На правах рукописи

КАМНЕВА Людмила Валерьевна

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2007

Работа выполнена в отделе динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук Пацко Валерий Семенович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Ухоботов Виктор Иванович, член-корреспондент РАН Ченцов Александр Георгиевич
Ведущая организация:	Институт проблем механики РАН, г. Москва

Защита состоится 16 мая 2007 года в 11 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 14 апреля 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.–мат. наук, в.н.с. Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуются вопросы, связанные с обоснованием аналитического построения разрывной функции цены в дифференциальных играх быстродействия. Используется подход, основанный на теории минимаксных решений краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка, разработанной А.И. Субботиным.

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Исследования дифференциальных игр начались в 1950—60-е годы с рассмотрения математических моделей конфликтных ситуаций. В этих моделях динамика управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в правую часть которых входят управляющие воздействия. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управления второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Управления игроков стеснены геометрическими ограничениями.

Основополагающие результаты в теории дифференциальных игр были получены в работах Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного, А.И. Субботина, R.P. Isaacs, W.H. Fleming, M.G. Crandall, P.L. Lions.

Существенное влияние на теорию дифференциальных игр оказали работы А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Ф.Л. Черноусько, J.P. Aubin, M. Bardi, T. Basar, L. Berkovitz, P. Bernhard, A. Blaquiere, J.V. Breakwell, A. Friedman, G. Leitmann.

Большой вклад в теорию дифференциальных игр и ее приложения внесли Э.Г. Альбрехт, В.Д. Батухтин, С.А. Брыкалов, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, М.И. Зеликин, А.Ф. Клейменов, А.В. Кряжимский, Е.П. Маслов, А.А. Меликян, М.С. Никольский, В.В. Остапенко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, Е.С. Половинкин, Б.Н. Соколов, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, I. Capuzzo-Dolcetta, P.M. Cardaliaguet, R.J. Elliot, M. Falcone, N.J. Kalton,

G. Leitmann, J. Lewin, A.W. Merz, S. Mirica, G.J. Olsder, M. Quincampoix, E. Roxin, P. Saint-Pierre, J. Shinar, P. Soravia, P. Varaiya и многие другие ученые.

В монографии Р. Айзекса[1] был предложен метод исследования игровых задач управления и рассмотрено большое число содержательных примеров. Однако строгой математической постановки дифференциальной игры при этом не было. Среди различных вариантов формализации дифференциальных игр отметим подход W.H. Fleming[2], основанный на аппроксимации дифференциальной игры многошаговыми играми, а также подход, использующий понятие неупреждающих стратегий и развитый в работах R.J. Elliott и N.J. Kalton[3].

Удобной с практической точки зрения является позиционная формализация дифференциальных игр, изложенная в книге Н.Н. Красовского и А.И. Субботина[4]. В рамках позиционной формализации подход к решению дифференциальной игры заключается в поиске функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены можно построить стратегии оптимального управления по принципу обратной связи[5]. Отметим, что цена позиционной дифференциальной игры для заданной начальной точки совпадает с ценой в смысле W.H. Fleming или с ценой в классе неупреждающих стратегий в случаях, когда обе величины существуют.

В диссертации рассматриваются игры, в которых функционалом платы является время до попадания фазовой точки на заданное замкнутое терминальное множество $M \subset R^n$. Такие игры называются дифференциальными играми быстродействия. К ним относятся, например, задачи

[1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

[2] *Fleming W.H.* The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. and Appl. – Vol. 3. – 1961. – P. 102–116.

[3] *Elliott R.J., Kalton N.J.* The existence of value in differential games of pursuit and evasion // J. Different. Equat. – Vol. 12, № 3. – 1972. – P. 504–523.

[4] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[5] *Красовский Н. Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. – 1978. – Т. 107, № 4. – С. 541–571.

преследования–уклонения, а также задачи оптимального быстродействия в теории управления, которые можно рассматривать как игровые задачи при нулевом ограничении на управление второго игрока.

