РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 13, № 4 2007

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 13
№ 4

Екатеринбург
2007

Труды Института математики и механики УрО РАН. Т. 13, № 4. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 191 с.
ISBN 5–7691–1955–1

Т $\dfrac{50(08)}{8П6(03) - 1998}$ ПВ–2007

ISBN 5–7691–1955–1

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 13, № 4 2007

УДК 62-50

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ[1]

Л. В. Камнева

Статья посвящена изучению функции цены в игровых задачах быстродействия. Предполагается, что построена тестируемая функция и требуется установить, что именно она является функцией цены игры. Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях совпадения тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия, охватывающая случай разрывной тестируемой функции. Работоспособность теоремы проиллюстрирована на примере дифференциальной игры быстродействия второго порядка с динамикой конфликтно-управляемой материальной точки.

Введение

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Исследования дифференциальных игр начались в 1950−60-е гг. с рассмотрения математических моделей конфликтных ситуаций в динамических системах. В этих моделях движение управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в правую часть которых входят управляющие воздействия. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управления второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Управления игроков стеснены геометрическими ограничениями.

В статье рассматриваются игры, в которых функционалом платы является время до попадания фазовой точки на заданное замкнутое терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Такие игры называются дифференциальными играми быстродействия. К ним относятся, например, задачи преследования–уклонения, а также задачи оптимального быстродействия в теории управления, которые можно рассматривать как игровые задачи при нулевом ограничении на управление второго игрока.

Будем придерживаться позиционной формализации дифференциальной игры, изложенной в книгах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [1, 2]. В рамках позиционной формализации важным для исследования дифференциальной игры является поиск функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены можно построить стратегии оптимального управления по принципу обратной связи.

В общем случае функция цены дифференциальной игры быстродействия может быть негладкой, разрывной и, кроме того, допускает несобственное значение ∞.

Предположим, что построена некоторая тестируемая функция и требуется установить, что именно она является функцией цены игры. Данная задача тесно связана с характеризацией функции цены.

Дифференцируемая функция цены [3] является единственным классическим решением краевой задачи для уравнения в частных производных 1-го порядка (уравнения Айзекса – Беллмана).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (06–01–00414).

Если функция цены негладкая, но непрерывная, то основными при ее характеризации становятся понятия непрерывных u- и v-стабильных функций [2, с. 145], введенные в теории позиционных дифференциальных игр. В этом случае u-стабильные (v-стабильные) функции при соответствующем краевом условии мажорируют (минорируют) функцию цены дифференциальной игры, которая единственная обладает свойствами u- и v-стабильности.

Характеризация разрывной функции цены значительно усложняется [4, 5] и совпадает с описанием разрывного минимаксного решения [4, с. 243] краевой задачи для уравнения Айзекса — Беллмана. А именно, в задачах быстродействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу u-стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху v-стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию и непрерывных на границе множества M. Проверка существования такой последовательности и тем более ее построение затруднительны даже при решении задач на плоскости.

В статье доказана теорема о достаточных условиях совпадения тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия, охватывающая случай разрывной функции цены. Условия теоремы требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях подмножеств, на которые разбиваются границы множеств уровня тестируемой функции. Рассмотрение нескольких окрестностей во многих случаях делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения. Применение теоремы проиллюстрировано на примере игровой задачи быстродействия на плоскости.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние в момент времени t; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ — управления первого и второго игроков; P и Q — компактные множества. Предполагается [1, 2], что функция f непрерывна по совокупности переменных, для нее выполнены условие подлинейного роста и локальное условие Липшица по x. Пусть

$$H(x,p) := \min_{u\in P} \max_{v\in Q} \langle p, f(x,u,v)\rangle = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} \langle p, f(x,u,v)\rangle, \quad x,p \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов. Функция H называется гамильтонианом системы (1.1).

Позиционными стратегиями [1,2] первого и второго игроков являются произвольные функции $U\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to P$ и $V\colon [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to Q$. Стратегии U, V порождают пучки $X_1(x_0, U)$, $X_2(x_0, V)$ конструктивных движений, выходящих из начальной позиции x_0 при $t = 0$.

Конструктивным движением $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$ называется функция $x(\cdot)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ [1, с. 33], для которой на любом отрезке $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, найдется последовательность ломаных Эйлера $x^{(k)}(\cdot) : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, определяемых условиями

$$\dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), U(\tau_i^{(k)}, x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t));$$

$$t \in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

равномерно сходящаяся к $x(\cdot)$ на $[0, \vartheta]$ и такая, что $\sup_i(\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$. Здесь интервалы $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots$, разбивают полуось $t \geq 0$, $v^{(k)}(\cdot)$ — измеримая функция со значениями в множестве Q. Аналогично определяются элементы множества $X_2(x_0, V)$.

Цель первого игрока — быстрейшее сближение точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset \mathbb{R}^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи. Таким образом, функционал платы для игровой задачи быстродействия имеет вид

$$J(x(\cdot); M) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \text{ для любого } t \geq 0; \\ \min\{t \geq 0\colon\ x(t) \in M\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в точке x_0 выполнено равенство

$$\inf_U \sup_{x(\cdot) \in X_1(x_0, U)} J(x(\cdot); M) = \sup_V \inf_{x(\cdot) \in X_2(x_0, V)} J(x(\cdot); M) =: T(x_0; M),$$

то значение $T(x_0; M) \in [0, \infty]$ называется ценой игры в точке x_0.

При указанных условиях на функцию f для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует цена игры [1, 2]. Функция $T(\,\cdot\,; M) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

Пусть на замкнутом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ определена некоторая функция $\varphi(\,\cdot\,)\colon \Omega \to [0, \infty]$. Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$.

2. Свойства *u*- и *v*-стабильных функций

С функцией цены тесно связаны понятия u- и v-стабильных функций [2, 4].

Определение 1. Функция $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$ *u-стабильна* на открытом множестве $G \subseteq \mathbb{R}^n$, если она полунепрерывна снизу и для любых $y_0 \in G$ и $v_* \in Q$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\,\{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad y(0) = y_0, \tag{2.1}$$

для которых имеет место неравенство

$$\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.2}$$

В случае, когда функция $\omega(\cdot)$ конечна, неравенство (2.2) означает выполнение включения

$$(\omega(y_0) - t, y(t)) \in \mathrm{epi}\,\omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\mathrm{epi}\,\omega = \{(z, x) : z \geq \omega(x),\ x \in G\}$ — надграфик функции $\omega(\cdot)$.

Определение 2. Функция $\widetilde{\omega}(\cdot) : G \to [0, \infty]$ *v-стабильна* на открытом множестве $G \subseteq \mathbb{R}^n$, если она полунепрерывна сверху и для любых $y_0 \in G$ и $u_* \in P$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \to G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\,\{f(y(t), u_*, v) : v \in Q\}, \quad y(0) = y_0, \tag{2.3}$$

для которых имеет место неравенство

$$\widetilde{\omega}(y(t)) \geq \widetilde{\omega}(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.4}$$

В случае, когда функция $\widetilde{\omega}(\cdot)$ конечна, неравенство (2.4) означает выполнение включения

$$(\widetilde{\omega}(y_0) - t, y(t)) \in \mathrm{hypo}\,\omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\mathrm{hypo}\,\widetilde{\omega} = \{(z, x) : z \leq \widetilde{\omega}(x),\ x \in G\}$ — подграфик функции $\widetilde{\omega}(\cdot)$.

Заметим, что в работах [2, 4] определения u- и v-стабильных функций даны для конечных функций.

Сформулируем инфинитезимальные критерии стабильных функций.

Пусть задана функция $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$, где $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Применим к функции $\omega(\cdot)$ преобразование Кружкова [6]:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\omega(x)), & \omega(x) < \infty; \\ 1, & \omega(x) = \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Имеем $\mathbf{w}(\cdot) : G \to [0, 1]$, т.е. функция $\mathbf{w}(\cdot)$ принимает только конечные значения.

