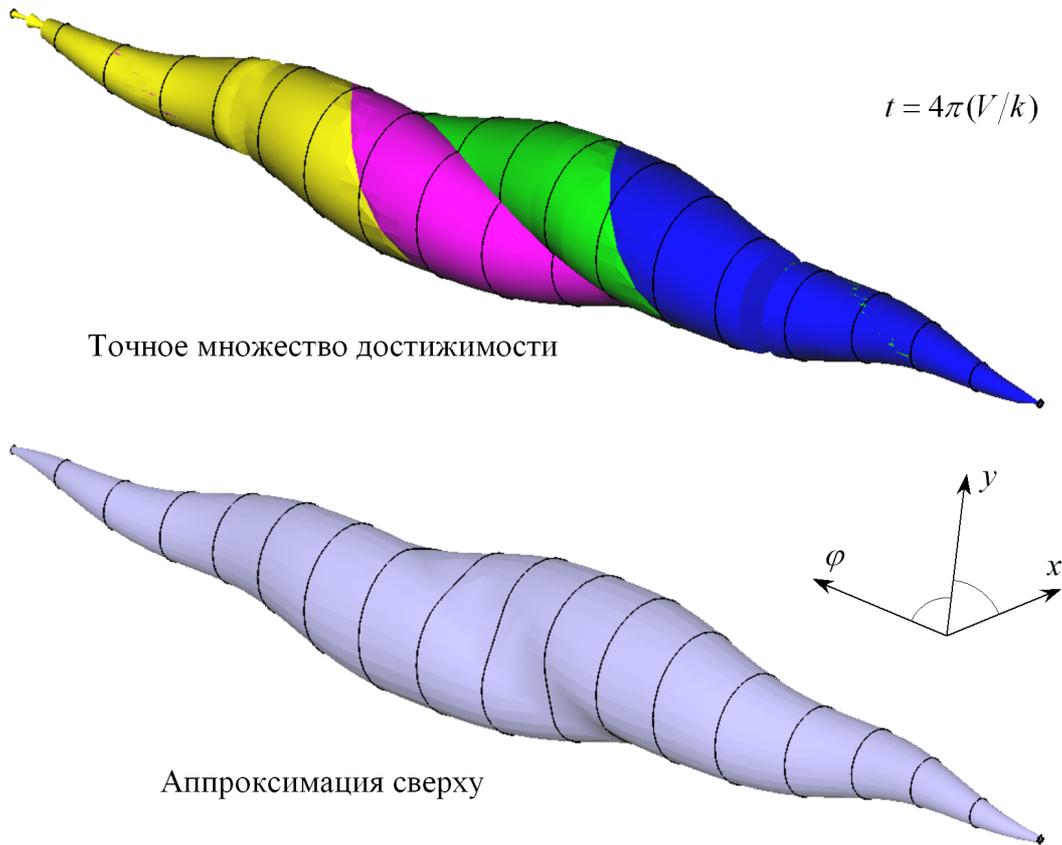


Рис. 8. Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 4\pi(V/k)$

6. Результаты моделирования движения информационных множеств

Сначала приведем результаты, показывающие общую динамику изменения ИМ во времени. Были взяты параметры: $V = 400 \text{ м/с}$, $k = 15 \text{ м/с}^2$, $\Delta = 1 \text{ с}$. Начальное информационное множество $\mathbf{I}(0)$ имело только одно φ -сечение. Содержательно это означает, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ известно направление движения. При $t \geq 0$ задавалось истинное движение. Относительно этого движения формировались замеры. По ним строились множества неопределенности.

На рис. 9 показан фрагмент общей картины движения ИМ на промежутке времени 8–40 с в проекции на плоскость x, y . Замеры приходят в моменты 20 и 32 с. Соответствующие множества неопределенности $H^\#(t)$ – параллелограмм (а) и прямоугольник (б). Крестиками отмечены положения истинной точки. Заштрихованы сечения, наиболее близкие по φ к соответствующим истинным значениям. В информационных множествах для наглядности отображены не все сечения, а лишь каждое второе. Из тех же соображений показаны ИМ только на каждом четвертом шаге по времени: $\mathbf{I}(8)$, $\mathbf{I}(12)$, $\mathbf{I}(16)$, ..., $\mathbf{I}(40)$.