В общем случае функция цены дифференциальной игры быстродействия может быть негладкой, разрывной, и, кроме того, может принимать несобственное значение ∞. Метод построения кусочно-гладкой или разрывной функции цены, предложенный Р. Айзексом, заключается в последовательном нахождении гладких ветвей решения при помощи классических характеристик. Основная трудность применения метода Айзекса состоит в обнаружении поверхностей стыковки (сингулярных поверхностей) гладких ветвей функции цены. Р. Айзексом были рассмотрены различные типы сингулярных поверхностей и некоторые способы их построения.

В связи с большими техническими сложностями исследования конкретных задач в настоящее время известно не очень много работ, в которых проведены аналитические построения функции цены дифференциальных игр быстродействия. Среди таких исследований отметим работы J.V. Breakwell, J. Lewin, A.W. Merz, G.J. Olsder [6,7,8], а также А.А. Меликяна, В.С. Пацко, С.А. Чигиря, J. Shinar. Трудность аналитического решения игровых задач быстродействия требует численных алгоритмов решения, которые разрабатывались В.С. Пацко, А.М. Тарасьевым, В.Л. Туровой, А.А. Успенским, В.Н. Ушаковым, А.П. Хрипуновым, M. Bardi, P.M. Cardaliaguet, M. Falcone, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre, P. Soravia и другими авторами.

В теории оптимального управления аналогом подхода к решению задачи на базе функции цены является метод динамического программирования. Если функция оптимального результата (функция Беллмана) дифференцируема, то ее поиск сводится к решению соответствующей краевой задачи для УЧП первого порядка. В этом случае с помощью функции Беллмана определяется оптимальное управление по принципу обратной связи.

[6] *Lewin J., Breakwell J. V.* The Surveillance-Evasion Game of Degree // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1975. – V. 16, № 3–4. – P. 339–353.

[7] *Lewin J., Olsder G. J.* Conic Surveillance Evasion // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1979. – V. 27, № 1. – P. 107–125.

[8] *Merz A. W.* The Homicidal Chauffeur – a Differential Game. – PhD thesis. – Stanford Univ., 1971.

Если функция Беллмана является негладкой, но непрерывной, то для решения задачи в классе управлений по принципу обратной связи может быть использован регулярный синтез В.Г. Болтянского[9]. Задачи оптимального быстродействия с разрывной функцией Беллмана исследовались, например, в работах G. Leitmann, H. Frankowska, P. Cannarsa, S. Koike и многих других.

Теория оптимального управления и дифференциальных игр тесно связана с понятиями обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Исследованиям таких решений уделяется в последние годы много внимания. Разрывным обобщенным решениям для различных типов уравнений посвящены работы А.И. Субботина, M. Bardi, G. Barles, E.N. Barron, H. Frankowska, H. Ishii, R. Jensen, P. Soravia и других авторов.

В диссертации развиваются идеи теории разрывных минимаксных решений в плане их применения к теоретическим доказательствам, связанным с функцией цены в игровых задачах быстродействия. Полученные результаты облегчают исследования конкретных задач. Они могут быть применены также при разработке алгоритмов численного построения функции цены.

Цель работы. Поиск условий на заданную разрывную функцию, выполнения которых достаточно для ее совпадения с функцией цены дифференциальной игры быстродействия. Формулируемые условия должны быть удобными для практического использования. Исследование конкретных дифференциальных игр с применением полученных достаточных условий.

Методы исследования. В основе работы лежат понятия теории разрывных минимаксных решений и конструктивные методы нахождения функции цены игры, основанные на построении сингулярных поверхностей.

Научная новизна. Сформулированы и доказаны две теоремы о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия. Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях стабильности непрерывной функции в терминах сингулярных точек. Построена функция цены в игровой за-

[9] *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.