Свойство u-стабильности полунепрерывной снизу функции $\omega(\cdot)$ эквивалентно слабой инвариантности надграфика $\operatorname{epi} \mathbf{w}$ функции $\mathbf{w}(\cdot)$ относительно дифференциального включения [4, с. 265]

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in \mathbf{E}^+(x(t), z(t), v_*).$$

Здесь многозначное отображение $\mathbf{E}^+$ определяется формулой

$$\mathbf{E}^+(x, z, v_*) = \operatorname{co}\{(f(x, u, v_*), g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; u \in P, \; g = z - 1\},$$

где $x \in G$, $z \in \mathbb{R}$, $v_* \in Q$. Это свойство характеризует функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ как верхнее минимаксное решение [4, с. 38] уравнения в частных производных первого порядка

$$H(x, \nabla \mathbf{w}(x)) + 1 - \mathbf{w}(x) = 0, \quad x \in G.$$

Воспользовавшись одним из эквивалентных критериев [4, с. 38] верхнего минимаксного решения, находим, что свойство u-стабильности функции $\omega(\cdot)$ равносильно выполнению неравенства

$$\inf\{d^- \mathbf{w}(x; \eta) - g : \; (\eta, g) \in \mathbf{E}^+(x, z, v_*)\} \leq 0, \quad x \in G, \quad v_* \in Q. \tag{2.6}$$

Здесь $d^- \mathbf{w}(x; \eta)$ — нижняя производная функции $\mathbf{w}(\cdot)$ в точке x по направлению η:

$$d^- \mathbf{w}(x; \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta),$$

$$D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta) = \{\delta^{-1}[\mathbf{w}(x + \delta \eta') - \mathbf{w}(x)] : \delta \in (0, \varepsilon), \|\eta - \eta'\| \leq \varepsilon\}.$$

Аналогично можно показать, что свойство v-стабильности полунепрерывной сверху функции $\omega(\cdot)$ равносильно выполнению неравенства

$$\sup\{d^+ \mathbf{w}(x; \eta) - g : \; (\eta, g) \in \mathbf{E}^-(x, z, u_*)\} \geq 0, \quad x \in G, \quad u_* \in P. \tag{2.7}$$

Здесь

$$\mathbf{E}^-(x, z, u_*) = \operatorname{co}\{(f(x, u_*, v), g) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; v \in Q, \; g = z - 1\},$$

$$d^+ \mathbf{w}(x; \eta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta)$$

есть верхняя производная функции $\mathbf{w}(\cdot)$ в точке x по направлению η.

После несложных преобразований неравенств (2.6), (2.7) получаем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Полунепрерывная снизу (сверху) функция $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$, где $G \subseteq \mathbb{R}^n$ есть открытое множество, будет u-стабильной (v-стабильной) тогда и только тогда, когда для любого $x_* \in G$ выполнено неравенство*

$$\inf\{d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \colon \; \eta \in \operatorname{co} f(x_*, P, v)\} \leq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad v \in Q \tag{2.8}$$

$$\Big(\sup\{d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) \colon \; \eta \in \operatorname{co} f(x_*, u, Q)\} \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad u \in P\Big). \tag{2.9}$$

Здесь функция $\mathbf{w}(\cdot)$ определена формулой (2.5),

$$f(x, P, v) = \{f(x, u, v) \colon u \in P\}, \quad f(x, u, Q) = \{f(x, u, v) \colon v \in Q\}.$$

Следующие утверждения упрощают проверку неравенств (2.8), (2.9) в некоторых частных случаях.

Утверждение 2. *Пусть задана функция* $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$, $x_* \in G$, $\omega(x_*) < \infty$ *и для любого* $v \in Q$ *найдутся число* $\tau > 0$ *и такая функция* $\beta(\cdot) : [0, \tau) \to G$, *что*

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \operatorname{co} f(x_*, P, v), \quad \beta(0) = x_*,$$

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \le -1.$$

Тогда в точке x_* *выполнено соотношение* (2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. Имеем

$$\widetilde{\Phi}(t) = 1 - e^{-\Phi(t)}, \quad \dot{\widetilde{\Phi}}(t) = e^{-\Phi(t)} \dot{\Phi}(t), \quad t \in (0, \tau),$$

$$\dot{\widetilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)} \dot{\Phi}(+0) \le -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1. \tag{2.10}$$

Покажем, что $d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \le \dot{\widetilde{\Phi}}(+0)$, где $\eta = \dot{\beta}(+0)$. Выберем произвольную последовательность $\delta_k \downarrow 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\beta(\delta_k) = \beta(0) + \dot{\beta}(+0)\delta_k + o(\delta_k).$$

Следовательно,

$$\beta(\delta_k) = x_* + \eta_k \delta_k, \quad \eta_k = \eta + o(\delta_k)/\delta_k, \quad \lim_{k \to \infty} \eta_k = \eta.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\widetilde{\Phi}(\delta_k) - \widetilde{\Phi}(0)}{\delta_k} = \dot{\widetilde{\Phi}}(+0).$$

Пусть $\varepsilon_k = \max\{\delta_k, \|\eta - \eta_k\|\}$. Имеем

$$\frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} \in D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta).$$

Следовательно,

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) = \lim_{k \to \infty} \inf D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta) \le \lim_{k \to \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \dot{\widetilde{\Phi}}(+0).$$

Учитывая (2.10), получаем, что

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \le \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следует неравенство (2.8).

Утверждение 3. *Пусть задана функция* $\omega : G \to [0, \infty]$, $x_* \in G$ *и для любого* $u \in P$ *найдутся число* $\tau > 0$ *и такая функция* $\beta(\cdot) : [0, \tau) \to G$, *что*

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \operatorname{co} f(x_*, u, Q), \quad \beta(0) = x_*,$$

и для случая $\omega(x_*) < \infty$ *выполнены условия*

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \ge -1,$$

а для случая $\omega(x_*) = \infty$ *имеем* $\Phi(t) = \omega(\beta(t)) = \infty$, $t \in [0, \tau)$. *Тогда в точке* x_* *выполнено соотношение* (2.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. В случае $\omega(x_*) < \infty$ имеем

$$\dot{\widetilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)}\dot{\Phi}(+0) \geq -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

В случае $\omega(x_*) = \infty$ выполнено равенство $\dot{\widetilde{\Phi}}(t) = 0$, $t \in (0, \tau)$. Следовательно, $\dot{\widetilde{\Phi}}(+0) = 0 \geq \mathbf{w}(x_*) - 1$. Таким образом, в обоих случаях имеем

$$\dot{\widetilde{\Phi}}(+0) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

Аналогично доказательству утверждения 2 можно показать, что

$$d^+\mathbf{w}(x_*; \eta) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следует неравенство (2.9).

Утверждение 4. *Пусть функция* $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$ *конечна и дифференцируема в окрестности точки* $x_* \in G$. *Тогда соотношение* (2.8) [(2.9)] *эквивалентно неравенству*

$$H(x_*, \nabla\omega(x_*)) \leq -1 \tag{2.11}$$

$$\Big[H(x_*, \nabla\omega(x_*)) \geq -1\Big]. \tag{2.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу конечности и дифференцируемости функции $\omega(\cdot)$ в окрестности точки x_* верно равенство

$$d^{\pm}\mathbf{w}(x_*; \eta) = \langle \nabla\mathbf{w}(x_*), \eta \rangle = e^{-\omega(x_*)}\langle \nabla\omega(x_*), \eta \rangle, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, для любого $v \in Q$ имеем

$$\inf\{d^-\mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \operatorname{co} f(x_*, P, v)\} = e^{-\omega(x_*)} \inf\{\langle \nabla\omega(x_*), \eta \rangle : \eta \in \operatorname{co} f(x_*, P, v)\}$$

$$= e^{-\omega(x_*)} \min_{u \in P} \langle \nabla\omega(x_*), f(x_*, u, v) \rangle \leq e^{-\omega(x_*)} H(x_*, \nabla\omega(x_*)) = (1 - \mathbf{w}(x_*)) H(x_*, \nabla\omega(x_*)).$$

Отсюда получаем, что соотношение (2.8) эквивалентно неравенству (2.11).

Аналогично доказывается эквивалентность условий (2.9) и (2.12).

Утверждение 5. *Пусть функция* $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$ *равна* ∞ *в окрестности точки* $x_* \in G$. *Тогда в точке* x_* *выполнены соотношения* (2.8) *и* (2.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $O_* \subset G$ — такая окрестность точки $x_* \in G$, что $\omega(x) = \infty$, $x \in O_*$. Имеем $\mathbf{w}(x_*) = 1$, $x \in O_*$. Следовательно,

$$d^{\pm}\mathbf{w}(x; \eta) = 0, \quad x \in O_*, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, левые части неравенств (2.8) и (2.9) равны нулю для всех $x \in O_*$. Поскольку $\mathbf{w}(x_*) - 1 = 0$, то неравенства (2.8) и (2.9) выполнены.

Утверждение 6. *Пусть функция* $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$ *конечна в окрестности точки* $x_* \in G$ *и точка* x_* *— точка локального минимума функции* $\omega(\cdot)$. *Тогда в точке* x_* *выполнено соотношение* (2.9).