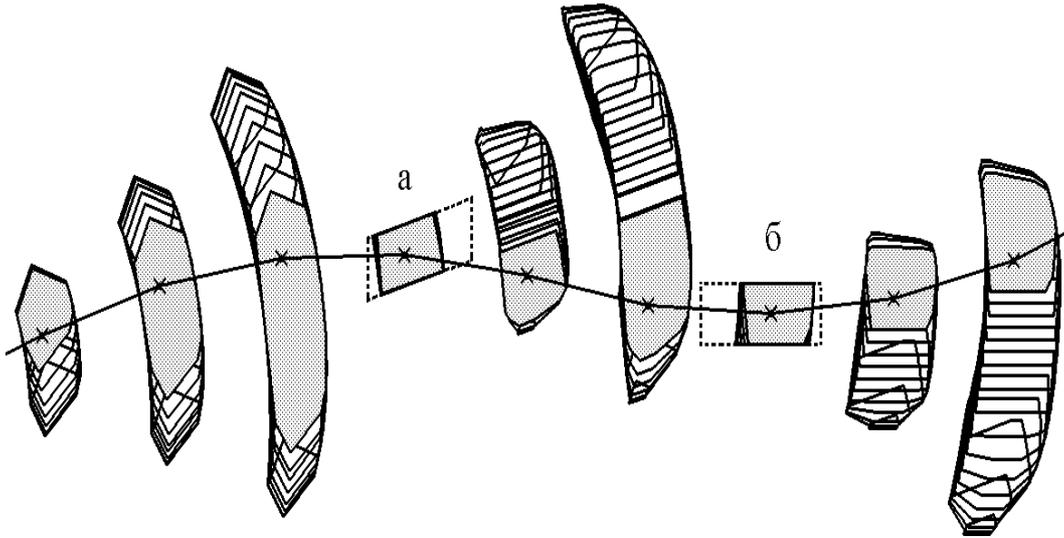


Рис. 9. Движение информационного множества в проекции на плоскость x, y

На рис. 10 более детально, в трехмерном пространстве изображены ИМ на моменты 20 и 32 с. Показаны множества до учета замера (множество прогноза) и после учета замера.

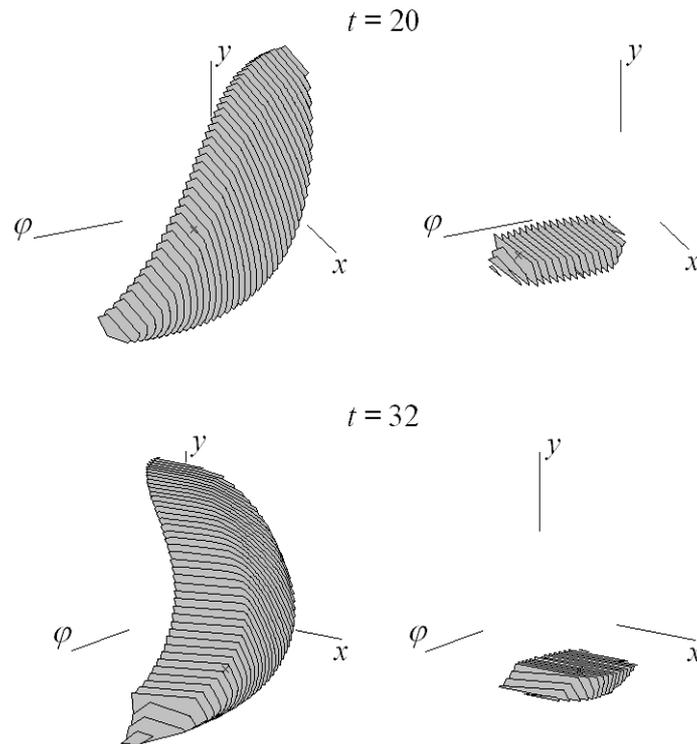


Рис. 10. Информационное множество до и после замера

Обратимся к результатам моделирования, характеризующим влияние количества нормалей при построении φ -сечений множеств прогноза и информационных множеств. Исходные данные: $V = 200 \text{ м/с}$, $k = 10 \text{ м/с}^2$, $\Delta = 1 \text{ с}$. Начальное множество содержало только одно сечение по φ . Замеры поступали с тактом

25 с, МН имели форму квадрата (ориентированного по осям x, y) со стороной 400 м.