даче о брахистохроне на плоскости. Результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в работе теоретические результаты дают представление о структуре разрывной функции цены в дифференциальных играх быстродействия. Практическая ценность работы состоит в том, что ее результаты могут быть применены для теоретического обоснования правильности построения функции цены в конкретных задачах. При этом тестируемая функция не обязательно должна быть задана в явном виде. Как правило, приемлемым оказывается описание гладких кусков функции и поверхностей их стыковки и/или поверхностей разрыва функции. Такое задание функции цены возникает, например, при использовании метода Айзекса построения функции цены.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, списка основных обозначений, четырех глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 120 страниц, набранных в текстовом редакторе LATEX, библиографический список включает 69 наименований.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на конференциях молодых ученых Института математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2000, 2005, 2006); 33-ей, 35-ой, 37-ой, 38-ой региональных молодежных конференциях "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 2002, 2004, 2006, 2007); International Conferences "Viscosity Solutions and Applications", July 3–5, 2000, и "Analysis and Control of Deterministic and Stochastic Evolution Equations", July 6–7, 2000, Bressanone-Brixen, Italy; 10th International Symposium on Dynamic Games and Applications, July 8–11, Saint-Petersburg, Russia, 2002; конференции "Демидовские чтения на Урале", Екатеринбург, 1–3 марта 2006 г.; 13th IFAC Workshop "Control Applications of Optimization", 26–28 April, 2006, Paris – Cachan, France; научном семинаре "Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений", Москва, 12–13 октября 2006 г.; семинарах отдела динамических систем и отдела управляемых систем ИММ УрО РАН, семинарах лаборатории управляемых систем Института проблем механики РАН, семинарах кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ и кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ, семинаре кафедры прикладной математики Челябинского госуниверситета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–9].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор литературы, относящийся к дифференциальным играм быстродействия и обобщенным решениям уравнений в частных производных первого порядка, определяется цель работы, излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации посвящена формулировке и доказательству двух теорем о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0.$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние в момент времени t; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ – управления первого и второго игроков; P и Q – компактные множества в конечномерных пространствах. Предполагается, что функция f непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, u, v)\| \leq \varkappa(1 + \|x\|), \quad \varkappa = \text{const} > 0,$$

и для нее выполнено локальное условие Липшица по x. Пусть

$$H(x, p) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v) \rangle, \quad x, p \in R^n.$$

Цель первого игрока – быстрейшее сближение фазовой точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset R^n$ из начальной точки x_0. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M, либо максимизировать время до встречи.

В работе используется позиционная формализация игры быстродействия. При указанных условиях на функцию f для любого $x_0 \in R^n$ существует цена игры $T^0(x_0)$ – наилучший гарантированный результат за обоих игроков. Функция $T^0(\,\cdot\,) : R^n \to [0,\infty]$ называется функцией цены игры.

Предположим, что на замкнутом множестве $\Omega \subseteq R^n$ определена некоторая функция

$$\varphi(\,\cdot\,) : \Omega \to [0,\infty].$$

Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T^0(x)$, $x \in \Omega$. Искомые условия должны быть удобными для практической проверки.

Введем понятия u- и v-стабильных[10] функций на открытом множестве $G \subseteq R^n$.

Определение 1. *Функция $\omega(\cdot) : G \to [0,\infty]$ u-стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна снизу и для любых $y_0 \in G$, $v_* \in Q$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0,\tau] \to G$ дифференциального включения*

$$\dot y(t) \in \mathrm{co}\,\{f(y(t),u,v_*), u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство $\omega(y(t)) \le \omega(y_0) - t$, $t \in [0,\tau]$.

Определение 2. *Функция $\widetilde\omega(\cdot) : G \to [0,\infty]$ v-стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна сверху и для любых $y_0 \in G$, $u_* \in P$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0,\tau] \to G$ дифференциального включения*

$$\dot y(t) \in \mathrm{co}\,\{f(y(t),u_*,v), v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство $\widetilde\omega(y(t)) \ge \widetilde\omega(y_0) - t$, $t \in [0,\tau]$.