Доказательство. Имеем $\omega(x) < \infty$ и $\omega(x_*) \leq \omega(x)$, $x \in O_*$. Здесь $O_* \subset G$ — некоторая окрестность точки x_*. Следовательно, $\mathbf{w}(x_*) \leq \mathbf{w}(x)$, $x \in O_*$, и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и любых $\eta \in \mathbb{R}^n$ множество $D_\varepsilon \mathbf{w}(x_*; \eta)$ не содержит отрицательных чисел. Таким образом,

$$d^+\mathbf{w}(x_*; \eta) \geq 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая, что $\mathbf{w}(x_*) - 1 < 0$, получаем неравенство (2.9).

Сформулируем леммы, устанавливающие связь между u- и v-стабильными функциями и функцией цены игры для подходящего терминального множества.

Определение 3. *Допустимой траекторией* называется решение уравнения (1.1) при некоторых измеримых управлениях $u(\cdot) : [0, \infty) \to P$ и $v(\cdot) : [0, \infty) \to Q$.

Лемма 1. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, функция $\omega(\cdot) : G \to [0, \infty]$ u-стабильна на множестве $G \setminus D$, $t_* \geq 0$ и*

$$D \cap G = \{x \in G\colon\ \omega(x) \leq t_*\} \neq \varnothing.$$

Предположим, что $x_* \in G \setminus D$ и все допустимые траектории из начальной точки x_* не покидают множества G на отрезке времени $[0, \omega(x_*) - t_*]$. Тогда $\omega(x_*) - t_* \geq T(x_*; D)$.

Лемма 2. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $D \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, функция $\widetilde{\omega}(\cdot) : G \to [0, \infty]$ v-стабильна на множестве $G \setminus D$, $t_* \geq 0$,*

$$D \cap G = \{x \in G\colon\ \widetilde{\omega}(x) \leq t_*\} \neq \varnothing$$

и функция $\widetilde{\omega}(\cdot)$ непрерывна в точках множества $D \cap G$. Предположим, что $x_* \in G \setminus D$, $\vartheta \in [0, \widetilde{\omega}(x_*) - t_*)$ и все допустимые траектории из начальной точки x_* не покидают множества G на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Тогда $\vartheta < T(x_*; D)$.

В случае $G = \mathbb{R}^n$ доказательства лемм 1, 2 следуют из [1, с. 49–65] и основываются на свойствах стратегий, экстремальных к надграфику (подграфику) u-стабильной (v-стабильной) функции. Еще один способ доказательства вытекает из [4, с. 265–274] при условии, что правая часть динамики системы является глобально липшицевой по переменной x. В случае $G \subset \mathbb{R}^n$ идея доказательства по сравнению с [1] не изменяется, поскольку допустимые траектории не выходят из G на рассматриваемом промежутке времени.

Доказательство леммы 1. Положим

$$W_* = \{(t, x) \in [0, \omega(x_*) - t_*] \times G : \omega(x) \leq \omega(x_*) - t\}.$$

Заметим, что множество

$$\{(z, x) :\ z = \omega(x_*) - t,\ (t, x) \in W_*\}$$

представляет собой часть надграфика функции $\omega(\cdot)$, заключенную между значениями $z = t_*$ и $z = \omega(x_*)$.

В силу u-стабильности функции $\omega(\cdot)$ множество W_* является u-стабильным [1, с. 52] относительно множества $\widetilde{D}$, где

$$\widetilde{D} = [0, \omega(x_*) - t_*] \times (D \cup (\mathbb{R}^n \setminus G)),$$

т.е. для любой точки $(t_0, y_0) \in W_*$ и любых значений $\tau > 0$ и $v_* \in Q$ найдется такое решение $y(\cdot) : [t_0, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (2.1) с начальным условием $y(t_0) = y_0$, что либо $(t_0 + \tau, y(t_0 + \tau)) \in W_*$, либо $(\tau_*, y(\tau_*)) \in \widetilde{D}$ для некоторого $\tau_* \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Имеем $(0, x_*) \in W_*$ и

$$\{x \in G : (\omega(x_*) - t_*, x) \in W_*\} = D \cap G.$$

Поскольку допустимые траектории для начальной точки x_* не выходят из множества G на промежутке времени $[0, \omega(x_*) - t_*]$, то стратегия экстремального прицеливания [1, с. 57] первого игрока на множество W_* сохраняет траекторию системы в W_* и, следовательно, гарантирует ее приведение на множество D на отрезке времени $[0, \omega(x_*) - t_*]$. Отсюда вытекает неравенство $\omega(x_*) - t_* \geq T(x_*; D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Положим

$$W^*_\vartheta = \{(t, x) \in [0, \vartheta] \times G : \widetilde{\omega}(x) \geq \widetilde{\omega}(x_*) - t\}.$$

Заметим, что множество

$$\{(z, x) : \ z = \widetilde{\omega}(x_*) - t, \ (t, x) \in W^*_\vartheta\}$$

представляет собой часть подграфика функции $\widetilde{\omega}(\cdot)$, заключенную между значениями $z = \widetilde{\omega}(x_*) - \vartheta$ и $z = \widetilde{\omega}(x_*)$.

В силу v-стабильности функции $\widetilde{\omega}(\cdot)$ множество W^*_ϑ является v-стабильным [1, с. 52] множеством, т.е. для любой точки $(t_0, y_0) \in W^*_\vartheta$ и любых значений $\tau > 0$ и $u_* \in P$ найдется такое решение $y(\cdot) : [t_0, t_0 + \tau] \to \mathbb{R}^n$ дифференциального включения (2.3) с начальным условием $y(t_0) = y_0$, что если $t_0 + \tau \leq \vartheta$, то $(t_0 + \tau, y(t_0 + \tau)) \in W^*_\vartheta$.

Имеем $(0, x_*) \in W^*_\vartheta$. Кроме того, в силу непрерывности функции $\widetilde{\omega}(\cdot)$ в точках множества $D \cap G$ и неравенства $\widetilde{\omega}(x_*) - t_* > \vartheta$ справедливо соотношение

$$\{x \in G : (\vartheta, x) \in W^*_\vartheta\} \cap D = \varnothing.$$

Поскольку допустимые траектории для начальной точки x_* не выходят из множества G на промежутке времени $[0, \vartheta]$, то стратегия экстремального прицеливания [1, с. 57] второго игрока на множество W^*_ϑ сохраняет траекторию системы в W^*_ϑ и, следовательно, гарантирует ее уклонение от множества D на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Отсюда вытекает неравенство $\vartheta < T(x_*; D)$.

3. Теорема о достаточных условиях

Далее будем использовать обозначения: $\overline{A}$ — замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $O(r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

Сформулируем и докажем теорему.

Теорема. *Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \Omega$ — замкнутые множества и задана функция*

$$\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty].$$

Введем обозначения

$$\Theta = \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad t \in [0, \Theta);$$

$$F(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) = t\}, \quad B(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) < t\};$$

$$S(t) = \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)}, \quad G(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varnothing, & S(t) = \varnothing; \\ S(t) + O(\varepsilon), & S(t) \neq \varnothing, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу, $D(0) = M$, $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$ — некоторое конечное (возможно, пустое) множество и выполнены следующие условия:

1) *Для любого* $t \in (0,\Theta)\setminus\mathcal{T}$, *такого что* $S(t) \neq \varnothing$, *существуют число* $\varepsilon_0 > 0$ *и множество* $G_\infty \subset G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$ *такие, что*:

а) *выполнены соотношения* $G(t,\varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \sup\{\varphi(x) : x \in G(t,\varepsilon) \setminus G_\infty\} = t \tag{3.1}$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t,\varepsilon_0) \setminus (G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t,\varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty \end{cases} \tag{3.2}$$

u-стабильна на множестве $G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$;

б) *существует последовательность функций*

$$\omega_k(\cdot) : G(t,\varepsilon_0) \to [0,\infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые v-стабильны на множестве $G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$, *равны нулю и непрерывны в точках множества* $D(t) \cap G(t,\varepsilon_0)$, *и*

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t,\varepsilon_0). \tag{3.3}$$

2) *Для любого* $t \in (0,\Theta) \setminus \mathcal{T}$, *такого что* $F(t) \setminus S(t) \neq \varnothing$, *и всякого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для множества*

$$G^F(t,\varepsilon,\delta) = F(t) \setminus G(t,\varepsilon) + O(\delta)$$

выполнено вложение $G^F(t,\varepsilon,\delta) \subset \Omega$, *а функция* $\varphi(\cdot)$ *конечна и обладает свойствами u- и v-стабильности на множестве* $G^F(t,\varepsilon,\delta)$.

3) *Для любого* $t \in (0,\Theta) \setminus \mathcal{T}$, *такого что* $B(t) \setminus S(t) \neq \varnothing$, *и всякого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *найдутся число* $\delta > 0$ *и последовательность функций*

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t,\varepsilon,\delta) \to [0,\infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

где

$$G^B(t,\varepsilon,\delta) = B(t) \setminus G(t,\varepsilon) + O(\delta),$$

такие, что функции $\omega_k^\infty(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, *v-стабильны на множестве* $G^B(t,\varepsilon,\delta) \setminus D(t)$, *равны нулю и непрерывны в точках множества* $D(t) \cap G^B(t,\varepsilon,\delta)$ *и выполнено предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t,\varepsilon,\delta) \setminus D(t). \tag{3.4}$$

4) *Для любого* $x_0 \in \Omega \setminus M$, *такого что* $\varphi(x_0) = \Theta < \infty$, *найдется последовательность* $\{x_k\}_1^\infty \subset \Omega$, *для которой* $\varphi(x_k) < \varphi(x_0)$ *и* $x_k \to x_0$ *при* $k \to \infty$.

Тогда

$$\varphi(x) = T(x;M), \quad x \in \Omega.$$

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма [7].

Лемма 3. *Пусть замкнутые множества* $D_\tau \subset \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, *монотонно убывают по включению при* $\tau \to +0$ *и* $\cap_{\tau>0} D_\tau = M$. *Тогда*

$$\lim_{\tau\to+0} T(x;D_\tau) = T(x;M), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Сначала докажем теорему для случая $\mathcal{T} = \varnothing$.

Предположим, что $\Theta = 0$. Тогда $\varphi(x) = 0$, $x \in \Omega$. В силу условия $D(0) = M$ теоремы получаем, что $\Omega = M$, и заключение теоремы очевидно. Далее будем считать, что $\Theta > 0$.

1°. Пусть $t_* \in (0, \Theta)$. Для краткости будем использовать обозначения

$$D_* = D(t_*), \quad F_* = F(t_*), \quad B_* = B(t_*), \quad S_* = S(t_*).$$

Покажем, что найдется такое $\vartheta > 0$, для которого имеет место равенство

$$W(t; D_*) = D(t_* + t), \quad t \in [0, \vartheta]. \tag{3.5}$$

Здесь $W(t; D_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x; D_*) \le t\}$ — множество уровня функции цены.

Возможные три случая: $S_* \ne \varnothing$; $S_* = \varnothing$ и $F_* \ne \varnothing$; $S_* = \varnothing$ и $B_* \ne \varnothing$.

С л у ч а й $S_* \ne \varnothing$. Для момента t_* выберем число $\varepsilon_0 > 0$, множество G_∞ и функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, о существовании которых говорится в условии 1) теоремы. Пусть функция $\omega(\cdot)$ определяется формулой (3.2) при $t = t_*$.

a) Покажем, что найдется такое $\delta_* \in (0, \varepsilon_0)$, что

$$\varphi(x) - t_* = T(x; D_*), \quad x \in \big(\overline{F}_* + O(\delta_*)\big) \setminus (G_\infty \cup D_*). \tag{3.6}$$

Введем обозначение

$$G_*(\varepsilon) = G(t_*, \varepsilon).$$

Пусть $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$. Найдется такое $\vartheta_1 > 0$, что из любой начальной точки $x_0 \in G_*(\varepsilon_1)$ допустимые траектории не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_1]$. В силу равенства (3.1) существует такое $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, что

$$\omega(x) = \varphi(x) - t_* < \vartheta_1, \quad x \in G_*(\varepsilon_2) \setminus G_\infty.$$

Выберем $x_0 \in G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$. Поскольку все допустимые траектории из начальной точки x_0 не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_1]$, $\omega(x_0) < \vartheta_1$ и функция $\omega(\cdot)$ u-стабильна, то в силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) \ge T(x_0; D_*). \tag{3.7}$$

Заметим, что $\omega(x_0) > 0$. Выберем произвольное число $\tau \in (0, \omega(x_0)]$. В силу условия (3.3) найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что выполнены неравенства

$$\omega(x_0) - \tau < \omega_k(x_0) < \vartheta_1.$$

Кроме того, $\omega(x_0) - \tau \ge 0$. Функция $\omega_k(\cdot)$ v-стабильна на множестве $G_*(\varepsilon_0)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $G_*(\varepsilon_0) \cap D_*$. В силу леммы 2 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) - \tau < T(x_0; D_*), \quad \tau \in (0, \omega(x_0)].$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$ и учитывая соотношение (3.7), получаем равенство (3.6) во всех точках множества $G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$.

Предположим, что $F_* \setminus S_* \ne \varnothing$. Без ограничения общности считаем, что $F_* \setminus G_*(\varepsilon_2) \ne \varnothing$.

По условию 2) теоремы найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon_2]$, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна и u- и v-стабильна на множестве $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$. Пусть $\delta_1 \in (0, \delta)$. Выберем такое $\vartheta_2 \in (0, \vartheta_1]$, что из любой начальной точки $x_0 \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_1)$ допустимые траектории не покидают множество $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_2]$. В силу непрерывности и u-стабильности функции $\varphi(\cdot)$ на множестве $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta)$ существует такое $\delta_* \in (0, \delta_1]$, что

$$\varphi(x) - t_* \le \vartheta_2, \quad x \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*).$$

В силу лемм 1, 2 для любой точки $x_0 \in G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*)$ справедливы неравенства

$$\varphi(x_0) - t_* - \tau < T(x_0; D_*) \le \varphi(x_0) - t_*, \quad \tau \in (0, \varphi(x_0) - t_*].$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получаем равенство (3.6) во всех точках множества $G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*)$.

Поскольку

$$\overline{F}_* + O(\delta_*) \subset G_*(\varepsilon_2) \cup G^F(t_*, \varepsilon_2, \delta_*),$$

то имеют место соотношения (3.6).

В случае $F_* \setminus S_* = \varnothing$ можно взять $\delta_* = \varepsilon_2$; кроме того, положим $\vartheta_2 = \vartheta_1$.

б) Покажем, что

$$W(\vartheta_2; D_*) \cap G_\infty \cap G_*(\delta_*) = \varnothing. \tag{3.8}$$

Пусть $x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*)$. Тогда $\omega(x_0) = \infty$. В силу условия (3.3) можно выбрать такое $k \in \mathbb{N}$, что $\omega_k(x_0) > \vartheta_2$. Поскольку функция $\omega_k(\cdot)$ v-стабильна на множестве $G_*(\varepsilon_0)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $D_* \cap G_*(\varepsilon_0)$, а из начальной точки x_0 все допустимые траектории не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_2]$, то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta_2 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*).$$

Таким образом, соотношение (3.8) доказано.

в) Предположим сначала, что $B_* \setminus S_* \ne \varnothing$. Без ограничения общности можно считать, что $B_* \setminus G_*(\delta_*) \ne \varnothing$. Для значения δ_* найдем число $\delta_2 \in (0, \delta_*]$ и последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \delta_*, \delta_2) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют свойствам, приведенным в условии 3) теоремы.

Пусть $\delta_3 \in (0, \delta_2)$. Выберем такое $\vartheta_3 \in (0, \vartheta_2]$, что из любой начальной точки $x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3)$ допустимые траектории не покидают множество $G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_3]$.

Пусть $x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*$. В силу (3.4) выберем такое $k \in \mathbb{N}$, что $\omega_k^\infty(x_0) > \vartheta_3$. Поскольку функция $\omega_k^\infty(\cdot)$ v-стабильна на множестве $G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $D_* \cap G^B(t_*, \delta_*, \delta_2)$, то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta_3 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*.$$

Таким образом,

$$W(\vartheta_3; D_*) \cap (G^B(t_*, \delta_*, \delta_3) \setminus D_*) = \varnothing. \tag{3.9}$$

В случае $B_* \setminus S_* = \varnothing$ положим $\vartheta_3 = \vartheta_2$, $\delta_3 = \delta_*$.

г) Найдем такое $\vartheta \in (0, \vartheta_3]$, что для любой начальной точки $x_0 \notin D_* + O(\delta_3)$ допустимые траектории не достигают множества D_* на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Имеем $T(x_0; D_*) > \vartheta$ для $x_0 \notin D_* + O(\delta_3)$. Следовательно, $W(\vartheta; D_*) \subset D_* + O(\delta_3)$.