На рис. 11 показаны проекции ИМ на плоскость x, y при ограничениях на число нормалей $m = 10$ и $m = 20$. Видно, что результаты мало отличаются.

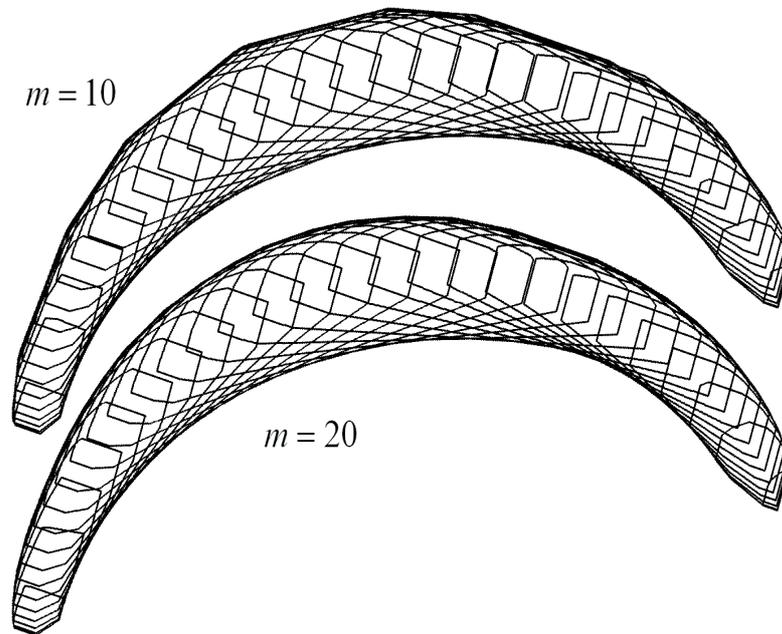


Рис. 11. Информационные множества при разном числе нормалей, $t = 195$ с.
Проекция на плоскость x, y

На рис. 12 для тех же исходных данных и $m = 20$ изображено множество прогноза (синяя заливка) на момент $t = 200$ с. Одновременно показано МН (зеленая заливка) пришедшего в этот момент замера. Оно цилиндрично по координате φ . Область пересечения более крупным планом приведена на рис. 13. В таком же масштабе на рис. 14 показан результат пересечения (красная заливка) – ИМ на момент 200 с.