Дадим формулировку первой теоремы о достаточных условиях. Будем использовать обозначения: $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset R^n$, $\mathrm{int}\,A$ – внутренность множества A, $\mathbf{B}(0,r)$ – шар в R^n радиуса $r > 0$ с центром в начале координат.

[10] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. – N.Y.: Springer-Verlag, 1988.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subseteq R^n$, $M \subseteq \Omega$ – замкнутые множества, задана функция $\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$ и введены обозначения*

$$\Theta = \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad t \in [0, \Theta),$$

$$F(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) = t\}, \quad B(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) < t\},$$

$$S(t) = \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)}, \; G(t, \varepsilon) = \begin{cases} \varnothing, & S(t) = \varnothing; \\ S(t) + \operatorname{int} \mathbf{B}(0, \varepsilon), & S(t) \neq \varnothing, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу, $D(0) = M$, $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$ – некоторое конечное (либо пустое) множество и выполнены следующие условия.

1) Для любого $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и множество $G_\infty \subset G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$, такие, что

а) выполнены соотношения $G(t, \varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup\{\varphi(x) : x \in G(t, \varepsilon) \setminus G_\infty\} = t$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t, \varepsilon_0) \setminus (G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t, \varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty \end{cases}$$

u-стабильна на множестве $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$;

б) существуют функции

$$\omega_k(\cdot) : G(t, \varepsilon_0) \to [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

которые v-стабильны на множестве $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G(t, \varepsilon_0)$, и

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t, \varepsilon_0).$$

2) Для любых $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(\cdot)$ определена, непрерывна и обладает свойствами u- и v-стабильности *на множестве*

$$G^F(t,\varepsilon,\delta)=\begin{cases}\varnothing, & F_\varepsilon(t)=\varnothing;\\ F_\varepsilon(t)+\operatorname{int}\mathbf{B}(0,\delta), & F_\varepsilon(t)\neq\varnothing,\end{cases}$$

где

$$F_\varepsilon(t)=F(t)\setminus G(t,\varepsilon).$$

3) Для любых $t\in(0,\Theta)\setminus\mathcal{T}$ и $\varepsilon>0$ найдутся число $\delta>0$ и функции

$$\omega_k^\infty(\cdot):G^B(t,\varepsilon,\delta)\to[0,\infty],\quad k\in\mathbf{N},$$

где

$$G^B(t,\varepsilon,\delta)=\begin{cases}\varnothing, & B_\varepsilon(t)=\varnothing;\\ B_\varepsilon(t)+\operatorname{int}\mathbf{B}(0,\delta), & B_\varepsilon(t)\neq\varnothing,\end{cases}\quad B_\varepsilon(t)=B(t)\setminus G(t,\varepsilon),$$

такие, что функции $\omega_k^\infty(\cdot)$, $k\in\mathbf{N}$, v-стабильны на множестве $G^B(t,\varepsilon,\delta)\setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t)\cap G^B(t,\varepsilon,\delta)$, и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\omega_k^\infty(x)=\infty,\quad x\in G^B(t,\varepsilon,\delta)\setminus D(t).$$

4) Для любого $x_0\in\Omega\setminus M$, такого, что $\varphi(x_0)=\Theta<\infty$, найдется последовательность $\{x_k\}_1^\infty\subset\Omega$, для которой $\varphi(x_k)<\varphi(x_0)$ и $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$.

Тогда $\varphi(x)=T^0(x)$, $x\in\Omega$.

Поясним основную идею теоремы 1. Рассмотрим краевую задачу для уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Айзекса – Беллмана):

$$H(x,\nabla T(x))=-1,\quad x\in R^n\setminus M, \tag{1}$$

$$T(x)=0,\quad x\in\partial M. \tag{2}$$

В книге Р. Айзекса показано, что классическое (т.е. гладкое) решение задачи (1), (2) (если оно существует) совпадает с функцией цены $T^0(\cdot)$ дифференциальной игры быстродействия. С другой стороны, для краевой задачи