д) Учитывая соотношения (3.8) и (3.9) (последнее — для случая $B_* \setminus S_* \ne \varnothing$), получаем, что

$$W(\vartheta; D_*) \setminus D_* \subset \big(\overline{F}_* + O(\delta_3)\big) \setminus (G_\infty \cup D_*).$$

Таким образом, в силу равенства (3.6) и неравенства $\delta_3 < \delta_*$ соотношение (3.5) выполнено.

С л у ч а й $S_* = \varnothing$ и $F_* \ne \varnothing$. В этом случае $\partial D_* = F_*$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ имеем $G^F(t_*, \varepsilon, \delta) = F_* + O(\delta)$.

По условию 2) теоремы найдется такое $\delta_0 > 0$, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна и обладает свойствами u- и v-стабильности на множестве $F_* + O(\delta_0)$.

Пусть $\delta_1 \in (0, \delta_0)$. Выберем такое $\vartheta_1 > 0$, что из любой начальной точки $x_0 \in F_* + O(\delta_1)$ допустимые траектории не покидают множество $F_* + O(\delta_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_1]$. В силу непрерывности и u-стабильности функции $\varphi(\cdot)$ существует такое $\delta_* \in (0, \delta_1]$, что

$$\varphi(x) - t_* \leq \vartheta_1, \quad x \in F_* + O(\delta_*).$$

В силу лемм 1, 2 для любой точки $x_0 \in F_* + O(\delta_*)$ справедливы неравенства

$$\varphi(x_0) - t_* - \tau < T(x_0; D_*) \leq \varphi(x_0) - t_*, \quad \tau \in (0, \varphi(x_0) - t_*].$$

Переходя к пределу при $\tau \to 0$, получаем равенство

$$\varphi(x) - t_* = T(x; D_*), \quad x \in F_* + O(\delta_*). \tag{3.10}$$

Найдем такое $\vartheta \in (0, \vartheta_1]$, что для любой начальной точки $x_0 \notin D_* + O(\delta_*)$ допустимые траектории не достигают множества D_* на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Имеем $T(x_0; D_*) > \vartheta$ для $x_0 \notin D_* + O(\delta_*)$. Следовательно, $W(\vartheta; D_*) \subset D_* + O(\delta_*)$. В силу равенства (3.10) соотношения (3.5) выполнены.

С л у ч а й $S_* = \varnothing$ и $B_* \neq \varnothing$. В этом случае $\partial D_* = B_*$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ имеем $G^B(t_*, \varepsilon, \delta) = B_* + O(\delta)$. Кроме того, найдется такое $\vartheta_1 > 0$, что выполнено равенство

$$D(t_* + t) = D_*, \quad t \in [0, \vartheta_1]. \tag{3.11}$$

Найдем число $\delta_0 > 0$ и последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : B_* + O(\delta_0) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют свойствам, приведенным в условии 3) теоремы.

Пусть $\delta_1 \in (0, \delta_0)$. Выберем такое $\vartheta \in (0, \vartheta_1]$, что из любой начальной точки $x_0 \in B_* + O(\delta_1)$ допустимые траектории не покидают множество $B_* + O(\delta_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta]$ и, кроме того, для любой начальной точки $x_0 \notin B_* + O(\delta_1)$ допустимые траектории не достигают множества D_* на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Имеем $W(\vartheta; D_*) \subset B_* + O(\delta_1)$.

Пусть $x_0 \in (B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*$. В силу (3.4) выберем такое $k \in \mathbb{N}$, что $\omega_k^\infty(x_0) > \vartheta$. Поскольку функция $\omega_k^\infty(\cdot)$ v-стабильна на множестве $B_* + O(\delta_0)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $D_* \cap (B_* + O(\delta_0))$, то в силу леммы 2 справедлива оценка

$$\vartheta < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in (B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*.$$

Таким образом,

$$W(t; D_*) \cap ((B_* + O(\delta_1)) \setminus D_*) = \varnothing, \quad t \in [0, \vartheta].$$

Следовательно, $W(t; D_*) = D_*$, $t \in [0, \vartheta]$. В силу равенства (3.11) соотношения (3.5) выполнены.

2°. Выберем $\tau \in (0, \Theta)$. Определим функцию $\varphi_\tau(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ следующим образом:

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \tau, & x \in \Omega \setminus D(\tau); \\ 0, & x \in D(\tau). \end{cases}$$

Для краткости положим

$$D_\tau = D(\tau), \quad E(t) = D(\tau + t).$$

Пусть

$$\gamma = \sup\{\vartheta \in [0, \Theta - \tau) : W(t; D_\tau) = E(t),\ t \in [0, \vartheta]\}.$$

В силу результата, доказанного в пункте 1°, имеем неравенство $\gamma > 0$.

а) Покажем, что

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \cup_{\vartheta\in[0,\gamma)} E(\vartheta). \tag{3.12}$$

Пусть

$$\vartheta \in [0, \gamma), \quad x \in E(\vartheta), \quad t = T(x; D_\tau), \quad t' = \varphi_\tau(x).$$

В силу равенства $W(\vartheta; D_\tau) = E(\vartheta)$ имеем $t, t' \in [0, \vartheta]$. Следовательно,

$$W(t; D_\tau) = E(t), \quad W(t'; D_\tau) = E(t').$$

Поскольку $x \in W(t; D_\tau) \cap E(t')$, то $x \in W(t'; D_\tau) \cap E(t)$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_\tau(x) \le t, \quad T(x; D_\tau) \le t',$$

и равенство (3.12) доказано.

б) Покажем, что

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.13}$$

Рассмотрим следующие случаи.

С л у ч а й 1: $\gamma = \infty$. Если $\Omega = \cup_{\vartheta\ge 0} E(\vartheta)$, то соотношения (3.13) совпадают с доказанными соотношениями (3.12). Предположим теперь, что $\Omega \setminus \cup_{\vartheta\ge 0} E(\vartheta) \neq \varnothing$. Выберем $x \in \Omega \setminus \cup_{\vartheta\ge 0} E(\vartheta)$. Имеем $\varphi_\tau(x) = \infty$. Учитывая определение величины γ, находим, что $x \notin \cup_{\vartheta\ge 0} W(\vartheta; D_\tau)$ и, следовательно, $T(x; D_\tau) = \infty$. Таким образом, $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau) = \infty$. В силу (3.12) соотношения (3.13) для случая 1 доказаны.

С л у ч а й 2: $0 < \gamma < \infty$. Выберем $x \in E(\gamma) \setminus \bigcup_{\vartheta\in[0,\gamma)} E(\vartheta)$. Имеем $\varphi_\tau(x) = \gamma$. Учитывая определение величины γ, находим, что $x \notin \cup_{\vartheta\in[0,\gamma)} W(\vartheta; D_\tau)$, и, следовательно, $T(x; D_\tau) \ge \gamma$.

В силу свойств u-стабильности из условий 1), 2) и в силу условия 4) теоремы найдется такая последовательность $\{x_k\}_1^\infty$, что $\varphi(x_k) < \varphi(x)$ и $x_k \to x$ при $k \to \infty$. Имеем

$$t_k = \varphi_\tau(x_k) = \varphi(x_k) - \tau < \varphi(x) - \tau = \gamma, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая полунепрерывность снизу функции $\varphi(\cdot)$, получаем, что $t_k \to \gamma$ при $k \to \infty$. Поскольку $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$ и $x_k \in E(t_k)$, то справедливо неравенство $T(x_k; D_\tau) \le t_k$. Принимая во внимание полунепрерывность снизу функции $T(\cdot; D_\tau)$ [1, 4], имеем

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} t_k \ge \varliminf_{k\to\infty} T(x_k; D_\tau) \ge T(x; D_\tau) \ge \gamma.$$

Следовательно, $T(x; D_\tau) = \gamma$.

В силу (3.12) доказано равенство

$$T(x; D_\tau) = \varphi_\tau(x), \quad x \in E(\gamma). \tag{3.14}$$

Покажем, что

$$W(\gamma; D_\tau) = E(\gamma). \tag{3.15}$$

Включение $E(\gamma) \subseteq W(\gamma; D_\tau)$ следует из (3.14). Докажем обратное включение.

Пусть $\hat{x} \in W(\gamma; D_\tau)$ и $\hat{t} = T(\hat{x}; D_\tau)$. Имеем $\hat{t} \le \gamma$.

Предположим, что $\hat{t} < \gamma$. Учитывая определение величины γ, находим, что

$$\hat{x} \in W(\hat{t}; D_\tau) = E(\hat{t}) \subseteq E(\gamma).$$

Предположим, что $\hat{t} = \gamma$. Поскольку $\gamma > 0$, то $\hat{t} > 0$ и $\hat{x} \notin D_\tau$. В силу u-стабильности функции $T(\cdot; D_\tau)$ [1, 4] найдется такая последовательность $\{y_k\}_1^\infty$, что $t_k = T(y_k; D_\tau) < \gamma$ и $y_k \to \hat{x}$ при $k \to \infty$. Поскольку $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$ и $y_k \in W(t_k; D_\tau)$, то $y_k \in E(t_k) \subseteq E(\gamma)$. В силу замкнутости множества $E(\gamma)$ получаем включение $\hat{x} \in E(\gamma)$.

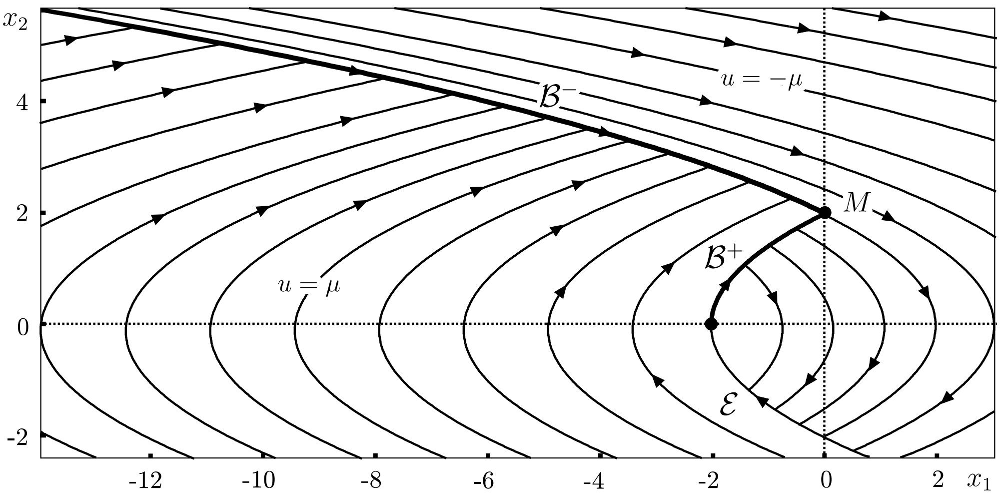

Рис. 1. Построение функции $\varphi(\cdot)$ при $a=2$, $\mu=1$, $\nu=0$.

Таким образом, равенство (3.15) доказано.

Из результатов пункта 1°, равенства (3.15) и определения числа γ следует, что $\gamma=\Theta-\tau$. В силу равенств (3.14) и $E(\gamma)=D(\Theta)=\Omega$ справедливы соотношения (3.13) для случая 2.

в) Пусть $x_*\in\Omega\setminus M$. Тогда при малых $\tau>0$ имеем равенство $\varphi_\tau(x_*)=\varphi(x_*)-\tau$. В силу леммы 3 и равенства (3.13) получаем

$$T(x_*;M)=\lim_{\tau\to+0}T(x_*;D(\tau))=\lim_{\tau\to+0}\varphi_\tau(x_*)=\varphi(x_*),$$

откуда следует утверждение теоремы для случая $\mathcal{T}=\varnothing$.

Предположим теперь, что $\mathcal{T}=\{a_1\}$, $a_1\in(0,\Theta)$. Доказательство, аналогичное случаю $\mathcal{T}=\varnothing$, примененное к функции $\varphi(\cdot):D(a_1)\to[0,\infty)$, дает равенство $\varphi(x)=T(x;M)$ для $x\in D(a_1)$. Далее, вводя обозначения

$$M_1=D(a_1),\quad \varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x)-a_1, & x\in\Omega\setminus M_1;\\ 0, & x\in M_1,\end{cases}$$

аналогичное доказательство применяем к функции $\varphi_1(\cdot):\Omega\to[0,\infty]$ и дифференциальной игре с терминальным множеством M_1. Получаем равенство $\varphi_1(x)=T(x;M_1)$, $x\in\Omega$. Используя соотношение $T(x;M_1)=T(x;M)-a_1$ [1,4], находим, что $\varphi(x)=T(x;M)$, $x\in\Omega$.

Аналогичные рассуждения проводятся для случая любого конечного множества $\mathcal{T}\subset(0,\Theta)$.

4. Пример

Рассмотрим модельный пример игровой задачи преследования на прямой. Уравнения движения и ограничения на управления преследователя и убегающего имеют вид

$$\ddot y_P=u,\quad \dot y_E=v,\quad |u|\le\mu,\quad 0\le v\le\nu,\quad \mu>0. \tag{4.1}$$

Преследователь стремится за наименьшее время совместить точку y_P с точкой y_E так, чтобы в момент совмещения скорость $\dot y_P$ точки y_P равнялась наперед заданному числу $a>\nu$.

Такая задача преследования формулируется как задача быстродействия, если ввести замену $x_1=y_P-y_E$, $x_2=\dot y_P$. В силу системы (4.1) имеем

$$\dot x_1=x_2-v,\quad \dot x_2=u,\quad |u|\le\mu,\quad 0\le v\le\nu. \tag{4.2}$$

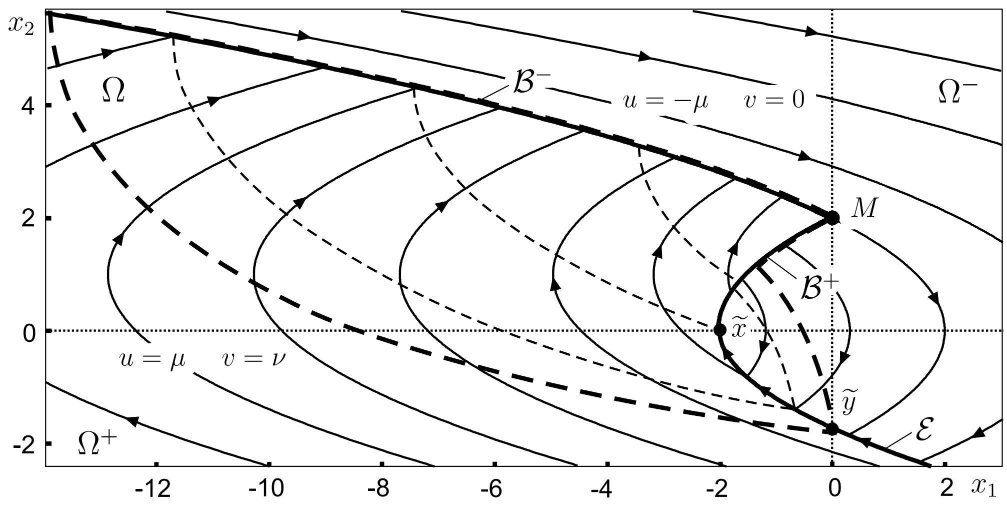

Рис. 2. Построение функции $\varphi(\cdot)$ при $a=2$, $\mu=\nu=1$.

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки $x=(x_1,x_2)^\top$ из заданного начального положения x_0 на терминальное множество $M=(0,a)^\top$, $a>\nu$. Здесь $\top$ — символ транспонирования. Интересы второго игрока противоположны.

Если $\nu=0$, то получаем задачу оптимального управления, решение которой известно (см., напр.: [8, 9]). На рис. 1 показаны траектории, составленные из частей парабол, образующих два семейства. Левое семейство соответствует управлению $u=\mu$, правое — управлению $u=-\mu$. Время $\varphi(x_0)$ движения из точки x_0 вдоль указанных кривых до попадания в точку M является временем оптимального быстродействия. Функция $\varphi(\cdot)$ разрывна на кривой, составленной из дуг $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$, и недифференцируема на дуге $\mathcal{E}$ параболы левого семейства.

Опишем построение траекторий при $\nu>0$, при помощи которых зададим функцию $\varphi(\cdot)$. Такие траектории исследованы ранее в [10, 11].

На множестве $x_1\le 0$, $x_2\ge 0$ рассмотрим кривую $\mathcal{B}^\pm$, вдоль которой идет траектория системы (4.2) при $v(t)=0$, $u(t)=\pm\mu$, приходящая в точку M. Парабола $\mathcal{B}^+$ пересекается с осью x_1 в точке $\widetilde{x}=(-a^2/(2\mu),0)^\top$. В нижней полуплоскости построим кривую $\mathcal{E}$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_2}{\mu}+\frac{2\nu x_2}{\mu(\sqrt{\nu^2-4\nu x_2-4\mu x_1+2x_2^2+2a^2}-\nu-2x_2)}$$

и проходящую через точку $\widetilde{x}$. Символом Ω^+ (соответственно, Ω^-) обозначим открытую часть плоскости, лежащую слева (соответственно, справа) от составной кривой $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+\mathcal{E}$ (см. рис. 2).

Пусть начальная точка находится на кривой $\mathcal{B}^-$ и игроки применяют управления $v=\nu$, $u^-(x)=\mu(1-\nu/x_2)$. Тогда движение идет по $\mathcal{B}^-$ и на нем реализуется время самого "медленного" движения системы (4.2) вдоль этой кривой до точки M. Время такого движения из точки $x\in\mathcal{B}^-$ до точки M обозначим $\varphi(x)$.

Для точки $x\in\Omega^+\cup\mathcal{B}^+\mathcal{E}$ ($x\in\Omega^-$) значение $\varphi(x)$ возьмем равным времени движения системы (4.2) из начальной точки x при $u=\mu$, $v=\nu$ ($u=-\mu$, $v=0$) до пересечения с кривой $\mathcal{B}^-$ ($\mathcal{E}$) плюс значение функции $\varphi(\cdot)$ в точке пересечения.

Подчеркнем принципиальное отличие синтеза, соответствующего игровой задаче (см. рис. 2), от синтеза, соответствующего задаче управления (см. рис. 1). В игровом случае линия $\mathcal{E}$, на которой переключается управление в нижней части, не является дугой параболы. Она описывается дифференциальным уравнением, которое в явном виде не интегрируется. Кроме того, на верхней параболе $\mathcal{B}^-$ принятое значение функции $\varphi(\cdot)$ соответствует самому "медленному" движению системы по этой кривой при управлении $v=\nu$, хотя сама парабола $\mathcal{B}^-$ является траекторией при $u=-\mu$, $v=0$.

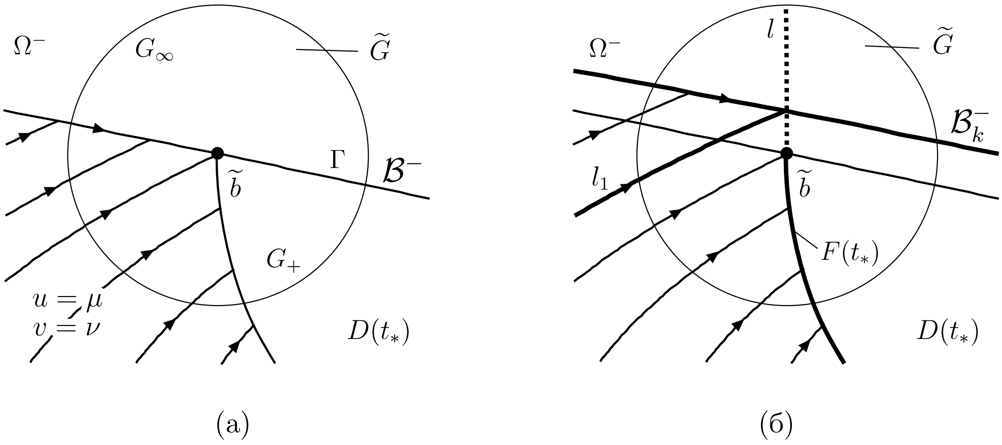

Рис. 3. Проверка условий теоремы для случая **А**.

Пусть $\widetilde{y}$ — точка пересечения кривой $\mathcal{E}$ с осью x_2. Будем рассматривать функцию $\varphi(\cdot)$ на ограниченном замкнутом множестве $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi(x) \le \varphi(\widetilde{y}) \ \}$, в котором она разрывна на дуге $\overline{(\mathcal{B}^+ \cap \operatorname{int}\Omega)} \setminus \{\widetilde{x}\}$. На рис. 2 граница множества Ω показана полужирной пунктирной линией. Изображены также линии уровня функции $\varphi(\cdot)$ на Ω.

Проверим, что для функции $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \varphi(\widetilde{y})]$ выполнены условия теоремы.

Способ определения функции $\varphi(\cdot)$ на множествах $\Omega^\pm$ реализует известный метод характеристик [12] построения дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения

$$H^\pm(x, \nabla\varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm,$$

с соответствующим краевым условием на кривой $\mathcal{B}^-$ или $\mathcal{E}$. Здесь

$$H^+(x,p) = p_1(x_2 - \nu) + p_2\mu, \quad H^-(x,p) = p_1x_2 - p_2\mu.$$

Гамильтониан (1.2) дифференциальной игры имеет вид

$$H(x,p) = |p_1|\nu/2 + p_1(x_2 - \nu/2) - |p_2|\mu.$$

Нетрудно проверить, что

$$H^\pm(x, \nabla\varphi(x)) = H(x, \nabla\varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm. \tag{4.3}$$

По построению функция $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty)$ полунепрерывна снизу и $D(0) = M$. Выполнение условия 4) теоремы очевидно. Положим $\mathcal{T} = \{\varphi(\widetilde{x})\}$. Проверим выполнение условий 1)–3) для $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$, где $\Theta = \varphi(\widetilde{y})$.

1) Имеем

$$S(t_*) = \{b^-(t_*), b^+(t_*)\}, \quad b^\pm(t_*) = \overline{F}(t_*) \cap \mathcal{B}^\pm.$$

Поскольку множество $S(t_*)$ конечно, то выполнение условия 1) теоремы достаточно проверить для каждой из точек $\widetilde{b} \in S(t_*)$ отдельно. Возможны три случая:

А. $\widetilde{b} = b^-(t_*)$, $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$; **Б.** $\widetilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (0, \varphi(\widetilde{x}))$; **В.** $\widetilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (\varphi(\widetilde{x}), \Theta)$.

Приведем доказательство только для случая **А.** Пусть $\widetilde{b} = b^-(t_*)$, $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что множество $\widetilde{G} = \{\widetilde{b}\} + O(\varepsilon_0)$ представимо в виде

$$\widetilde{G} = G_+ \cup \Gamma \cup G_\infty,$$

где $\Gamma \subset \mathcal{B}^-$, $\varphi(\cdot) \in C^1(G_+)$, $G_+ \subset \Omega^+$, $G_\infty \subset \Omega^-$ (см. рис. 3(а)).

а) Имеем

$$\widetilde{G} \subset G_\infty \cup \Omega, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{\varphi(x) : x \in \widetilde{G} \setminus G_\infty\} = t_*.$$

Определим функцию $\omega(\cdot) : \widetilde{G} \to [0, \infty]$ по формуле (3.2), в которой обозначения $D(t)$ и $G(t, \varepsilon_0)$ заменены на $D(t_*)$ и $\widetilde{G}$. Проверим u-стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\widetilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнение неравенств (2.8) в любой точке $x_* \in \widetilde{G} \setminus D(t_*)$.

Поскольку $\omega(x_*) = \infty$, $x_* \in G_\infty$, и $H(x, \nabla\varphi(x)) = -1$, $x \in G_+$, то в силу утверждений 4, 5 неравенство (2.8) выполнено для всех точек $x_* \in \widetilde{G} \setminus (\Gamma \cup D(t_*))$.

Пусть $x_* \in \Gamma$. Для любого $v_* \in Q$ существуют число $\tau > 0$ и функция $\beta(\cdot) : [0, \tau) \to \widetilde{G}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), \bar{u}(\beta(t), v_*), v_*), \quad t \in (0, \tau),$$

и начальному условию $\beta(0) = x_*$. Здесь управление $\bar{u}(z, v_*) = -\mu(1 - v_*/z_2)$ выбрано из условия касания в точке $z \in \mathcal{B}^-$ вектора скорости и параболы $\mathcal{B}^-$ при управлении v_* второго игрока. Имеем $\beta(t) \in \Gamma$, $t \in [0, \tau)$.

Пусть $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$; $z(\cdot)$ — траектория самого медленного движения вдоль параболы $\mathcal{B}^-$ из начальной точки x_*. Имеем

$$\varphi(\beta(t)) \le \varphi(z(t)) = \varphi(x_*) - t, \quad t \in [0, \tau).$$

Следовательно,

$$\dot{\Phi}(+0) = \lim_{t \to +0} (\varphi(\beta(t)) - \varphi(x_*))/t \le -1.$$

Учитывая утверждение 2, получаем u-стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\widetilde{G} \setminus D(t_*)$.

б) Определим последовательность функций

$$\omega_k(\cdot) : \widetilde{G} \to [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

следующим образом. Сдвинем параболу $\mathcal{B}^-$ на величину $1/k$ вправо вдоль оси x_1 и обозначим ее через $\mathcal{B}_k^-$. Продолжим линию $F(t_*)$ гладкой линией l на множество G_∞ так, чтобы траектории первого семейства, продолженные выше линии $\mathcal{B}^-$, пересекались с кривой l.

Линия $F(t_*)$ имеет вертикальную касательную в точке $\widetilde{b}$. В качестве l возьмем отрезок вертикальной прямой. Обозначим через l_k параболу первого семейства, проходящую через точку $l \cap \mathcal{B}_k^-$ (см. рис. 3(б)).

Положим $\omega_k(x) = \infty$ для точек $x \in \widetilde{G}$, лежащих выше параболы $\mathcal{B}_k^-$ включительно; $\omega_k(x) = 0$ для точек $x \in \widetilde{G}$, лежащих строго ниже кривой $\mathcal{B}_k^-$ и правее кривой $F(t_*) \cup l$ включительно. Для точки $x \in \widetilde{G}$, лежащей строго левее кривой $F(t_*) \cup l$ и не выше параболы l_k, определим $\omega_k(x)$ как время движения из начальной точки x вдоль параболы первого семейства при $u = \mu$, $v = \nu$ до момента попадания на множество $F(t_*) \cup l$. Для точки $x \in \widetilde{G}$, лежащей между кривыми $\mathcal{B}_k^-$ и l_k, определим $\omega_k(x)$ как время движения из начальной точки x вдоль параболы первого семейства при $u = \mu$, $v = \nu$ до момента пересечения с кривой $\mathcal{B}_k^-$ плюс время самого медленного движения вдоль параболы $\mathcal{B}_k^-$ из точки пересечения до точки $l_k \cap \mathcal{B}_k^-$.

Функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, полунепрерывны сверху, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t_*) \cap \widetilde{G}$. Нетрудно видеть, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in \widetilde{G}.$$

Проверим v-стабильность функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, на множестве $\widetilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнение неравенства (2.9) в любой точке $x_* \in \widetilde{G} \setminus D(t_*)$.

Заметим, что, по определению функции $\omega_k(\cdot)$, выполнено равенство $H(x, \nabla\omega_k(x)) = -1$ в точках $\widetilde{G} \setminus l_k$, таких что $\omega_k(x) \in (0, \infty)$. Следовательно, в силу утверждений 4, 5 неравенство (2.9) выполнено для точек $x_* \in \widetilde{G} \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k^- \cup l_k)$.

Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k^-$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0,\tau) \to \widetilde{G}$ как решение начальной задачи

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), u_*, v_*), \quad t \in (0,\tau), \quad \beta(0) = x_*. \tag{4.4}$$

Имеем $\beta(t) \in \mathcal{B}_k^- \cup G_\infty$, $t \in [0,\tau)$. В силу утверждения 3 в точке x_* выполнено неравенство (2.9).

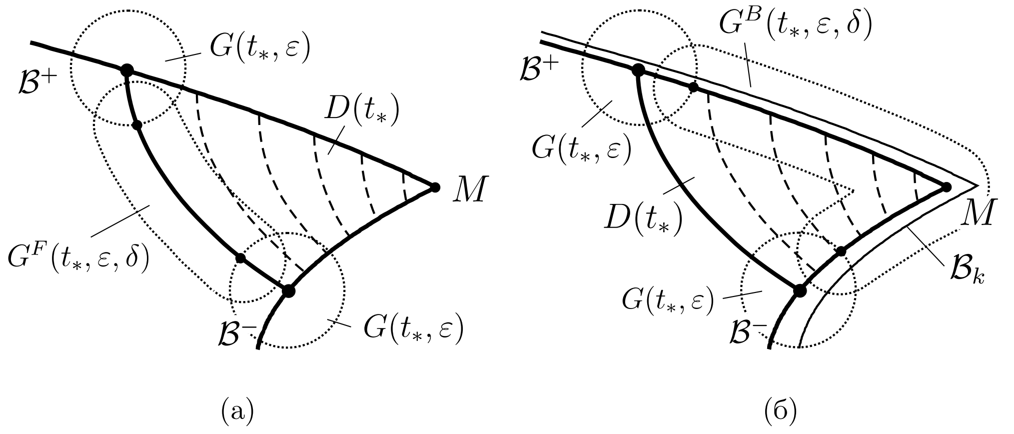

Рис. 4. Проверка условий теоремы для множеств $F(t_*)$ и $B(t_*)$.

Пусть $x_* \in l_k$. Для любого $u_* \in P$ и $v_* = \nu$ решение $\beta(\cdot) : [0,\tau) \to \widetilde{G}$ начальной задачи (4.4) не пересекает кривую l_k. Пусть $\Phi(t) = \varphi(\beta(t))$, $t \in [0,\tau)$. Если $u_* = \mu$, то $\beta(t) \in l_k$, $t \in [0,\tau)$ и, по определению функции $\varphi(\cdot)$, имеем $\dot{\Phi}(+0) = -1$. Если $u_* = [-\mu, \mu)$, то точка $\beta(t)$, $t \in (0,\tau)$, лежит ниже параболы l_k. Следовательно,

$$\dot{\Phi}(t) = \langle \nabla\omega_k(\beta(t)), f(\beta(t), u_*, v_*)\rangle \geq H(\beta(t), \nabla\omega_k(\beta(t))) = -1$$

и $\dot{\Phi}(+0) \geq -1$. В силу утверждения 3 в точке x_* выполнено неравенство (2.9).

2) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что выполнено вложение

$$G^F(t_*, \varepsilon, \delta) \subset \Omega \cap (\Omega^+ \cup \mathcal{E} \cup \Omega^-).$$

Для $t_* \in (0, \varphi(\widetilde{x}))$ окрестность $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$ показана на рис. 4(а).

Из равенств (4.3) следует, что точки множества $\Omega^\pm$ являются регулярными точками [13] функции $\varphi(\cdot)$, а точки кривой $\mathcal{E}$ — простейшими сингулярными точками эквивокального типа [13]. В силу основного результата работы [13] функция $\varphi(\cdot)$ обладает свойствами u- и v-стабильности на множестве $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$.

3) Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что выполнены соотношения

$$G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap F(t_*) = \varnothing, \quad G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\} = \varnothing.$$

Для $t_* \in (0, \varphi(\widetilde{x}))$ окрестность $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$ показана на рис. 4(б).

Определим последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbb{N},$$

следующим образом. Сдвинем составную кривую $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+$ вправо вдоль оси x_1 на величину $1/k$, обозначим ее через $\mathcal{B}_k$ (см. рис. 4(б)). Положим $\omega_k^\infty(x) = 0$ в точках $x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$, расположенных строго левее кривой $\mathcal{B}_k$, и $\omega_k^\infty(x) = \infty$ во всех остальных точках множества $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$.

Покажем v-стабильность функции $\omega_k^\infty(\cdot)$. В силу утверждений 5, 6 неравенство (2.9) выполнено в точках $x_* \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k)$. Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k \cap G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \to \widetilde{G}$ как решение начальной задачи (4.4). Поскольку траектория $\beta(\cdot)$ не переходит в область левее кривой $\mathcal{B}_k$, имеем $\omega_k^\infty(\beta(t)) = \infty$, $t \in [0, \tau)$. В силу утверждения 3 в точке x_* выполнено неравенство (2.9). Следовательно, функция $\omega_k^\infty(\cdot)$ v-стабильна на множестве $G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*)$.

Предельное соотношение $\lim_{k\to\infty} \omega_k^\infty(x) = \infty$, $x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*)$, очевидно.

Таким образом, все условия теоремы проверены и тем самым доказано равенство

$$\varphi(x) = T(x, M),\ x \in \Omega.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Krasovskii N. N., Subbotin A. I.** Game-Theoretical Control Problems. N.Y.: Springer, 1988. 518 p.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. **Субботин А. И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютер. исслед. М.: Ижевск. 2003. 336 с.
5. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta, I.** Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 570 p.
6. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала. I // Математический сборник. 1975. Т. 98, №3. С. 450–493.
7. **Камнева Л.В.** Об условиях совпадения разрывной функции с функцией цены игры в задаче быстродействия // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 739–752.
8. **Федоренко Р.П.** К задаче Коши для уравнения динамического программирования Беллмана // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, №2. С. 426–432.
9. **Leitmann G.** The calculus of variations and optimal control. N.Y. etc.: Plenum Press, 1981. 311 p.
10. **Пацко В. С.** Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, №3. С. 424–435. II // 1972. Т. 8, №8. С. 1423–1434.
11. **Филимонов М. Ю.** Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре / Исследование задач минимаксного управления: сб. ст. Свердловск: изд-во УНЦ АН СССР, 1985. С. 117–124.
12. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. 620 с.
13. **Камнева Л.В.** Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 3. С. 366–383.

Поступила 19.03.2007