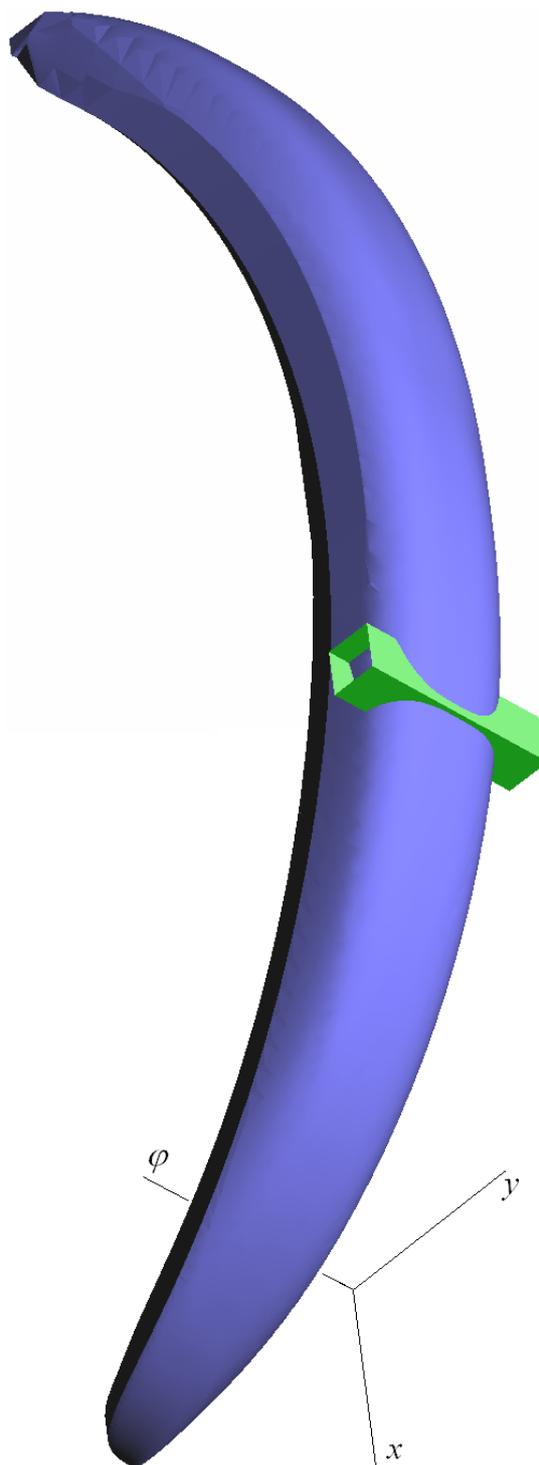


Рис. 12. Множество прогноза и множество неопределенности замера, $t = 200$ с

Результаты моделирования, где φ -сечения ИМ задавались в виде прямоугольников со сторонами, ориентированными по осям x, y , приведены на рис. 15. Построение ИМ осуществлялось на участке времени 80 с. Использовались следующие параметры: $V = 200$ м/с, $k = 5$ м/с², $\Delta = 1$ с. Замеры поступали с интервалом 20 с, соответствующие МН имели форму квадрата со стороной 400 м. Начальное ИМ формировалось по МН начального замера и состояло из 360 одинаковых φ -сечений в интервале $[0, 2\pi]$.

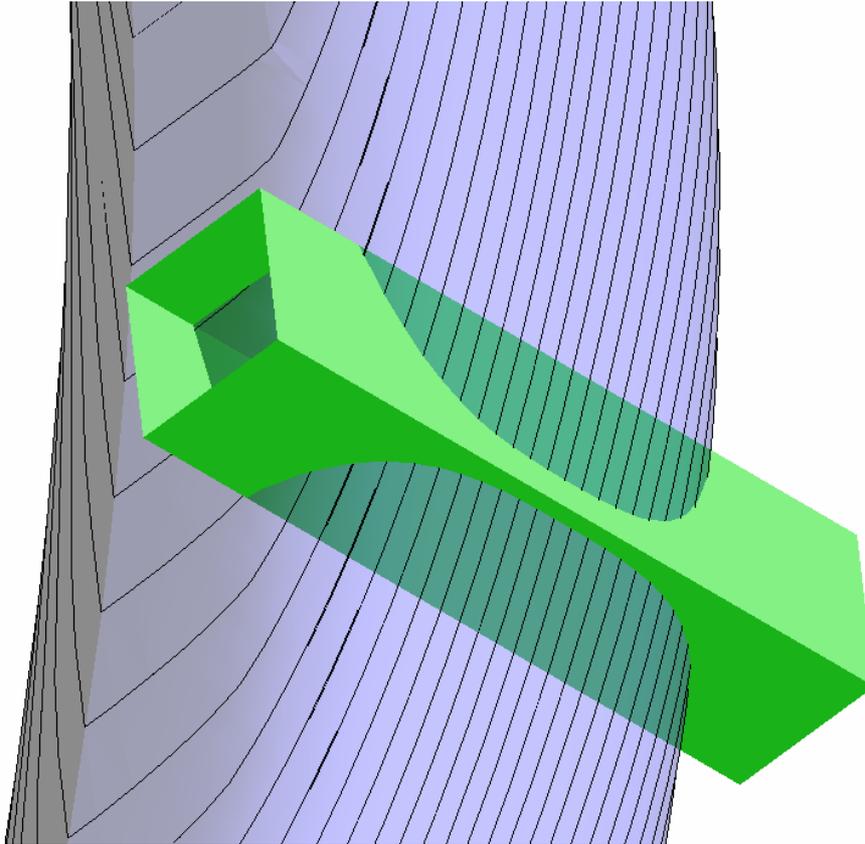


Рис. 13. Область пересечения множества прогноза и множества неопределенности, $t = 200$ с

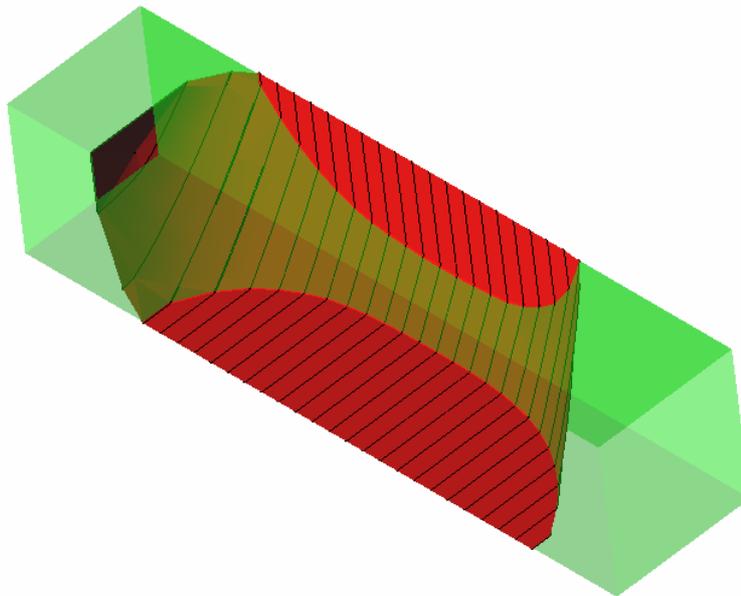


Рис. 14. Информационное множество (красная заливка), $t = 200$ с

Траектория истинного движения имела два разворота в разные стороны. МН поступающих замеров отмечены пунктиром. Показаны проекции ИМ на плоскость x, y для моментов 5, 12, 27, 34, 47, 54, 67, 74 с. Проекция начального ИМ совпадает с МН замера в начальный момент. До прихода второго замера неопределенность по φ сохраняется в интервале $[0, 2\pi]$. Поэтому соответствующие ИМ в проекции на плоскость x, y имеют кольцеобразный вид.

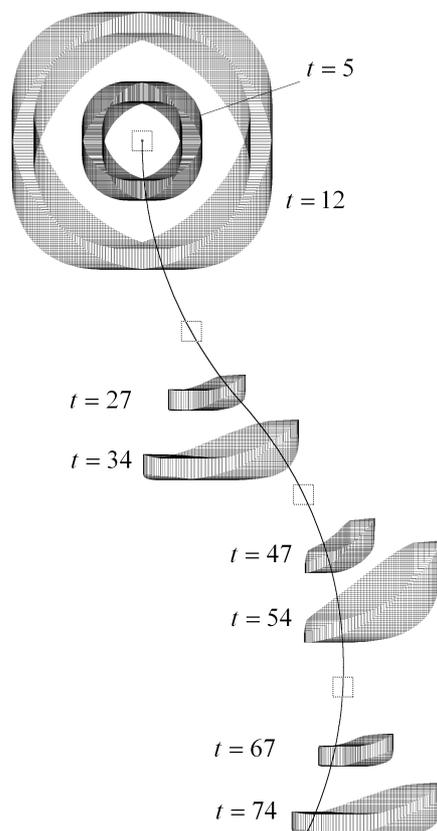


Рис. 15. Динамика изменения информационного множества в проекции на плоскость x, y . Случай прямоугольных φ -сечений

7. Заключение

В рамках модельной задачи наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости предложен способ оценивания сверху множества всех возможных фазовых состояний, совместных с полученными замерами и известными ограничениями на ошибку замеров. Приведены результаты, характеризующие погрешность метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00–01–00348, № 02–01–96424).

Список литературы

1. Брамер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.: Наука, 1982.

2. Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
5. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
6. Milanese M., Norton J., Walter E. (Eds). Bounding Approaches to System Identification. London: Plenum Press, 1996.
7. Kurzhanski A.V., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.
8. Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А. Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств. СПб: Академия гражданской авиации, Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1999, 75 с.
9. Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Informational Sets in a Problem of Observation of Aircraft Trajectory // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2. Moscow: МАИК "Наука/Interperiodica" (Russia), 2000. P. 94–112.
10. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
11. Хамса М.Х., Колас И., Рунгальдер В. Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования / В кн.: «Управление космическими аппаратами и кораблями». М.: Наука, 1971. С. 410–418.
12. Pesvaradi T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. AC-17, No 6. P. 763–772.
13. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального управления для одной системы третьего порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1973. С. 91–101.
14. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко, Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984.
15. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
16. Бердышев Ю.И. Об одной задаче построения области достижимости для нелинейной системы третьего порядка // Методы построения множеств достижимости и конструкции расширений: Сборник научных трудов. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2000, С. 6–12.