Дирихле (1), (2) на множестве $\overline{R^n \setminus M}$ функция цены $T^0(\cdot)$ содержательно определяет единственное обобщенное решение, т.е. конструкции теории позиционных дифференциальных игр можно использовать для определения обобщенных решений краевых задач для УЧП первого порядка. Такой подход лежит в основе теории минимаксных решений А.И. Субботина[11], где дается определение обобщенного (разрывного) минимаксного решения краевой задачи Дирихле в терминах u- и v-стабильных функций и доказывается его совпадение с функцией цены соответствующей дифференциальной игры быстродействия. Из этой теории следует, что в задачах быстродействия функция цены является единственной полунепрерывной снизу u-стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе терминального множества, к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху v-стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию и непрерывных на границе терминального множества. Проверка существования указанной последовательности и, тем более, ее построение затруднительны при решении даже задач на плоскости. Условия теоремы 1 требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях подмножеств, на которые разбиваются границы множеств уровня тестируемой функции. Рассмотрение нескольких окрестностей делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения.

Применение теоремы 1 проиллюстрировано в третьей и четвертой главах диссертации на двух примерах игровых задач быстродействия на плоскости.

Кроме того, в первой главе формулируется и доказывается теорема 2 о достаточных условиях. Условия теоремы предполагают проверку u-стабильности тестируемой функции, v-стабильности ее перезамыкания (т.е. функции с замкнутым подграфиком) и проверку введенного в дис-

[11] *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

сертации свойства *корректной сжимаемости* множеств уровня тестируемой функции. Проверка последнего свойства затруднительна на практике. Поэтому применение теоремы 2 не иллюстрируется. Однако приводится пример игровой задачи быстродействия на плоскости, показывающий, что требование корректной сжимаемости множеств уровня тестируемой функции исключить нельзя (без какой-либо замены).

Предлагаемые в первой главе достаточные условия оптимальности справедливы и для задач управления, поскольку задачи теории управления можно рассматривать как частный случай задач теории дифференциальных игр (при нулевом ограничении на управление второго игрока). Однако каких-либо упрощений в формулировке условий не появляется.

Условия теорем 1 и 2 включают в себя проверку свойств u- и v-стабильности полунепрерывных функций. Во **второй главе** сформулированы утверждения, упрощающие такую проверку. При этом используются различные инфинитезимальные критерии u- и v-стабильности.

В теории дифференциальных игр для функции цены $T^0(\cdot)$ известны различные типы сингулярных поверхностей, в точках которых оптимальные движения имеют те или иные особенности. Исследование сингулярных поверхностей составляет основу книги Р. Айзекса. Они также изучались в работах А.А. Меликяна[12] и P. Bernhard[13]. Типы сингулярных поверхностей выделяются на основе анализа поведения оптимальных траекторий в окрестности сингулярной поверхности и учете возможности особых оптимальных движений, идущих вдоль поверхности. В частности, важными являются рассеивающие и экивокальные сингулярные поверхности. На них функция цены $T^0(\cdot)$ является недифференцируемой. Экивокальные сингулярные поверхности характерны именно для дифференциальных игр и не могут возникать в задачах управления с одним игроком.

В диссертации понятия рассеивающей и экивокальной сингулярных поверхностей распространяются на случай произвольной функции. Для клас-

[12] *Melikyan A. A.* Generalized Characteristics of the First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Burkhäuser, 1998.

[13] *Bernhard P.* Singular Surfaces in Differential Games: an Introduction // Differential Games and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1977. – P. 1–33.

са игр с автономной разделенной динамикой и ограничением на управление второго игрока в виде линейного отрезка доказана теорема 3 о том, что в точках рассеивающей и экивокальной сингулярных поверхностей автоматически выполнены инфинитезимальные свойства u- и v-стабильности. Теорема 3 используется в главах 3 и 4 для доказательства свойств u- и v-стабильности на сингулярных линиях.

В **третьей главе** диссертации рассматривается игровая задача быстродействия на плоскости, представляющая собой модификацию известной задачи “мальчик и крокодил”[14]. Динамика системы и ограничения на управления игроков имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu.$$

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки $x = (x_1, x_2)$ из заданного начального положения x_0 на терминальное множество $M = (0, a)^T$, $a > \nu$, интересы второго противоположны.

Ранее исследования такой игры проводились в работах В.С. Пацко [15] и М.Ю. Филимонова[16]. Основываясь на результатах этих работ, на некотором ограниченном множестве описывается построение тестируемой функции, которая разрывна на области определения. Далее проводится проверка всех условий теоремы 1, что дает совпадение тестируемой функции с функцией цены игры. Таким образом, в данной главе результаты глав 1 и 2 применяются к примеру, решение которого известно.

В **четвертой главе** рассматривается игровая задача о брахистохроне. Впервые вариант игровой постановки задачи о брахистохроне был исследован в книге Р. Айзекса, где классическая задача вариационного исчисления о кривой наискорейшего спуска[17] была записана в виде задачи управления.

[14] *Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.* Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР. – 1969. – Т. 189, № 4. – С. 721–723.

[15] *Пацко В.С.* Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, № 3. – С. 424–435. II // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1423–1434.

[16] *Филимонов М.Ю.* Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре. Исслед. задач минимакс. упр.: сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 117–124.

[17] *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.; Л: Гостехиздат, 1938.

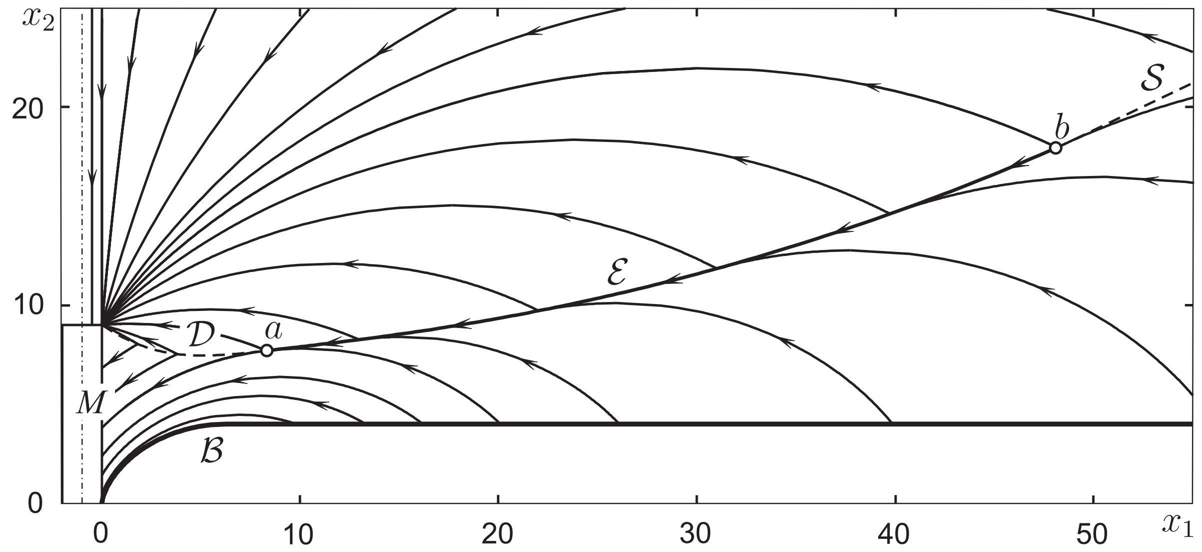

Рис. 1: Траектории, определяющие тестируемую функцию при $h = 6$, $w = 2$.

Кроме того, в динамику системы была добавлена помеха, рассматриваемая как действие второго игрока. Выбраны множества ограничений на управление второго игрока и терминальное множество. Решение, приведенное в книге Р. Айзекса, в дальнейшем было уточнено и дополнено в работах М.Л. Лидова[18] и С.А.Чигиря[19].

Постановка рассматриваемой в четвертой главе задачи о брахистохроне отличается от постановки Р. Айзекса формой терминального множества и ограничением на управление второго игрока. Динамика системы и ограничения на управления игроков имеют вид

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_2}\cos u, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2}\sin u + wv,$$

$$u \in P = [0, 2\pi], \quad v \in Q = [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad x_0 \in R^2_+,$$

где R^2_+ – верхняя полуплоскость. Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время достижения терминального множества $M = [-d, 0] \times [0, h]$; w, d, $h > 0$.

Основываясь на методе Айзекса обработки полей классических характеристик, строится тестируемая функция $\varphi(\cdot)$, определенная в полуплос-

[18] *Лидов М. Л.* Об одной задаче дифференциальных игр // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 4, С. 173–175.

[19] *Чигирь С. А.* Об игровой задаче о долихобрахистохроне // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 6. – С. 1003–1013.

кости R^2_+. В процессе построения возникают барьерные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ разрывна, а также рассеивающие и экивокальные сингулярные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ является негладкой.

С помощью теоремы 1 показывается совпадение тестируемой функции с функцией цены игры. Обоснование решения задачи усложняется тем, что правая часть динамики системы не удовлетворяет классическим условиям существования цены игры, а именно, локальному условию Липшица по фазовой переменной.

Исследована зависимость решения от высоты h терминального множества. Решение симметрично относительно вертикальной прямой $x_1 = -d/2$. Выделяются три случая: $h > w^2$, $h < w^2$ и $h = w^2$. Структура оптимального решения в случае $h > w^2$ показана на рис. 1. Здесь $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ – рассеивающая и экивокальная сингулярные линии, $\mathcal{S}$ – линия переключения, a и b – крайние точки экивокальной линии, $\mathcal{B}$ – барьерная линия. Цена игры равна ∞ на прямолинейном участке линии $\mathcal{B}$ и ниже ее.

Основные результаты диссертации

1. Доказаны две теоремы о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия.

2. Доказана теорема о достаточных условиях выполнения инфинитезимальных свойств стабильности в терминах сингулярных (рассеивающих и экивокальных) точек.

3. Исследована задача о брахистохроне в игровой постановке, полученное решение обосновано.

Автор работы глубоко благодарен научному руководителю к.ф.-м.н. Пацко Валерию Семеновичу за постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

[1] *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности функции цены в терминах сингулярных точек // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 33-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. – С. 249–253.

[2] *Kamneva L.V., Patsko V.S., Turova V.L.* Construction of the Value Function for Game Brachistochrone Problem // Proc. 10th Intern. Simposium on Dynamic Games and Appl. – St.-Petersburg, Russia, 2002. – Vol. 1. – P. 408–415.

[3] *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 3. – С. 366–383.

[4] *Васильева Т.В., Камнева Л.В.* Построение семейства эквивокальных линий для заданного поля характеристик в игровой задаче о брахистохроне // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 35-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. – С. 212–216.

[5] *Камнева Л.В.* О свойствах разрывной функции цены в игровой задаче быстродействия // Доклады РАН. – 2006. – Т. 408, №3. – С. 301–304.

[6] *Камнева Л.В.* Об условиях совпадения разрывной функции с функцией цены игры в задаче быстродействия // Прикл. математика и механика. – 2006. – Т. 70, вып. 5. – С. 739–752.

[7] *Камнева Л.В.* О свойствах разрывной функции цены в игровой задаче быстродействия // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 37-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2006. – С. 321–325.

[8] *Kamneva L. V.* On optimality of a discontinuous function in a time-optimal differential game // Proc. 13th IFAC Workshop "Control Appl. of Optimization", Paris–Cachan, France, 26 – 28 April, 2006. – P. 317–322.

[9] *Камнева Л.В.* О разрывной функции цены в игровой задаче быстродействия // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 38-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2007. – С. 296–300.

Камнева Людмила Валерьевна

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Автореферат

Подписано в печать 05.04.2007
Формат 60x84 1/16. Объем 1 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ №