

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

КАМНЕВА ЛЮДМИЛА ВАЛЕРЬЕВНА

**РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ
В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
В.С.Пацко

Екатеринбург — 2007

Оглавление

Основные обозначения	4
Введение	5
1 Достаточные условия совпадения разрывной функции с функцией цены в игровых задачах быстрогодействия	15
1.1 Постановка задачи	15
1.2 Свойства u - и v -стабильных функций	17
1.3 Свойства функции цены игры	22
1.4 Теорема 1 о достаточных условиях	24
1.5 Теорема 2 о достаточных условиях	31
1.5.1 Корректно сжимаемые множества	31
1.5.2 Формулировка и доказательство теоремы	34
1.5.3 Пример	39
2 Достаточные условия стабильности функции в терминах сингулярных точек	44
2.1 Критерии стабильности полунепрерывной функции	44
2.2 Простейшие сингулярные точки	49
2.3 Рассеивающие и экивокальные сингулярные точки	51
2.4 Теорема 3 о достаточных условиях стабильности	53
3 Управление материальной точкой на прямой при наличии помехи	56
3.1 Постановка задачи	56
3.2 Обоснование решения задачи	61

4	Игровая задача о брахистохроне	70
4.1	Постановка задачи	70
4.2	Характеристическая система для уравнения Айзекса – Белл- мана	71
4.3	Первичные семейства характеристик	77
4.4	Построение рассеивающей линии	87
4.5	Построение эквивокальной линии при $h > w^2$	88
4.6	Вторичное поле характеристик при $h > w^2$	94
4.7	Определение функции $\varphi(\cdot)$	99
4.8	Обоснование решения задачи	100
	Литература	114

Основные обозначения

R	— множество вещественных чисел;
R^n	— n -мерное евклидово пространство;
$\langle x, y \rangle$	— скалярное произведение векторов x и y ;
$\ x\ $	— евклидова норма вектора x , равная $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$;
$\text{co } A$	— выпуклая оболочка множества A ;
$\overline{A}$	— замыкание множества $A \subset R^n$;
∂A	— граница множества $A \subset R^n$;
$\text{int } A$	— внутренность множества $A \subset R^n$;
$\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$	— функция $\omega(\cdot)$, определенная на множестве G и принимающая неотрицательные вещественные значения или несобственное значение ∞ ;
$\nabla \omega(x)$	— градиент функции $\omega(\cdot)$ в точке $x \in R^n$;
$A + B$	— алгебраическая сумма множеств $A, B \subset R^n$;
$A \times B$	— декартово произведение множеств $A, B \subset R^n$;
$\mathbf{B}(z, r)$	— n -мерный замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $z \in R^n$;
z^T	— транспонированный вектор $z \in R^n$;
$C^k(G)$	— пространство функций $y(\cdot) : G \rightarrow R$, непрерывных на G и k раз непрерывно-дифференцируемых на $\text{int } G$;
$o(\delta)$	— величина большего порядка малости, чем величина δ , т.е. $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Введение

В диссертации исследуются вопросы, связанные с обоснованием аналитического построения разрывной функции цены в дифференциальных играх быстрого действия. Используется подход, основанный на теории минимаксных решений краевой задачи для уравнения в частных производных первого порядка, разработанной А.И. Субботиным.

В теории дифференциальных игр изучаются задачи управления по принципу обратной связи в условиях неопределенности и помех. Исследования дифференциальных игр начались в 1950–60-е годы с рассмотрения математических моделей конфликтных ситуаций. В этих моделях динамика управляемой системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, в правую часть которых входят управляющие воздействия. Полезное управление рассматривается как действие первого игрока, минимизирующего некоторый функционал на множестве траекторий системы, а помеха считается результатом управления второго игрока, цель которого состоит в максимизации того же функционала. Управления игроков стеснены геометрическими ограничениями.

В отчетах Р. Айзекса [44–48] и его монографии [1] был предложен метод исследования игровых задач управления и рассмотрено большое число содержательных примеров. Однако строгой математической постановки дифференциальной игры при этом не было.

В дальнейшем были разработаны различные варианты формализации дифференциальных игр, среди которых отметим подход W.H. Fleming [43], основанный на аппроксимации дифференциальной игры многошаговыми играми, а также подход, использующий понятие неупреждающих стратегий и развитый в работах R.J. Elliott и N.J. Kalton [42].

Удобной с практической точки зрения является позиционная формализация дифференциальных игр, изложенная в книге Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [6]. В рамках позиционной формализации подход к реше-

нию дифференциальной игры заключается в поиске функции цены, которая каждой точке пространства состояний системы ставит в соответствие оптимальный гарантированный результат в игре, начинающейся из этой точки. На базе функции цены можно построить стратегии оптимального управления по принципу обратной связи [5]. Отметим, что цена позиционной дифференциальной игры для заданной начальной точки совпадает с ценой в смысле W.H. Fleming или с ценой в классе неупреждающих стратегий в случаях, когда обе величины существуют.

В диссертации рассматриваются игры, в которых функционалом платы является время до попадания фазовой точки на заданное замкнутое терминальное множество $M \subset R^n$. Такие игры называются дифференциальными играми быстрогодействия. К ним относятся, например, задачи преследования–уклонения, а также задачи оптимального быстрогодействия в теории управления, которые можно рассматривать как игровые задачи при нулевом ограничении на управление второго игрока.

Предположим, что динамика управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in R^n \setminus M.$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор в момент времени t ; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ – управления минимизирующего и максимизирующего игроков; P и Q – компакты в конечномерных пространствах. Пусть функция f непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет условию подлинейного роста и локальному условию Липшица по переменной x . Кроме того,

$$H(x, p) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v) \rangle.$$

В рамках позиционной формализации указанные условия обеспечивают существование функции цены $x_0 \mapsto T^0(x_0) \in [0, \infty]$ дифференциальной игры быстрогодействия.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Айзекса – Беллмана):

$$H(x, \nabla T(x)) = -1, \quad x \in R^n \setminus M, \quad (0.1)$$

$$T(x) = 0, \quad x \in \partial M. \quad (0.2)$$

В книге Р. Айзекса [1] показано, что классическое решение задачи (0.1), (0.2) (если оно существует) совпадает с функцией цены $T^0(\cdot)$

дифференциальной игры быстрогодействия. Таким образом, при некоторых дополнительных условиях гладкости для нахождения дифференцируемой функции цены может быть использован метод классических характеристик [9] решения краевой задачи (0.1), (0.2).

В общем случае функция цены дифференциальной игры быстрогодействия может быть негладкой, разрывной, и, кроме того, может принимать несобственное значение ∞ . Метод построения кусочно-гладкой или разрывной функции цены, предложенный Р. Айзексом, заключается в последовательном нахождении гладких ветвей решения при помощи классических характеристик. Основная трудность применения метода Айзекса состоит в обнаружении поверхностей стыковки (сингулярных поверхностей) гладких ветвей функции цены. Р. Айзексом были рассмотрены различные типы сингулярных поверхностей и некоторые способы их построения.

В связи с большими техническими сложностями исследования конкретных задач в настоящее время известно не очень много работ, в которых проведены аналитические построения функции цены дифференциальных игр быстрогодействия. Среди таких исследований отметим результаты А.А. Меликяна [12, 13], В.С. Пацко [14, 15], С.А. Чигиря [29], J.V. Breakwell, J. Lewin, A.W. Merz, G.J. Olsder [51, 52, 54], J. Shinar [60]. Трудность аналитического решения игровых задач быстрогодействия требует численных алгоритмов решения, которые разрабатывались В.С. Пацко, В.Л. Туровой [27, 58, 59], В.Н. Ушаковым [61], M. Bardi, M. Falcone, P. Soravia [31–34], P.M. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre [38, 40] и другими авторами.

В теории оптимального управления аналогом подхода к решению задачи на базе функции цены является метод динамического программирования. Если функция оптимального результата (функция Беллмана) дифференцируема, то ее поиск сводится к решению соответствующей краевой задачи для уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка. В этом случае с помощью функции Беллмана определяется оптимальное управление по принципу обратной связи. Если функция Беллмана является негладкой, но непрерывной, то для решения задачи в классе управлений по принципу обратной связи может быть использован регулярный синтез В.Г. Болтянского [2]. Задачи оптимального быстрогодействия с разрывной функцией Беллмана исследовались, например, в работах G. Leitmann, H. Frankowska, P. Cannarsa [37, 50] и многих других [30, 55].

Поскольку для краевой задачи Дирихле (0.1), (0.2) на множестве $\overline{R^n \setminus M}$ функция цены $T^0(\cdot)$ содержательно определяет единственное разрывное решение, то конструкции теории позиционных дифференциальных игр можно использовать для определения обобщенных решений краевых задач для УЧП первого порядка. Такой подход лежит в основе теории минимаксных решений А.И. Субботина [22, 23], которую можно применить для обоснования правильности построения функции цены.

В своих работах А.И. Субботиним дано определение разрывного минимаксного решения $\omega(\cdot)$ краевой задачи Дирихле:

$$H(x, \nabla \omega(x)) - \omega(x) = -1, \quad x \in R^n \setminus M, \quad (0.3)$$

$$\omega(x) = 0, \quad x \in \partial M. \quad (0.4)$$

Для этого сначала вводятся определения верхних и нижних минимаксных решений уравнения (0.3). Верхнее (нижнее) минимаксное решение уравнения (0.3) определяется как полунепрерывная снизу (сверху) функция

$$\omega(\cdot) : \overline{R^n \setminus M} \rightarrow R,$$

надграфик (подграфик) которой слабо инвариантен относительно соответствующего характеристического дифференциального включения. Указанные свойства слабой инвариантности совпадают со свойствами u -стабильности и v -стабильности функции цены. Кроме того, существуют различные эквивалентные способы определения верхних и нижних минимаксных решений.

Верхним решением задачи (0.3), (0.4) называется верхнее минимаксное решение $\omega(\cdot)$ уравнения (0.3), удовлетворяющее краевому условию (0.4) и оценке

$$|\omega(x)| \leq 1, \quad x \in \overline{R^n \setminus M}. \quad (0.5)$$

Нижним решением задачи (0.3), (0.4) называется нижнее минимаксное решение $\omega(\cdot)$ уравнения (0.3), непрерывное в каждой точке $x \in \partial M$, удовлетворяющее краевому условию (0.4) и оценке (0.5).

Минимаксным решением задачи (0.3), (0.4) называется функция $\omega(\cdot) : \overline{R^n \setminus M} \rightarrow R$ такая, что существует последовательность верхних решений $\omega^{(k)}(\cdot)$ и последовательность нижних решений $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, которые поточечно сходятся к функции $\omega(\cdot)$.

Определения верхних и нижних решений несимметричны: нижние решения должны быть непрерывны в каждой точке $x \in \partial M$, что не требуется для верхнего решения. Это связано со свойством единственности минимаксного решения.

В работах А.И.Субботина доказано существование и единственность минимаксного решения краевой задачи (0.3), (0.4) и его совпадение с минимальным верхним решением. Классическое (т.е. гладкое) решение задачи (0.3), (0.4) (если оно существует) удовлетворяет определению минимаксного решения. Кроме того, показано, что функция цены $T^0(\cdot)$ дифференциальной игры быстрого действия и минимаксное решение $\omega(\cdot)$ связаны равенством

$$\omega(x) = 1 - \exp(-T^0(x)), \quad x \in \overline{R^n \setminus M}. \quad (0.6)$$

Отмечено также, что в случае непрерывного минимаксного решения оно одновременно является верхним и нижним решением соответствующей краевой задачи. Преобразование вида (0.6), предложенное С.Н.Кружковым [7], используется в теории УЧП первого порядка в тех случаях, когда нужно перейти к ограниченным решениям.

Опираясь на связь функции цены дифференциальной игры и минимаксного решения краевой задачи (0.3), (0.4), получаем, что в задачах быстрого действия функция цены является единственной полунепрерывной снизу u -стабильной функцией, удовлетворяющей нулевому краевому условию на границе множества M , к которой поточечно сходится последовательность полунепрерывных сверху v -стабильных функций, удовлетворяющих тому же краевому условию и непрерывных на границе множества M . Однако проверка существования указанной последовательности и, тем более, ее построение во всем пространстве игры затруднительны при решении даже задач на плоскости.

Отметим, что существуют другие подходы к определению обобщенных решений краевой задачи (0.3), (0.4). Наиболее известно понятие непрерывного вязкостного решения, которое ввели в начале 80-х годов М.Г. Crandall и Р.Л. Lions [41]. В работах М. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta [32], S. Bottacin, М. Falcone [31], Р. Soravia [34] было предложено и исследовано понятие разрывного e -решения (envelope solution) краевой задачи (0.3), (0.4), определение которого опирается на понятия вязкостных верхних и нижних решений, отмечено совпадение e -решения с минимаксным решением и разработаны численные схемы построения e -решения.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации состоит из пяти параграфов и посвящена формулировке и доказательству двух теорем о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры.

В параграфе 1.1 описывается дифференциальная игра быстрого действия в позиционной формализации и дается определение ее функции цены

$$T^0(\cdot) : \overline{R^n \setminus M} \rightarrow R^+.$$

Предположим, что на замкнутом множестве $\Omega \subseteq R^n$ определена некоторая функция

$$\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty].$$

Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T^0(x)$, $x \in \Omega$. Искомые условия должны быть удобными для практической проверки.

В параграфе 1.2 определяются понятия u - и v -стабильных функций на открытом множестве $G \subseteq R^n$.

Определение 0.1. Функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ u -стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна снизу и для любых $y_0 \in G$, $v_* \in Q$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство $\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t$, $t \in [0, \tau]$.

Определение 0.2. Функция $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ v -стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна сверху и для любых $y_0 \in G$, $u_* \in P$ существуют $\tau > 0$ и такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u_*, v) : v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство $\tilde{\omega}(y(t)) \geq \tilde{\omega}(y_0) - t$, $t \in [0, \tau]$.

По аналогии с теорией минимаксных решений в леммах 1.1, 1.2 устанавливается связь u - и v -стабильных функций с функцией цены $T^0(\cdot)$ дифференциальной игры.

Основные свойства функции цены игры, которые используются в дальнейшем, приведены в параграфе 1.3. Там же доказана лемма 1.3 о непрерывном изменении цены игры для заданной начальной точки при расширении терминального множества.

Параграф 1.4 посвящен формулировке и доказательству теоремы 1 о достаточных условиях. В работах А.И. Субботина при доказательстве теоремы о связи функции цены игры и минимаксного решения соответствующей краевой задачи последовательность v -стабильных функций (нижних решений) используется для конструирования подходящих позиционных стратегий уклонения от окрестности множества M на заданном промежутке времени. Если указанная последовательность определена лишь в некоторой открытой окрестности, пересекающейся с множеством M , то такие же методы построения позиционных стратегий уклонения можно применить для начальных точек, из которых допустимые траектории системы не покидают эту окрестность на заданном промежутке времени. Эта идея используется для доказательства теоремы 1. Условия теоремы требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях подмножеств, на которые разбиваются границы множеств уровня тестируемой функции. Рассмотрение нескольких окрестностей делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения. Применение теоремы 1 проиллюстрировано в третьей и четвертой главах диссертации на двух примерах игровых задач быстрого действия на плоскости.

В параграфе 1.5 формулируется и доказывается теорема 2 о достаточных условиях. Условия теоремы предполагают проверку u -стабильности тестируемой функции, v -стабильности ее перезамыкания (т.е. функции с замкнутым подграфиком) и проверку введенного в диссертации свойства *корректной сжимаемости* множеств уровня тестируемой функции. Проверка последнего свойства затруднительна. Поэтому применение теоремы 2 не иллюстрируется. Однако приводится пример игровой задачи быстрого действия на плоскости, показывающий, что требование корректной сжимаемости множеств уровня тестируемой функции исключить нельзя (без какой-либо замены).

Предлагаемые в первой главе достаточные условия оптимальности справедливы и для задач управления, поскольку задачи теории управле-

ния можно рассматривать как частный случай задач теории дифференциальных игр (при нулевом ограничении на управление второго игрока). Однако каких-либо упрощений в формулировке условий не появляется.

Условия обеих теорем включают в себя проверку свойств u - и v -стабильности полунепрерывных функций. Во **второй главе**, состоящей из четырех параграфов, сформулированы утверждения, упрощающие такую проверку. При этом используются различные инфинитезимальные критерии u - и v -стабильности.

В параграфе 2.1 в виде утверждения 2.1 сформулированы инфинитезимальные критерии стабильности функции

$$\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$$

на открытом множестве G , доказанные в работах А.И. Субботина. Такие критерии предполагают в каждой точке рассматриваемой области проверку неравенств для верхней или нижней производной по направлению функции, получаемой после преобразования Кружкова. Утверждения 2.2–2.7 упрощают проверку указанных неравенств в некоторых частных случаях.

В теории дифференциальных игр для функции цены $T^0(\cdot)$ известны [1, 35, 53] различные типы сингулярных поверхностей, в точках которых оптимальные движения имеют те или иные особенности. Классификация основана на анализе поведения оптимальных траекторий в окрестности сингулярной поверхности и учете возможности особых оптимальных движений, идущих вдоль самой сингулярной поверхности. В частности, важными являются рассеивающие и эквивокальные сингулярные поверхности. На них функция цены $T^0(\cdot)$ является недифференцируемой. Эквивокальные сингулярные поверхности характерны именно для дифференциальных игр и не могут возникать в задачах управления с одним игроком. В параграфах 2.2, 2.3 понятия рассеивающей и эквивокальной сингулярных поверхностей распространяются на случай функции $\omega(\cdot) : G \rightarrow R$. В параграфе 2.4 для класса игр с автономной разделенной динамикой и ограничением на управление второго игрока в виде линейного отрезка доказана теорема 3 о том, что в точках рассеивающей и эквивокальной сингулярных поверхностей автоматически выполнены инфинитезимальные свойства u - и v -стабильности. Теорема 3 используется в главах 3 и 4 для доказательства свойств u - и v -стабильности на сингулярных линиях.

Третья глава диссертации состоит из двух параграфов. В ней рассматривается игровая задача быстрогодействия на плоскости, представляющая собой модификацию известной задачи “мальчик и крокодил” [19, 21]. Динамика системы и ограничения на управления игроков имеют вид

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu.$$

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки $x = (x_1, x_2)$ из заданного начального положения x_0 на терминальное множество $M = (0, a)^T$, $a > \nu$, интересы второго противоположны.

Ранее исследования такой игры проводились в работах В.С. Пацко [14, 15] и М.Ю. Филимонова [28]. Основываясь на результатах этих работ, в параграфе 3.1 на некотором ограниченном множестве описывается построение тестируемой функции, которая разрывна на области определения. В параграфе 3.2 проведена проверка всех условий теоремы 1, которая дает совпадение тестируемой функции с функцией цены игры.

В **четвертой главе**, состоящей из восьми параграфов, рассматривается игровая задача о брахистохроне.

Впервые вариант игровой постановки задачи о брахистохроне был исследован в книге Р. Айзекса, где классическая задача вариационного исчисления о кривой наискорейшего спуска [10] была записана в виде задачи управления. Кроме того, в динамику системы была добавлена помеха, рассматриваемая как действие второго игрока. Выбраны множества ограничений на управление второго игрока и терминальное множество. Решение, приведенное в книге Р. Айзекса, в дальнейшем было уточнено и дополнено в работах М.Л. Лидова [11] и С.А. Чигиря [29].

Постановка рассматриваемой в четвертой главе задачи о брахистохроне отличается от постановки Р. Айзекса формой терминального множества и ограничением на управление второго игрока. Динамика системы и ограничения на управления игроков имеют вид

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_2} \cos u, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2} \sin u + wv,$$

$$u \in P = [0, 2\pi], \quad v \in Q = [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad x_0 \in R_+^2,$$

где R_+^2 – верхняя полуплоскость. Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время достижения терминального множества $M = [-d, 0] \times [0, h]$; $w, d, h > 0$.

В параграфах 4.1–4.7, основываясь на методе Айзекса обработки полей классических характеристик, строится тестируемая функция $\varphi(\cdot)$, определенная в полуплоскости R_+^2 . В процессе построения возникают барьерные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ разрывна, а также рассеивающие и эквивокальные сингулярные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ является негладкой. Отметим, что эквивокальные сингулярные линии являются специфическими именно для дифференциальных игр и не могут возникать в задачах управления с одним игроком. Исследована зависимость функции $\varphi(\cdot)$ от высоты h терминального множества.

С помощью теоремы 1 в параграфе 4.8 показывается совпадение тестируемой функции с функцией цены игры. Обоснование решения задачи усложняется тем, что правая часть динамики системы не удовлетворяет классическим условиям существования цены игры, а именно, локальному условию Липшица по фазовой переменной.

Основные результаты диссертации

1. Доказаны две теоремы о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстрогодействия.
2. Доказана теорема о достаточных условиях выполнения инфинитезимальных свойств стабильности в терминах сингулярных (рассеивающих и эквивокальных) точек.
3. Исследована задача о брахистохроне в игровой постановке, полученное решение обосновано.

Автор работы глубоко благодарен научному руководителю к.ф.-м.н. Пацко Валерию Семеновичу за постоянное внимание к работе.

Глава 1

Достаточные условия совпадения разрывной функции с функцией цены в игровых задачах быстрогодействия

В данной главе рассматривается дифференциальная игра быстрогодействия в позиционной формализации. Ставится задача о поиске таких условий на некоторую (тестируемую) разрывную функцию, заданную на замкнутом множестве, выполнение которых обеспечивает ее совпадение с функцией цены игры. Приводятся определения u - и v -стабильных функций и отмечается их связь с функцией цены игры. Доказывается свойство непрерывного изменения цены игры для заданной начальной точки при расширении терминального множества. Формулируются и доказываются две теоремы о достаточных условиях совпадения заданной разрывной функции с функцией цены игры. Условия второй теоремы предполагают проверку свойства корректной сжимаемости множеств уровня тестируемой функции. Приводится пример игровой задачи быстрогодействия на плоскости, показывающий, что требование корректной сжимаемости множеств уровня тестируемой функции исключить нельзя.

1.1 Постановка задачи

Дадим описание дифференциальной игры быстрогодействия в позиционной формализации [6, 23].

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in R^n$ – фазовое состояние в момент времени t ; $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ – управления минимизирующего и максимизирующего игроков; P и Q – компактные множества в конечномерных пространствах.

Предполагается, что функция f непрерывна по совокупности переменных, удовлетворяет неравенству

$$\|f(x, u, v)\| \leq \kappa(1 + \|x\|), \quad \kappa = \text{const}, \quad (1.2)$$

и в каждой ограниченной области $\mathcal{X} \subset R^n$ выполнено условие Липшица по переменной x , т.е.

$$\|f(x^{(1)}, u, v) - f(x^{(2)}, u, v)\| \leq L(\mathcal{X})\|x^{(1)} - x^{(2)}\| \quad (1.3)$$

для всех $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{X}$, $u \in P$, $v \in Q$. Кроме того, пусть для любых $x, p \in R^n$ выполнено условие седловой точки [6]:

$$H(x, p) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v) \rangle. \quad (1.4)$$

Здесь угловыми скобками обозначено скалярное произведение векторов. Функция H называется гамильтонианом системы (1.1).

Позиционными стратегиями [6, 23] первого и второго игроков назовем произвольные функции $U: [0, \infty) \times R^n \rightarrow P$ и $V: [0, \infty) \times R^n \rightarrow Q$. Стратегии U , V порождают пучки $X_1(x_0, U)$, $X_2(x_0, V)$ конструктивных движений, выходящих из начальной позиции x_0 при $t = 0$.

Конструктивным движением $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$ называется функция $x(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^n$, для которой на любом отрезке $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, найдется последовательность ломаных Эйлера $x^{(k)}(\cdot): [0, \infty) \rightarrow R^n$, определяемых условиями

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= f(x^{(k)}(t), U(\tau_i^{(k)}, x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t)), \\ t &\in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

равномерно сходящаяся к $x(\cdot)$ и такая, что $\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Здесь интервалы $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$, $i = 1, 2, \dots$, разбивают полуось $t \geq 0$, $v^{(k)}(\cdot)$ – измеримая функция со значениями в множестве Q . Аналогично определяются элементы множества $X_2(x_0, V)$.

Цель первого игрока – быстреее сближение точки $x(t)$ с заданным замкнутым множеством $M \subset R^n$. Второй игрок стремится либо исключить встречу с M , либо максимизировать время до встречи. Таким образом,

оптимизируемый функционал для игровой задачи быстрогодействия имеет вид

$$J(x(\cdot); M) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \text{ для любого } t \geq 0; \\ \min\{t \geq 0 : x(t) \in M\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если в точке x_0 выполнено равенство

$$\begin{aligned} \inf_U \sup\{J(x(\cdot); M) : x(\cdot) \in X_1(x_0, U)\} = \\ = \sup_V \inf\{J(x(\cdot); M) : x(\cdot) \in X_2(x_0, V)\} = T(x_0; M), \end{aligned} \quad (1.5)$$

то значение $T(x_0; M) \in [0, \infty]$ называется ценой игры в точке x_0 .

При указанных условиях на функцию f для любого $x_0 \in R^n$ существует [6, 23] цена игры. Более того, в формуле (1.5) инфимум по U достигается, т.е. существует оптимальная позиционная стратегия первого игрока. Функция $T(\cdot; M) : R^n \rightarrow [0, \infty]$ называется функцией цены игры.

Пусть на замкнутом множестве $\Omega \subseteq R^n$ определена некоторая функция

$$\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty].$$

Задача состоит в нахождении таких условий на функцию $\varphi(\cdot)$, при которых выполнено равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$. Искомые условия должны быть удобными для практической проверки.

1.2 Свойства u - и v -стабильных функций

С функцией цены тесно связаны понятия u - и v -стабильных функций [23, 49].

Определение 1.1. Функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ u -стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна снизу и для любых $y_0 \in G$ и $v_* \in Q$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co}\{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad y(0) = y_0, \quad (1.6)$$

где τ – некоторое положительное число, что

$$\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.7)$$

В случае, когда функция $\omega(\cdot)$ конечна, неравенство (1.7) означает выполнение включения

$$(\omega(y_0) - t, y(t)) \in \text{epi } \omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\text{epi } \omega$ – надграфик функции $\omega(\cdot)$:

$$\text{epi } \omega = \{(z, x) : z \geq \omega(x), x \in G\}.$$

Траекторию $y(\cdot)$, удовлетворяющую неравенству (1.7), будем называть *локально выживающей в надграфике* функции $\omega(\cdot)$.

Определение 1.2. Функция $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ *v-стабильна* на открытом множестве $G \subseteq R^n$, если она полунепрерывна сверху и для любых $y_0 \in G$ и $u_* \in P$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow G$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u_*, v) : v \in Q\}, \quad y(0) = y_0, \quad (1.8)$$

где τ – некоторое положительное число, что

$$\tilde{\omega}(y(t)) \geq \tilde{\omega}(y_0) - t, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.9)$$

В случае, когда функция $\tilde{\omega}(\cdot)$ конечна, неравенство (1.9) означает выполнение включения

$$(\tilde{\omega}(y_0) - t, y(t)) \in \text{hypo } \omega, \quad t \in [0, \tau],$$

где $\text{hypo } \tilde{\omega}$ – подграфик функции $\tilde{\omega}(\cdot)$:

$$\text{hypo } \tilde{\omega} = \{(z, x) : z \leq \tilde{\omega}(x), x \in G\}.$$

Траекторию $y(\cdot)$, удовлетворяющую неравенству (1.9), будем называть *локально выживающей в подграфике* функции $\tilde{\omega}(\cdot)$.

Заметим, что в работах [23, 49] определения *u*- и *v*-стабильных функций даны для конечных функций.

Сформулируем утверждения о продолжимости локально выживающих траекторий.

Утверждение 1.1. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ – *u*-стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$. Тогда для любых $y_0 \in G$ и $v_* \in Q$ существует решение $y(\cdot) : [0, \vartheta) \rightarrow G$ дифференциального включения (1.6), где либо $\vartheta = \infty$, либо $y(\vartheta) \notin G$, такое, что $\omega(y(t)) \leq \omega(y_0) - t$ для всех $t \in [0, \vartheta)$.

Утверждение 1.2. Пусть функция $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ – *v*-стабильна на открытом множестве $G \subseteq R^n$. Тогда для любых $y_0 \in G$ и $u_* \in P$ существует решение $y(\cdot) : [0, \vartheta) \rightarrow G$ дифференциального включения (1.8), где либо $\vartheta = \infty$, либо $y(\vartheta) \notin G$, такое, что $\tilde{\omega}(y(t)) \geq \tilde{\omega}(y_0) - t$ для всех $t \in [0, \vartheta)$.

Утверждения 1.1, 1.2 доказываются от противного, см. также [23, с. 312], замечание А8.2. Таким образом, можно дать эквивалентное определение стабильных функций, в котором траектория дифференциального включения обладает соответствующими свойствами вплоть до выхода из множества G . В случае, когда u -стабильная (v -стабильная) функция конечна на множестве G , эквивалентное определение стабильности функции означает свойство стабильности надграфика (подграфика) этой функции, которое введено в работе [6].

Сформулируем леммы, устанавливающие связь между u - и v -стабильными функциями и функцией цены игры для подходящего терминального множества.

Определение 1.3. Допустимой траекторией называется решение уравнения (1.1) при некоторых измеримых управлениях $u(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow P$ и $v(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Q$.

Лемма 1.1. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ u -стабильна на открытом множестве $G \setminus D \subset R^n$, $D \subset R^n$ – замкнутое множество, $t_* \geq 0$ и

$$D \cap G = \{x \in G : \omega(x) \leq t_*\} \neq \emptyset.$$

Предположим, что $x_* \in G \setminus D$ и все допустимые траектории из начальной точки x_* не покидают множества G на отрезке времени $[0, \omega(x_*) - t_*]$. Тогда

$$\omega(x_*) - t_* \geq T(x_*; D). \quad (1.10)$$

Лемма 1.2. Пусть функция $\tilde{\omega}(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ v -стабильна на открытом множестве $G \setminus D \subset R^n$, $D \subset R^n$ – замкнутое множество, $t_* \geq 0$,

$$D \cap G = \{x \in G : \tilde{\omega}(x) \leq t_*\} \neq \emptyset,$$

и функция $\tilde{\omega}(\cdot)$ непрерывна в точках множества $D \cap G$. Предположим, что $x_* \in G \setminus D$, $\vartheta \in [0, \tilde{\omega}(x_*) - t_*)$ и все допустимые траектории из начальной точки x_* не покидают множества G на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Тогда

$$\vartheta < T(x_*; D).$$

В случае $G = R^n$ доказательства лемм 1.1, 1.2 приведены в [6] и основываются на свойствах стратегий, экстремальных к надграфику (подграфику) u -стабильной (v -стабильной) функции. Другие доказательства даны в [23] при условии, что правая часть динамики системы является глобально липшицевой по переменной x . В случае $G \subset R^n$ идея доказательства по сравнению с [6] не изменяется, поскольку допустимые траектории не выходят из G на рассматриваемом промежутке времени. Для полноты изложения приведем доказательство леммы 1.1.

Доказательство леммы 1.1. В силу u -стабильности функции $\omega(\cdot)$ на множестве G и в силу утверждения 1.1 о продолжимости локально выживающих траекторий множество

$$W_* = \{(t, x) \in [0, \omega(x_*) - t_*] \times G : \omega(x) \leq \omega(x_*) - t\}$$

является u -стабильным мостом [6, с. 52] на множество $\tilde{D}$, где

$$\tilde{D} = [0, \omega(x_*) - t_*] \times (D \cup (R^n \setminus G)),$$

т.е. для любой точки $(t_0, y_0) \in W_*$ и любых значений $\tau > 0$ и $v_* \in Q$ найдется такое решение $y(\cdot) : [t_0, t_0 + \tau] \rightarrow R^n$ дифференциального включения (1.6) с начальным условием $y(t_0) = y_0$, что либо $(\tau, y(\tau)) \in W_*$, либо $(\tau_*, y(\tau_*)) \in \tilde{D}$ для некоторого $\tau_* \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Имеем $(0, x_*) \in W_*$. Построим u -стабильный мост $W_0 \subset [0, \omega(x_*) - t_*] \times G$ на множество $[0, \omega(x_*) - t_*] \times D$, такой, что $(0, x_*) \in W_0$.

Пусть $\vartheta_* = \omega(x_*) - t_*$. Обозначим через $\mathcal{V}_k$ множество всех функций $v_k(\cdot) : [0, \vartheta_*] \rightarrow Q$, кусочно-постоянных на равномерном разбиении отрезка $[0, \vartheta_*]$ с шагом $\Delta_k = 2^{-k}\vartheta_*$, $k \in \mathbf{N}$, непрерывных справа в точках разрыва. Обозначим через $\mathcal{Y}_k(x_*, v_k(\cdot))$ множество всех непрерывных функций $y(\cdot) : [0, \vartheta_*] \rightarrow G$, удовлетворяющих начальному условию $y(0) = x_*$, дифференциальным включениям

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u, v(\tau_i)) : u \in P\}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

и условию $(t, y(t)) \in W_*$, $t \in [0, t_D(y(\cdot))]$, где $\tau_i = i\Delta_k$, $i \in \overline{0, 2^k - 1}$, $t_D(y(\cdot))$ – первый момент попадания траектории $y(\cdot)$ на множество D . Множество $\mathcal{Y}_k(x_*, v_k(\cdot))$ непусто в силу того, что W_* – u -стабильный мост на множество $\tilde{D}$ и все допустимые траектории из начальной точки x_* не покидают множество G на отрезке $[0, \vartheta_*]$.

Пусть

$$W_k = \{(t, y(t)) : t \in [0, \vartheta_*], y(\cdot) \in \mathcal{Y}_k(x_*, v_k(\cdot)), v_k(\cdot) \in \mathcal{V}_k\}.$$

Последовательность множеств W_k монотонно возрастает по включению при $k \rightarrow \infty$ и содержится в некотором ограниченном множестве. Следовательно, в метрике Хаусдорфа существует предельное множество. Обозначим замыкание предельного множества через W_0 , т.е.

$$W_0 = \overline{\lim_{k \rightarrow \infty} W_k}.$$

Имеем $(0, x_*) \in W_0$.

Покажем, что множество W_0 является u -стабильным мостом на множество $[0, \vartheta_*] \times D$. Пусть $(t_0, y_0) \in W_0$. Найдется такая последовательность точек $\{(\tau_k, y_k)\}_1^\infty$, что $\tau_k \rightarrow t_0$, $y_k \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$ и $y_k = y_{\Delta_k}(\tau_k)$, где $y_{\Delta_k}(\cdot) \in \mathcal{Y}_k(x_*, v_k(\cdot))$, $v_k(\cdot) \in \mathcal{V}_k$, момент τ_k принадлежит равномерному разбиению отрезка $[0, \vartheta_*]$ с шагом Δ_k .

Пусть $v_* \in Q$. Положим

$$\tilde{v}_k(\cdot) = \begin{cases} v_k(t), & t \in [0, \tau_k], \\ v_*, & t \in [\tau_k, \vartheta_*]. \end{cases}$$

Найдем такое $\tilde{y}_k(\cdot) \in \mathcal{Y}_k(x_*, \tilde{v}_k(\cdot))$, что $\tilde{y}_k(t) = y_k(t)$, $t \in [0, \tau_k]$. По определению множества W_0 имеем $(t, \tilde{y}_k(t)) \in W_0$, $t \in [0, t_D(\tilde{y}_k(\cdot))]$; $t_D(\tilde{y}_k(\cdot)) \leq \vartheta_*$.

Функции $\{\tilde{y}_k(\cdot)\}_1^\infty$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, найдется подпоследовательность функций $\{\tilde{y}_k(\cdot)\}_1^\infty$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $\tilde{y}(\cdot)$, которая удовлетворяет дифференциальному включению

$$\dot{\tilde{y}}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad t \in [t_0, \vartheta_*],$$

и условию $\tilde{y}(t_0) = y_0$. В силу замкнутости множества W_0 получаем, что $(t, \tilde{y}(t)) \in W_0$, $t \in [0, t_D(\tilde{y}(\cdot))]$. Таким образом, множество W_0 является u -стабильным мостом на множество $[0, \vartheta_*] \times D$.

Стратегия экстремального прицеливания [6, с. 57] на u -стабильный мост W_0 гарантирует приведение системы на множество D на отрезке времени $[0, \omega(x_*) - t_*]$. Таким образом, доказано неравенство (1.10). $\square$

1.3 Свойства функции цены игры

Приведем основные свойства функции цены, которые будут использоваться в дальнейшем. Введем обозначение

$$W(t; M) = \{x \in R^n : T(x; M) \leq t\}, \quad t \geq 0. \quad (1.11)$$

Для любого $\tau > 0$ и любого $x \notin W(\tau; M)$ выполнено [6] равенство

$$T(x; M) = T(x; W(\tau; M)) + \tau.$$

Из известных результатов [6, 23] следует, что $M = W(0; M)$, функция $T(\cdot; M)$ полунепрерывна снизу и обладает свойством u -стабильности на множестве $R^n \setminus M$. Верхнее замыкание

$$T^*(x; M) = \limsup_{y \rightarrow x} T(y; M)$$

функции цены обладает [23, стр. 258] свойством v -стабильности на множестве R^n .

Лемма 1.3. Пусть замкнутые множества $D_\tau \subset R^n$, $\tau > 0$, монотонно убывают по включению при $\tau \rightarrow +0$ и $\bigcap_{\tau > 0} D_\tau = M$. Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T(x; D_\tau) = T(x; M), \quad x \in R^n. \quad (1.12)$$

Доказательство. 1°. Обозначим через M_ε замкнутую ε -окрестность терминального множества M , т.е.

$$M_\varepsilon = \{z_1 + z_2 : z_1 \in M, \quad \|z_2\| \leq \varepsilon\}.$$

Покажем, что

$$T(x; M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x; M_\varepsilon), \quad x \in R^n. \quad (1.13)$$

Для всех $x \in M$ равенство (1.13) очевидно. Выберем $x \in R^n \setminus M$.

Предположим, что $T(x; M) < \infty$. Поскольку $M \subset M_\varepsilon$, то

$$T(x; M_\varepsilon) \leq T(x; M). \quad (1.14)$$

Из известных результатов [6] следует, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что второй игрок уклоняется от множества M_ε из точки x на отрезке времени $[0, T(x; M) - \delta]$. Следовательно,

$$T(x; M) - \delta < T(x; M_{\varepsilon(\delta)}). \quad (1.15)$$

Учитывая (1.14), (1.15), получаем равенство (1.13) для точки x .

Предположим, что $T(x; M) = \infty$. Согласно [6], для любого $K > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что второй игрок уклоняется от множества M_ε на отрезке времени $[0, K]$, т.е. $T(x, M_\varepsilon) > K$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x; M_\varepsilon) = \infty$$

и равенство (1.13) для точки x выполнено.

2°. Пусть $x_* \in R^n$ и $\vartheta = T(x_*; M) < \infty$. Существует замкнутое ограниченное множество $Z \subset R^n$, содержащее все возможные траектории системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_*$ на отрезке времени $[0, \vartheta]$.

Для числа $\tau > 0$ определим значение

$$\varepsilon(\tau) = \min\{\varepsilon : D_\tau \cap Z \subseteq M_\varepsilon \cap Z\}.$$

Имеем $\varepsilon(\tau) \rightarrow +0$ при $\tau \rightarrow +0$.

Из вложений $M \subseteq D_\tau$ и $D_\tau \cap Z \subseteq M_{\varepsilon(\tau)} \cap Z$, $\tau > 0$, следуют неравенства

$$T(x_*; M_{\varepsilon(\tau)}) \leq T(x_*; D_\tau) \leq T(x_*; M).$$

Отсюда при учете соотношения (1.13) получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; M_{\varepsilon(\tau)}) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; D_\tau) = T(x_*; M).$$

Таким образом, равенство (1.12) доказано.

3°. Пусть $x_* \in R^n$ и $T(x_*; M) = \infty$. Выберем произвольное $K > 0$. Обозначим через $Z(K)$ замкнутое ограниченное множество в пространстве R^n , содержащее все траектории системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_*$ на отрезке времени $[0, K]$. В силу соотношения (1.13) найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$, что $T(x_*; M_\varepsilon) > K$. Поскольку $\bigcap_{\tau > 0} D_\tau = M$, то существует такое $\tau = \tau(K) > 0$, что $D_\tau \cap Z(K) \subset M_\varepsilon \cap Z(K)$. Следовательно, $T(x_*; D_\tau) > K$. Поскольку число K выбрано произвольно, получаем равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; D_\tau) = \infty$$

и соотношение (1.13) выполнено. □

1.4 Теорема 1 о достаточных условиях

Сформулируем и докажем теорему 1.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subseteq R^n$, $M \subseteq \Omega$ – замкнутые множества, задана функция

$$\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned} \Theta &= \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad t \in [0, \Theta), \\ F(t) &= \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) = t\}, \quad B(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) < t\}, \\ S(t) &= \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)}, \quad G(t, \varepsilon) = \begin{cases} \emptyset, & S(t) = \emptyset; \\ S(t) + \text{int } \mathbf{B}(0, \varepsilon), & S(t) \neq \emptyset, \end{cases} \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу, $D(0) = M$, $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$ – некоторое конечное (либо пустое) множество и выполнены следующие условия.

1) Для любого $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и множество $G_\infty \subset G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$, такие, что

а) выполнены соотношения $G(t, \varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup \{\varphi(x) : x \in G(t, \varepsilon) \setminus G_\infty\} = t \quad (1.16)$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t, \varepsilon_0) \setminus (G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t, \varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty \end{cases} \quad (1.17)$$

u -стабильна на множестве $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$;

б) существуют функции

$$\omega_k(\cdot) : G(t, \varepsilon_0) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

которые v -стабильны на множестве $G(t, \varepsilon_0) \setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G(t, \varepsilon_0)$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t, \varepsilon_0). \quad (1.18)$$

2) Для любых $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(\cdot)$ определена, непрерывна и обладает свойствами u - и v -стабильности на множестве

$$G^F(t, \varepsilon, \delta) = \begin{cases} \emptyset, & F_\varepsilon(t) = \emptyset; \\ F_\varepsilon(t) + \text{int } \mathbf{B}(0, \delta), & F_\varepsilon(t) \neq \emptyset, \end{cases}$$

где

$$F_\varepsilon(t) = F(t) \setminus G(t, \varepsilon).$$

3) Для любых $t \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и функции

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t, \varepsilon, \delta) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

где

$$G^B(t, \varepsilon, \delta) = \begin{cases} \emptyset, & B_\varepsilon(t) = \emptyset; \\ B_\varepsilon(t) + \text{int } \mathbf{B}(0, \delta), & B_\varepsilon(t) \neq \emptyset, \end{cases} \quad B_\varepsilon(t) = B(t) \setminus G(t, \varepsilon),$$

такие, что функции $\omega_k^\infty(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, v -стабильны на множестве $G^B(t, \varepsilon, \delta) \setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G^B(t, \varepsilon, \delta)$, и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t, \varepsilon, \delta) \setminus D(t). \quad (1.19)$$

4) Для любого $x_0 \in \Omega \setminus M$, такого, что $\varphi(x_0) = \Theta < \infty$, найдется последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset \Omega$, для которой $\varphi(x_k) < \varphi(x_0)$ и $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega. \quad (1.20)$$

Доказательство. Сначала докажем теорему для случая $\mathcal{T} = \emptyset$.

Предположим, что $\Theta = 0$. Тогда $\varphi(x) = 0$, $x \in \Omega$. В силу условия $D(0) = M$ теоремы получаем, что $\Omega = M$ и заключение теоремы очевидно. Далее будем считать, что $\Theta > 0$.

Пусть $t_* \in (0, \Theta)$. Для момента t_* выберем число $\varepsilon_0 > 0$, множество G_∞ и функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, о существовании которых говорится в условии 1) теоремы. Пусть функция $\omega(\cdot)$ определяется формулой (1.17) при $t = t_*$.

Для краткости будем использовать обозначения

$$D_* = D(t_*), \quad F_* = F(t_*), \quad B_* = B(t_*), \quad G_*(\varepsilon) = G(t_*, \varepsilon), \\ G_*^F(\varepsilon, \delta) = G^F(t_*, \varepsilon, \delta), \quad G_*^B(\varepsilon, \delta) = G^B(t_*, \varepsilon, \delta).$$

1°. Покажем, что найдется такое $\delta_* \in (0, \varepsilon_0)$, что

$$\varphi(x) - t_* = T(x; D_*), \quad x \in (\overline{F}_* + \mathbf{B}(0, \delta_*)) \setminus (G_\infty \cup D_*). \quad (1.21)$$

а) Пусть $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Найдется такое $\vartheta_1 > 0$, что из любой начальной точки $x_0 \in G_*(\varepsilon_1)$ допустимые траектории не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_1]$. В силу равенства (1.16) существует такое $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$, что

$$\omega(x) = \varphi(x) - t_* < \vartheta_1, \quad x \in G_*(\varepsilon_2) \setminus G_\infty. \quad (1.22)$$

Выберем $x_0 \in G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$. Поскольку все допустимые траектории из начальной точки x_0 не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_1]$, $\omega(x_0) < \vartheta_1$ и функция $\omega(\cdot)$ u -стабильна, то в силу леммы 1.1 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) \geq T(x_0; D_*). \quad (1.23)$$

Заметим, что $\omega(x_0) > 0$. Выберем произвольное число $\tau \in (0, \omega(x_0)]$. В силу условия (1.18) найдется такое $k \in \mathbf{N}$, что выполнены неравенства

$$\omega(x_0) - \tau < \omega_k(x_0) < \vartheta_1.$$

Кроме того, $\omega(x_0) - \tau \geq 0$. Функция $\omega_k(\cdot)$ v -стабильна на множестве $G_*(\varepsilon_0)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $G_*(\varepsilon_0) \cap D_*$. В силу леммы 1.2 справедливо неравенство

$$\omega(x_0) - \tau < T(x_0; D_*), \quad \tau \in (0, \omega(x_0)].$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ и учитывая соотношение (1.23), получаем равенство (1.21) во всех точках множества $G_*(\varepsilon_2) \setminus (G_\infty \cup D_*)$.

б) По условию теоремы найдется такое $\delta \in (0, \varepsilon_2]$, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна и u - и v -стабильна на множестве $G_*^F(\varepsilon_2, \delta)$. Пусть $\delta_1 \in (0, \delta)$. Выберем такое $\vartheta_2 \in (0, \vartheta_1]$, что из любой начальной точки $x_0 \in G_*^F(\varepsilon_2, \delta_1)$ допустимые траектории не покидают множество $G_*^F(\varepsilon_2, \delta)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_2]$. В силу непрерывности и u -стабильности функции $\varphi(\cdot)$ на множестве $G_*^F(\varepsilon_2, \delta)$ существует такое $\delta_* \in (0, \delta_1]$, что

$$\varphi(x) - t_* \leq \vartheta_2, \quad x \in G_*^F(\varepsilon_2, \delta_*).$$

В силу лемм 1.1, 1.2 для любой точки $x_0 \in G_*^F(\varepsilon_2, \delta_*)$ справедливы неравенства

$$\varphi(x_0) - t_* - \tau < T(x_0; D_*) \leq \varphi(x_0) - t_*, \quad \tau \in (0, \varphi(x_0) - t_*].$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем равенство (1.21) во всех точках множества $G_*^F(\varepsilon_2, \delta_*)$.

Поскольку

$$\overline{F}_* + \mathbf{B}(0, \delta_*) \subset G_*(\varepsilon_2) \cup G_*^F(\varepsilon_2, \delta_*),$$

то равенство (1.21) доказано.

2°. Покажем, что найдется $\vartheta > 0$, для которого выполнены соотношения

$$W(t; D_*) = D(t_* + t), \quad t \in [0, \vartheta], \quad (1.24)$$

где

$$W(t; D_*) = \{x \in R^n : T(x; D_*) \leq t\}.$$

Для значения δ_* найдем число $\delta_2 \in (0, \delta_*]$ и функции

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G_*^B(\delta_*, \delta_2) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

которые удовлетворяют свойствам, приведенным в условии 3) теоремы.

Пусть $\delta_3 \in (0, \delta_2)$. Выберем такое $\vartheta_3 \in (0, \vartheta_2]$, что из любой начальной точки $x_0 \in G_*^B(\delta_*, \delta_3)$ допустимые траектории не покидают множество $G_*^B(\delta_*, \delta_2)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_3]$.

Пусть $x_0 \in G_*^B(\delta_*, \delta_3) \setminus D_*$. В силу (1.19) выберем такое $k \in \mathbf{N}$, что $\omega_k^\infty(x_0) > \vartheta_3$. Поскольку функция $\omega_k^\infty(\cdot)$ v -стабильна на множестве $G_*^B(\delta_*, \delta_2)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $D_* \cap G_*^B(\delta_*, \delta_2)$, то в силу леммы 1.2 справедлива оценка

$$\vartheta_3 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G_*^B(\delta_*, \delta_3) \setminus D_*.$$

Таким образом,

$$W(\vartheta_3; D_*) \cap (G_*^B(\delta_*, \delta_3) \setminus D_*) = \emptyset. \quad (1.25)$$

Пусть $x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*)$. В силу (1.18) можно выбрать такое $k \in \mathbf{N}$, что $\omega_k(x_0) > \vartheta_3$. Поскольку функция $\omega_k(\cdot)$ v -стабильна на множестве $G_*(\varepsilon_0)$, равна нулю и непрерывна в точках множества $D_* \cap G_*(\varepsilon_0)$, и из начальной

точки x_0 все допустимые траектории не покидают множество $G_*(\varepsilon_0)$ на отрезке времени $[0, \vartheta_3]$, то в силу леммы 1.2 справедлива оценка

$$\vartheta_3 < T(x_0; D_*), \quad x_0 \in G_\infty \cap G_*(\delta_*).$$

Таким образом,

$$W(\vartheta_3; D_*) \cap G_\infty \cap G_*(\delta_*) = \emptyset. \quad (1.26)$$

Найдем такое $\vartheta \in (0, \vartheta_3]$, что для произвольной начальной точки $x_0 \notin D_* + \mathbf{B}(0, \delta_3)$ допустимые траектории не достигают множества D_* на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Имеем $T(x_0; D_*) > \vartheta$, $x_0 \notin D_* + \mathbf{B}(0, \delta_3)$. Следовательно,

$$W(\vartheta; D_*) \subset D_* + \mathbf{B}(0, \delta_3).$$

Учитывая соотношения (1.25), (1.26), получаем, что

$$W(\vartheta; D_*) \setminus D_* \subset (\overline{F_*} + \mathbf{B}(0, \delta_3)) \setminus (G_\infty \cup D_*).$$

В силу равенства (1.21) соотношения (1.24) выполнены.

3°. Выберем $\tau \in (0, \Theta)$. Определим функцию $\varphi_\tau(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ следующим образом:

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \tau, & x \in \Omega \setminus D(\tau); \\ 0, & x \in D(\tau). \end{cases}$$

Покажем, что

$$T(x; D(\tau)) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.27)$$

Для краткости положим

$$D_\tau = D(\tau), \quad E(t) = D(\tau + t).$$

Пусть

$$\gamma = \sup\{\vartheta \in [0, \Theta - \tau) : W(t; D_\tau) = E(t), \quad t \in [0, \vartheta]\}.$$

Из результатов раздела 2° следует, что $\gamma > 0$.

Покажем, что

$$\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau), \quad x \in \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} E(\vartheta). \quad (1.28)$$

Пусть

$$\vartheta \in [0, \gamma), \quad x \in E(\vartheta), \quad t = T(x; D_\tau), \quad t_1 = \varphi_\tau(x).$$

В силу равенства $E(\vartheta) = W(\vartheta; D_\tau)$ имеем $t, t_1 \in [0, \vartheta]$. Следовательно,

$$W(t; D_\tau) = E(t), \quad W(t_1; D_\tau) = E(t_1).$$

Поскольку $x \in W(t; D_\tau) \cap E(t_1)$, то $x \in W(t_1; D_\tau) \cap E(t)$. Отсюда получаем, что

$$\varphi_\tau(x) \leq t, \quad T(x; D_\tau) \leq t_1,$$

и равенство (1.28) доказано.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\gamma = \infty$. Возможны два варианта:

$$\Omega = \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta) \quad \text{и} \quad \Omega \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta) \neq \emptyset.$$

Для последнего варианта выберем $x \in \Omega \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta)$. Имеем $\varphi_\tau(x) = \infty$. Учитывая определение величины γ , находим, что $x \notin \cup_{\vartheta \geq 0} W(\vartheta; D_\tau)$, и, следовательно, $T(x; D_\tau) = \infty$. Таким образом, $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau) = \infty$. В силу (1.28) соотношения (1.27) для случая 1 доказаны.

Случай 2: $0 < \gamma < \infty$. Выберем $x \in E(\gamma) \setminus \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} E(\vartheta)$. Имеем $\varphi_\tau(x) = \gamma$. Учитывая определение величины γ , находим, что $x \notin \cup_{\vartheta \in [0, \gamma)} W(\vartheta; D_\tau)$, и, следовательно, $T(x; D_\tau) \geq \gamma$.

В силу свойств u -стабильности из условий 1), 2) и в силу условия 4) теоремы найдется такая последовательность $\{x_k\}_1^\infty$, что $\varphi(x_k) < \varphi(x)$ и $x_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$. Имеем

$$t_k = \varphi_\tau(x_k) = \varphi(x_k) - \tau < \varphi(x) - \tau = \gamma, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Учитывая полунепрерывность снизу функции $\varphi(\cdot)$, получаем, что $t_k \rightarrow \gamma$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$ и $x_k \in E(t_k)$, то справедливо неравенство $T(x_k; D_\tau) \leq t_k$. Принимая во внимание полунепрерывность снизу функции $T(\cdot; D_\tau)$, имеем

$$\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k \geq \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k; D_\tau) \geq T(x; D_\tau) \geq \gamma.$$

Следовательно, $T(x; D_\tau) = \gamma$.

В силу (1.28) доказано равенство

$$\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau), \quad x \in E(\gamma). \quad (1.29)$$

Покажем, что

$$E(\gamma) = W(\gamma; D_\tau). \quad (1.30)$$

Включение $E(\gamma) \subseteq W(\gamma; D_\tau)$ следует из (1.29). Докажем обратное включение. Пусть $\hat{x} \in W(\gamma; D_\tau)$ и $\hat{t} = T(\hat{x}; D_\tau)$. Имеем $\hat{t} \leq \gamma$.

Предположим, что $\hat{t} < \gamma$. Учитывая определение величины γ , находим, что

$$\hat{x} \in W(\hat{t}; D_\tau) = E(\hat{t}) \subseteq E(\gamma).$$

Предположим, что $\hat{t} = \gamma$. Поскольку $\gamma > 0$, то $\hat{t} > 0$ и $\hat{x} \notin D_\tau$. В силу u -стабильности функции $T(\cdot; D_\tau)$ найдется такая последовательность $\{y_k\}_1^\infty$, что $t_k = T(y_k; D_\tau) < \gamma$ и $y_k \rightarrow \hat{x}$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $W(t_k; D_\tau) = E(t_k)$ и $y_k \in W(t_k; D_\tau)$, то $y_k \in E(t_k) \subseteq E(\gamma)$. В силу замкнутости множества $E(\gamma)$ получаем включение $\hat{x} \in E(\gamma)$.

Таким образом, равенство (1.30) доказано.

Из результатов пункта 2°, равенства (1.30) и определения числа γ следует, что $\gamma = \Theta - \tau$. В силу (1.28) и (1.29) справедливы соотношения (1.27) для случая 2.

Пусть $x_* \in \Omega \setminus M$. Тогда при малых $\tau > 0$ имеем равенство $\varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*) - \tau$. В силу леммы 1.3 и равенства (1.27) получаем

$$T(x_*; M) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; D(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана для случая $\mathcal{T} = \emptyset$.

Предположим теперь, что $\mathcal{T} = \{a_1\}$, $a_1 \in (0, \Theta)$. Доказательство, аналогичное случаю $\mathcal{T} = \emptyset$, примененное к функции $\varphi(\cdot) : D(a_1) \rightarrow [0, \infty)$, дает равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in D(a_1)$. Далее, вводя обозначения

$$M_1 = D(a_1), \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a_1, & x \in \Omega \setminus M_1; \\ 0, & x \in M_1, \end{cases}$$

аналогичное доказательство применяем к функции $\varphi_1(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ и дифференциальной игре с терминальным множеством M_1 . Получаем равенство $\varphi_1(x) = T(x; M_1)$, $x \in \Omega$. Используя соотношение $T(x; M_1) = T(x; M) - a_1$, находим, что $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in \Omega$.

Аналогичные рассуждения проводятся для случая любого конечного множества $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$. $\square$

1.5 Теорема 2 о достаточных условиях

В данном разделе будет доказана еще одна теорема о достаточных условиях совпадения разрывной функции с функцией цены игры. Условия теоремы предполагают полунепрерывность снизу и u -стабильность тестируемой функции, v -стабильность верхнего замыкания тестируемой функции, а также выполнение условия *корректной сжимаемости* замкнутых множеств уровня тестируемой функции. Проверка условия корректной сжимаемости замкнутого множества представляет собой самостоятельную задачу, решение которой в общем случае неочевидно. Поэтому в дальнейшем условия теоремы 2 на примерах не проверяются.

1.5.1 Корректно сжимаемые множества

Пусть $\mathbf{M} \subset R^n$ – замкнутое множество, $\text{int } \mathbf{M}$ – внутренность множества $\mathbf{M}$. При условии $\text{int } \mathbf{M} \neq \emptyset$ положим

$$\mathbf{M}^{[\varepsilon]} = \{x \in \mathbf{M} : \mathbf{B}(x, \varepsilon) \subseteq \mathbf{M}\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\varepsilon_{\mathbf{M}} = \max\{\varepsilon > 0 : \mathbf{M}^{[\varepsilon]} \neq \emptyset\}.$$

В дальнейшем понадобится следующее утверждение.

Лемма 1.4. Пусть $\mathbf{M}$ – замкнутое множество, $\text{int } \mathbf{M} \neq \emptyset$, $x_* \in R^n$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x_*; \mathbf{M}). \quad (1.31)$$

Тогда функция $T(\cdot; \mathbf{M})$ непрерывна в точке x_* .

Доказательство. Пусть $\vartheta_* = T(x_*; \mathbf{M})$. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}_1^\infty$, сходящуюся к x_* . Требуется доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n; \mathbf{M}) = \vartheta_*. \quad (1.32)$$

Учитывая полунепрерывность снизу функции $T(\cdot; \mathbf{M})$, имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \geq \vartheta_*. \quad (1.33)$$

Отсюда находим, что если $\vartheta_* = \infty$, то (1.32) выполнено. Кроме того, если $x_* \in \text{int } \mathbf{M}$, то равенство (1.32) также справедливо.

Предположим, что $\vartheta_* < \infty$ и $x_* \notin \text{int } \mathbf{M}$. Пусть $\tau > 0$. В силу соотношения (1.31) найдется такое $\varepsilon > 0$, что $T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) \leq \vartheta_* + \tau$. Следовательно,

существует [6] множество $\mathbf{W} \subset [0, \vartheta_* + \tau] \times R^n$, обладающее свойством u -стабильности относительно множества $[0, \vartheta_* + \tau] \times \mathbf{M}^{[\varepsilon]}$, и $(0, x_*) \in \mathbf{W}$.

Если первый игрок использует стратегию экстремального прицеливания на множество $\mathbf{W}$, а за второго игрока реализуется измеримое программное управление $v(\cdot)$ со значениями в множестве Q , то для возникающего конструктивного движения $x(\cdot)$ системы (1.1) из начальной точки x_n справедлива [6, стр. 62] оценка

$$\min_{t \in [0, \vartheta_* + \tau]} \text{dist}(x(t), \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) \leq \|x_* - x_n\| \exp(L(\mathcal{X})(\vartheta_* + \tau)).$$

Здесь $L(\mathcal{X})$ – постоянная Липшица по x функции f в некоторой ограниченной области $\mathcal{X} \subset R^n$, содержащей все рассматриваемые движения, $\text{dist}(x(t), \mathbf{M}^{[\varepsilon]})$ – расстояние от точки $x(t)$ до множества $\mathbf{M}^{[\varepsilon]}$. Следовательно, если

$$\|x_* - x_n\| \leq \varepsilon \exp(-L(\mathcal{X})(\vartheta_* + \tau)),$$

то

$$\min_{t \in [0, \vartheta_* + \tau]} \text{dist}(x(t), \mathbf{M}) \leq 0 \quad \text{и} \quad T(x_n; \mathbf{M}) \leq \vartheta_* + \tau.$$

Учитывая (1.33), имеем

$$\vartheta_* = T(x_*; \mathbf{M}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} T(x_n; \mathbf{M}) \leq \vartheta_* + \tau.$$

Переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем (1.32). $\square$

Определение 1.4. Множество $\mathbf{M} \subset R^n$ называется *корректно сжимаемым* по отношению к динамике (1.1), если существует такое число $\vartheta > 0$, что

(C1) $W(\vartheta; \mathbf{M}) \neq \mathbf{M}$ и $W(t; \mathbf{M}) = \overline{\text{int } W(t; \mathbf{M})}$, $t \in [0, \vartheta]$;

(C2) для любой точки $x \in \text{int } W(\vartheta; \mathbf{M}) \setminus \mathbf{M}$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x; \mathbf{M}).$$

Здесь множество $W(t; \mathbf{M})$ определяется формулой (1.11).

Заметим, что если $W(\vartheta; \mathbf{M}) \neq \mathbf{M}$, то в силу свойства u -стабильности функция $T(\cdot; \mathbf{M})$ должна принимать все значения из интервала $(0, \vartheta)$. Отсюда получаем, что для корректно сжимаемого множества $\mathbf{M}$ величина $\vartheta > 0$, удовлетворяющая условиям (C1) и (C2), может быть выбрана сколь угодно малой.

Приведем простейшие условия корректной сжимаемости множества $\mathbf{M}$.

Пусть множество $\mathbf{M}$ имеет гладкую границу $\partial\mathbf{M}$, $\mathbf{M} = \overline{\text{int } \mathbf{M}}$ и для любой точки $x \in \partial\mathbf{M}$ выполнено неравенство

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle \nu(x), f(x, u, v) \rangle < 0, \quad (1.34)$$

где $\nu(x)$ – внешняя нормаль к множеству $\mathbf{M}$ в точке $x \in \partial\mathbf{M}$.

Покажем, что множество $\mathbf{M}$ корректно сжимаемо. Выберем $\vartheta > 0$ и $x_* \in W(\vartheta; \mathbf{M})$. Из условия (1.34) и определения цены игры следует, что для любого $\tau > 0$ первый игрок гарантирует попадание из точки x_* на множество $\text{int } \mathbf{M}$ на отрезке времени $[0, T(x_*; \mathbf{M}) + \tau]$. Следовательно, найдется такое $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\tau) > 0$, что

$$T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon_*]}) \leq T(x_*; \mathbf{M}) + \tau \leq T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon_*]}) + \tau.$$

Имеем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) \leq T(x_*; \mathbf{M}) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}).$$

Учитывая невозрастание значений $T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = T(x_*; \mathbf{M}).$$

Таким образом, для любого $\vartheta > 0$ условие (C2) из определения корректной сжимаемости множества выполнено.

Для любого $x_* \in R^n \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} W(\vartheta; \mathbf{M})$ имеем

$$T(x_*; \mathbf{M}) = T(x_*; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}) = \infty, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\mathbf{M}}].$$

В силу леммы 1.4 получаем непрерывность функции цены $T(\cdot; \mathbf{M})$ на R^n . Заметим, что условия непрерывности функции цены при более слабых предположениях на множество $\mathbf{M}$ доказаны ранее [32].

Справедливость условия (C1) для любого $\vartheta > 0$ следует из непрерывности функции $T(\cdot; \mathbf{M})$ и свойства u -стабильности.

Таким образом, множество $\mathbf{M}$ является корректно сжимаемым.

Более сложные достаточные условия корректной сжимаемости множеств связаны с разрывной функцией цены и в работе не рассматриваются.

1.5.2 Формулировка и доказательство теоремы

Теорема 2. Пусть $\Omega \subseteq R^n$ и $M \subseteq \Omega$ – замкнутые множества, функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ полунепрерывна снизу и выполнены условия:

$$(A1) \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in M;$$

(A2) (u -стабильность) для любых $y_0 \in \Omega \setminus M$, $v_* \in Q$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow \Omega$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u, v_*) : u \in P\}, \quad y(0) = y_0,$$

что либо выполнено неравенство

$$\varphi(y(\tau)) \leq \varphi(y_0) - \tau,$$

либо $y(t) \in M$ для некоторого $t \in [0, \tau]$;

(A3) (v -стабильность) для любых $y_0 \in \Omega \setminus M$, $u_* \in P$ и $\tau > 0$ существует такое решение $y(\cdot) : [0, \tau] \rightarrow R^n$ дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \text{co} \{f(y(t), u_*, v) : v \in Q\}, \quad y(0) = y_0,$$

что выполнено неравенство

$$\varphi^*(y(\tau)) \geq \varphi^*(y_0) - \tau,$$

где

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \limsup_{z \rightarrow x} \varphi(z), & x \in \text{int } \Omega; \\ \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), & x \notin \text{int } \Omega, \end{cases} \quad (1.35)$$

(A4) множества уровня

$$D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \leq t\}, \quad 0 < t < \sup_{z \in \Omega} \varphi(z),$$

являются корректно сжимаемыми.

Тогда

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega. \quad (1.36)$$

Полунепрерывную сверху функцию $\varphi^*(\cdot) : R^n \rightarrow [0, \infty]$, определяемую формулой (1.35), будем называть верхним замыканием функции $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$.

Замечание 1. Пусть для функции $\varphi(\cdot)$ выполнены условия (A1)–(A3) и условие корректной сжимаемости множеств $D(t)$ нарушено лишь в некоторой точке $a \in (0, \sup_{z \in \Omega} \varphi(z))$. Тогда теорему о достаточных условиях можно применить сначала к функции $\varphi(\cdot) : D(a) \rightarrow [0, \infty)$. Это даст равенство $\varphi(x) = T(x; M)$, $x \in D(a)$. Далее, вводя обозначения

$$M_1 = D(a), \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) - a, & x \notin M_1; \\ 0, & x \in M_1, \end{cases}$$

теорему можно применить к функции $\varphi_1(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ и дифференциальной игре с терминальным множеством M_1 . Отсюда, используя соотношение $T(x; M_1) = T(x; M) - a$, получаем равенство $\varphi(x) = T(x; M)$ для всех $x \in \Omega$.

Аналогичным образом теорема может быть применена в случае, когда корректная сжимаемость множеств уровня $D(t)$ функции $\varphi(\cdot)$ нарушена в конечном числе точек из интервала $(0, \sup_{z \in \Omega} \varphi(z))$.

Замечание 2. Из свойства u -стабильности функции цены и свойства v -стабильности верхнего замыкания функции цены следует, что условия (A1)–(A3) являются необходимыми для функции цены игры $T(\cdot; M) : R^n \rightarrow [0, \infty]$.

После доказательства теоремы будет приведен пример, показывающий, что в случае разрывной функции $\varphi(\cdot)$ условий (A1)–(A3) недостаточно для выполнения равенства (1.36), т.е. нельзя отказаться от условия (A4).

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1.5. Пусть замкнутое множество $M \subset R^n$ и полунепрерывная снизу функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ удовлетворяют условиям (A1) и (A2). Тогда $T(x_0; M) \leq \varphi(x_0)$, $x_0 \in \Omega$.

Доказательство. Если $x_0 \in M$, то по условию (A1) имеем

$$\varphi(x_0) = T(x_0; M) = 0.$$

Если $x_0 \in \Omega \setminus M$ и $\varphi(x_0) = \infty$, то $T(x_0; M) \leq \infty = \varphi(x_0)$.

Пусть $x_0 \in \Omega \setminus M$, $\vartheta_* = \varphi(x_0) < \infty$, $\vartheta_0 = T(x_0; M)$. Покажем, что $\vartheta_0 \leq \vartheta_*$.

Рассмотрим множество

$$W_* = \{(t, x) \in [0, \vartheta_*] \times \overline{R^n \setminus M} : \varphi(x) \leq \vartheta_* - t\}.$$

Из условия (A2) следует, что W_* – u -стабильный мост [6] в задаче приведения точки $(t, x(t))$ на множество $[0, \vartheta_*] \times M$. Так как $(0, x_0) \in W_*$, то первый игрок обладает [6] позиционной стратегией, гарантирующей попадание на множество M на отрезке времени $[0, \vartheta_*]$.

Из определения цены игры, для любого $\delta > 0$ второй игрок обладает позиционной стратегией, гарантирующей уклонение от окрестности множества M на отрезке времени $[0, \vartheta_0 - \delta]$ при любых действиях первого игрока. Отсюда имеем неравенство $\vartheta_0 - \delta < \vartheta_*$ для любого $\delta > 0$. Следовательно, $\vartheta_0 \leq \vartheta_*$. $\square$

Лемма 1.6. Пусть замкнутое множество $M \subset R^n$ и полунепрерывная снизу функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ удовлетворяют условиям (A1) и (A3). Кроме того, пусть $\text{int } M \neq \emptyset$. Тогда $\varphi^*(x_0) \leq T(x_0; M^{[\varepsilon]})$, $x_0 \in R^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_M]$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in R^n$ и $\vartheta^* = \varphi^*(x_0) < \infty$. Положим

$$W^* = \{(t, x) \in [0, \vartheta^*] \times R^n : \varphi^*(x) \geq \vartheta^* - t\}.$$

Из условия (A3) следует, что W^* – v -стабильное множество [6]. Так как $(0, x_0) \in W^*$, то второй игрок обладает [6] позиционной стратегией, гарантирующей удержание системы в множестве W^* на отрезке времени $[0, \vartheta^*]$. Поскольку

$$([0, \vartheta^*] \times M^{[\varepsilon]}) \cap W^* = \emptyset, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M],$$

то второй игрок уклоняется от некоторой окрестности множества $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, \vartheta^*]$ при любых действиях первого игрока. Но первый игрок обладает позиционной стратегией, гарантирующей попадание на $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, T(x_0; M^{[\varepsilon]})]$. Таким образом, $\vartheta^* < T(x_0; M^{[\varepsilon]})$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_M]$.

Пусть $x_0 \in R^n$ и $\varphi^*(x_0) = \infty$. Положим

$$W_\infty = [0, \infty) \times \{x \in R^n : \varphi^*(x) = \infty\}.$$

Множество W_∞ замкнуто и $(0, x_0) \in W_\infty$. Из условия (A3) следует, что W_∞ – v -стабильное множество. Поскольку $\varphi^*(x) = 0$ для любого $x \in \text{int } M$, то

$$([0, \infty) \times \text{int } M) \cap W_\infty = \emptyset.$$

Следовательно,

$$([0, \infty) \times M^{[\varepsilon]}) \cap W_\infty = \emptyset, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_M].$$

Отсюда получаем, что для любого $\vartheta > 0$ второй игрок обладает [6] позиционной стратегией, гарантирующей уклонение от окрестности множества $M^{[\varepsilon]}$ на отрезке времени $[0, \vartheta]$. Значит, $T(x_0; M^{[\varepsilon]}) = \infty$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_M]$. $\square$

Доказательство теоремы. Если $M = \Omega$, то заключение теоремы очевидно выполнено.

Пусть $M \neq \Omega$. Условие (A1) дает соотношение $W(0; M) = M \subseteq D(0)$. Из условия (A2) u -стабильности следует отсутствие точек локального минимума функции $\varphi(\cdot)$ вне множества M , в которых она принимает конечные значения. Таким образом, получаем равенство $W(0; M) = D(0)$.

Поскольку $M \neq \Omega$ и $D(0) = M$, то $\sup_{x \in \Omega} \varphi(x) > 0$.

Выберем $\tau \in (0, \sup_{x \in \Omega} \varphi(x))$. Пусть

$$\varphi_\tau(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \tau, & x \notin D(\tau); \\ 0, & x \in D(\tau). \end{cases}$$

Покажем, что

$$T(x; D(\tau)) = \varphi_\tau(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.37)$$

Для краткости положим $D_\tau = D(\tau)$. Множество D_τ и полунепрерывная снизу функция $\varphi_\tau(\cdot)$ удовлетворяют условиям (A1)–(A4), в которых обозначения M и $\varphi(\cdot)$ заменены на D_τ и $\varphi_\tau(\cdot)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Theta &= \sup_{x \in \Omega} \varphi_\tau(x), \quad E(t) = \{x \in \Omega : \varphi_\tau(x) \leq t\}, \\ \gamma &= \sup\{\vartheta \in [0, \Theta) : W(t; D_\tau) = E(t) \forall t \in [0, \vartheta]\}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Заметим, что для любых $\vartheta \in [0, \gamma)$ и $x \in E(\vartheta)$ выполнено равенство $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$. Действительно, пусть $t = T(x; D_\tau)$. Поскольку $E(\vartheta) = W(\vartheta; D_\tau)$, имеем $t \in [0, \vartheta]$ и $x \in W(t; D_\tau) = E(t)$. В силу леммы 1.5 выполнено неравенство $t \leq \varphi_\tau(x)$. С другой стороны, поскольку $x \in E(t)$, то $\varphi_\tau(x) \leq t$. Следовательно, $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: $\gamma = \infty$. Для любых $\vartheta \geq 0$ и $x \in E(\vartheta)$ имеем $\varphi_\tau(x) = T(x; D_\tau)$. Если $x \in \Omega \setminus \cup_{\vartheta \geq 0} E(\vartheta)$, то, учитывая (1.38), находим, что $x \notin \cup_{\vartheta \geq 0} W(\vartheta; D_\tau)$, и, следовательно, $T(x; D_\tau) = \infty$. В силу леммы 1.5

получаем равенство $\varphi_\tau(x) = \infty$. Таким образом, соотношение (1.37) доказано.

Случай 2: $\gamma < \infty$ и $\gamma = \Theta$. Если $x \in E(\vartheta)$ для некоторого $\vartheta \in [0, \gamma)$, то равенство (1.37) выполнено.

Пусть $x \in \Omega \setminus \bigcup_{\vartheta \in [0, \gamma)} E(\vartheta)$.

Покажем, что $T(x; D_\tau) \geq \gamma$. Предположим, что $\bar{t} = T(x; D_\tau) < \gamma$. Тогда $x \in W(\bar{t}; D_\tau) = E(\bar{t})$, что противоречит выбору точки x .

Учитывая лемму 1.5, имеем

$$\Theta \geq \varphi_\tau(x) \geq T(x; D_\tau) \geq \gamma = \Theta.$$

Таким образом, равенство (1.37) доказано.

Случай 3: $\gamma \in [0, \Theta)$. Введем обозначения

$$\mathbf{M} = E(\gamma), \quad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_\tau(x) - \gamma, & x \notin \mathbf{M}; \\ 0, & x \in \mathbf{M}, \end{cases}$$

$$\mathbf{D}(t) = \{x \in \Omega : \tilde{\varphi}(x) \leq t\}.$$

Имеем $\sup_{x \in \Omega} \tilde{\varphi}(x) = \Theta - \gamma$.

Множество $\mathbf{M}$ и полунепрерывная снизу функция $\tilde{\varphi}(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ удовлетворяют условиям (A1)–(A3), в которых обозначения M и $\varphi(\cdot)$ заменены на $\mathbf{M}$ и $\tilde{\varphi}(\cdot)$. Учитывая условие (A4) теоремы и равенство $\mathbf{M} = D(\tau + \gamma)$, где $0 < \tau + \gamma < \sup_{x \in \Omega} \varphi(x)$, находим, что множество $\mathbf{M}$ корректно сжимаемо. Следовательно, существует такое $\vartheta > 0$, что выполнены условия (C1) и (C2). Число ϑ выберем так, что $\vartheta < \Theta - \gamma$.

Покажем, что

$$W(t; \mathbf{M}) = \mathbf{D}(t), \quad t \in (0, \vartheta). \quad (1.39)$$

Выберем $t \in (0, \vartheta)$. Учитывая лемму 1.5, получаем

$$\mathbf{D}(t) \subseteq W(t; \mathbf{M}) = \overline{\text{int } W(t; \mathbf{M})}.$$

Предположим, что

$$W(t; \mathbf{M}) \setminus \mathbf{D}(t) \neq \emptyset. \quad (1.40)$$

Так как $\tilde{\varphi}(\cdot)$ – полунепрерывная снизу функция, то $\mathbf{D}(t)$ – замкнутое множество. Пусть $x \in \text{int } W(t; \mathbf{M}) \setminus \mathbf{D}(t)$. Имеем $T(x; \mathbf{M}) \in (0, t]$. Если $x \in \Omega$, то из соотношения $x \notin \mathbf{D}(t)$ получаем неравенство $t < \tilde{\varphi}(x)$. Таким образом, $t < \tilde{\varphi}^*(x)$, где $\tilde{\varphi}^*(\cdot)$ – верхнее замыкание функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$, определяемое

формулой (1.35). Если $x \notin \Omega$, то $\tilde{\varphi}^*(x) = \Theta - \gamma > t$. Следовательно,

$$T(x; \mathbf{M}) \leq t < \tilde{\varphi}^*(x). \quad (1.41)$$

С другой стороны, на основании леммы 1.6 выполнено неравенство

$$\tilde{\varphi}^*(x) \leq T(x; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_{\mathbf{M}}].$$

Из условия (C2) корректной сжимаемости множества $\mathbf{M}$ получаем, что

$$T(x; \mathbf{M}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} T(x; \mathbf{M}^{[\varepsilon]}).$$

Следовательно, $\tilde{\varphi}^*(x) \leq T(x; \mathbf{M})$, что противоречит (1.41). Таким образом, предположение (1.40) неверно, и свойство (1.39) доказано.

Учитывая соотношения

$$W(t; \mathbf{M}) = W(\gamma + t; D_\tau), \quad \mathbf{D}(t) = E(\gamma + t), \quad t \in (0, \vartheta),$$

получаем равенство $W(t; D_\tau) = E(t)$ для любого $t \in [0, \gamma + \vartheta)$, что противоречит определению γ . Следовательно, случай $\gamma \in [0, \Theta)$ невозможен.

Таким образом, соотношение (1.37) доказано.

Пусть $x_* \in \Omega \setminus M$. Тогда при малых $\tau > 0$ имеем $\varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*) - \tau$. В силу леммы 1.3 и равенства (1.37) получаем

$$T(x_*; M) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T(x_*; D(\tau)) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \varphi_\tau(x_*) = \varphi(x_*),$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

1.5.3 Пример

Приведем пример, показывающий, что в случае разрывной функции $\varphi(\cdot)$ нельзя отказаться от условия (A4).

Пусть динамика системы имеет вид

$$\dot{x} = Ax + u + v, \quad x \in R^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (1.42)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \{u \in R^2 : u_1 = 0, |u_2| \leq 1\},$$

$$Q = \{v \in R^2 : |v_1| + |v_2| \leq 1\}.$$

Множество M зададим с помощью системы неравенств

$$\begin{aligned}(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 &\geq (\sqrt{2})^2, & x_1 &\geq 2, \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 &\leq (3\sqrt{2})^2, & x_2 &\geq 1.\end{aligned}$$

Если управляющие воздействия игроков постоянны, т.е. $u(t) = u^*$, $v(t) = v^*$, то движение $x(t)$ системы (1.42) представляет собой вращение по часовой стрелке вокруг точки x^c , которая является нулем правой части системы (1.42). Точку x^c находим из равенства $Ax^c + u^* + v^* = 0$. Поскольку $A^{-1} = -A$, то

$$x^c = A(u^* + v^*). \quad (1.43)$$

Действие матрицы A на вектор представляет собой поворот вектора на угол $\pi/2$ по часовой стрелке.

1°. Пусть $m_1 = (2, 2)^T$, $m_2 = (-2, 2)^T$, l – меньшая дуга окружности радиуса $2\sqrt{2}$ с центром в начале координат, соединяющая точки m_1 и m_2 . Покажем, что

$$T(x; M) = \infty, \quad x \in R^2 \setminus (l \cup M). \quad (1.44)$$

Положим

$$\begin{aligned}Z_1 &= \{x \in R^2 : x_2 < x_1, \quad x_1 > 0, \quad x_2 \geq 0\}, \\ Z_2 &= \{x \in R^2 : x_2 < -x_1, \quad x_1 < 0, \quad x_2 \geq 0\}, \\ l_1 &= \{x \in Z_1 : (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2\}, \\ l_2 &= \{x \in Z_2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2\}.\end{aligned}$$

Обозначим через Z_i^- , $i = 1, 2$, часть множества Z_i , состоящую из точек, лежащих строго ниже дуги l_i . Пусть

$$Z_i^+ = Z_i \setminus Z_i^-, \quad Z = \{x \in R^2 : x_2 \geq |x_1|\},$$

Z^- (Z^+) – часть множества Z , лежащая строго ниже (выше) дуги l . Множества $Z^\pm$, $Z_1^\pm$, $Z_2^\pm$ показаны на рис. 1.1.

Определим на множестве $R^2 \setminus (l \cup M)$ стратегию V^0 второго игрока:

$$V^0(x) = \begin{cases} (0, \pm 1)^T, & x \in Z^\pm; \\ (\pm 1, 0)^T, & x \in Z_1^\pm \cup Z_2^\pm; \\ v \in Q, & x_2 < 0. \end{cases}$$

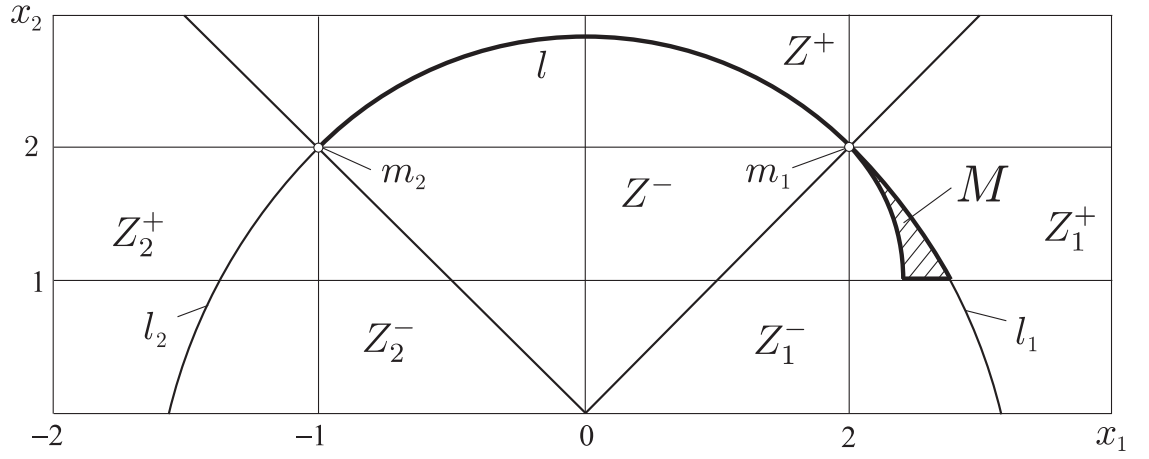


Рис. 1.1: Пример: построение функции цены

Покажем, что стратегия V^0 не допускает попадание траектории системы на множество $l \cup M$ из любой начальной точки $x_0 \in R^2 \setminus (l \cup M)$.

Пусть $x_0 \in Z^+$. Тогда до выхода из множества Z^+ второй игрок применяет постоянное управление $v^* = (0, 1)^T$. Если первый игрок использует управление $u^* \in P$, то из (1.43) получаем следующие условия на координаты центра вращения:

$$0 \leq x_1^c \leq 2, \quad x_2^c = 0.$$

Следовательно, при любых действиях первого игрока, траектория системы (1.42) будет лежать не ниже дуги окружности радиуса $\|x_0\|$ с центром в начале координат и при выходе из Z^+ пересечет прямую $x_1 = x_2$ выше точки m_1 . Аналогично, для множества Z^- имеем

$$-2 \leq x_1^c \leq 0, \quad x_2^c = 0.$$

Поэтому траектория системы (1.42) будет лежать не выше дуги окружности радиуса $\|x_0\|$ с центром в начале координат и при выходе из Z^- окажется на линии $x_1 = |x_2|$ ниже точек m_1 и m_2 .

Пусть $x_0 \in Z_1^+ \cup Z_2^-$. Тогда до выхода из множества $Z_1^+ \cup Z_2^-$ второй игрок применяет постоянное управление $v^* = (1, 0)^T$. Из (1.43) получаем условия на координаты центра вращения:

$$-1 \leq x_1^c \leq 1, \quad x_2^c = -1.$$

Следовательно, при выходе из Z_1^+ траектория системы (1.42) пересекает прямую $x_2 = 0$ строго выше (правее) дуги l_1 , а при выходе из Z_2^- — прямые $x_2 = -x_1$ и $x_2 = 0$ строго ниже (правее) дуги l_2 при любых действиях первого игрока.

Пусть $x_0 \in (Z_1^- \cup Z_2^+) \setminus M$. Тогда до выхода из множества $Z_1^- \cup Z_2^+$ второй игрок применяет постоянное управление $v^* = (-1, 0)^T$. Из (1.43) получаем условия на координаты центра вращения:

$$-1 \leq x_1^c \leq 1, \quad x_2^c = 1.$$

Следовательно, при выходе из Z_2^+ траектория системы пересекает прямую $x_2 = -x_1$ выше точки m_2 , а при движении в Z_1^- не пересекает множество M и попадает либо на прямую $x_2 = 0$ строго ниже (левее) дуги l_1 , либо на прямую $x_2 = x_1$ строго ниже точки m_1 . Таким образом, равенство (1.44) доказано.

2°. Найдем значение $T(x; M)$ цены игры для любого $x \in l$. Пусть в некоторый момент времени t система находится в точке $z = z(t) \in l$. Для любого $\bar{v} = \bar{v}(t) \in Q$ определим такое $\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{v}) \in P$, что вектор скорости будет направлен по касательной к дуге l . Поскольку касательная к дуге l в точке z перпендикулярна вектору z , то

$$z_1(z_2 + \bar{v}_1) + z_2(-z_1 + \bar{v}_2 + \bar{u}_2) = 0.$$

Выражая отсюда величину $\bar{u}_2$ и учитывая ограничение $\bar{u} \in P$, получаем

$$\bar{u}(t, \bar{v}) = (0, -z_1\bar{v}_1/z_2 - \bar{v}_2)^T.$$

Самое медленное движение по дуге l будет при выборе вторым игроком управления $\bar{v} = v^*(t)$ из условия минимизации величины

$$\|Az(t) + \bar{u}(t, \bar{v}) + \bar{v}\|^2 = (z_2 + \bar{v}_1)^2 + (z_1 + z_1\bar{v}_1/z_2)^2$$

по всем $\bar{v} \in Q$. Имеем $v^*(t) = (-1, 0)^T$.

Пусть $z(0) = m_2$ и в момент t игроки применяют управляющие воздействия $v^*(t)$ и $u^*(t) = \bar{u}(t, v^*(t))$. Тогда траектория $z(t)$ системы (1.42) идет вдоль дуги l и описывается уравнениями

$$\dot{z}_1 = z_2 - 1, \quad \dot{z}_2 = -z_1 + z_1/z_2.$$

Время попадания траектории $z(t)$ в точку m_1 конечно. Действительно, поскольку $z_2(t) \geq 2$, $t \in [-2, 2]$, то $\dot{z}_1 = z_2 - 1 \geq 1$ и момент ϑ_* , определяемый условием $z(\vartheta_*) = m_1$, оценивается неравенством

$$\vartheta_* = \int_0^{\vartheta_*} dt \leq \int_{-2}^2 dz_1 = 4.$$

Для любого $x \in l$ обозначим через $\tau(x)$ момент времени t , удовлетворяющий равенству $z(t) = x$. Таким образом, $\tau(x)$ – это наибольшее время попадания из точки m_2 в точку x при движении вдоль l и дискриминации второго игрока. Имеем $\tau(m_1) = \vartheta_*$, $\tau(m_2) = 0$. Учитывая результат, полученный в разделе 1°, заключаем, что множество

$$W_* = \{(t, x) : t \in [0, \tau(x)], x \in l \cup M\}$$

является максимальным u -стабильным мостом в задаче сближения с множеством $[0, \vartheta_*] \times M$. Имеем $(\tau(x), x) \in W_*$, $x \in l$.

Используя стратегию экстремального прицеливания на множество W_* , первый игрок гарантирует из точки m_2 достижение множества M на отрезке времени $[0, \vartheta_*]$. При оптимальном управлении второго игрока время достижения M равно ϑ_* . Для произвольной точки $x_0 \in l$ находим, что

$$T(x_0; M) = \vartheta_* - \tau(x_0).$$

3°. Пусть $\varphi(x) = 2T(x; M)$, $x \in R^2$. Из свойства u -стабильности функции $T(\cdot; M)$ следует, что функция $\varphi(\cdot)$ также обладает свойством u -стабильности. Поскольку $\varphi^*(x) = T^*(x; M)$, $x \in R^2$, то функция $\varphi^*(\cdot)$ обладает свойством v -стабильности. Здесь $T^*(\cdot; M)$, $\varphi^*(\cdot)$ – верхние замыкания функций $T(\cdot; M)$, $\varphi(\cdot)$, определяемые формулой (1.35), где $\Omega = R^2$.

Таким образом, для функции $\varphi(\cdot) : R^2 \rightarrow [0, \infty]$ выполнены условия (A1)–(A3), но $\varphi(x) \neq T(x; M)$, $x \in l \setminus \{m_1\}$.

Функция $\varphi(\cdot)$ не удовлетворяет условию (A4), так как условие (C1) нарушено для всех $\vartheta > 0$. Кроме того, поскольку условие (A4) не выполнено и для функции цены $T(\cdot; M)$, то оно не является необходимым.

Глава 2

Достаточные условия стабильности функции в терминах сингулярных точек

Данная глава посвящена проверке свойств u - и v -стабильности функции, заданной на открытом множестве. Сформулированы инфинитезимальные критерии стабильности функции, доказанные в работах А.И.Субботина. Такие критерии предполагают в каждой точке рассматриваемой области проверку неравенств для верхней или нижней производной по направлению для функции, получаемой после преобразования Кружкова. Приведены утверждения, упрощающие проверку указанных неравенств в некоторых частных случаях. Введены понятия регулярной и простейших сингулярных точек рассеивающего и экивокального типа рассматриваемой функции, аналогичные введенным ранее [1, 53] для функции цены игры. В окрестности таких точек функция предполагается непрерывной. Сформулирована и доказана теорема о том, что для класса игр с автономной разделенной динамикой и ограничением на управление второго игрока в виде линейного отрезка в сингулярных точках указанных типов выполнены инфинитезимальные условия u - и v -стабильности.

2.1 Критерии стабильности полунепрерывной функции

Пусть задана функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$, где $G \subseteq R^n$ – открытое множество. Применим к функции $\omega(\cdot)$ преобразование Кружкова [7]:

$$\mathbf{w}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\omega(x)), & \omega(x) < \infty; \\ 1, & \omega(x) = \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Имеем $\mathbf{w}(\cdot) : G \rightarrow [0, 1]$, т.е. функция $\mathbf{w}(\cdot)$ принимает только конечные значения.

Свойство u -стабильности полунепрерывной снизу функции $\omega(\cdot)$ эквивалентно [23, с. 265] слабой инвариантности надграфика ер $\mathbf{w}$ функции $\mathbf{w}(\cdot)$ относительно дифференциального включения

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in \mathbf{E}^+(x(t), z(t), v_*).$$

Здесь многозначное отображение $\mathbf{E}^+$ определяется формулой

$$\mathbf{E}^+(x, z, v_*) = \text{co} \{ (f(x, u, v_*), g) \in R^n \times R : u \in P, g = z - 1 \},$$

где $x \in G$, $z \in R$, $v_* \in Q$. Это свойство характеризует функцию $\mathbf{w}(\cdot)$ как верхнее минимаксное решение [23, с. 38] уравнения в частных производных первого порядка

$$H(x, \nabla \mathbf{w}(x)) + 1 - \mathbf{w}(x) = 0, \quad x \in G. \quad (2.2)$$

Воспользовавшись одним из эквивалентных критериев [23, с. 38] верхнего минимаксного решения, находим, что свойство u -стабильности функции $\omega(\cdot)$ равносильно выполнению неравенства

$$\inf \{ d^- \mathbf{w}(x; \eta) - g : (\eta, g) \in \mathbf{E}^+(x, z, v_*) \} \leq 0, \quad x \in G, \quad v_* \in Q. \quad (2.3)$$

Здесь $d^- \mathbf{w}(x; \eta)$ – нижняя производная функции $\mathbf{w}(\cdot)$ в точке x по направлению η :

$$d^- \mathbf{w}(x; \eta) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta),$$

$$D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta) = \{ \delta^{-1} [\mathbf{w}(x + \delta \eta') - \mathbf{w}(x)] : \delta \in (0, \varepsilon), \|\eta - \eta'\| \leq \varepsilon \}.$$

Аналогично можно показать, что свойство v -стабильности полунепрерывной сверху функции $\omega(\cdot)$ равносильно выполнению неравенства

$$\sup \{ d^+ \mathbf{w}(x; \eta) - g : (\eta, g) \in \mathbf{E}^-(x, z, u_*) \} \geq 0, \quad x \in G, \quad u_* \in P. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\mathbf{E}^-(x, z, u_*) = \text{co} \{ (f(x, u_*, v), g) \in R^n \times R : v \in Q, g = z - 1 \},$$

$$d^+ \mathbf{w}(x; \eta) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon \mathbf{w}(x; \eta)$$

– верхняя производная функции $\mathbf{w}(\cdot)$ в точке x по направлению η .

После несложных преобразований неравенств (2.3), (2.4) получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Полунепрерывная снизу (сверху) функция

$$\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty],$$

где $G \subseteq R^n$ – открытое множество, будет *u-стабильной* (*v-стабильной*) тогда и только тогда, когда для любого $x_* \in G$ выполнено неравенство

$$\inf\{d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, P, v)\} \leq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad v \in Q \quad (2.5)$$

$$\left(\sup\{d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, u, Q)\} \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad u \in P \right). \quad (2.6)$$

Здесь функция $\mathbf{w}(\cdot)$ определена формулой (2.1),

$$f(x, P, v) = \{f(x, u, v) : u \in P\}, \quad f(x, u, Q) = \{f(x, u, v) : v \in Q\}.$$

Следующие утверждения упрощают проверку неравенств (2.5), (2.6) в некоторых частных случаях.

Утверждение 2.2. Пусть задана функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$, $x_* \in G$, $\omega(x_*) < \infty$ и для любого $v \in Q$ найдутся число $\tau > 0$ и такая функция $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow G$, что

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \text{co } f(x_*, P, v), \quad \beta(0) = x_*,$$

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \leq -1.$$

Тогда в точке x_* выполнены неравенства (2.5).

Доказательство. Пусть $\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. Имеем

$$\tilde{\Phi}(t) = 1 - e^{-\Phi(t)}, \quad \dot{\tilde{\Phi}}(t) = e^{-\Phi(t)} \dot{\Phi}(t), \quad t \in (0, \tau),$$

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)} \dot{\Phi}(+0) \leq -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1. \quad (2.7)$$

Покажем, что $d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \dot{\tilde{\Phi}}(+0)$, где $\eta = \dot{\beta}(+0)$. Выберем произвольную последовательность $\delta_k \downarrow 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\beta(\delta_k) = \beta(0) + \dot{\beta}(+0)\delta_k + o(\delta_k).$$

Следовательно,

$$\beta(\delta_k) = x_* + \eta_k \delta_k, \quad \eta_k = \eta + o(\delta_k)/\delta_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_k = \eta.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}(\delta_k) - \tilde{\Phi}(0)}{\delta_k} = \dot{\tilde{\Phi}}(+0).$$

Пусть $\varepsilon_k = \max\{\delta_k, \|\eta - \eta_k\|\}$. Имеем

$$\frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} \in D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta).$$

Следовательно,

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) = \liminf_{k \rightarrow \infty} D_{\varepsilon_k} \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{w}(x_* + \eta_k \delta_k) - \mathbf{w}(x_*)}{\delta_k} = \dot{\tilde{\Phi}}(+0).$$

Учитывая (2.7), получаем, что

$$d^- \mathbf{w}(x_*; \eta) \leq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следуют неравенства (2.5). $\square$

Утверждение 2.3. Пусть задана функция $\omega : G \rightarrow [0, \infty]$, $x_* \in G$ и для любого $u \in P$ найдутся число $\tau > 0$ и такая функция $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow G$, что

$$\beta(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\beta}(+0) \in \text{co } f(x_*, u, Q), \quad \beta(0) = x_*,$$

и для случая $\omega(x_*) < \infty$ выполнены условия

$$\Phi(t) = \omega(\beta(t)) < \infty, \quad t \in [0, \tau), \quad \Phi(\cdot) \in C^1([0, \tau)), \quad \dot{\Phi}(+0) \geq -1,$$

а для случая $\omega(x_*) = \infty$ имеем $\Phi(t) = \omega(\beta(t)) = \infty$, $t \in [0, \tau)$. Тогда в точке x_* выполнены неравенства (2.6).

Доказательство. Пусть $\tilde{\Phi}(t) = \mathbf{w}(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. В случае $\omega(x_*) < \infty$ имеем

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = e^{-\omega(x_*)} \dot{\Phi}(+0) \geq -e^{-\omega(x_*)} = \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

В случае $\omega(x_*) = \infty$ выполнено равенство $\dot{\tilde{\Phi}}(t) = 0$, $t \in (0, \tau)$. Следовательно, $\dot{\tilde{\Phi}}(+0) = 0 \geq \mathbf{w}(x_*) - 1$. Таким образом, в обоих случаях имеем

$$\dot{\tilde{\Phi}}(+0) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1.$$

Аналогично доказательству утверждения 2.2 можно показать, что

$$d^+ \mathbf{w}(x_*; \eta) \geq \mathbf{w}(x_*) - 1, \quad \eta = \dot{\beta}(+0),$$

откуда следуют неравенства (2.6). $\square$

Утверждение 2.4. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ конечна и непрерывна в открытой окрестности точки $x_* \in G$. Тогда неравенства (2.5) [(2.6)] эквивалентны неравенствам

$$\inf\{d^-\omega(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, P, v)\} \leq -1, \quad v \in Q \quad (2.8)$$

$$\left[\sup\{d^+\omega(x_*; \eta) : \eta \in \text{co } f(x_*, u, Q)\} \geq -1, \quad u \in P \right]. \quad (2.9)$$

Доказательство. Покажем, что

$$d^\pm \mathbf{w}(x_*; f) = e^{-\omega(x_*)} d^\pm \omega(x_*; f). \quad (2.10)$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $\eta \in \text{co } f(x_*, P, v) \left[\eta \in \text{co } f(x_*, u, Q) \right]$, $\|\eta' - \eta\| \leq \varepsilon$, $\delta \in (0, \varepsilon)$.

Введем обозначения

$$\omega_1 = -\omega(x_* + \delta\eta'), \quad \omega_0 = -\omega(x_*).$$

Используя формулу Тейлора, находим, что

$$e^{\omega_1} = e^{\omega_0} + e^{\omega_0}(\omega_1 - \omega_0) + o(\omega_1 - \omega_0).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta^{-1}[\mathbf{w}(x_* + \delta\eta') - \mathbf{w}(x_*)] &= -\delta^{-1}[e^{\omega_1} - e^{\omega_0}] = -\delta^{-1}[e^{\omega_0}(\omega_1 - \omega_0) + o(\omega_1 - \omega_0)] = \\ &= -\delta^{-1}(\omega_1 - \omega_0)[e^{\omega_0} + o(\omega_1 - \omega_0)/(\omega_1 - \omega_0)] = \\ &= -\delta^{-1}(\omega(x_* + \delta\eta') - \omega(x_*))[e^{-\omega(x_*)} + \alpha(\delta, \eta')], \end{aligned}$$

где $\alpha(\delta, \eta') \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Отсюда получаем равенство (2.10).

В силу равенства (2.10) имеем

$$d^\pm \mathbf{w}(x_*; \eta) = (1 - \mathbf{w}(x_*))d^\pm \omega(x_*; \eta),$$

откуда следует формула (2.8) [(2.9)]. $\square$

Нетрудно проверяются следующие утверждения.

Утверждение 2.5. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ конечна и дифференцируема в окрестности точки $x_* \in G$. Тогда неравенства (2.5) [(2.6)] эквивалентны неравенству

$$H(x, \nabla \omega(x)) \leq -1 \quad (2.11)$$

$$\left[H(x, \nabla \omega(x)) \geq -1 \right]. \quad (2.12)$$

Утверждение 2.6. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ равна ∞ в окрестности точки $x_* \in G$. Тогда в точке x_* выполнены неравенства (2.5) и (2.6).

Утверждение 2.7. Пусть функция $\omega(\cdot) : G \rightarrow [0, \infty]$ конечна в окрестности точки $x_* \in G$ и точка x_* – точка локального минимума функции $\omega(\cdot)$. Тогда в точке x_* выполнены неравенства (2.6).

Если отсутствует хорошее описание функции $\omega(\cdot)$, то непосредственная проверка условий стабильности (2.8), (2.9) затруднительна. Однако оказывается, что в ряде случаев выполнение условий стабильности в точке полностью зависит от структуры функции $\omega(\cdot)$ в окрестности этой точки. В следующих разделах определим некоторые типы таких точек и докажем выполнение в них условий стабильности.

2.2 Простейшие сингулярные точки

Дадим ряд определений, перенося на случай функции $\omega(\cdot) : G \rightarrow R$ понятия, введенные ранее [53] для функции цены игры.

Определение 2.1. Область $G_0 \subset G$ называется *регулярной* областью функции $\omega(\cdot)$, если

1) $\omega \in C^2(G_0)$ и

$$H(x, \nabla \omega(x)) = -1, \quad x \in G_0; \quad (2.13)$$

2) $H \in C^2(G_0 \times Y)$, где Y – некоторая окрестность множества

$$\{\nabla \omega(x) : x \in G_0\}.$$

Уравнение (2.13) называется уравнением Айзекса – Беллмана [1].

Если точка x^* принадлежит регулярной области, то в некоторой окрестности произвольно выбранного момента времени t^* существует и единственно решение $(x(\cdot), p(\cdot))$ характеристической системы

$$\dot{x}(t) = H_p(x(t), p(t)), \quad \dot{p}(t) = -H_x(x(t), p(t)) \quad (2.14)$$

уравнения (2.13), удовлетворяющее условиям

$$x(t^*) = x^*, \quad p(t^*) = \nabla \omega(x^*),$$

и такое, что $p(t) = \nabla\omega(x(t))$ [9]. Из последнего равенства следует, что через любую точку регулярной области проходит единственное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = H_p(x, \nabla\omega(x))$, которое будем называть *характеристикой* уравнения Айзекса – Беллмана (2.13). Таким образом, в любой регулярной области определено поле характеристик.

Условие седловой точки (1.4) обеспечивает существование функций $U_\omega(x)$ и $V_\omega(x)$ таких, что

$$H(x, \nabla\omega(x)) = \langle \nabla\omega(x), f(x, U_\omega(x), V_\omega(x)) \rangle.$$

В регулярной области G_0 имеем

$$H_p(x, \nabla\omega(x)) = f(x, U_\omega(x), V_\omega(x))$$

и функция $x \rightarrow H_p(x, \nabla\omega(x))$ принадлежит классу $C^1(G_0)$. Следовательно, позиционные стратегии $U_\omega(\cdot)$, $V_\omega(\cdot)$, определенные в области G_0 , порождают движения, идущие вдоль характеристик. Функции $U_\omega(\cdot)$ и $V_\omega(\cdot)$ ограничены и, значит, имеют конечные частичные пределы для любого $x \in \partial G_0$.

Определение 2.2. Точка $x \in G$, для которой существует регулярная открытая область $G_0 \subset G$, содержащая x , называется *регулярной* точкой, иначе точка называется *сингулярной*.

Поверхности, состоящие из сингулярных точек, будем называть сингулярными поверхностями.

Определение 2.3. Сингулярную точку $x^* \in G$ назовем *простейшей*, если существует окрестность $G_0 \subset G$ точки x^* , такая, что

- 1) функция ω непрерывна на G_0 ;
- 2) $G_0 = G^+ \cup \Gamma \cup G^-$, где Γ – гладкая гиперповерхность, $G^\pm$ – регулярные области;
- 3) функция $\nabla\omega(\cdot) : G^\pm \rightarrow R^n$ имеет непрерывное продолжение на гиперповерхность Γ .

Пусть $\Sigma(\omega)$ – множество простейших сингулярных точек функции $\omega(\cdot) : G \rightarrow R$. Для точки $x^* \in \Sigma(\omega)$ будем использовать следующие обозначения: $G^\pm$ – регулярные области (из определения простейшей сингулярной точки), разделенные гиперповерхностью Γ ; $\omega^\pm(\cdot)$ – сужения функции $\omega(\cdot)$

на области $G^\pm$; $U_\omega^\pm(\cdot)$, $V_\omega^\pm(\cdot)$ – позиционные стратегии игроков, порождающие движения вдоль характеристик в областях $G^\pm$. Кроме того, пусть

$$p^\pm = \lim_{x \rightarrow x^*, x \in G^\pm} \nabla \omega^\pm(x), \quad f^\pm = f(x^*, u^\pm, v^\pm),$$

где символы $u^\pm$, $v^\pm$ обозначают произвольные частичные пределы значений $U_\omega^\pm(x)$, $V_\omega^\pm(x)$ при $x \rightarrow x^*$, $x \in G^\pm$.

В силу непрерывности функции $H(\cdot)$ имеем

$$\langle p^\pm, f^\pm \rangle = H(x^*, p^\pm) = -1.$$

Отметим некоторые свойства простейших сингулярных точек.

В случае $p^+ = p^-$ функция $\omega(x)$ дифференцируема в точке x^* (но не в окрестности этой точки), причем $H(x^*, \nabla \omega(x^*)) = -1$.

В случае $p^+ \neq p^-$ функции $\omega^\pm(x)$, определенные на $G^\pm$, непрерывно продолжимы [53] на всю область G_0 так, что $\omega^\pm \in C^1(G_0)$. При этом гиперповерхность Γ , разделяющая области $G^\pm$, представима в виде

$$\Gamma = \{x \in G_0: \omega^+(x) = \omega^-(x)\}.$$

Поскольку гиперповерхность Γ можно рассматривать как поверхность уровня функции $\omega^+(x) - \omega^-(x)$, то вектор $p^+ - p^-$ ортогонален Γ в точке x^* . Кроме того, в области G_0 верно представление

$$\omega(x) = \max\{\omega^+(x), \omega^-(x)\} \quad (\min\{\omega^+(x), \omega^-(x)\}),$$

если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-). Следовательно, для любого вектора $\eta \in R^n$ существует производная $\partial_\eta \omega(x^*)$ по направлению η :

$$\partial_\eta \omega(x^*) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{\omega(x^* + \delta \eta) - \omega(x^*)}{\delta}.$$

Кроме того [4],

$$d^\pm(\omega; \eta) = \partial_\eta \omega(x^*) = \max_{+, -} \langle p^\pm, \eta \rangle \quad (\min_{+, -} \langle p^\pm, \eta \rangle), \quad (2.15)$$

если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-).

2.3 Рассеивающие и эквивокальные сингулярные точки

В теории дифференциальных игр для функции цены $T(\cdot; M)$ известны [1, 53] различные типы *сингулярных поверхностей*, в точках которых

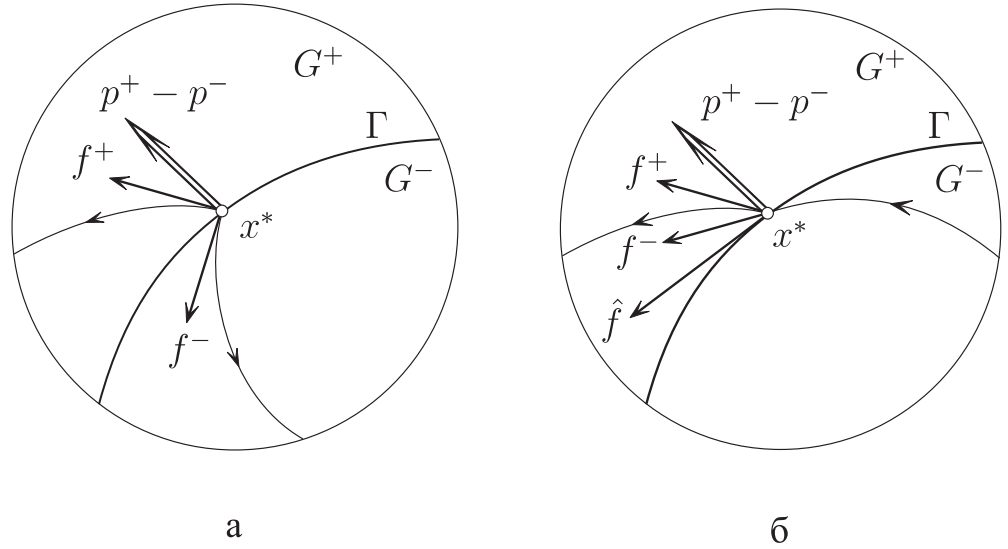


Рис. 2.1: Рассеивающая и экивокальная сингулярные точки

оптимальные движения имеют те или иные особенности. Классификация основана на анализе поведения оптимальных траекторий в окрестности сингулярной поверхности и учете возможности особых оптимальных движений, идущих вдоль самой сингулярной поверхности.

Распространим понятия рассеивающей и экивокальной [1, 53] сингулярной поверхности на случай функции $\omega(\cdot) : G \rightarrow R$. Для этого сначала определим соответствующие типы простейших сингулярных точек и поясним геометрический смысл данных определений.

Определение 2.4. Точка $x^* \in \Sigma(\omega)$ называется *рассеивающей*, если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle < 0.$$

Простейшая сингулярная точка x^* будет рассеивающей, если характеристики из смежных регулярных областей G^+ и G^- покидают ее под ненулевым углом к разделяющей гиперповерхности Γ (рис. 2.1, а).

Определение 2.5. Точка $x^* \in \Sigma(\omega)$ называется *экивокальной* (относительно второго игрока), если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle \geq 0,$$

и, кроме того, существует вектор управления $\hat{u}(x^*) \in P$ такой, что

$$\langle p^+, \hat{f} \rangle = \langle p^-, \hat{f} \rangle = -1.$$

Здесь $\hat{f} = f(x^*, \hat{u}(x^*), v^-)$ ($f(x^*, \hat{u}(x^*), v^+)$), когда вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ (из G^+ в G^-).

В экивокальную точку приходит характеристика из регулярной области G^- и покидает (под ненулевым углом к Γ) характеристика, определенная в регулярной области G^+ ; кроме того, существует управление первого игрока, обеспечивающее равную -1 скорость движения вдоль поверхности Γ в случае, когда второй игрок использует предельное управление, соответствующее области G^- (рис. 2.1, б).

Назовем гладкую гиперповерхность рассеивающей или экивокальной, если она образована соответственно рассеивающими и экивокальными точками.

2.4 Теорема 3 о достаточных условиях стабильности

Теорема 3. Пусть $f(x, u, v) = f_1(x, u) + f_2(x, v)$ и множество $f_2(x, Q) := \{f_2(x, v) : v \in Q\}$ – линейный отрезок в R^n . Если точка $x^* \in \Sigma(\omega)$ – рассеивающая или экивокальная, причем $f_2(x^*, v^+) \neq f_2(x^*, v^-)$, то в ней выполнены условия стабильности (2.8), (2.9).

Доказательство. Рассмотрим точку $x^* \in \Sigma(\omega)$ и предположим, что вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^- в G^+ .

Учитывая выражение (2.15) для производной по направлению в простейшей сингулярной точке и разделенную динамику системы (1.1), перепишем условия стабильности (2.8), (2.9) в точке x^* в следующем виде:

1) для любого вектора $v \in Q$ существует такой вектор $\psi_v \in \text{co } f_1(x^*, P)$, что $\langle p^\pm, \psi_v + f_2(x^*, v) \rangle \leq -1$ (u -стабильность);

2) для любого вектора $u \in P$ существует такой вектор $\psi_u \in f_2(x^*, Q)$, что

$$\max_{+, -} \langle p^\pm, f_1(x^*, u) + \psi_u \rangle \geq -1$$

(v -стабильность).

Пусть

$$\mathbf{Q}(x, p) = \arg \max_{v \in Q} \langle p, f_2(x, v) \rangle.$$

Так как $f_2(x, Q)$ – отрезок в R^n , то множество

$$f_2(x, \mathbf{Q}(x, p)) = \{f_2(x, v) : v \in \mathbf{Q}(x, p)\}$$

либо одноэлементно и содержит один из концов отрезка $f_2(x, Q)$, либо совпадает со всем отрезком $f_2(x, Q)$. По определению имеем

$$V_\omega^\pm(x) \in \mathbf{Q}(x, \nabla \omega(x)), \quad x \in G^\pm.$$

Поскольку $G^\pm$ – регулярные области, то $f_2(x, V_\omega^\pm(x)) \in C^1(G^\pm)$. Следовательно, $f_2(x, V_\omega^\pm(x))$ – один из концов отрезка $f_2(x, Q)$ для любого $x \in G^\pm$.

Введем обозначения

$$f_1^\pm = f_1(x^*, u^\pm), \quad f_2^\pm = f_2(x^*, v^\pm).$$

Из определения векторов $v^\pm$ и условия $f_2^+ \neq f_2^-$ получаем, что $f_2^\pm$ – различные концы отрезка $f_2(x^*, Q)$. Таким образом, можно записать представление

$$f_2(x^*, Q) = \{\lambda f_2^+ + (1 - \lambda)f_2^- : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Докажем выполнение условия 1) в точке x^* . Для произвольного $v \in Q$ найдем такое число $\lambda_v \in [0, 1]$, что

$$f_2(x^*, v) = \lambda_v f_2^+ + (1 - \lambda_v)f_2^-.$$

1°. Пусть x^* – рассеивающая точка. Положим

$$\psi_v = \lambda_v f_1^+ + (1 - \lambda_v)f_1^-.$$

Поскольку $f_1^\pm \in f_1(x^*, P)$, то $\psi_v \in \text{co } f_1(x^*, P)$. Имеем

$$\langle p^\pm, \psi_v + f_2(x^*, v) \rangle = \lambda_v \langle p^\pm, f_1^+ + f_2^+ \rangle + (1 - \lambda_v) \langle p^\pm, f_1^- + f_2^- \rangle. \quad (2.16)$$

В силу определения рассеивающей точки получаем, что

$$\langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle < 0.$$

Следовательно,

$$\langle p^-, f^+ \rangle < \langle p^+, f^+ \rangle = -1, \quad \langle p^+, f^- \rangle < \langle p^-, f^- \rangle = -1. \quad (2.17)$$

Так как $f^\pm = f_1^\pm + f_2^\pm$, то из (2.16) и (2.17) получаем

$$\langle p^\pm, \psi_v + f_2(x^*, v) \rangle \leq -1. \quad (2.18)$$

Для случая рассеивающей точки u -стабильность доказана.

2°. Пусть x^* – экивокальная точка. Положим

$$\psi_v = \lambda_v f_1^+ + (1 - \lambda_v)\hat{f}_1, \quad \hat{f}_1 = f_1(x^*, \hat{u}(x^*)).$$

Здесь $\hat{u}(x^*)$ – особое управление первого игрока из определения экивокальной точки. Так как $f_1^+, \hat{f}_1 \in f_1(x^*, P)$, то $\psi_v \in \text{co } f_1(x^*, P)$. Кроме того, верно равенство, аналогичное (2.16) при замене f_1^- на $\hat{f}_1$.

В силу определения экивокальной точки получаем, что

$$\langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle p^-, \hat{f} \rangle = \langle p^+, \hat{f} \rangle = -1.$$

Следовательно,

$$\langle p^-, f^+ \rangle < \langle p^+, f^+ \rangle = -1, \quad f^+ = f_1^+ + f_2^+, \quad \hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2.$$

Таким образом, верно неравенство (2.18). Для случая экивокальной точки u -стабильность доказана.

Выполнение условия 2) в точке x^* следует из неравенства

$$\langle p^\pm, f_1(x^*, u) + f_2^\pm \rangle \geq \langle p^\pm, f_1^\pm + f_2^\pm \rangle = -1,$$

если положить $\psi_u = f_2^\pm$.

Заметим, что предположение о направлении вектора $p^+ - p^-$ из G^- в G^+ обеспечивает выполнение неравенств (2.9) в рассеивающей и экивокальной точках без тех ограничений на динамику системы (1.1), которые указаны в условии теоремы. Аналогично, если вектор $p^+ - p^-$ направлен из G^+ в G^- , то условия теоремы не используются при доказательстве неравенств (2.8) в рассеивающей и экивокальной точках. $\square$

Глава 3

Управление материальной точкой на прямой при наличии помехи

Рассматривается игровая задача быстрогодействия на плоскости, представляющая собой модификацию известной задачи “мальчик и крокодил” [19, 21]. Цель первого игрока привести движение как можно скорее в заданную точку на плоскости, второй игрок препятствует этому. Ранее исследования такой игры проводилось в работах [14, 15, 28]. Основываясь на результатах этих работ, на некотором ограниченном множестве описывается построение тестируемой функции, которая разрывна на области определения. Далее проводится проверка всех условий теоремы 1, что дает совпадение тестируемой функции с функцией цены игры. Таким образом, в данной главе результаты глав 1 и 2 применяются к примеру, решение которого известно.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим модельный пример игровой задачи преследования на прямой. Уравнения движения и ограничения на управления преследователя и убегающего имеют вид

$$\ddot{y}_P = u, \quad \dot{y}_E = v, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu, \quad \mu > 0. \quad (3.1)$$

Преследователь стремится за наименьшее время совместить точку y_P с точкой y_E так, чтобы в момент совмещения скорость $\dot{y}_P$ точки y_P равнялась наперед заданному числу $a > \nu$.

Такая задача преследования формулируется как задача быстрогодей-

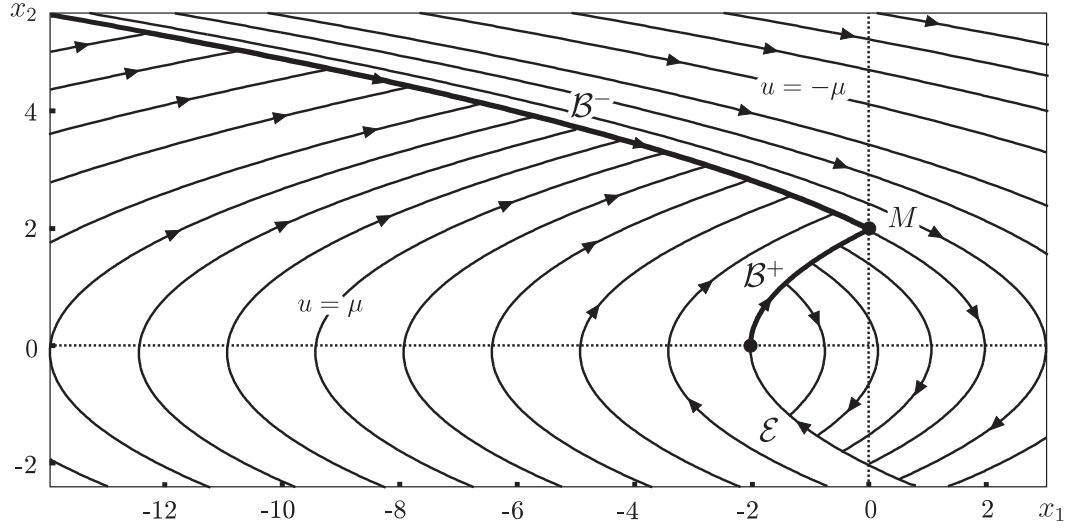


Рис. 3.1: Построение функции $\varphi(\cdot)$ при $a = 2$, $\mu = 1$, $\nu = 0$

ствия, если ввести замену

$$x_1 = y_P - y_E, \quad x_2 = \dot{y}_P.$$

В силу системы (3.1), имеем

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \leq \mu, \quad 0 \leq v \leq \nu. \quad (3.2)$$

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки $x = (x_1, x_2)$ из заданного начального положения x_0 на терминальное множество $M = (0, a)^T$, $a > \nu$, интересы второго противоположны.

Если $\nu = 0$, то получаем задачу оптимального управления, решение которой известно (см., например, [50]). Кратко опишем его. На рис. 3.1 показаны траектории, составленные из частей парабол, образующих два семейства. Левое семейство соответствует управлению $u = \mu$, правое – управлению $u = -\mu$. Время $\varphi(x_0)$ движения из точки x_0 вдоль указанных кривых до попадания в точку M является временем оптимального быстрогодействия. Функция $\varphi(\cdot)$ разрывна на кривой, составленной из дуг $\mathcal{B}^+$ и $\mathcal{B}^-$ и недифференцируема на дуге $\mathcal{E}$ параболы левого семейства.

Опишем построение траекторий при $\nu > 0$, при помощи которых зададим функцию $\varphi(\cdot)$. Такие траектории исследованы ранее в [14, 15, 28].

1°. Запишем уравнение кривой $\mathcal{B}^-$, вдоль которой идет траектория системы (3.2) при $v(t) = 0$, $u(t) = -\mu$, приходящая в точку M (рис. 3.2, а).

Имеем

$$\mathcal{B}^- : \quad x_1 = -(x_2^2 - a^2)/(2\mu), \quad x_2 \geq a.$$

Найдем наихудшее для первого игрока движение по параболе $\mathcal{B}^-$. Пусть в некоторый момент времени t система (3.2) находится в точке $z = z(t) \in \mathcal{B}^-$. Для любого $\bar{v} = \bar{v}(t) \in [0, \nu]$ определим такое $\bar{u} = \bar{u}(z, \bar{v}) \in [-\mu, \mu]$, что вектор скорости будет направлен по касательной к параболе $\mathcal{B}^-$. Нормаль к кривой $\mathcal{B}^-$ в точке z имеет вид $(\mu, z_2)^T$. Следовательно, значение $\bar{u}$ находим из уравнения

$$\mu(z_2 - \bar{v}) + \bar{u}z_2 = 0.$$

Получаем, что

$$\bar{u}(z, \bar{v}) = -\mu(1 - \bar{v}/z_2). \quad (3.3)$$

Самое медленное движение по дуге $\mathcal{B}^-$ будет при выборе вторым игроком управления $v^*(z)$ из условия минимизации по $\bar{v}$ модуля вектора скорости системы при управлениях $u_{\mathcal{B}}(z) = \bar{u}(z, \bar{v})$ и $\bar{v}$, т.е. из условия

$$(z_2 - \bar{v})^2 + \mu^2(1 - \bar{v}/z_2)^2 \rightarrow \min_{\bar{v} \in [0, \nu]}.$$

Имеем $v^*(z) = \nu$.

Пусть $z(0) \in \mathcal{B}^-$ и в момент t игроки применяют управляющие воздействия $v^*(z) = \nu$ и $u^*(z) = \bar{u}(z, v^*(z)) = \mu(1 - \nu/z_2)$. Тогда траектория $z(t)$ идет вдоль дуги $\mathcal{B}^-$ и описывается уравнениями

$$\dot{z}_1 = z_2 - \nu, \quad \dot{z}_2 = -\mu(1 - \nu/z_2). \quad (3.4)$$

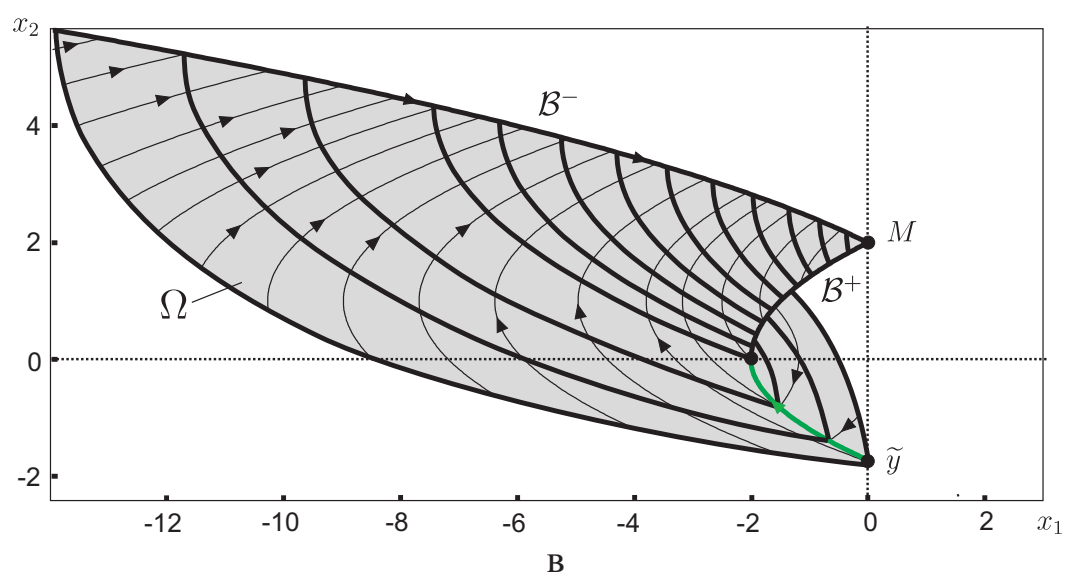
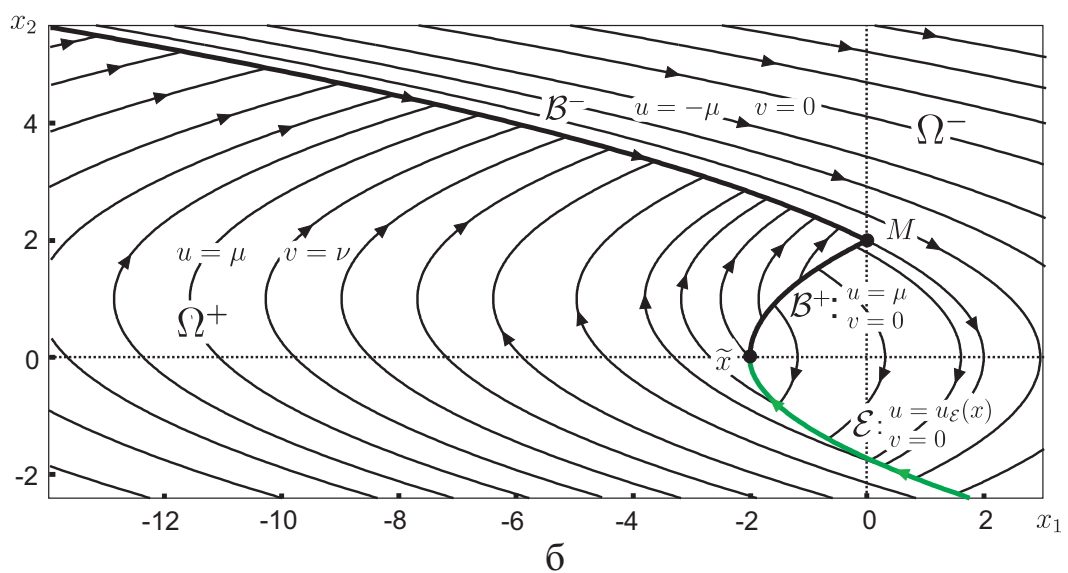
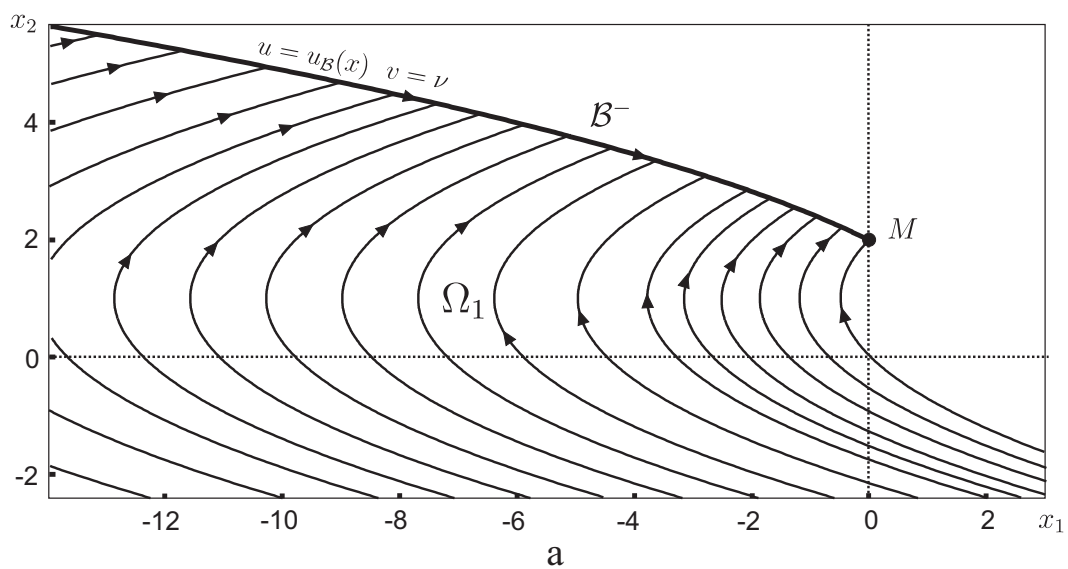
На траектории $z(t)$, $t \geq 0$, реализуется время $\varphi_1(z(0))$ самого медленного движения вдоль кривой $\mathcal{B}^-$ до точки M . Интегрируя второе уравнение в (3.4), находим, что

$$\varphi_1(z(0)) = -1/\mu \int_{z_2(0)}^a \frac{z_2 dz_2}{z_2 - \nu} = -1/\mu \left(a - z_2(0) + \nu \ln \frac{a - \nu}{z_2(0) - \nu} \right).$$

Построим семейство траекторий системы при $u(t) = \mu$, $v(t) = \nu$, обрывающихся на линии $\mathcal{B}^-$ (первое семейство). Такое семейство описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 - \nu, \quad \dot{x}_2 = \mu \quad (3.5)$$

и является семейством парабол. Обозначим через Ω_1 замкнутое множество, которое покрывают траектории первого семейства (рис. 3.2, а).

Рис. 3.2: Построение функции $\varphi(\cdot)$ при $a = 2, \mu = \nu = 1$

Продолжим функцию $\varphi_1(\cdot)$ с кривой $\mathcal{B}^-$ на множество Ω_1 следующим образом. Для точки $x \in \Omega_1 \setminus \mathcal{B}^-$ положим значение $\varphi_1(x)$ равным времени движения из начальной точки x вдоль траектории первого семейства при $u(t) = \mu$, $v(t) = \nu$ до пересечения с кривой $\mathcal{B}^-$ плюс значение функции $\varphi_1(\cdot)$ в точке пересечения.

2°. Найдем уравнение кривой $\mathcal{B}^+$, вдоль которой идет траектория системы при $v(t) = 0$, $u(t) = \mu$, выходящая с оси Ox_1 и приходящая в точку M . Имеем

$$\mathcal{B}^+ : \quad x_1 = (x_2^2 - a^2)/(2\mu), \quad 0 \leq x_2 \leq a.$$

Парабола $\mathcal{B}^+$ пересекается с осью x_1 в точке $\tilde{x} = (-a^2/(2\mu), 0)$ (рис. 3.2, б).

В нижней полуплоскости построим кривую $\mathcal{E}$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{\mu} + \frac{2\nu x_2}{\mu(\sqrt{\nu^2 - 4\nu x_2 - 4\mu x_1 + 2x_2^2 + 2a^2} - \nu - 2x_2)}$$

и проходящую через точку $\tilde{x}$. Кривая $\mathcal{E}$ характеризуется тем, что из начальной точки $x_0 \in \mathcal{E}$ время движения вдоль кривой $\mathcal{E}$ при $u = u_{\mathcal{E}}(x)$ и $v = 0$ до точки $\tilde{x}$ равно значению $\varphi_1(x_0) - \varphi_1(\tilde{x})$. По терминологии Р.Айзекса кривая $\mathcal{E}$ является экивокальной [1].

Составная кривая $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+\mathcal{E}$ разделяет на плоскости два открытых множества Ω^+ и Ω^- , где Ω^+ (Ω^-) – часть плоскости левее (правее) кривой $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+\mathcal{E}$. На множестве Ω^- рассмотрим семейство траекторий системы (3.2) при $u(t) = -\mu$, $v(t) = 0$, обрывающихся на линии $\mathcal{E}$ (второе семейство, фиг. 3.1, б).

Определим функцию $\varphi_2(\cdot) : \Omega^- \rightarrow (0, \infty)$ следующим образом. Для точки $x \in \Omega^-$ положим значение $\varphi_2(x)$ равным времени движения из начальной точки x вдоль траектории второго семейства при $u(t) = -\mu$, $v(t) = 0$ до пересечения с кривой $\mathcal{E}$ плюс значение функции $\varphi_1(\cdot)$ в точке пересечения.

Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \Omega^+ \cup \mathcal{B}^-\mathcal{B}^+\mathcal{E}; \\ \varphi_2(x), & x \in \Omega^-. \end{cases}$$

Подчеркнем принципиальное отличие синтеза, соответствующего игровой задаче (рис. 3.2, б), от синтеза, соответствующего задаче управления (рис. 3.1). В игровом случае линия $\mathcal{E}$, на которой переключается управление в нижней части, не является дугой параболы. Она описывается диффе-

ренциальным уравнением, которое в явном виде не интегрируется. Кроме того, на верхней параболе $\mathcal{B}^-$ принятое значение функции $\varphi(\cdot)$ соответствует самому медленному движению системы по этой кривой при управлении $v = \nu$, хотя сама парабола $\mathcal{B}^-$ является траекторией при $u = -\mu$, $v = 0$.

Кривая $\mathcal{E}$ пересекает ось x_2 в некоторой точке $\tilde{y}$. Положим

$$\Omega = \{x \in R^2 : \varphi(x) \leq \varphi(\tilde{y})\}.$$

На рис. 3.2, в множество Ω показано серой заливкой. Изображены линии уровня функции $\varphi(\cdot)$ на множестве Ω . В множестве Ω функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow (0, \infty)$ разрывна на дуге $\overline{\mathcal{B}^+ \cap \text{int } \Omega} \setminus \{\tilde{x}\}$.

Далее покажем, что на множестве Ω функция $\varphi(\cdot)$ совпадает с функцией $T(\cdot; M)$ цены рассматриваемой дифференциальной игры быстрогодействия. Для доказательства равенства

$$\varphi(x) = T(x; M), \quad x \in \Omega, \quad (3.6)$$

воспользуемся теоремой 1.

3.2 Обоснование решения задачи

Способ определения функции $\varphi(\cdot)$ на множествах $\Omega^\pm$ реализует известный метод характеристик [9] построения дважды непрерывно дифференцируемого решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$H^\pm(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm, \quad (3.7)$$

с краевым условием $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ для $x \in \mathcal{B}^-$ при выборе знака “+” в уравнении (3.7), и для $x \in \mathcal{E}$ при выборе знака “−”. Здесь

$$H^+(x, p) = p_1(x_2 - \nu) + p_2\mu, \quad H^-(x, p) = p_1x_2 - p_2\mu.$$

При этом выполнены соотношения

$$\mp \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) \geq 0, \quad x \in \Omega^\pm, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Гамильтониан (1.4) дифференциальной игры имеет вид

$$H(x, p) = |p_1|\nu/2 + p_1(x_2 - \nu/2) - |p_2|\mu.$$

Учитывая неравенства (3.8), получаем, что

$$H^\pm(x, \nabla\varphi(x)) = H(x, \nabla\varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^\pm. \quad (3.9)$$

По построению функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ полунепрерывна снизу и $D(0) = M$. Выполнение условия 4) теоремы очевидно.

Положим $\mathcal{T} = \{\varphi(\tilde{x})\}$. Проверим выполнение условий 1) – 3) для $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$, где $\Theta = \varphi(\tilde{y})$.

1°. Имеем

$$S(t_*) = \{b^-(t_*), b^+(t_*)\}, \quad b^\pm(t_*) = \overline{F}(t_*) \cap \mathcal{B}^\pm.$$

Поскольку множество $S(t_*)$ конечно, то выполнение условия 1) теоремы достаточно проверить для каждой из точек $\tilde{b} \in S(t_*)$ отдельно. Возможны три случая:

- А. $\tilde{b} = b^-(t_*)$, $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$;
- Б. $\tilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$;
- В. $\tilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (\varphi(\tilde{x}), \Theta)$.

А. Пусть $\tilde{b} = b^-(t_*)$, $t_* \in (0, \Theta) \setminus \mathcal{T}$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что множество $\tilde{G} = \text{int } \mathbf{B}(\tilde{b}, \varepsilon_0)$ представимо в виде

$$\tilde{G} = G_+ \cup \Gamma \cup G_\infty,$$

где $\Gamma \subset \mathcal{B}^-$, $\varphi(\cdot) \in C^1(G_+)$, $G_+ \subset \Omega^+$, $G_\infty \subset \Omega^-$ (рис. 3.3, а).

а) Имеем

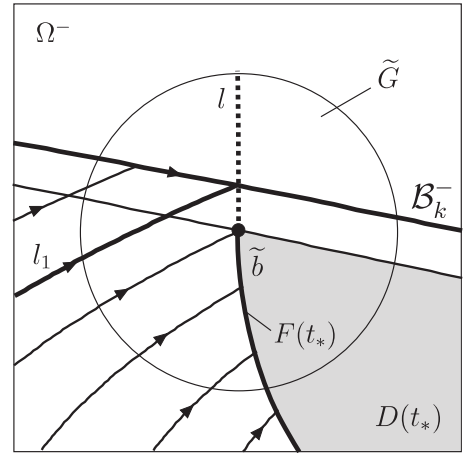
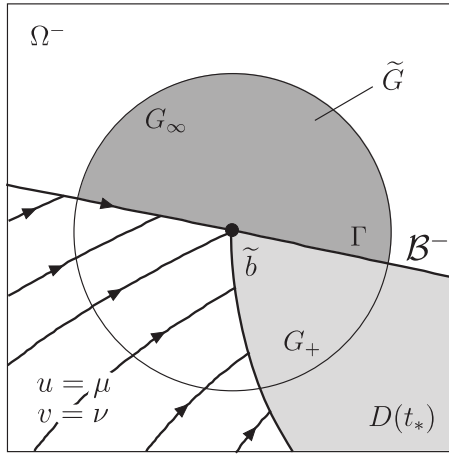
$$\tilde{G} \subset G_\infty \cup \Omega, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\varphi(x) : x \in \tilde{G} \setminus G_\infty\} = t_*. \quad (3.10)$$

Определим функцию $\omega(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty]$ по формуле (1.17), в которой обозначения $D(t)$ и $G(t, \varepsilon_0)$ заменены на $D(t_*)$ и $\tilde{G}$. Проверим u -стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнение неравенств (2.5) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

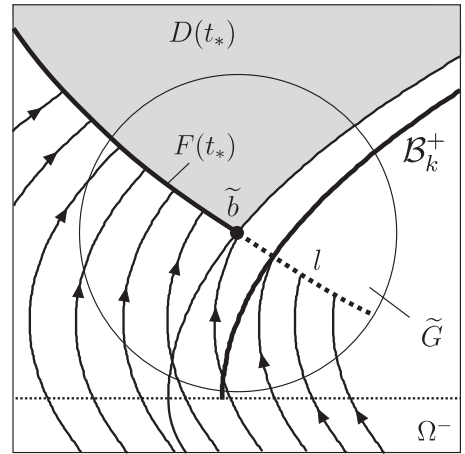
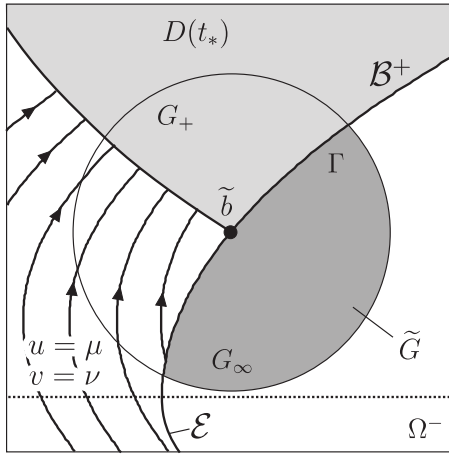
Поскольку $\omega(x_*) = \infty$, $x_* \in G_\infty$, и $H(x, \nabla\varphi(x)) = -1$, $x \in G_+$, то в силу утверждений 2.5, 2.6 неравенства (2.5) выполнены для всех точек $x_* \in \tilde{G} \setminus (\Gamma \cup D(t_*))$.

Пусть $x_* \in \Gamma$. Для любого $v_* \in Q$ существуют число $\tau > 0$ и функция $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$, которая удовлетворяет уравнению

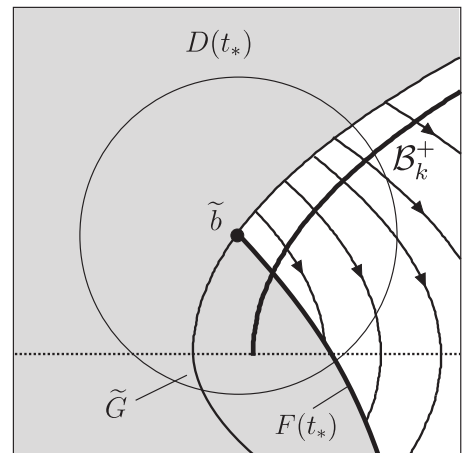
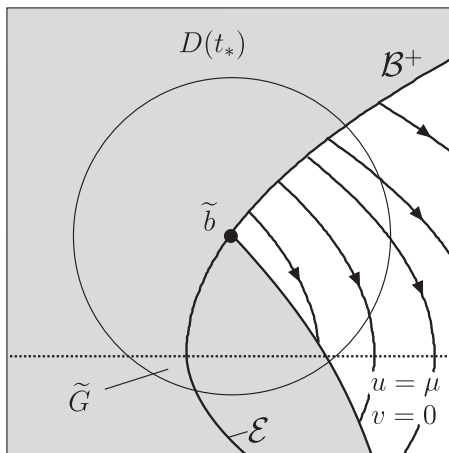
$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), \bar{u}(\beta(t), v_*), v_*), \quad t \in (0, \tau),$$



a



б



в

Рис. 3.3: Проверка условий теоремы для трех типов точек $\tilde{b} \in S(t_*)$

и начальному условию $\beta(0) = x_*$. Здесь управление $\bar{u}(\cdot, v_*)$ определяется формулой (3.3). Имеем $\beta(t) \in \Gamma$, $t \in [0, \tau)$.

Пусть $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$; $z(\cdot)$ – траектория самого медленного движения вдоль параболы $\mathcal{B}^-$ из начальной точки x_* . Имеем

$$\varphi(\beta(t)) \leq \varphi(z(t)) = \varphi(x_*) - t, \quad t \in [0, \tau).$$

Следовательно,

$$\dot{\Phi}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} (\varphi(\beta(t)) - \varphi(x_*))/t \leq -1.$$

Учитывая утверждение 2.2, получаем u -стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

б) Определим функции

$$\omega_k(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

следующим образом. Сдвинем параболу $\mathcal{B}^-$ на величину $1/k$ вправо вдоль оси x_1 и обозначим ее через $\mathcal{B}_k^-$ (рис. 3.3, а). Продолжим линию $F(t_*)$ гладкой линией l на множество G_∞ так, чтобы траектории первого семейства, продолженные выше линии $\mathcal{B}^-$, пересекались с кривой l .

Линия $F(t_*)$ имеет вертикальную касательную в точке $\tilde{b}$. В качестве l возьмем отрезок вертикальной прямой. Обозначим через l_1 параболу первого семейства, проходящую через точку $l \cap \mathcal{B}_k^-$ (рис. 3.3, а).

Положим $\omega_k(x) = \infty$ для точек $x \in \tilde{G}$, лежащих выше параболы $\mathcal{B}_k^-$ включительно; $\omega_k(x) = 0$ для точек $x \in \tilde{G}$, лежащих строго ниже кривой $\mathcal{B}_k^-$ и правее кривой $F(t_*) \cup l$ включительно. Для точки $x \in \tilde{G}$, лежащей строго левее кривой $F(t_*) \cup l$ и не выше параболы l_1 , определим $\omega_k(x)$ как время движения из начальной точки x вдоль параболы первого семейства при $u = \mu$, $v = \nu$ до момента попадания на множество $F(t_*) \cup l$. Для точки $x \in \tilde{G}$, лежащей между кривыми $\mathcal{B}_k^-$ и l_1 , определим $\omega_k(x)$ как время движения из начальной точки x вдоль параболы первого семейства при $u = \mu$, $v = \nu$ до момента пересечения с кривой $\mathcal{B}_k^-$ плюс время самого медленного движения вдоль параболы $\mathcal{B}_k^-$ из точки пересечения до точки $l_1 \cap \mathcal{B}_k^-$.

Функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, полунепрерывны сверху, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t_*) \cap \tilde{G}$. Нетрудно видеть, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in \tilde{G}. \quad (3.11)$$

Проверим v -стабильность функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнения неравенств (2.6) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

Заметим, что по определению функции $\omega_k(\cdot)$ выполнено равенство $H(x, \nabla \omega_k(x)) = -1$ в точках $\tilde{G} \setminus l_1$, таких, что $\omega_k(x) \in (0, \infty)$. Следовательно, в силу утверждений 2.5, 2.6 неравенства (2.6) выполнены для точек $x_* \in \tilde{G} \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k^- \cup l_1)$.

Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k^-$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ как решение начальной задачи

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), u_*, v_*), \quad t \in (0, \tau), \quad \beta(0) = x_*. \quad (3.12)$$

Имеем $\beta(t) \in \mathcal{B}_k^- \cup G_\infty$, $t \in [0, \tau)$. В силу утверждения 2.3 в точке x_* выполнены неравенства (2.6).

Пусть $x_* \in l_1$. Для любого $u_* \in P$ и $v_* = \nu$ решение $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ начальной задачи (3.12) не пересекает кривую l_1 . Пусть $\Phi(t) = \varphi(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. Если $u_* = \mu$, то $\beta(t) \in l_1$, $t \in [0, \tau)$, и по определению функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\dot{\Phi}(+0) = -1$. Если $u_* = [-\mu, \mu)$, то точка $\beta(t)$, $t \in (0, \tau)$, лежит ниже параболы l_1 . Следовательно,

$$\dot{\Phi}(t) = \langle \nabla \omega_k(\beta(t)), f(\beta(t), u_*, v_*) \rangle \geq H(\beta(t), \nabla \omega_k(\beta(t))) = -1$$

и $\dot{\Phi}(+0) \geq -1$. В силу утверждения 2.3 в точке x_* выполнены неравенства (2.6).

Б. Пусть $\tilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что множество $\tilde{G} = \text{int } \mathbf{B}(\tilde{b}, \varepsilon_0)$ представимо в виде

$$\tilde{G} = G_+ \cup \Gamma \cup G_\infty,$$

где $\Gamma \subset \mathcal{B}^+$, $\varphi(\cdot) \in C^1(G_+)$, $G_+ \subset \Omega^+$, $G_\infty \subset \Omega^-$ (рис. 3.3, б).

а) Соотношения (3.10) очевидны. На множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$ проверим u -стабильность функции $\omega(\cdot)$, определяемой аналогично случаю **А**. Для этого достаточно проверить выполнения неравенств (2.5) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

Поскольку $\omega(x_*) = \infty$, $x_* \in G_\infty$, и $H(x, \nabla \varphi(x)) = -1$, $x \in G_+$, то в силу утверждений 2.5, 2.6 неравенства (2.5) выполнены для всех точек $x_* \setminus (\Gamma \cup D(t_*))$.

Пусть $x_* \in \Gamma$. Для любого $v_* \in Q$ положим $u_* = \mu$. Пусть $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ – решение начальной задачи (3.12). Справедливо включение $\beta(t) \in G_+ \cup \Gamma$, $t \in [0, \tau)$. Используя обозначение $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(+0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d\varphi(\beta(t))}{dt} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d\varphi_1(\beta(t))}{dt} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \langle \nabla \varphi_1(\beta(t)), f(\beta(t), u_*, v_*) \rangle \leq \lim_{t \rightarrow +0} H(\beta(t), \nabla \varphi_1(\beta(t))) = -1. \end{aligned}$$

Учитывая утверждение 2.2, получаем u -стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

б) Определим функции

$$\omega_k(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

следующим образом.

Сдвинем параболу $\mathcal{B}^+$ на величину $1/k$ вправо вдоль оси x_1 и обозначим ее через $\mathcal{B}_k^+$ (рис. 3.3, б). Продолжим линию $F(t_*)$ гладкой линией l на множество G_∞ так, чтобы траектории первого семейства ниже линии $\mathcal{B}^+$ приходили на кривую l .

Положим $\omega_k(x) = \infty$ для точек $x \in \tilde{G}$, лежащих не выше параболы $\mathcal{B}_k^+$; $\omega_k(x) = 0$ для точек $x \in \tilde{G}$, лежащих строго выше параболы $\mathcal{B}_k^+$ и выше кривой $F(t_*) \cup l$ включительно. Для остальных точек $x \in \tilde{G}$ определим значение $\omega_k(x)$ как время движения из начальной точки x вдоль параболы первого семейства при $u = \mu$, $v = \nu$ до момента попадания на множество $F(t_*) \cup l$.

Функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, полунепрерывны сверху, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t_*) \cap \tilde{G}$. Нетрудно видеть, что выполнено предельное соотношение (3.11).

Проверим v -стабильность функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнения неравенств (2.6) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

Заметим, что по определению функции $\omega_k(\cdot)$ выполнено равенство $H(x, \nabla \omega_k(x)) = -1$ в точках $\tilde{G}$, таких, что $\omega_k(x) \in (0, \infty)$. Следовательно, в силу утверждений 2.5, 2.6 неравенства (2.6) выполнены для точек $x_* \in \tilde{G} \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k^+)$.

Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k^+$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ как решение начальной задачи (3.12). Имеем

$\beta(t) \in \mathcal{B}_k^+ \cup G_\infty$, $t \in [0, \tau)$. В силу утверждения 2.3 в точке x_* выполнены неравенства (2.6).

В. Пусть $\tilde{b} = b^+(t_*)$, $t_* \in (\varphi(\tilde{x}), \Theta)$. Выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, что для множества $\tilde{G} = \text{int } \mathbf{B}(\tilde{b}, \varepsilon_0)$ выполнено включение $\tilde{G} \setminus D(t_*) \subset \Omega^- \cap \Omega$ (рис. 3.3, в). Положим $G_\infty = \emptyset$.

а) Соотношения (3.10) очевидны. Пусть функция $\omega(\cdot)$ определяется аналогично случаю **A**. Поскольку

$$H(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in \Omega^-, \quad (3.13)$$

то в силу утверждения 2.5 неравенства (2.5) выполнены для всех $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$. Следовательно, функция $\omega(\cdot)$ u -стабильна на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

б) Определим функции

$$\omega_k(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

следующим образом. Сдвинем параболу $\mathcal{B}^+$ на величину $1/k$ вправо вдоль оси x_1 и обозначим ее через $\mathcal{B}_k^+$ (рис. 3.3, в).

Положим $\omega_k(x) = \omega(x)$ для точек $x \in \tilde{G}$, лежащих правее параболы $\mathcal{B}_k^+$ включительно, $\omega_k(x) = 0$ для всех остальных точек $x \in \tilde{G}$.

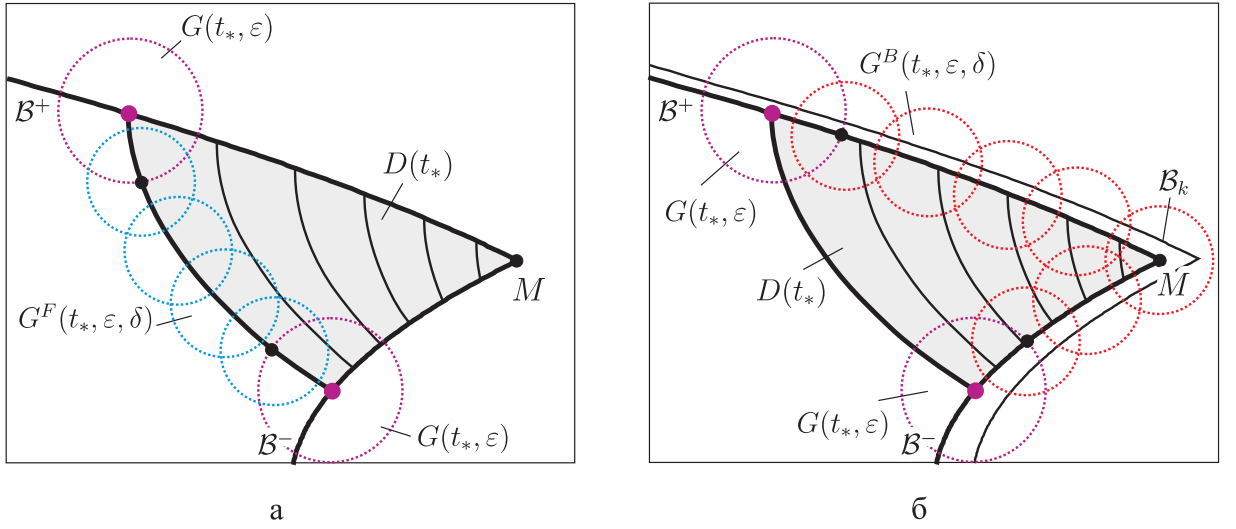
Функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, полунепрерывны сверху, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t_*) \cap \tilde{G}$. Нетрудно видеть, что выполнено предельное соотношение (3.11).

Покажем выполнение неравенств (2.6) для функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, в любой точке множества $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

В точке $x_* \in \tilde{G} \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k^+)$ неравенства (2.6) выполнены в силу утверждений 2.5, 2.7 и уравнения (3.13).

Пусть $x_* \in \tilde{G} \cap \mathcal{B}_k^+$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ как решение начальной задачи (3.12). Поскольку траектория $\beta(\cdot)$ не переходит в область выше кривой $\mathcal{B}_k^+$, имеем $\omega_k(\beta(t)) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. Используя обозначение $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$, находим, что

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(+0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d\varphi_2(\beta(t))}{dt} = \lim_{t \rightarrow +0} \langle \nabla \varphi_2(\beta(t)), f(\beta(t), u_*, v_*) \rangle \geq \\ &\geq \lim_{t \rightarrow +0} H(\beta(t), \nabla \varphi_2(\beta(t))) = -1. \end{aligned}$$

Рис. 3.4: Проверка условий теоремы для множеств $F(t_*)$ и $B(t_*)$

Учитывая утверждение 2.3, получаем, что в точке x_* выполнены неравенства (2.6). Таким образом, функция $\omega_k(\cdot)$ v -стабильна на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

2°. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что выполнено включение

$$G^F(t_*, \varepsilon, \delta) \subset \Omega \cap (\Omega^+ \cup \mathcal{E} \cup \Omega^-).$$

Для $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$ окрестность $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$ показана на рис. 3.4, а.

В силу равенств (3.9) точки множества $\Omega^\pm$ являются регулярными точками функции $\varphi(\cdot)$, а точки кривой $\mathcal{E}$ – простейшими сингулярными точками экивокального типа. В силу теоремы 3 функция $\varphi(\cdot)$ обладает свойствами u - и v -стабильности на множестве $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$.

3°. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое $\delta > 0$, что выполнены соотношения

$$G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap F(t_*) = \emptyset, \quad G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \cap \{x \in R^2 : x_2 = 0\} = \emptyset.$$

Для $t_* \in (0, \varphi(\tilde{x}))$ окрестность $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$ показана на рис. 3.4, б.

Определим функции

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

следующим образом. Сдвинем составную кривую $\mathcal{B}^-\mathcal{B}^+$ вправо вдоль оси x_1 на величину $1/k$, обозначим ее через $\mathcal{B}_k$ (рис. 3.4, б). Положим $\omega_k^\infty(x) = 0$ в точках $x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$, расположенных строго левее кривой $\mathcal{B}_k$, и $\omega_k^\infty(x) = \infty$ во всех остальных точках множества $G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$.

Покажем v -стабильность функции $\omega_k^\infty(\cdot)$. В силу утверждений 2.6, 2.7 неравенства (2.6) выполнены в точках $x_* \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus (D(t_*) \cup \mathcal{B}_k)$. Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k \cap G^B(t_*, \varepsilon, \delta)$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = 0$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ как решение начальной задачи (3.12). Поскольку траектория $\beta(\cdot)$ не переходит в область левее кривой $\mathcal{B}_k$, имеем $\omega_k^\infty(\beta(t)) = \infty$, $t \in [0, \tau)$. В силу утверждения 2.3 в точке x_* выполнены неравенства (2.6). Следовательно, функция $\omega_k^\infty(\cdot)$ v -стабильна на множестве $G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*)$.

Предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \setminus D(t_*),$$

очевидно.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и равенство (3.6) доказано.

Заметим, что аналогично равенство (3.6) можно доказать для множества, более широкого, чем Ω . А именно, существует такое значение $\bar{t} \in (\varphi(\tilde{y}), \infty)$, что линия $F(\bar{t})$ представляет собой замкнутую кривую. Равенство (3.6) будет справедливо для всех точек $x \in R^n$, таких, что $\varphi(x) \leq \bar{t}$.

Глава 4

Игровая задача о брахистохроне

Игровая задача о брахистохроне (кривой наискорейшего спуска) рассматривалась Р. Айзексом [1] как обобщение классической задачи вариационного исчисления [10]. Решение, предложенное Р. Айзексом, было уточнено и дополнено [11, 29]. Исследуемая в данной работе игровая задача отличается от задачи в постановке Р. Айзекса видом терминального множества и вектограммой второго игрока.

В данной главе, применяя метод Айзекса обработки полей классических характеристик, в верхней полуплоскости R_+^2 определяем тестируемую функцию $\varphi(\cdot) : R_+^2 \rightarrow [0, \infty]$. Функция строится при различных значениях высоты терминального множества. Обоснование решения задачи усложняется тем, что правая часть динамики системы не удовлетворяет классическим условиям существования цены игры, а именно, локальному условию Липшица по фазовой переменной. Поэтому сначала дается эквивалентное определение цены игры в терминах пучков ломаных Эйлера. Далее, теорема 1 применяется к вспомогательной дифференциальной игре и функции $\varphi_\delta(\cdot)$, которая конструируется на основе функции $\varphi(\cdot)$. Этот результат используется для доказательства совпадения тестируемой функции $\varphi(\cdot)$ с функцией цены исходной дифференциальной игры в смысле эквивалентного определения. При проверке выполнения условий теоремы 1 применяется теорема 3.

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальную игру быстрого действия

$$\dot{x}_1 = \sqrt{x_2} \cos u, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{x_2} \sin u + wv, \quad (4.1)$$

$$u \in P = [0, 2\pi], \quad v \in Q = [-1, 1], \quad t \geq 0, \quad x_0 \in R_+^2,$$

где R_+^2 – верхняя полуплоскость.

Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время достижения терминального множества $M = [-d, 0] \times [0, h]$. Здесь $d, h > 0$. От величины $w > 0$ зависят возможности второго игрока.

Сначала, используя метод Айзекса, определим функцию

$$\varphi(\cdot): R_+^2 \rightarrow [0, \infty].$$

Затем, применяя теоремы 1 и 3, покажем, что функция $\varphi(\cdot)$ будет функцией цены в игровой задаче о брахистохроне.

Так как правая часть системы (4.1) не зависит от x_1 , игра симметрична относительно вертикальной прямой $x_1 = -d/2$. Далее все построения будем проводить для множества

$$\Omega^+ = \{x \in R_+^2 : x_1 \geq -d/2\}$$

и использовать обозначения

$$f^{(1)}(x, u) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_2} \cos u \\ \sqrt{x_2} \sin u \end{pmatrix}, \quad f(x, u, v) = f^{(1)}(x, u) + \begin{pmatrix} 0 \\ wv \end{pmatrix}.$$

4.2 Характеристическая система для уравнения Айзекса – Беллмана

Характеристическая система. Для рассматриваемой задачи экстремальные управления u^0 и v^0 , доставляющие минимум и максимум в (1.4), при условии $\|p\| \neq 0$ определяются формулами

$$\cos u^0 = -p_1/\|p\|, \quad \sin u^0 = -p_2/\|p\|, \quad \|p\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2},$$

$$v^0 \in \mathbf{Q}(x, p) = \begin{cases} \text{sign } p_2, & p_2 \neq 0; \\ [-1, 1], & p_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, гамильтониан (1.4) имеет вид

$$H(x, p) = -\sqrt{x_2}\|p\| + w|p_2|. \quad (4.2)$$

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Айзекса–Беллмана:

$$H(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in \text{int } R_+^2 \setminus M, \quad (4.3)$$

$$\varphi(x) = 0, \quad x \in \partial M. \quad (4.4)$$

При дополнительных условиях гладкости на функции $\varphi(\cdot)$ и $H(\cdot)$ для задачи (4.3), (4.4) применим метод характеристик. Он сводится к интегрированию характеристической системы (2.14).

При условиях $p_2 \neq 0$, $x_2 > 0$ запишем характеристическую систему для уравнения (4.3) (в обратном времени):

$$x'_1 = \sqrt{x_2} \frac{p_1}{\|p\|}, \quad x'_2 = \sqrt{x_2} \frac{p_2}{\|p\|} - w\mu_2, \quad p'_1 = 0, \quad p'_2 = -\frac{\|p\|}{2\sqrt{x_2}}. \quad (4.5)$$

Здесь

$$z' = dz/d\tau, \quad \tau = \text{const} - t, \quad \mu_2 = \text{sign } p_2.$$

Заметим, что функция $H(\cdot)$ является первым интегралом системы (4.5), а именно,

$$H(x, p) = -1. \quad (4.6)$$

Интегрирование характеристической системы. Проинтегрируем систему (4.5). Так как $p'_1 = 0$, то в дальнейшем символом p_1 будем обозначать постоянную, определяемую из начальных условий системы (4.5).

Рассмотрим два случая: $p_1 = 0$ и $p_1 \neq 0$.

Пусть $p_1 = 0$. Первые два уравнения системы (4.5) принимают вид

$$x'_1 = 0, \quad x'_2 = (\sqrt{x_2} - w)\mu_2.$$

При условии $x_2 \neq w^2$ находим первые интегралы характеристической системы:

$$x_1 = C, \quad \mu_2\tau - 2(\sqrt{x_2} + w \ln |\sqrt{x_2} - w|) = D. \quad (4.7)$$

Здесь C и D – некоторые постоянные. Первый интеграл (4.6) при $p_1 = 0$ принимает вид

$$(w - \sqrt{x_2})|p_2| = -1. \quad (4.8)$$

Для случая $p_1 = 0$ характеристическая система проинтегрирована. Характеристики являются вертикальными прямыми.

Пусть теперь $p_1 \neq 0$. Первый интеграл (4.6) принимает вид

$$-\sqrt{x_2}\|p\| + w|p_2| + 1 = 0 \quad (4.9)$$

и задает зависимость между значениями x_2 и p_2 :

$$x_2 = \mathcal{P}(|p_2|) := (w|p_2| + 1)^2 / \|p\|^2. \quad (4.10)$$

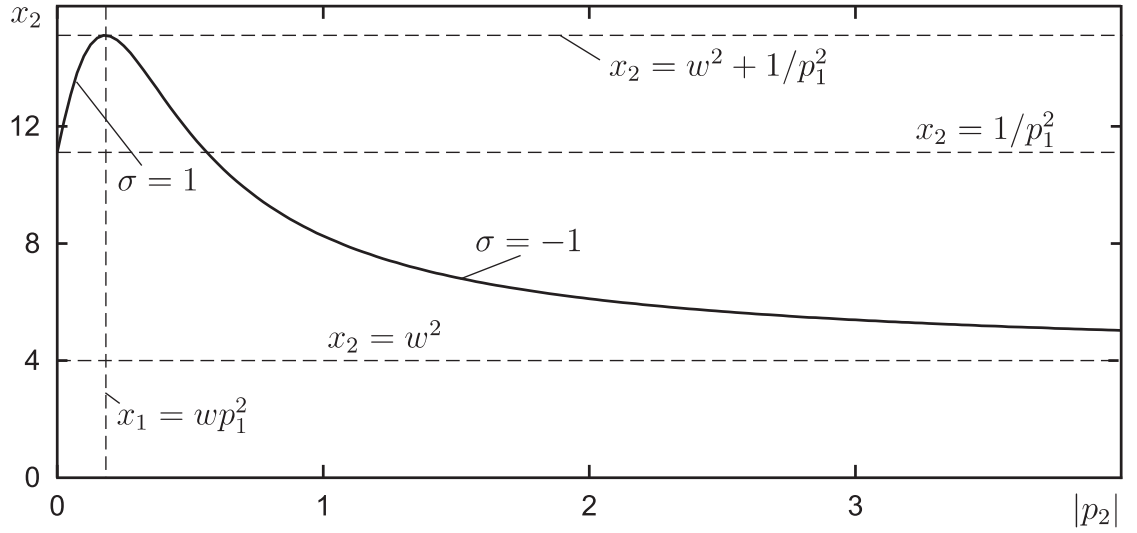


Рис. 4.1: График функции $|p_2| \rightarrow \mathcal{P}(|p_2|)$ при $p_1 = 0.3$ и $w = 2$

Функция $\alpha \rightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ монотонно возрастает на отрезке $[0, wp_1^2]$ и

$$\Phi(0) = 1/p_1^2, \quad \mathcal{P}(wp_1^2) = w^2 + 1/p_1^2.$$

На интервале $[wp_1^2, \infty)$ функция $\mathcal{P}(\cdot)$ монотонно убывает. Кроме того, $\mathcal{P}(\alpha) \rightarrow +w^2$ при $\alpha \rightarrow \infty$, то есть $x_2 = wp_1^2$ – горизонтальная асимптота функции $\mathcal{P}(\cdot)$. Таким образом, на интервалах $[0, wp_1^2]$ и $[wp_1^2, \infty)$ функция $\mathcal{P}(\cdot)$ является обратимой. Зависимость между $|p_2|$ и x_2 , задаваемая функцией $\mathcal{P}(\cdot)$, показана на рис. 4.1 для значений $p_1 = 0.3$ и $w = 2$.

Перепишем (4.10) в виде

$$(w^2 - x_2)p_2^2 + 2w|p_2| + (1 - x_2p_1^2) = 0. \quad (4.11)$$

В случае $x_2 = w^2$ имеем

$$|p_2| = (w^2p_1^2 - 1)/(2w). \quad (4.12)$$

Пусть теперь $x_2 \neq w^2$. Положим

$$\mathcal{R}(x_2, p_1) = x_2(1 + p_1^2(w^2 - x_2)).$$

Если $\mathcal{R}(x_2, p_1) = 0$ (т.е. $x_2 = w^2 + 1/p_1^2$), то уравнение (4.11) имеет единственный корень $|p_2| = wp_1^2$. Если $\mathcal{R}(x_2, p_1) > 0$ (т.е. $x_2 < w^2 + 1/p_1^2$), то без учета положительности величины $|p_2|$ уравнение (4.11) имеет два решения

$$|p_2| = \Psi_{\pm}(x_2) := \frac{-w \pm \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)}}{w^2 - x_2}.$$

Заметим, что правая часть равенства (4.12) является пределом функции $\Psi_+(x_2)$ в точке $x_2 = w^2$. Поэтому в дальнейшем вместо отдельного рассмотрения случая $x_2 = w^2$ будем считать функцию $\Psi_+(x_2)$ доопределенной по непрерывности в точке $x_2 = w^2$. С учетом положительности величины $|p_2|$ функция $\Psi_+(x_2)$ определена на отрезке $[1/p_1^2, w^2 + 1/p_1^2]$, а функция $\Psi_-(x_2)$ – на интервале $(w^2, w^2 + 1/p_1^2]$. Имеем $\Psi_-(x_2) \rightarrow +\infty$ при $x_2 \rightarrow w^2 + 0$.

Итак, при $|p_2| \in (0, wp_1^2]$ обратной к функции $\mathcal{P}(\cdot)$ является функция $\Psi_+(\cdot)$; при $|p_2| \in [wp_1^2, \infty)$ обратной к функции $\mathcal{P}(\cdot)$ будет функция $\Psi_-(\cdot)$. Пусть

$$\sigma = \sigma(p) := \text{sign}(wp_1^2 - |p_2|). \quad (4.13)$$

Тогда

$$|p_2| = \frac{-w + \sigma \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)}}{w^2 - x_2}. \quad (4.14)$$

Из уравнения (4.9) находим, что

$$\|p\| = (w|p_2| + 1)/\sqrt{x_2}. \quad (4.15)$$

Подставив в последнее равенство выражение для $|p_2|$, получим

$$\|p\| = \frac{x_2 - w\sigma \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)}}{\sqrt{x_2}(x_2 - w^2)}. \quad (4.16)$$

С учетом (4.14) и (4.16) первые два уравнения системы (4.5) принимают вид

$$x_1' = \frac{x_2 p_1 (w^2 - x_2)}{-x_2 + \sigma w \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)}}, \quad x_2' = \frac{\mu_2 \sigma \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)} (x_2 - w^2)}{-x_2 + \sigma w \sqrt{\mathcal{R}(x_2, p_1)}}. \quad (4.17)$$

Если $\sigma = -1$, то правая часть формул (4.17) определена и непрерывна при $x_2 \in (w^2, w^2 + 1/p_1^2]$. Если $\sigma = 1$, то правую часть формул (4.17) считаем доопределенной по непрерывности при $x_2 = w^2$, то есть она определена и непрерывна при $x_2 \in [1/p_1^2, w^2 + 1/p_1^2]$.

Фазовые траектории системы (4.17) являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\mu_1 \mu_2 \sigma \sqrt{\frac{x_2}{\lambda(p_1) - x_2}}, \quad (4.18)$$

где

$$\lambda(p_1) = w^2 + 1/p_1^2. \quad (4.19)$$

Интегрируя (4.18) при постоянном значении σ , находим первый интеграл системы (4.17), а значит и системы (4.5):

$$x_1 + \mu_1 \mu_2 \sigma \mathcal{F}(x_2, \lambda(p_1)) = C_\sigma. \quad (4.20)$$

Здесь

$$\mathcal{F}(x_2, \lambda) = \lambda \arcsin \sqrt{x_2/\lambda} - \sqrt{x_2(\lambda - x_2)}, \quad p_1 = \text{const},$$

$\mu_i = \text{sign } p_i$, $i = 1, 2$, C_σ – некоторая постоянная.

Подставляя выражение для x_2 по формуле (4.10) в последнее уравнение характеристической системы (4.5), получим

$$p'_2 = -\|p\|^2 / (2w|p_2| + 2). \quad (4.21)$$

Интегрирование уравнения (4.21) определяет еще один первый интеграл системы (4.5):

$$\tau + w\mu_2 \ln \|p\|^2 + 1/p_1 \arctg(p_2/p_1) = D. \quad (4.22)$$

Здесь D – некоторая постоянная.

Значения μ_1 , μ_2 , σ определяются исходя из заданной начальной точки x_0 . Равенства (4.9), (4.20), (4.22) представляют собой алгебраическую систему трех уравнений относительно трех неизвестных p_2 , s и τ . Она неявно определяет величину τ – время движения вдоль характеристики от начальной точки x_0 до точки x – как функцию от x .

Построение характеристики. Покажем, как с помощью найденных первых интегралов строится характеристика при заданных начальных условиях

$$x(0) = \xi = (\xi_1, \xi_2)^T, \quad p(0) = \zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T.$$

Если $\zeta_1 = 0$, то ограничимся случаем $\mu_2 = \text{sign } \zeta_2 > 0$ и $\xi_2 > w^2$, который понадобится в дальнейшем. В этом случае $x'_1 = 0$, $x'_2 > 0$ и характеристикой будет луч $\{x \in R^2 : x_1 = \xi_1, x_2 \geq \xi_2\}$.

Более сложным является случай $\zeta_1 \neq 0$. Пусть $\zeta_1 > 0$ (т.е. $\mu_1 = 1$). Исходя из начального условия, имеем $p_1 = \zeta_1$. Построение характеристики будет основано на уравнении (4.20).

Часть характеристики, выходящая из точки ξ , явно задается равенством

$$x_1 = C_0 - \mu_2 \sigma_0 \mathcal{F}(x_2, \lambda(p_1)),$$

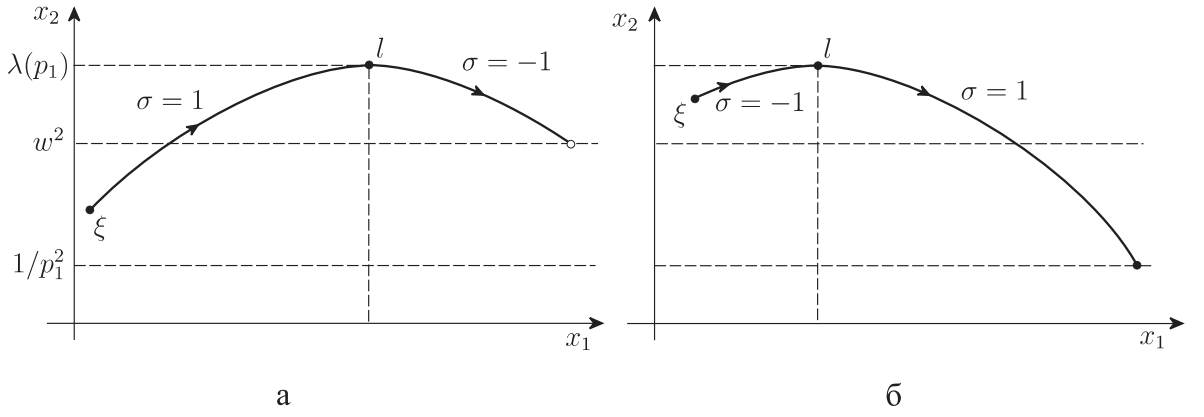


Рис. 4.2: Вид характеристики при $\mu_2 = -1$, $\sigma_0 = 1$ (а) и $\mu_2 = 1$, $\sigma_0 = -1$ (б)

где

$$\sigma_0 = \sigma(\zeta), \quad C_0 = \xi_1 + \mu_2 \sigma_0 \mathcal{F}(\xi_2, \lambda(\zeta_1)).$$

Пусть сначала $\mu_2 = -1$. Рассмотрим случай $\sigma_0 = 1$. Из соотношения (4.10) получаем $\xi_2 \in (1/p_1^2, \lambda(p_1))$. Характеристика выходит из точки ξ в положительном направлении оси x_2 до момента касания с прямой $x_2 = \lambda(p_1)$, на которой $\sigma(p_1, p_2) = 0$. Точку касания обозначим через $l = (l_1, l_2)$, где $l_2 = \lambda(p_1)$.

Поскольку $p_2 < 0$, величина p_2 монотонно убывает и $p_1 = \zeta_1$ вдоль характеристики, то величина $wp_1^2 - |p_2|$ монотонно убывает. Следовательно, в точке l происходит смена значения σ с $+1$ на -1 . Вторая часть характеристики выходит из точки l в отрицательном направлении оси x_2 и задается равенством

$$x_1 = C - \mu_2 \sigma \mathcal{F}(x_2, \lambda(p_1)), \quad x_2 \in [l_2, w^2), \quad (4.23)$$

где

$$\sigma = -1, \quad \mu_2 = -1, \quad C = l_1 + \mu_2 \sigma \mathcal{F}(\xi_2, \lambda(\zeta_1)).$$

Поскольку $|p_2| \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, то $x_2 \rightarrow w^2 + 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ после пересечения точки l . Следовательно, характеристика приближается к прямой $x_2 = w^2$ неограниченно долго.

Вид характеристики при $\mu_2 = -1$, $\sigma_0 = 1$ показан на рис. 4.2, а.

В случае $\sigma_0 = -1$ характеристика выходит из точки ξ в отрицательном направлении оси x_2 и ее поведение аналогично поведению характеристики в случае $\sigma_0 = 1$ после прохождения точки l .

Пусть теперь $\mu_2 = 1$. Рассмотрим случай $\sigma_0 = -1$. Из соотношения (4.10) получаем $\xi_2 \in (w^2, \lambda(p_1))$. Характеристика выходит из точки ξ в положительном направлении оси x_2 до момента касания с прямой

$x_2 = \lambda(p_1)$, на которой $\sigma(p) = 0$. Точку касания вновь обозначим через $l = (l_1, l_2)$.

Поскольку $p_2 > 0$, величина p_2 монотонно убывает и $p_1 = \zeta_1$ вдоль характеристики, то величина $wp_1^2 - |p_2|$ монотонно возрастает. Следовательно, в точке l происходит смена значения σ с -1 на $+1$. Вторая часть характеристики выходит из точки l в отрицательном направлении оси x_2 и задается равенством (4.23) при $x_2 \in [l_2, 1/p_1^2)$ и $\sigma = 1$.

При $\mu_2\sigma > 0$ и $x_2 \rightarrow 1/p_1^2$ имеем $p_2 \rightarrow +0$. Характеристика попадает на прямую $x_2 = 1/p_1^2$ за конечное время.

Вид характеристики при $\mu_2 = 1$, $\sigma_0 = -1$ показан на рис. 4.2, б.

В случае $\sigma_0 = 1$ характеристика выходит из точки ξ в отрицательном направлении оси x_2 и ее поведение аналогично поведению характеристики в случае $\sigma_0 = -1$ после прохождения точки l .

Случай $\zeta_1 < 0$ рассматривается аналогично.

4.3 Первичные семейства характеристик

Построим первичные характеристики, выходящие с допустимой зоны $\mathcal{A}(M)$ [1] терминального множества M .

Допустимая зона терминального множества. Дадим сначала определение внешней нормали [4] к замкнутому множеству $\mathbf{M} \subset R^n$ и определение допустимой зоны $\mathcal{A}(\mathbf{M})$.

Вектор $\nu(z) \in R^2$, $|\nu(z)| = 1$, называется *внешней нормалью* к замкнутому множеству $\mathbf{M}$ в точке $z \in \partial\mathbf{M}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\mathbf{B}(z + \varepsilon\nu, \varepsilon) \cap \mathbf{M} = \{z\}.$$

Обозначим через $\mathcal{N}(z; \mathbf{M})$ множество внешних нормалей к множеству $\mathbf{M}$ в точке $z \in \partial\mathbf{M}$.

Точка $z \in \partial\mathbf{M}$ принадлежит *допустимой зоне* $\mathcal{A}(\mathbf{M})$ множества $\mathbf{M}$, если существует вектор $\nu \in \mathcal{N}(z; \mathbf{M})$, такой, что $H(z, \nu) < 0$. В этом случае вектор ν называется *допустимой внешней нормалью*.

Если $z \in \mathcal{A}(\mathbf{M})$ – точка гладкости границы ∂M , то множество $\mathcal{N}(z; \mathbf{M})$ одноэлементно и нормаль $\nu \in \mathcal{N}(z; \mathbf{M})$ является допустимой. Для точек негладкости границы $\partial\mathbf{M}$ будем дополнительно указывать множество допустимых внешних нормалей.

В рассматриваемой задаче положим

$$\Gamma_1 = \{z \in \partial M : z_1 = 0, z_2 \in (0, h)\},$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \partial M : z_1 \in [-d/2, 0), z_2 = h\}.$$

Тогда

$$\partial M \cap \Omega^+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{(0, h)^T\} \cup \{(0, 0)^T\}.$$

В случае $z \in \Gamma_1$ имеем $\mathcal{N}(z; M) = \{e_1\} = \{(1, 0)^T\}$. Поскольку $H(z, e_1) = -\sqrt{z_2} < 0$, $z_2 \in (0, h)$, то $\Gamma_1 \subset \mathcal{A}(M)$.

В случае $z \in \Gamma_2$ имеем $\mathcal{N}(z; M) = \{e_2\} = \{(0, 1)^T\}$. Поскольку $H(z, e_2) = w - \sqrt{h}$, то $\Gamma_2 \subset \mathcal{A}(M)$ только при $h > w^2$.

Пусть $z = (0, h)^T$. Поскольку $e_1 = (1, 0)^T \in \mathcal{N}(z; M)$ и $H(z, e_1) = -\sqrt{h} < 0$, то $z \in \mathcal{A}(M)$. Очевидно, что

$$\mathcal{N}(z; M) = \{\nu_s\}, \quad \nu_s = (\cos s, \sin s)^T, \quad s \in [0, \pi/2].$$

Значения параметра s , соответствующие допустимым нормальям $\nu_s \in \mathcal{N}(z; M)$, определяются неравенством

$$H(z, \nu_s) = -\sqrt{h} + w \sin s < 0.$$

Таким образом, при $h > w^2$ допустимыми являются все нормали из множества $\mathcal{N}(z; M)$; при $h \leq w^2$ допустимыми являются нормали $\nu_s \in \mathcal{N}(z; M)$ при $s \in [0, \arcsin \sqrt{h}/w]$.

Пусть $z = (0, 0)^T$. Очевидно, что

$$\mathcal{N}(z; M) = \{\bar{\nu}\}, \quad \bar{\nu} = (\cos s, \sin s)^T, \quad s \in [-\pi/2, 0].$$

Поскольку для $\bar{\nu}_s \in \mathcal{N}(z; M)$ имеем

$$H(z, \bar{\nu}_s) = w |\sin s| \geq 0, \quad s \in [0, \pi/2],$$

то $z \notin \mathcal{A}(M)$.

Характеристики, выходящие из вертикального участка. Построим нижнее поле характеристик, выходящее из множества Γ_1 . Зададим параметризацию множества Γ_1 :

$$\Gamma_1 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = 0, \xi_2 = s, s \in (0, h)\}.$$

Определим начальные условия $\check{\xi}(s), \check{\zeta}(s)$, $s \in (0, h)$, для характеристической системы (4.5) в точках множества Γ_1 . Дифференцируя тождество

$$\varphi(\check{\xi}(s)) \equiv 0, \quad s \in (0, h),$$

получаем $\check{\zeta}_2(s) = 0$. Условие (4.6) принимает вид

$$-\sqrt{s}\check{\zeta}_1(s) = -1.$$

Отсюда следует, что $\check{\zeta}_1(s) = 1/\sqrt{s}$. Таким образом, учитывая параметризацию множества Γ_1 , получаем следующие начальные условия

$$\check{\zeta}_1(s) = 0, \quad \check{\xi}_2(s) = s, \quad \check{\zeta}_1(s) = 1/\sqrt{s}, \quad \check{\zeta}_2(s) = 0, \quad s \in (0, h]. \quad (4.24)$$

Имеем $\check{\zeta}_1(s) \neq 0$. Следовательно, первые интегралы характеристической системы (4.5) заданы равенствами (4.9), (4.20), (4.22).

Поскольку $\check{\zeta}_1(s) > 0$ и величина p_1 постоянна вдоль характеристик, то $\mu_1 = 1$. Из эвристических соображений положим $\mu_2 = -1$.

Значение $D = \check{D}(s)$ получаем подстановкой в левую часть уравнения (4.22) начальных условий (4.24) и значения $\mu_2 = -1$. Имеем

$$\check{D}(s) = w \ln s, \quad s \in (0, h).$$

Из формулы (4.13) и начальных условий (4.24) находим значение $\sigma = \sigma(\check{\zeta}(s))$ для характеристики с параметром s . Получаем

$$\sigma = \sigma(\check{\zeta}(s)) = \text{sign}(w/s) = 1, \quad s \in (0, h).$$

Значение $C_\sigma = \check{C}_+(s)$, $s \in (0, h)$, для частей характеристик, выходящих из допустимой зоны, находим подстановкой в левую часть уравнения (4.20) начальных условий (4.24) и значений $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$. В результате получаем

$$\check{C}_+(s) = -\mathcal{F}(s, w^2 + s), \quad s \in (0, h).$$

Поскольку $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$, то найдется момент времени $\check{\tau}(s) > 0$, в который произойдет смена значения $\sigma = \sigma(p)$ с $+1$ на -1 . Множество точек смены значения $\sigma = \sigma(p)$ всех характеристик с параметром $s \in (0, h)$ образуют кривую $\check{\mathcal{L}}$. Явное выражение для кривой $\check{\mathcal{L}}$ имеет вид

$$x_1 = \check{L}(x_2) := x_2 \arcsin \frac{w}{\sqrt{x_2}} + w \sqrt{x_2 - w^2}, \quad x_2 \in (w^2, w^2 + h].$$

Функция $\check{L}(\cdot)$ монотонно возрастает и вогнута.

Значение $C_\sigma = \check{C}_-(s)$, $s \in (0, h)$, для частей характеристик, выходящих из точек кривой $\check{\mathcal{L}}$, находится подстановкой в левую часть уравнения (4.20)

значений $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = -1$ и значений x_1 , x_2 , p_1 , определяемых моментом времени $\tilde{\tau}(s)$, т.е.

$$x_2 = w^2 + s, \quad x_1 = \check{C}_+(s) - \pi(w^2 + s)/2, \quad p_1 = 1/\sqrt{s}.$$

Получаем

$$\check{C}_-(s) = \check{C}_+(s) + \pi(w^2 + s), \quad s \in (0, h).$$

Система алгебраических уравнений (4.9), (4.20), (4.22) неявно задает функции $\check{x}(\cdot, s)$, $\check{p}(\cdot, s)$ от переменной $\tau \in [0, \infty)$ для значений параметра $s \in (0, h)$.

Поле первичных характеристик $x = \check{x}(\tau, s)$, выходящих из точек множества Γ_1 , показано в верхней части рис. 4.3 для параметров $h = 6$, $w = 2$.

Пусть кривая $\mathcal{B}_*$ задается уравнением

$$x_1 = \beta_*(x_2) := w^2 \arcsin \frac{\sqrt{x_2}}{w} - \sqrt{x_2(w^2 - x_2)}, \quad x_2 \in [0, w^2]. \quad (4.25)$$

Имеем $\beta_*(w^2) = \pi w^2/2$. Линия $\mathcal{B}_*$ является предельной для построенного поля характеристик при $s \rightarrow +0$, поскольку $p_1 \rightarrow \infty$ и уравнение (4.20) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$, $C_\sigma = \check{C}_+(s)$ переходит в равенство $x_1 = \beta_*(x_2)$.

Пусть

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_* \cup \{x \in R^2 : x_1 \geq \pi w^2/2, x_2 = w^2\}.$$

При $\tau \rightarrow +\infty$ имеем $\check{x}_2(\tau, s) \rightarrow w^2 + 0$. Следовательно, нижнее поле характеристик ограничено снизу линией $\mathcal{B}$. Линия $\mathcal{B}$ является полупроницаемой [1] с вырожденным горизонтальным участком.

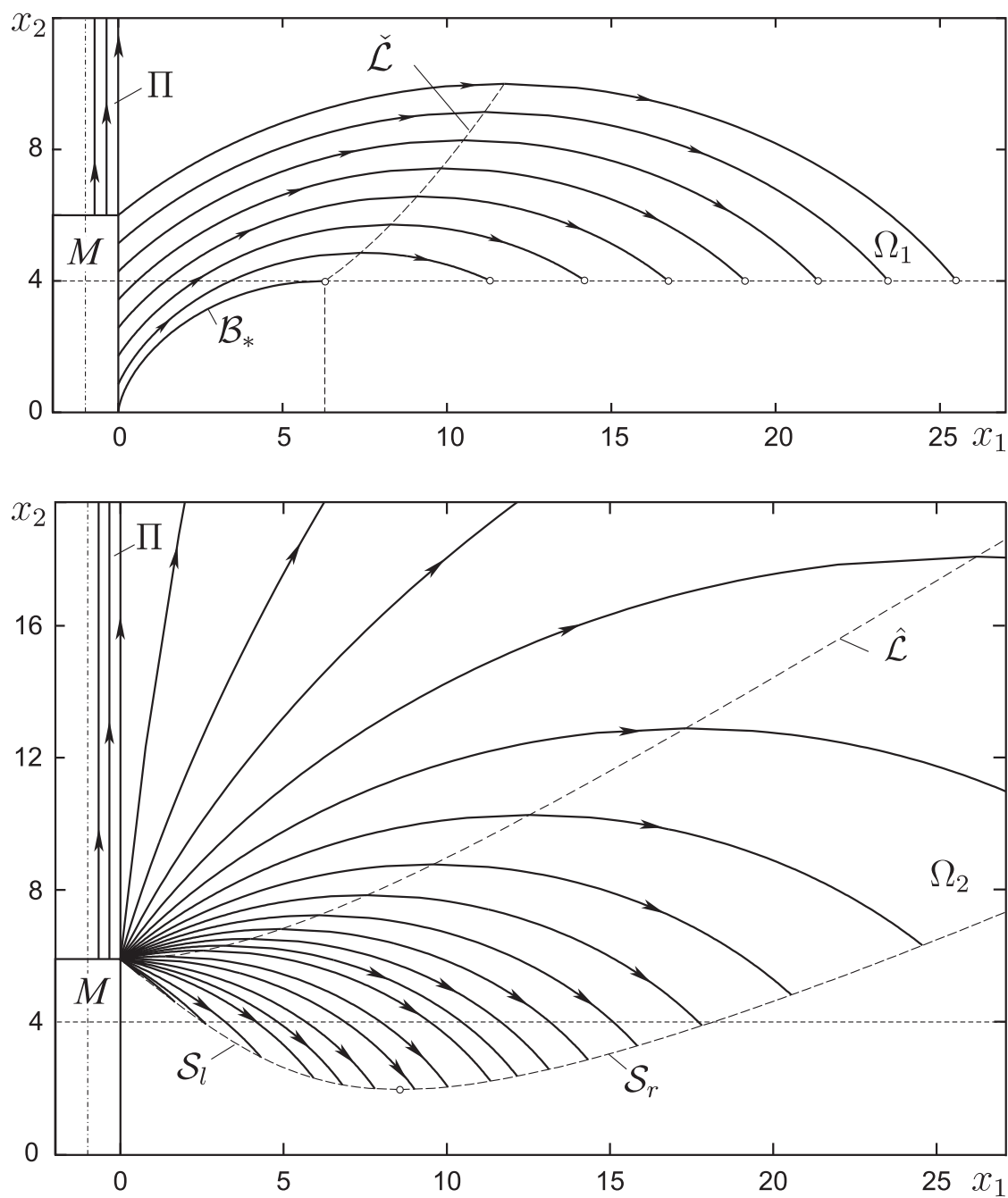
Обозначим через $\check{x}(\tau, 0)$ траекторию системы (4.1) в силу полупроницаемых управлений [1] вдоль линии $\mathcal{B}_*$ в обратном времени. Пусть

$$\Omega_1 = \{\check{x}(\tau, s) : \tau \in [0, \infty), s \in [0, h]\}.$$

Уравнение $x = \check{x}(\tau, s)$ неявно определяет значение $\tau = \varphi_1(x)$, $x \in \Omega_1$, равное времени движения вдоль соответствующей характеристики.

Характеристики, выходящие из горизонтального участка. Пусть $h > w^2$. Построим вертикальное поле характеристик, выходящее из множества Γ_2 . Зададим параметризацию множества Γ_2 :

$$\Gamma_2 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = -s, \xi_2 = h, s \in (0, d/2]\}.$$

Рис. 4.3: Поля первичных характеристик при $h = 6, w = 2$

Определим начальные условия $\bar{\xi}(s)$, $\bar{\zeta}(s)$, $s \in (0, d/2]$, для характеристической системы (4.5) на множестве Γ_2 . Дифференцируя тождество

$$\varphi(\bar{\xi}(s)) \equiv 0, \quad s \in (0, d/2],$$

получаем $\bar{\zeta}_1(s) = 0$. Первый интеграл (4.6) принимает вид

$$-\sqrt{h}\bar{\zeta}_2(s) + w\bar{\zeta}_2(s) = -1.$$

Следовательно, $\bar{\zeta}_2(s) = 1/(\sqrt{h} - w)$. Таким образом, учитывая параметризацию множества Γ_2 , получаем следующие начальные условия

$$\bar{\xi}_1(s) = -s, \quad \bar{\xi}_2(s) = h, \quad \bar{\zeta}_1(s) = 0, \quad \bar{\zeta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{h} - w}, \quad s \in (0, d/2]. \quad (4.26)$$

Так как $\bar{\zeta}_1(s) = 0$, то $p_1 = 0$ вдоль характеристик, и первые интегралы характеристической системы (4.5) заданы формулами (4.7), (4.8).

Из эвристических соображений положим $\mu_2 = 1$.

Учитывая начальные условия (4.26) находим постоянные $C = \bar{C}(s)$ и $D = \bar{D}$ в первых интегралах (4.7) для характеристики с параметром $s \in (0, d/2]$:

$$\bar{C}(s) = -s, \quad \bar{D} = -2(\sqrt{h} + w \ln(\sqrt{h} - w)).$$

Тогда первые интегралы (4.7), (4.8) принимают вид

$$x_1 = -s, \quad \tau = 2 \left[\sqrt{x_2} - \sqrt{h} + w \ln \frac{\sqrt{x_2} - w}{\sqrt{h} - w} \right], \quad (w - \sqrt{x_2})p_2 = -1. \quad (4.27)$$

Время движения вдоль характеристик явно определяет значения

$$\bar{\varphi}(x) = 2 \left(\sqrt{x_2} - \sqrt{h} + w \ln \frac{\sqrt{x_2} - w}{\sqrt{h} - w} \right) \quad (4.28)$$

в точках x вертикальной полосы (рис. 4.3)

$$\Pi = \{x \in R_+^2 : -d/2 \leq x_1 < 0, x_2 \geq h\}.$$

Характеристики, выходящие из угловой точки. Введем обозначение $z = (0, h)^T$. Построим верхнее поле характеристик, выходящее из точки z . Из эвристических соображений положим $\mu_2 = 1$.

Рассмотрим конус $\mathcal{N}(z; M)$ всех внешних нормалей к множеству M в точке z . Имеем

$$\mathcal{N}(z; M) = \{\nu_s\}, \quad \nu_s = (\cos s, \sin s)^T, \quad s \in [0, \pi/2].$$

Напомним, что при $h > w^2$ допустимым является весь конус $\mathcal{N}(z; M)$; при $h \leq w^2$ допустимыми являются нормали с параметром

$$s \in [0, \arcsin(\sqrt{h}/w)).$$

Для каждой допустимой нормали определим начальные условия $\hat{\xi}(s), \hat{\zeta}(s)$ для характеристической системы (4.5).

Имеем $\hat{\xi}_1(s) = 0, \hat{\xi}_2(s) = h$. Первый интеграл (4.6) принимает вид

$$-\sqrt{h}\|\hat{\zeta}(s)\| + w|\hat{\zeta}_2(s)| = -1. \quad (4.29)$$

Еще одно уравнение для $\hat{\zeta}(s)$ найдем из условия $\langle \nu_s^\perp, \hat{\zeta}(s) \rangle = 0$, где $\nu_s^\perp$ – вектор, ортогональный вектору ν_s . Положим $\nu_s^\perp = (-\sin s, \cos s)$. Тогда

$$-\sin s \hat{\zeta}_1(s) + \cos s \hat{\zeta}_2(s) = 0. \quad (4.30)$$

Если $s = \pi/2$, то $\hat{\zeta}_1(s) = 0$. Учитывая, что $\mu_2 = 1$, из (4.29) получаем

$$\hat{\zeta}_2(s) = 1/(\sqrt{h} - w).$$

Таким образом, для характеристики с параметром $s = \pi/2$ имеем следующие начальные условия

$$\hat{\xi}_1(\pi/2) = 0, \quad \hat{\xi}_2(\pi/2) = h, \quad \hat{\zeta}_1(\pi/2) = 0, \quad \hat{\zeta}_2(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{h} - w}.$$

Получаем вертикальную характеристику, которая замыкает поле вертикальных характеристик, выходящих из точек множества Γ_2 .

Пусть теперь $s \in [0, \pi/2)$. Тогда в силу (4.30) имеем $\hat{\zeta}_2(s) = \hat{\zeta}_1(s) \operatorname{tg} s$. Подставляя это выражение в (4.29), получаем

$$-|\hat{\zeta}_1(s)|\sqrt{h(1 + \operatorname{tg}^2 s)} + w|\hat{\zeta}_1(s)| \operatorname{tg} s = -1,$$

и, следовательно,

$$|\hat{\zeta}_1(s)| = \frac{\cos s}{\sqrt{h} - w \sin s}, \quad |\hat{\zeta}_2(s)| = \frac{\sin s}{\sqrt{h} - w \sin s}.$$

Так как $\hat{\zeta}_2(s) = \hat{\zeta}_1(s) \operatorname{tg} s$, то $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Таким образом, $\hat{\zeta}_1(s) > 0$, $\hat{\zeta}_2(s) > 0$ и начальные условия имеют вид

$$\hat{\xi}_1(s) = 0, \quad \hat{\xi}_2(s) = h, \quad \hat{\zeta}_1(s) = \frac{\cos s}{\sqrt{h} - w \sin s}, \quad \hat{\zeta}_2(s) = \frac{\sin s}{\sqrt{h} - w \sin s}. \quad (4.31)$$

При $h > w^2$ начальные условия (4.31) определены для $s \in [0, \pi/2)$, при $h \leq w^2$ — для $s \in [0, \arcsin(\sqrt{h}/w))$ (т.е. для параметров, соответствующих допустимым нормальям).

Поскольку $\hat{\zeta}_1(s) \neq 0$ при $s \in [0, \pi/2)$, то первые интегралы характеристической системы (4.5) заданы равенствами (4.9), (4.20), (4.22).

Значение $D = \hat{D}(s)$ получаем подстановкой в левую часть уравнения (4.22) начальных условий (4.31) и значения $\mu_2 = 1$. Имеем

$$\hat{D}(s) = \frac{s}{\hat{\zeta}_1(s)} - w \ln(\sqrt{h} - w \sin s)^2. \quad (4.32)$$

Из формулы (4.13) и начальных условий (4.31) находим значение $\sigma = \sigma(\hat{\zeta}(s))$ для характеристики с параметром s . Получаем

$$\sigma = \sigma(\hat{\zeta}(s)) = \operatorname{sign}(w - \sqrt{h} \sin s).$$

Пусть

$$\hat{s} = \begin{cases} \arcsin(\sqrt{h}/w), & h \leq w^2; \\ \arcsin(w/\sqrt{h}), & h > w^2. \end{cases}$$

При $h \leq w^2$ имеем $\sigma(\hat{\zeta}(s)) = 1$ для всех $s \in [0, \hat{s})$. При $h > w^2$ имеем

$$\sigma(\hat{\zeta}(s)) = \begin{cases} 1, & s \in [0, \hat{s}); \\ 0, & s = \hat{s}; \\ -1, & s \in (\hat{s}, \pi/2). \end{cases} \quad (4.33)$$

Если $s \in [0, \hat{s})$, то $\sigma(\hat{\zeta}(s)) = 1$. Значение $C_\sigma = \hat{C}_+(s)$ для частей характеристик, выходящих из угловой точки, находим подстановкой в левую часть уравнения (4.20) начальных условий (4.31) и значений $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma = 1$. Получаем

$$\hat{C}_+(s) = \mathcal{F}(h, \lambda(\hat{\zeta}_1(s))), \quad s \in [0, \hat{s}).$$

Поскольку $\mu_2 = 1$, $\sigma = 1$, то характеристика с параметром s заканчивается на прямой $x_2 = 1/\hat{\zeta}_1^2(s)$ (рис. 4.3, б). Множество точек окончания

характеристик с параметром $s \in [0, \hat{s})$ образует кривую $\mathcal{S}_l$. Явное задание кривой $\mathcal{S}_l$ имеет вид

$$x_1 = S_l(x_2) := (x_2 + w^2) \left[\arcsin \sqrt{\frac{h}{x_2 + w^2}} - \arcsin \sqrt{\frac{x_2}{x_2 + w^2}} \right] - \sqrt{h(x_2 + w^2 - h)} + w\sqrt{x_2}, \quad x_2 \in (\max\{0, h - w^2\}, h].$$

Пусть теперь $h > w^2$ и $s \in [\hat{s}, \pi/2)$. Значение σ определяется формулой (4.33). Тогда $\sigma(\hat{\zeta}(s)) = -1$. Величину $C_\sigma = \hat{C}_-(s)$ для частей характеристик, выходящих из угловой точки, находим подстановкой в левую часть уравнения (4.20) начальных условий (4.31) и значений $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и σ . Получаем

$$\hat{C}_-(s) = -\mathcal{F}(h, \lambda(\hat{\zeta}_1(s))), \quad s \in [\hat{s}, \pi/2).$$

Поскольку при $s \in (\hat{s}, \pi/2)$ имеем $\mu_2 = 1$, $\sigma = -1$, то найдется момент времени $\hat{\tau}(s)$, в который произойдет смена значения σ с -1 на $+1$. Множество точек смены значения σ для характеристик с параметром $s \in (\hat{s}, \pi/2)$ образует кривую $\hat{\mathcal{L}}$. Явное выражение для $\hat{\mathcal{L}}$ имеет вид

$$x_1 = \hat{L}(x_2) := x_2 \arccos \sqrt{\frac{h}{x_2}} + \sqrt{h(x_2 - h)}, \quad x_2 \in (h, \infty).$$

Функция $\hat{L}(\cdot)$ монотонно возрастает и вогнута. Заметим, что

$$\hat{L}(w^2 + h) = \check{L}(w^2 + h).$$

Значение $C_\sigma = \hat{C}_+(s)$, $s \in (\hat{s}, \pi/2)$, для частей характеристик, выходящих из точек кривой $\hat{\mathcal{L}}$, находим подстановкой в левую часть уравнения (4.20) значений $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma = 1$ и значений x_1, x_2, p_1 , определяемых моментом времени $\hat{\tau}(s)$, т.е.

$$x_2 = \lambda(\hat{\zeta}_1(s)), \quad x_1 = \hat{C}_-(s) + \pi\lambda(\hat{\zeta}_1(s))/2, \quad p_1(s) = \hat{\zeta}_1(s).$$

Получаем

$$\hat{C}_+(s) = -\mathcal{F}(h, \lambda(\hat{\zeta}_1(s))) + \pi\lambda(\hat{\zeta}_1(s)), \quad s \in (\hat{s}, \pi/2).$$

Характеристика с параметром s заканчивается на прямой $x_2 = 1/\hat{\zeta}_1^2(s)$. Множество точек окончания характеристик с параметром $s \in [\hat{s}, \pi/2)$ об-

разует кривую $\mathcal{S}_r$. Явное задание кривой $\mathcal{S}_r$ имеет вид

$$x_1 = S_r(x_2) := (x_2 + w^2) \left[\arccos \sqrt{\frac{h}{x_2 + w^2}} + \arccos \sqrt{\frac{x_2}{x_2 + w^2}} \right] + \\ + \sqrt{h(x_2 + w^2 - h)} + w\sqrt{x_2}, \quad x_2 \in [h - w^2, \infty). \quad (4.34)$$

Функция $S_r(\cdot)$ монотонно возрастает и вогнута. Кроме того,

$$S_r(h - w^2) = \check{L}(h), \quad S_r(h) = 2\hat{L}(w^2 + h).$$

Обозначим через $\hat{\mathcal{S}}$ склейку кривых $\mathcal{S}_l$ и $\mathcal{S}_r$ при $h > w^2$, и кривую $\mathcal{S}_l$ при $h \leq w^2$.

Система алгебраических уравнений (4.9), (4.20), (4.22) неявно определяет функции $\hat{x}(\cdot, s)$, $\hat{p}(\cdot, s)$ от переменной $\tau \in [0, \vartheta(s)]$ для значений параметра $s \in [0, \pi/2)$ при $h > w^2$ и $s \in [0, \hat{s})$ при $h \leq w^2$. Здесь $\vartheta(s)$ – момент окончания характеристики с параметром s на кривой $\hat{\mathcal{S}}$.

Таким образом, кривая $\hat{\mathcal{S}}$ параметрически задается уравнением

$$x = \hat{x}(\vartheta(s), s), \quad s \in [0, \pi/2), \quad (4.35)$$

и характеризуется равенствами

$$\hat{p}_2(\vartheta(s), s) = 0, \quad \hat{x}_2(\vartheta(s), s) = 1/\hat{\zeta}_1^2(s), \quad s \in [0, \pi/2). \quad (4.36)$$

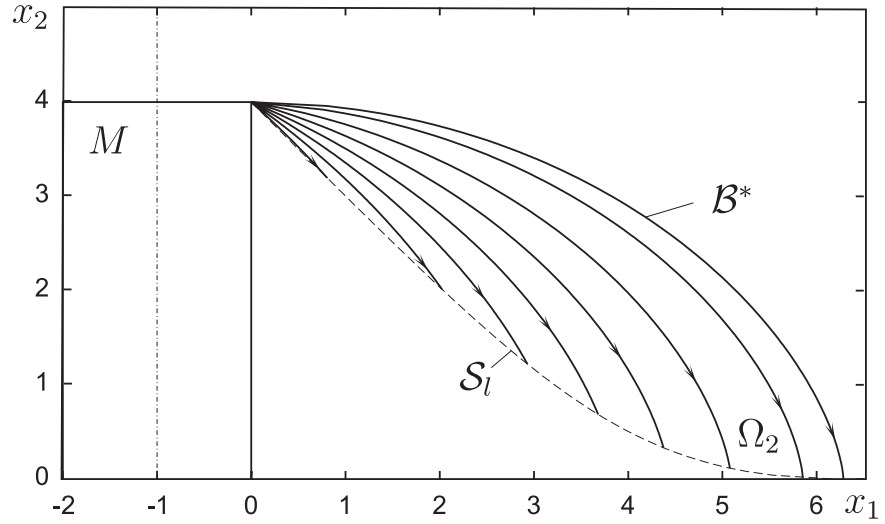
Пусть кривая $\mathcal{B}^*$ описывается уравнением $x_1 = -\beta_*(x_2) + \beta_*(h)$. Функция $\beta_*(\cdot)$ задана формулой (4.25). При $h \leq w^2$ линия $\mathcal{B}^*$ является предельной для построенного поля характеристик при $s \rightarrow \hat{s} - 0$.

В нижней части рис. 4.3 и на рис. 4.4 показано верхнее поле первичных характеристик, выходящих из угловой точки $(0, h)$, для значений $h = 6$, $w = 2$ и $h = w^2 = 4$. Структура верхнего поля характеристик остается подобной изображенной на рис. 4.4 для всех значений параметров h и w , таких что $h < w^2$.

Пусть

$$\Omega_2 = \{\hat{x}(\tau, s) : \tau \in [0, \vartheta(s)], s \in [0, \pi/2)\}.$$

Уравнение $x = \hat{x}(\tau, s)$ неявно определяет значение $\tau = \varphi_2(x)$, $x \in \Omega_2$, равное времени движения вдоль соответствующей характеристики.

Рис. 4.4: Верхнее поле первичных характеристик при $h = 4$, $w = 2$

4.4 Построение рассеивающей линии

Верхнее и нижнее поля характеристик частично накладываются друг на друга и определяют в областях Ω_1 и Ω_2 функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ как время достижения характеристиками терминального множества (в прямом времени). На множестве $\Omega_1 \cap \Omega_2$ построим сингулярную рассеивающую [1] линию $\mathcal{D}$.

Пусть

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{x \in \Omega_1 \cap \Omega_2: \varphi_1(x) = \varphi_2(x)\}.$$

В некоторой окрестности точки $(0, h)$ линия $\tilde{\mathcal{D}}$ обладает свойством рассеивания: из каждой ее точки в прямом времени выходят характеристики каждого из семейств в различных направлениях относительно линии $\tilde{\mathcal{D}}$.

При $h > w^2 + \Delta h$, где Δh – некоторое положительное число, линия $\tilde{\mathcal{D}}$ касается одной из характеристик (критической) первого семейства. При значениях h , близких к w^2 , происходит касание линии $\tilde{\mathcal{D}}$ и барьера $\mathcal{B}$. При дальнейшем уменьшении параметра h происходит касание линий $\tilde{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{B}_*$. Во всех случаях обозначим точку касания через $a = (a_1, a_2)$. Положим

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{D}}: x_1 \leq a_1\}.$$

Части характеристик обоих семейств после пересечения с линией $\mathcal{D}$ отбросим, т.е. в прямом времени каждая точка линии $\mathcal{D}$ является началом двух характеристик верхнего и нижнего полей.

Наложения полей характеристик и результаты численного построения рассеивающей линии для значений $w = 2$, $h = 6$ и $h = 4$, приведены на

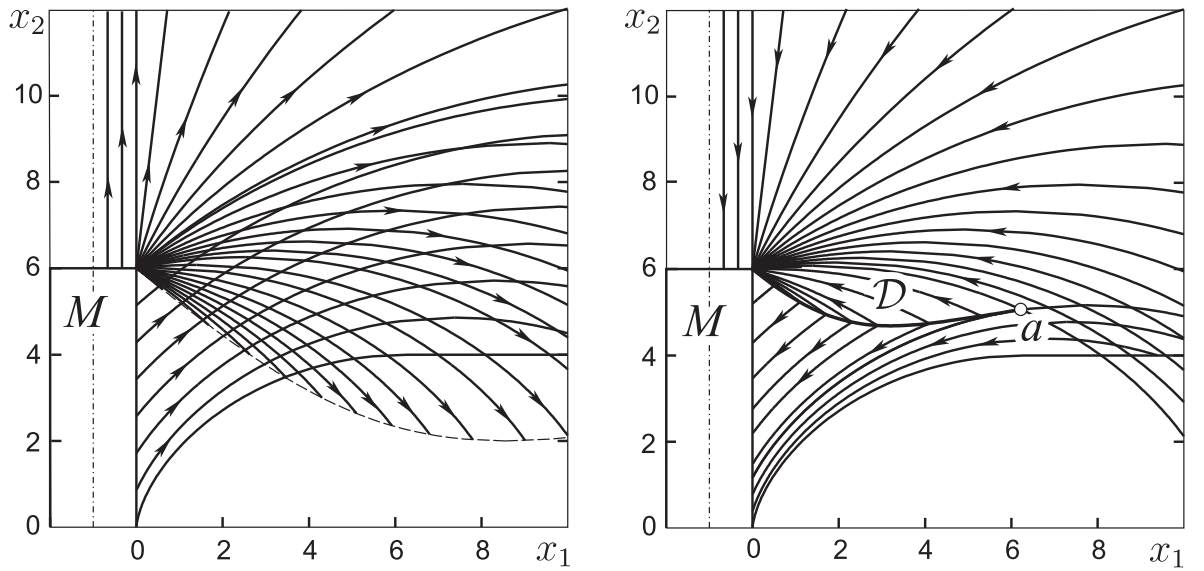
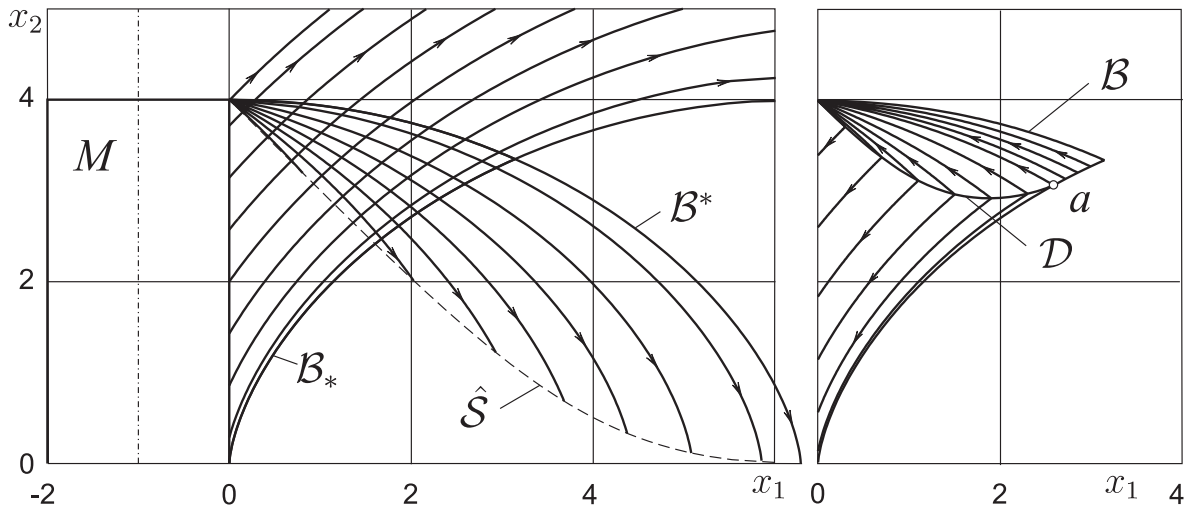
Рис. 4.5: Построение рассеивающей линии при $h = 6$, $w = 2$ Рис. 4.6: Построение рассеивающей линии при $h = 4$, $w = 2$

рис. 4.5, 4.6.

4.5 Построение экивокальной линии при $h > w^2$

В случае $h > w^2$ часть характеристик верхнего поля не пересекается с рассеивающей линией $\mathcal{D}$. Далее будем строить сингулярную линию экивокального типа [1], которую обозначим через $\mathcal{E}$.

Дифференциальное уравнение экивокальной линии. Выведем дифференциальные уравнения, описывающие движение $y(t)$, $t \geq 0$, вдоль экивокальной линии $\mathcal{E}$.

Обозначим через $\tilde{u}(y(t))$ управление первого игрока в точке $y(t)$, обеспечивающее движение вдоль экивокальной линии. Пусть при этом второй

игрок использует управление $v = -1$. Тогда уравнения движения вдоль экивокальной линии $\mathcal{E}$ имеют вид

$$\dot{y}_1(t) = \sqrt{y_2(t)} \cos \tilde{u}(y(t)), \quad \dot{y}_2(t) = \sqrt{y_2(t)} \sin \tilde{u}(y(t)) - w. \quad (4.37)$$

Найдем функцию $\tilde{u}(\cdot)$. На экивокальной линии должно выполняться равенство (условие экивокальности)

$$\varphi_2(y(t_1)) = \varphi_2(y(t_2)) + t_2 - t_1, \quad 0 < t_1 \leq t_2, \quad (4.38)$$

которое для дифференцируемой функции $y(\cdot)$ принимает вид

$$\langle \nabla \varphi_2(y(t)), \dot{y}(t) \rangle = -1, \quad t \geq 0. \quad (4.39)$$

Подставляя в (4.39) выражения (4.37), получаем

$$q_1(y) \sqrt{y_2} \cos \tilde{u}(y) + q_2(y) (\sqrt{y_2} \sin \tilde{u}(y) - w) = -1. \quad (4.40)$$

Здесь $q(y) = \nabla \varphi_2(y)$, $y = y(t)$.

Соотношение (4.40) можно рассматривать как уравнение относительно $\tilde{u}(y)$. Используя краткие обозначения $q_1 = q_1(y)$, $q_2 = q_2(y)$ и $\tilde{u} = \tilde{u}(y)$, перепишем уравнение (4.40) в виде

$$q_1 \cos \tilde{u} + q_2 \sin \tilde{u} = (wq_2 - 1)/\sqrt{y_2}. \quad (4.41)$$

Пусть γ – величина, определяемая условиями

$$\cos \gamma = q_1/\|q\|, \quad \sin \gamma = q_2/\|q\|. \quad (4.42)$$

Поскольку $q_1 > 0$, $q_2 > 0$ и $\operatorname{tg} \gamma = q_2/q_1$, то $\gamma \in (0, \pi/2)$ и $\gamma = \operatorname{arctg}(q_2/q_1)$. Таким образом, уравнение (4.41) принимает вид

$$\|q\| \cos(\tilde{u} - \gamma) = (wq_2 - 1)/\sqrt{y_2}.$$

Будем предполагать, что $\tilde{u} \in (\pi/2, \pi)$. Тогда $\tilde{u} - \gamma \in (0, \pi)$ и

$$\tilde{u} = \operatorname{arctg}(q_1/q_2) + \arccos \frac{wq_2 - 1}{\sqrt{y_2} \|q\|}.$$

Поскольку функция $\varphi_2(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (4.3), то

$$\sqrt{y_2} \|q\| = wq_2 + 1. \quad (4.43)$$

С учетом последнего соотношения, получаем

$$\tilde{u} = \operatorname{arctg}(q_2/q_1) + \arccos((wq_2 - 1)/(wq_2 + 1)). \quad (4.44)$$

Имеем

$$\cos \tilde{u} = \frac{q_1(wq_2 - 1) - 2q_2\sqrt{wq_2}}{\|q\|(wq_2 + 1)}, \quad \sin \tilde{u} = \frac{q_2(wq_2 - 1) + 2q_1\sqrt{wq_2}}{\|q\|(wq_2 + 1)}.$$

Подставляя выражение для $\cos \tilde{u}$ и $\sin \tilde{u}$ в (4.37) и используя (4.43), находим уравнения движения вдоль экивокальной линии

$$\dot{y}_1 = -\frac{q_1(1 - wq_2) + 2q_2\sqrt{wq_2}}{\|q\|^2}, \quad \dot{y}_2 = -\frac{(\sqrt{q_2} - q_1\sqrt{w})^2}{\|q\|^2}. \quad (4.45)$$

Поскольку все построения ведутся в обратном времени, перепишем систему (4.45) в виде

$$y'_1 = Y_1(q) := \frac{q_1(1 - wq_2) + 2q_2\sqrt{wq_2}}{\|q\|^2}, \quad y'_2 = Y_2(q) := \frac{(\sqrt{q_2} - q_1\sqrt{w})^2}{\|q\|^2}. \quad (4.46)$$

Здесь $y'_i = dy_i/d\tau$, $i = 1, 2$, $\tau = \text{const} - t$, $q = q(y) = \nabla\varphi_2(y)$.

Построение экивокальной линии. Определим точку a^* , из которой будем в обратном времени строить экивокальную линию $\mathcal{E}$.

Если $a \notin \mathcal{B}_*$, то положим $a^* = a$. В этом случае линия $\mathcal{E}$ будет касаться критической характеристики $\check{x}(\cdot, s_a)$ первого семейства в точке a . Действительно, вектор $\check{x}'(\tau_a, s_a)$ по определению касателен к линии $\mathcal{D}$. Здесь $\tau_a = \varphi_1(a)$. Следовательно,

$$\langle \nabla(\varphi_1(a) - \varphi_2(a)), \check{x}'(\tau_a, s_a) \rangle = 0.$$

Учитывая определение функции $\varphi_1(\cdot)$ и условие экивокальности (4.39) получаем, что

$$\langle \nabla\varphi_1(a), \check{x}'(\tau_a, s_a) \rangle = 1, \quad \langle \nabla\varphi_2(y(\tau_a)), y'(\tau_a) \rangle = 1.$$

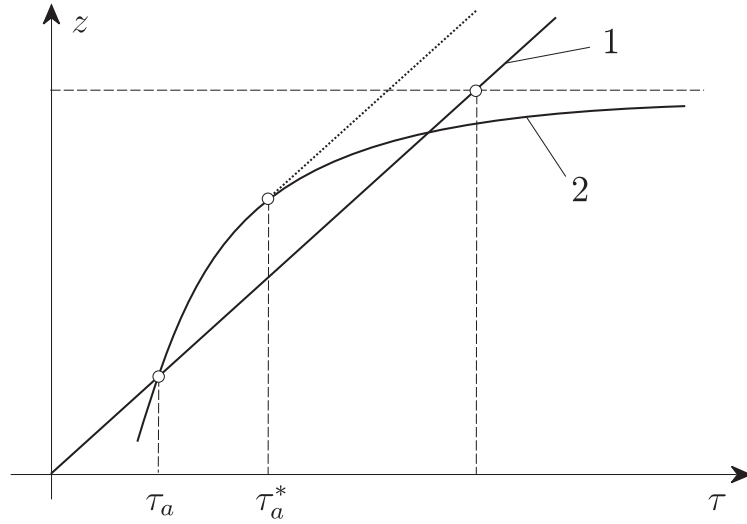
Имеем

$$\langle \nabla\varphi_2(y(\tau_a)), y'(\tau_a) \rangle = \langle \nabla\varphi_2(a), \check{x}'(\tau_a, s_a) \rangle.$$

Поскольку $y(\tau_a) = a$ и $\nabla\varphi_2(a) \neq 0$, то $y'(\tau_a) = \check{x}'(\tau_a, s_a)$.

Если $a \in \mathcal{B}_*$, то точку a^* будем искать на линии $\mathcal{B}_*$. Ранее через $\check{x}(\cdot, 0)$ было обозначено движение в силу полупроницаемых управлений вдоль линии $\mathcal{B}_*$ в обратном времени. Пусть

$$\check{B}(\tau) = \varphi_1(\check{x}(\tau, 0)), \quad \hat{B}(\tau) = \varphi_2(\check{x}(\tau, 0)).$$

Рис. 4.7: Графики функций $\check{B}(\tau)$ и $\hat{B}(\tau)$

На рис. 4.7 цифрой 1 обозначен график функции $\check{B}(\cdot)$, цифрой 2 – вид графика функции $\hat{B}(\cdot)$. Горизонтальная пунктирная линия соответствует значению $\varphi_2(\pi w^2/2, w^2)$. Положим $a^* = \check{x}(\tau_a^*, 0)$, где момент τ_a^* определяется условием

$$\frac{d\hat{B}}{d\tau}(\tau_a^*) = 1. \quad (4.47)$$

Линия $\mathcal{E}$ будет касаться линии $\mathcal{B}_*$ в точке a^* . Действительно, по определению момента τ_a^* справедливо равенство

$$\frac{d\hat{B}}{d\tau}(\tau_a^*) = \langle \nabla \varphi_2(\check{x}(\tau_a^*, 0)), \check{x}'(\tau_a^*, 0) \rangle = 1.$$

Из условия эквивокальности имеем

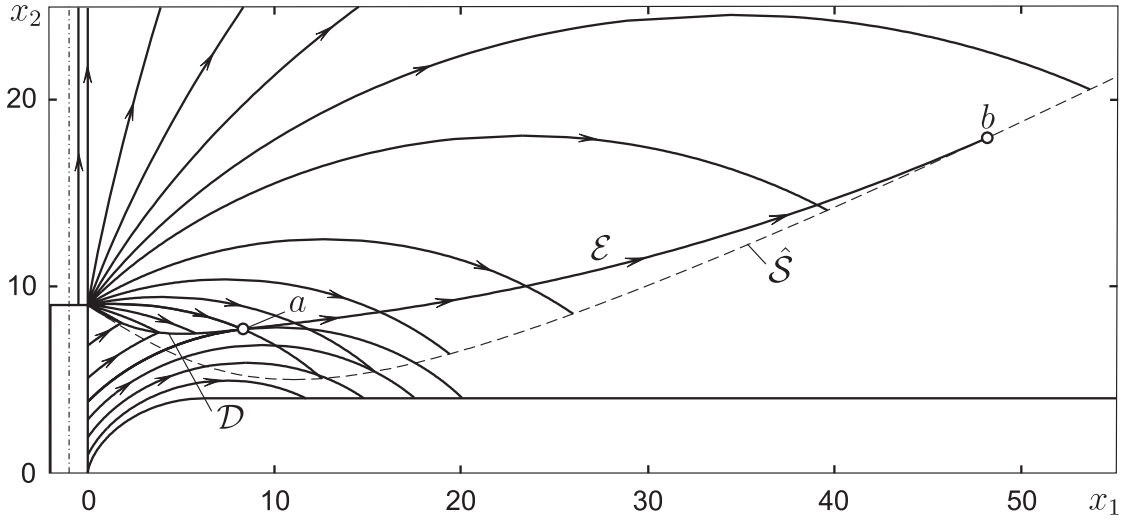
$$\frac{d\varphi_2}{d\tau}(y(\tau_a^*)) = \langle \nabla \varphi_2(y(\tau_a^*)), y'(\tau_a^*) \rangle = 1.$$

Так как $\check{x}(\tau_a^*, 0) = y(\tau_a^*)$, то $\nabla \varphi_2(y(\tau_a^*)) = \nabla \varphi_2(\check{x}(\tau_a^*, 0)) \neq 0$. Следовательно, $\check{x}'(\tau_a^*, 0) = y'(\tau_a^*)$.

Эквивокальная линия не может пересекать полупроницаемую линию $\mathcal{B}_*$ нигде, кроме начальной точки a^* , поскольку линия $\mathcal{B}_*$ соответствует полупроницаемому управлению $v = -1$ второго игрока. Заметим также, что $y'_2 > 0$, то есть фазовая траектория системы (4.37) идет в положительном направлении оси x_2 .

Покажем, что на кривой $\hat{\mathcal{S}}$ существует единственная точка b , такая, что вектор $Y(q(b))$ касателен к кривой $\hat{\mathcal{S}}$. Используя параметрическое задание (4.35) линии $\hat{\mathcal{S}}$, находим

$$\hat{q}(s) := \nabla \varphi_2(\hat{x}(\vartheta(s), s)) = (\hat{\zeta}_1(s), 0)^T, \quad Y(\hat{q}(s)) = (1/\hat{\zeta}_1(s), w)^T.$$

Рис. 4.8: Построение экивокальной линии при $w = 2$, $h = 9$

Функция $1/\hat{\zeta}_1(s)$ убывает на интервале $[0, \hat{s})$ и возрастает на интервале $(\hat{s}, \pi/2)$. Согласно (4.36) имеем

$$\hat{x}_2(\vartheta(s), s) = 1/\hat{\zeta}_1^2(s).$$

Тогда

$$Y_1(\hat{q}(s))/Y_2(\hat{q}(s)) = \sqrt{\hat{x}_2(\vartheta(s), s)}/w$$

и координата b_2 должна удовлетворять уравнению

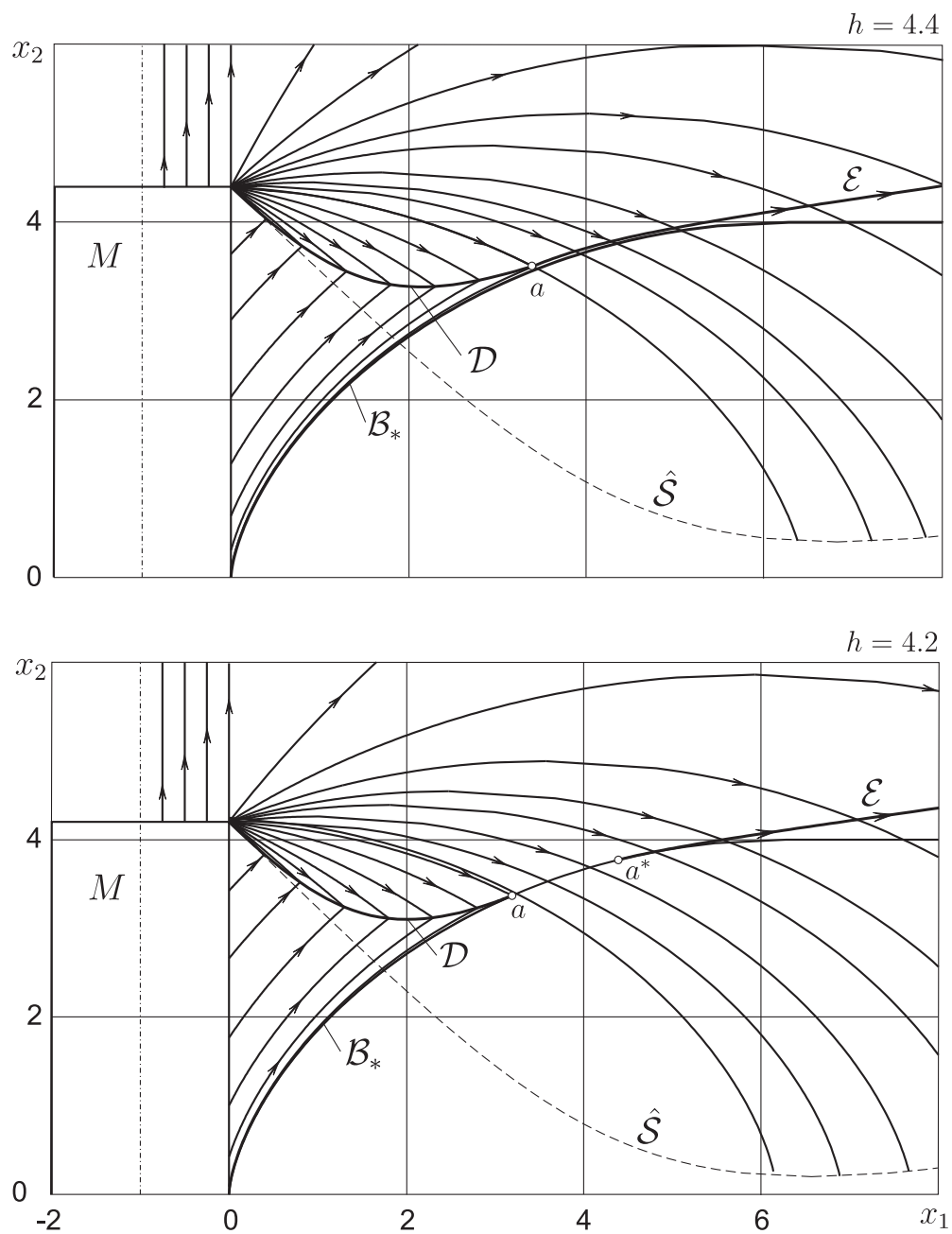
$$\frac{dS_r}{dx_2}(b_2) = \frac{\sqrt{b_2}}{w}. \quad (4.48)$$

Поскольку левая часть уравнения (4.48) является убывающей функцией по b_2 , а правая часть возрастает, то уравнение (4.48) имеет единственное решение. Значение b_1 может быть найдено по формуле $b_1 = S_r(b_2)$. Кроме того, имеем

$$\frac{dS_r}{dx_2}(h) = 2 \arccos \sqrt{\frac{h}{h+w^2}} + \frac{h}{w^2} > \frac{\sqrt{h}}{w}.$$

Следовательно, $b_2 > h$.

Построение экивокальной линии $\mathcal{E}$ происходит численно методом ломаных Эйлера из точки a^* до пересечения с кривой $\hat{\mathcal{S}}$, ограничивающей верхнее семейство характеристик. Результаты численных построений экивокальной линии для $w = 2$, $h = 9$ приведены на рис. 4.8. На рис. 4.9 более детально показан случай близкого расположения линий $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ и линии $\mathcal{B}_*$ для значений параметров $h = 4.4$, $w = 2$ (верхняя часть рис. 4.9), а также случай пересечения (по касательной) линии $\mathcal{D}$ с барьером $\mathcal{B}_*$ и построения линии $\mathcal{E}$ из точки $a^* \in \mathcal{B}_*$ для $h = 4.2$, $w = 2$ (нижняя часть рис. 4.9).

Рис. 4.9: Построение экивокальной линии при $w = 2$, $h = 4.4$ и $h = 4.2$

Части характеристик верхнего семейства после пересечения с линией $\mathcal{E}$ отбрасываются. Экивокальная линия оканчивается в точке b . Обозначим через $\mathcal{S}$ часть кривой $\hat{\mathcal{S}}$ выше точки b .

Построение семейства экивокальных линий на основе верхнего поля характеристик. Экивокальная линия $\mathcal{E}$ строится численно в обратном времени из точки a^* до точки b пересечения с линией $\hat{\mathcal{S}}$. Но, вообще говоря, фазовую траекторию системы (4.46) можно провести через любую точку области, покрытой верхним полем характеристик. Такую линию также будем называть экивокальной. Это позволяет говорить о семействе экивокальных линий для заданного поля характеристик. Линия $\mathcal{E}$ принадлежит указанному семейству.

Интересным оказывается вопрос о том, как выглядит семейство экивокальных линий (фазовый портрет системы (4.46)) в рассматриваемой задаче. Семейство экивокальных линий для различных значений h и w строилось [63] численно методом Эйлера. Основная трудность заключалась в вычислении градиента функции $\varphi_2(\cdot)$ в силу неявного задания этой функции. Результаты построений для значений параметров $h = 9$, $h = 4.2$ и $h = 4.05$ при $w = 2$ даны на рис. 4.10.

На основе проведенного аналитического и численного исследования можно сделать следующие выводы. Экивокальные линии, выпущенные в обратном времени из точек кривой $\hat{\mathcal{S}}$ ниже точки b , собираются в точке b , образуя пучок и касаясь кривой $\hat{\mathcal{S}}$. Последняя экивокальная линия, приходящая в точку b , строится из угловой точки $(0, h)$. Все линии, выпущенные из точек кривой $\hat{\mathcal{L}}$, втыкаются под углом в кривую $\hat{\mathcal{S}}$ строго выше точки b .

4.6 Вторичное поле характеристик при $h > w^2$

В результате проведенных построений для случая $h > w^2$ мы получили линию $\mathcal{DES}$, которая ограничивает снизу область, заполненную характеристиками верхнего поля. Построим вторичные поля характеристик, выходящие из точек линии $\mathcal{ES}$.

Начальные условия на линии $\mathcal{ES}$. Пусть s_1, s_2 — значения параметра, определяемые условиями

$$\hat{x}(\vartheta(s_1), s_1) = a^*, \quad \hat{x}(\vartheta(s_2), s_2) = b,$$

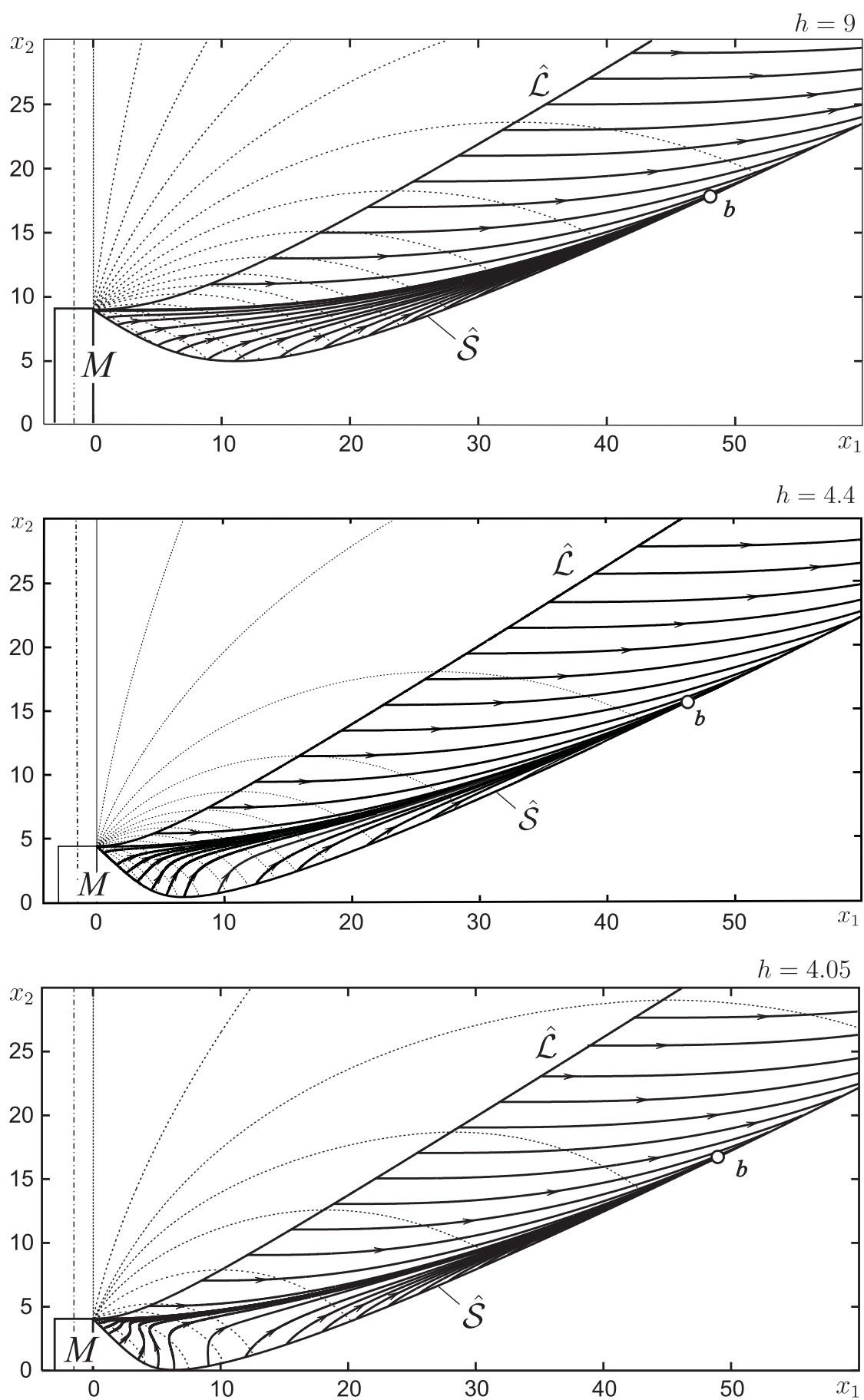


Рис. 4.10: Построение семейства экивокальных линий при $w = 2$, $h = 9$, $h = 4.2$ и $h = 4.05$.

где $\vartheta(s)$ – момент выхода характеристики верхнего поля с параметром s на линию $\mathcal{ES}$. Тогда параметрические представления кривых $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{x \in \Omega : x = \hat{x}(\vartheta(s), s), s \in [s_1, s_2]\}, \\ \mathcal{S} &= \{x \in \Omega : x = \hat{x}(\vartheta(s), s), s \in [s_2, \pi/2)\}.\end{aligned}$$

Зададим на линии $\mathcal{ES}$ начальные условия $\tilde{\xi}(s), \tilde{\zeta}(s)$ в момент времени $\vartheta(s)$, $s \in [s_1, \pi/2)$, для системы характеристик (4.5). Положим

$$\tilde{\xi}(s) = \hat{x}(\vartheta(s), s), \quad s \in [s_1, \pi/2). \quad (4.49)$$

Определим начальные условия $\tilde{\zeta}(s)$ для сопряженной функции $\tilde{p}(\tau, s)$ на линии $\mathcal{E}$, то есть для $s \in [s_1, s_2]$. Первый интеграл (4.6) в точках линии $\mathcal{E}$ принимает вид

$$-\sqrt{\tilde{\xi}_2(s)}\|\tilde{\zeta}(s)\| + w|\tilde{\zeta}_2(s)| = -1. \quad (4.50)$$

Еще одно уравнение для $\tilde{\zeta}(s)$ находим из условия

$$\langle \tilde{\zeta}(s), y'(\vartheta(s)) \rangle = 1, \quad (4.51)$$

где $y(\cdot)$ – функция, задающая движение вдоль экивокальной линии $\mathcal{E}$ в обратном времени. Условие (4.51) представляет собой аналог условия экивокальности (4.38) для функции, определяемой вторичным полем характеристик. Подставляя в (4.51) выражение для $y'(\vartheta(s))$ получаем

$$\tilde{\zeta}_1(s)\sqrt{\tilde{\xi}_2(s)}\cos\tilde{u}(\tilde{\xi}(s)) + \tilde{\zeta}_2(s)\left(\sqrt{\tilde{\xi}_2(s)}\sin\tilde{u}(\tilde{\xi}(s)) - w\right) = -1. \quad (4.52)$$

Соотношения (4.50) и (4.52) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{\zeta}_1 = \tilde{\zeta}_1(s)$ и $\tilde{\zeta}_2 = \tilde{\zeta}_2(s)$. Решим эту систему, используя краткие обозначения $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{\xi}(s))$, $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(s)$. Аналогично выводу формулы (4.44) получаем

$$\tilde{u} = \arctg(\tilde{\zeta}_2/\tilde{\zeta}_1) + \arccos\left((w\tilde{\zeta}_2 - 1)/(w|\tilde{\zeta}_2| + 1)\right).$$

Из эвристических соображений положим $\mu_2 = -1$. Имеем $\tilde{u} = \arctg(\tilde{\zeta}_2/\tilde{\zeta}_1) + \pi$. Поскольку $\tilde{u} \in (\pi/2, \pi)$, то

$$\cos\tilde{u} = -|\tilde{\zeta}_1|/\|\tilde{\zeta}\|, \quad \sin\tilde{u} = |\tilde{\zeta}_2|/\|\tilde{\zeta}\|.$$

Учитывая (4.50), получаем

$$\sin\tilde{u} = |\tilde{\zeta}_2|\sqrt{\tilde{\xi}_2}/(1 + w|\tilde{\zeta}_2|).$$

Отсюда

$$|\tilde{\zeta}_2| = \sin \tilde{u} / \left(\sqrt{\tilde{\xi}_2} - w \sin \tilde{u} \right).$$

Так как $\operatorname{tg} \tilde{u} = \tilde{\zeta}_2 / \tilde{\zeta}_1 < 0$, то

$$|\tilde{\zeta}_1| = -|\tilde{\zeta}_2| / \operatorname{tg} \tilde{u} = \cos \tilde{u} / \left(\sqrt{\tilde{\xi}_2} - w \sin \tilde{u} \right).$$

Поскольку $\tilde{\zeta}_2 / \tilde{\zeta}_1 < 0$, то $\mu_1 = -\mu_2 = 1$ для характеристик, выходящих из точек линии $\mathcal{E}$. Начальные условия $\tilde{\zeta}(s)$ для сопряженной функции $\tilde{p}(\tau, s)$ на линии $\mathcal{E}$ имеют вид

$$\tilde{\zeta}_1(s) = \frac{\cos \tilde{u}(\tilde{\xi}(s))}{w \sin \tilde{u}(\tilde{\xi}(s)) - \sqrt{\tilde{\xi}_2(s)}}, \quad \tilde{\zeta}_2(s) = \frac{\sin \tilde{u}(\tilde{\xi}(s))}{w \sin \tilde{u}(\tilde{\xi}(s)) - \sqrt{\tilde{\xi}_2(s)}}. \quad (4.53)$$

Начальные условия $\tilde{\zeta}(s)$ для сопряженной функции $\tilde{p}(\tau, s)$ на линии $\mathcal{S}$ находим из условия дифференцируемости конструируемой функции на линии $\mathcal{S}$. Получаем

$$\tilde{\zeta}(s) = \hat{p}(\vartheta(s), s), \quad s \in [s_2, \pi/2). \quad (4.54)$$

Определим μ_1 и μ_2 для характеристик, выходящих из точек линии $\mathcal{S}$. Поскольку $\hat{p}(\vartheta(s), s) > 0$, то $\mu_1 = 1$. Из эвристических соображений положим $\mu_2 = -1$.

Построение вторичного поля характеристик. Значение $D = \tilde{D}(s)$ в системе алгебраических уравнений (4.9), (4.20), (4.22) находим подстановкой в левую часть уравнения (4.22) начальных условий (4.53), (4.54) и значений $\mu_2 = -1$, $\tau = \vartheta(s)$. Получаем

$$\tilde{D}(s) = \vartheta(s) - w \ln \|\tilde{\zeta}(s)\|^2 + \frac{1}{\tilde{\zeta}_1(s)} \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\zeta}_2(s)}{\tilde{\zeta}_1(s)}, \quad s \in [s_1, \pi/2).$$

По формуле (4.13) находим, что

$$\sigma(\tilde{\zeta}(s)) = \operatorname{sign} \left(w \tilde{\zeta}_1^2(s) - |\tilde{\zeta}_2(s)| \right), \quad s \in [s_1, \pi/2).$$

Для $s \in [s_1, s_2]$ получаем

$$\sigma(\tilde{\zeta}(s)) = \operatorname{sign} \left(w - \sqrt{\tilde{\xi}_2(s)} \sin \tilde{u}(\tilde{\xi}(s)) \right),$$

Численные построения показывают, что $\sigma(\tilde{\zeta}(s)) = 1$ при $s \in [s_1, s_2]$. Для $s \in [s_2, \pi/2)$ имеем $\tilde{\zeta}_2(s) = 0$ и, следовательно, $\sigma(\tilde{\zeta}(s)) = 1$ при $s \in [s_2, \pi/2)$.

Значение $C_\sigma = \tilde{C}_+(s)$ для частей характеристик, выходящих из точек линии $\mathcal{ES}$, находим подстановкой в левую часть уравнения (4.20) начальных условий (4.49), (4.53), (4.54) и значений $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$. В результате получаем

$$\tilde{C}_+(s) = \tilde{\xi}_1(s) - \mathcal{F}(\tilde{\xi}_2(s), \lambda(\tilde{\zeta}_1(s))), \quad s \in [s_1, \pi/2).$$

Поскольку $\mu_2 = -1$, $\sigma = 1$, $s \in [s_1, \pi/2)$, то для характеристики с параметром s найдется момент времени $\tilde{\tau}(s)$, в который произойдет смена значения σ с $+1$ на -1 . Множество точек смены значения при изменении параметра $s \in [s_1, \pi/2)$ образуют некоторую кривую $\tilde{\mathcal{L}}$, которая является аналогом линии $\hat{\mathcal{L}}$ для верхнего поля характеристик.

Значение $C_\sigma = \tilde{C}_-(s)$, $s \in [s_1, \pi/2)$, для частей характеристик, выходящих из точек кривой $\tilde{\mathcal{L}}$, находится подстановкой в левую часть уравнения (4.20) значений x_1 , x_2 , p_1 , определяемых моментом времени $\tilde{\tau}(s)$.

Система алгебраических уравнений (4.9), (4.20), (4.22) неявно задает функции $\tilde{x}(\tau, s)$, $\tilde{p}(\tau, s)$ от переменной $\tau \in [\vartheta(s), \infty)$ при $s \in [s_1, \pi/2)$. При $\tau \rightarrow +\infty$ имеем $\tilde{x}_2(\tau, s) \rightarrow w^2 + 0$, $s \in [s_1, \pi/2)$.

Используя начальные условия (4.53), можно показать, что

$$\tilde{x}'(\vartheta(s), s) = y'(\vartheta(s)), \quad s \in [s_1, s_2].$$

Это значит, что вторичное поле характеристик в обратном времени выходит с линии $\mathcal{E}$ по касательной, т.е. экивокальная линия $\mathcal{E}$ является огибающей вторичных траекторий.

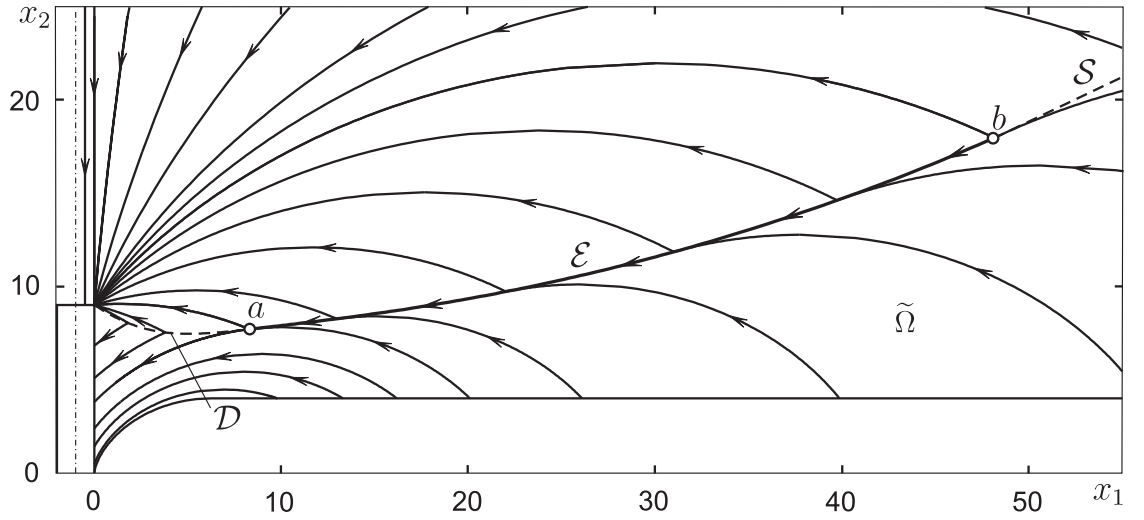
Поскольку решение характеристической системы непрерывно зависит от начальных данных, то вторичное поле характеристик заполняет все оставшееся пространство между сингулярной линией $\mathcal{ES}$ и линией $\mathcal{B}$.

Пусть

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{x}(\tau, s) : \tau \in [\vartheta(s), \infty), s \in [s_1, \pi/2)\}.$$

Уравнение $x = \tilde{x}(\tau, s)$ неявно определяет значение $\tau = \tilde{\varphi}(x)$, $x \in \tilde{\Omega}$, равное времени движения вдоль соответствующих характеристик.

Результаты численного построения вторичного поля характеристик из точек линии $\mathcal{E}$ для значений $w = 2$ и $h = 9$ приведены на рис. 4.11. Участки $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ изображены штриховой линией.

Рис. 4.11: Построение вторичного поля характеристик при $w = 2$, $h = 9$

4.7 Определение функции $\varphi(\cdot)$

Случай $h > w^2$. В точках x вертикальной полосы Π положим $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$. Пусть $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ выше линий $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$. Ниже линии $\mathcal{D}$ и ниже критической характеристики (если она есть) положим $\varphi(x) = \varphi_1(x)$. В оставшейся области $\tilde{\Omega}$ определим функцию $\varphi(\cdot)$ равенством $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$.

На барьере $\mathcal{B}$ определим функцию $\varphi(\cdot)$ по непрерывности. В области ниже барьерной линии положим $\varphi(x) = \infty$.

По построению линия $\mathcal{D}$ является рассеивающей линией для функции $\varphi(\cdot)$, линия $\mathcal{E}$ – эквивокальной линией. Линия $\mathcal{S}$ называется линией переключения.

На множестве

$$\Omega^- = \{x \in R_+^2 : x_1 \leq -d/2\}$$

функцию $\varphi(\cdot)$ зададим симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$.

Случай $h \leq w^2$. Положим $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ в точках $x \in \Omega_2$ выше линии $\mathcal{D}$ и $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ в точках $x \in \Omega_1$ ниже линии $\mathcal{D}$.

Барьерная линия $\mathcal{B}$ состоит из части $\mathcal{B}_*$ полупроницаемой кривой $x_1 = \beta_*(x_2)$, лежащей в полосе $0 \leq x_2 \leq x_2^h$, и части $\mathcal{B}^*$ полупроницаемой кривой $x_1 = -\beta_*(x_2) + \beta_*(h)$, лежащей в полосе $x_2^h \leq x_2 \leq w^2$. Здесь величина x_2^h определяется уравнением $\beta_*(x_2) = -\beta_*(x_2) + \beta_*(h)$.

На линии $\mathcal{B}$ функция $\varphi(\cdot)$ определяется по непрерывности. В остальных точках $x \in \Omega^+$ положим $\varphi(x) = \infty$. На множестве Ω^- функцию $\varphi(\cdot)$ зададим симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$.

4.8 Обоснование решения задачи

Правую часть системы (4.1) формально доопределим нулем в нижней полуплоскости. Заметим, что динамика системы (4.1) не удовлетворяет условию Липшица (1.3) по переменной x в окрестности прямой $x_2 = 0$. Теория дифференциальных игр с нелипшицевой правой частью разработана лишь в предположении однозначной зависимости между обобщенным управлением и траекторией [8]. Это условие не выполнено в рассматриваемой динамической системе. Поэтому для обоснования решения задачи будем использовать определение цены игры. При этом теорема 1 о достаточных условиях будет применяться по отношению к вспомогательной задаче, для которой условие Липшица выполнено.

1°. Докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. Функция $\varphi(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, где $\Omega = R_+^2$, удовлетворяет условиям 1)–4) теоремы 1 при $h \neq w^2$.

Доказательство. Функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу и $D(0) = M$. Выполнение условия 4) теоремы очевидно.

При $h < w^2$ положим $\mathcal{T} = \{\varphi(a)\}$. При $h > w^2$ положим

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \{\varphi(a), \varphi(a^*)\}, & a \in \mathcal{B}_*; \\ \emptyset, & a \notin \mathcal{B}_*. \end{cases}$$

Проверим условия 1)–3) для $t_* \in (0, \infty) \setminus \mathcal{T}$.

Поскольку множество $S(t_*)$ конечно, то выполнение условия 1) теоремы достаточно проверить для каждой из точек $\tilde{b} \in S(t_*)$ отдельно.

Для точки $\tilde{b} \in S(t_*) \cap \Omega^+$ существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что множество $\tilde{G} = \text{int } \mathbf{B}(\tilde{b}, \varepsilon_0)$ представимо в виде $\tilde{G} = G_+ \cup \Gamma \cup G_-$, где $\Gamma \subset \mathcal{B}_*$ либо $\Gamma \subset \mathcal{B}^*$; $\varphi(x) = \infty$, $x \in G_-$; $\varphi(\cdot) \in C^1(G_+)$. По определению функции $\varphi(\cdot)$ имеем

$$H(x, \nabla \varphi(x)) = -1, \quad x \in G_+. \quad (4.55)$$

Возможны случаи:

А. $\partial \varphi(x) / \partial x_2 < 0$ ($\partial \varphi(x) / \partial x_2 > 0$), $x \in G_+$;

Б. $\partial \varphi(x) / \partial x_2 > 0$ ($\partial \varphi(x) / \partial x_2 < 0$), $x \in G_+$.

Здесь вариант без скобок соответствует ситуации $\Gamma \subset \mathcal{B}_*$, вариант в скобках – ситуации $\Gamma \subset \mathcal{B}^*$.

Опираясь на определение функции $\varphi(\cdot)$, можно показать, что в случае **A** линия $F(t_*)$ касается кривой Γ в точке $\tilde{b}$. В случае **B** линия $F(t_*)$ подходит к кривой Γ в точке $\tilde{b}$ под ненулевым углом. Описанные ситуации показаны на рис. 4.12, а, б (в, г).

1. Покажем, что выполнены условия 1 а), б) теоремы 1, в которых обозначения $G(t, \varepsilon_0)$ и t заменены на $\tilde{G}$ и t_* .

Рассмотрим случай **A** и предположим, что $\Gamma \subset \mathcal{B}_*$.

а) Положим $G_\infty = \emptyset$. Соотношения

$$\tilde{G} \subset G_\infty \cup \Omega, \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\varphi(x) : x \in \tilde{G} \setminus G_\infty\} = t_* \quad (4.56)$$

очевидны.

Определим функцию $\omega(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow [0, \infty]$ по формуле (1.17), в которой обозначения $D(t)$ и $G(t, \varepsilon_0)$ заменены на $D(t_*)$ и $\tilde{G}$. Проверим u -стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнение неравенств (2.5) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

В случае $x_* \in G_+$ выполнение неравенств (2.5) следует из равенства (4.55) и утверждения 2.5. В случае $x_* \in G_-$ выполнение неравенств (2.5) следует из утверждения 2.6.

Осталось проверить неравенства (2.5) в случае $x_* \in \Gamma$. Имеем $\omega(x_*) < \infty$. Сдвиг кривой $\mathcal{B}_*$ вправо образует поле полупроницаемых кривых в области G_- . Определим значение $U(x) \in P$ как экстремальное к вектору $\nabla \varphi(x)$ в точке $x \in G_+$, т.е.

$$U(x) \in \arg \min_{u \in P} \langle \nabla \varphi(x), f^{(1)}(x, u) \rangle, \quad x \in G_+,$$

и как полупроницаемое управление первого игрока в точке $x \in G_- \cup \Gamma$. В силу касания линии $F(t)$ и кривой Γ функция $U(\cdot) : \tilde{G} \rightarrow P$ непрерывна. Следовательно, для любого $v_* \in Q$ существует решение $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ начальной задачи

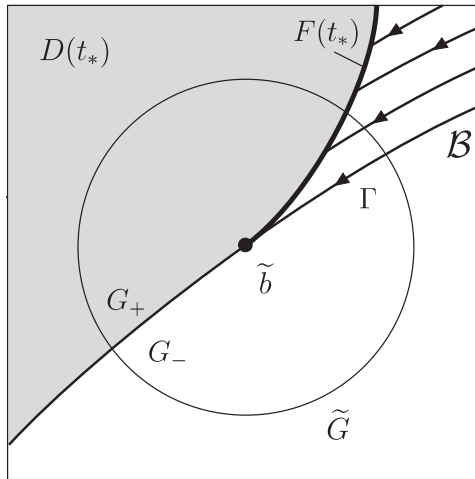
$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), U(\beta(t)), v_*), \quad t \in (0, \tau), \quad \tau > 0, \quad \beta(0) = x_*. \quad (4.57)$$

Имеем $\beta(t) \in G_+ \cup \Gamma$, $t \in [0, \tau)$.

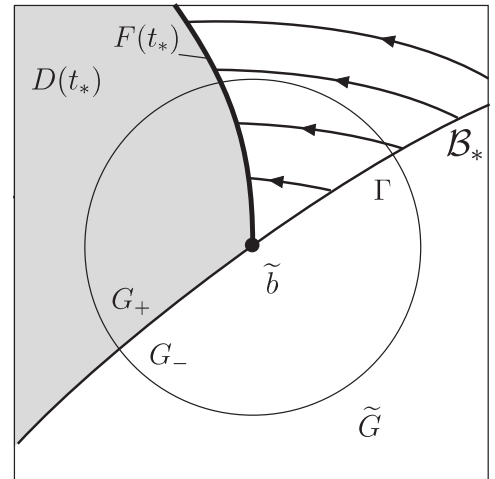
Пусть $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$, $t \in [0, \tau)$. Покажем, что $\dot{\Phi}(+0) \leq -1$.

Предположим, что $v_* = -1$. Тогда траектория $\beta(\cdot)$ является полупроницаемым движением, идущим вдоль кривой $\mathcal{B}_*$. По определению функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\dot{\Phi}(t) = -1$, $t \in (0, \tau)$. Следовательно,

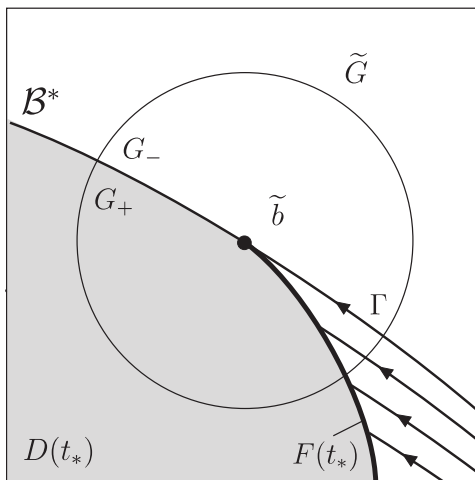
$$\dot{\Phi}(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} \dot{\Phi}(t) = -1.$$



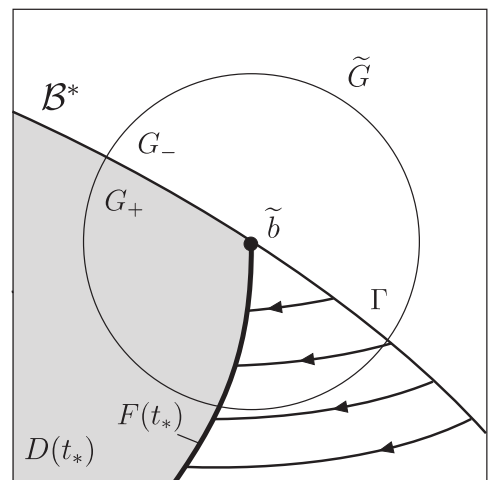
а



б



в



г

Рис. 4.12: Проверка условий теоремы для различных типов точек $\tilde{b} \in S(t_*)$

Предположим, что $v_* \in (-1, 1]$. Тогда $\beta(t) \in G_+$, $t \in (0, \tau)$. Поскольку

$$\dot{\Phi}(t) = \langle \nabla \omega(\beta(t)), f(\beta(t), U(\beta(t)), v_*) \rangle \leq H(\beta(t), \nabla \omega(\beta(t))) = -1,$$

то $\dot{\Phi}(+0) \leq -1$.

В силу утверждения 2.2 получаем u -стабильность функции $\omega(\cdot)$ на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$.

б) Рассмотрим функцию

$$\varphi_k(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \varphi(y_1 - 1/k, y_2), \quad k \in \mathbf{N}.$$

Положим

$$\omega_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) - t_*, & \varphi_k(x) > t_*; \\ 0, & \varphi_k(x) \leq t_*. \end{cases}$$

Функция $\omega_k(\cdot)$ разрывна на полупроницаемой кривой $\mathcal{B}_k$, которая получена сдвигом кривой $\mathcal{B}_*$ вправо на величину $1/k$. Имеем $\omega_k(x) \rightarrow \omega(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, функция $\omega_k(\cdot)$ равна нулю и непрерывна в точках множества $D(t_*) \cap \tilde{G}$.

Проверим v -стабильность функции $\omega_k(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, на множестве $\tilde{G} \setminus D(t_*)$. Для этого достаточно проверить выполнение неравенств (2.6) в любой точке $x_* \in \tilde{G} \setminus D(t_*)$.

В точках ниже/правее кривой $\mathcal{B}_k$ значение функции $\omega_k(\cdot)$ равно ∞ и, следовательно, неравенства (2.6) выполнены в силу утверждения 2.6.

В точках выше кривой $\mathcal{B}_k$ справедливо равенство

$$H(x, \nabla \omega_k(x)) = -1,$$

и, следовательно, неравенства (2.6) выполнены в силу утверждения 2.5.

Пусть $x_* \in \mathcal{B}_k \cap \tilde{G}$. Для любого $u_* \in P$ положим $v_* = -1$ и определим функцию $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ как решение начальной задачи

$$\dot{\beta}(t) = f(\beta(t), u_*, v_*), \quad t \in (0, \tau), \quad \beta(0) = x_*. \quad (4.58)$$

В силу полупроницаемости управления $v_* = -1$ траектория $\beta(\cdot)$ не попадает в область выше кривой $\mathcal{B}_k$. Следовательно, $\omega_k(\beta(t)) = \infty$, $t \in [0, \infty]$, и в силу утверждения 2.3 выполнены неравенства (2.6).

Таким образом, доказана v -стабильность функции $\omega_k(\cdot)$.

Для случая **A** в предположении $\Gamma \subset \mathcal{B}_*$ условия 1 а), б) теоремы 1 доказываются аналогично.

Для случая **Б** доказательство проводится аналогично случаю **А** за исключением проверки неравенств (2.5) в точке $x_* \in \Gamma$.

Предположим, что $v_* = -1$. Сдвиг кривой $\mathcal{B}_*$ вправо и влево образует поле полупроницаемых кривых в области $\tilde{G}$. Определим значение $U(x) \in P$ как полупроницаемое управление первого игрока в точке $x \in \tilde{G}$. Пусть $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ – решение начальной задачи (4.57). Поскольку $v_* = -1$ – полупроницаемое управление второго игрока, то $\beta(t) \in \Gamma$, $t \in [0, \tau)$. Таким образом, $\beta(\cdot)$ – движение в силу полупроницаемых управлений игроков вдоль полупроницаемой линии $\mathcal{B}_*$. По определению функции $\varphi(\cdot)$ имеем

$$\frac{d\varphi(\beta(t))}{dt} = \frac{d\varphi_2(\beta(t))}{dt} \leq \frac{d\varphi_1(\beta(t))}{dt} = -1,$$

где $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ – функции, определяемая первичными семействами характеристик. Следовательно, $\dot{\Phi}(+0) \leq -1$, где $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$.

Предположим, что $v_* = 1$ и

$$u_* \in \arg \min_{u \in P} \langle f^{(1)}(x_*, u), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle.$$

Пусть $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ – решение начальной задачи (4.58). Имеем

$$\dot{\Phi}(+0) = \langle f(x_*, u_*, v_*), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle = H(x_*, \nabla \varphi_2(x_*)) = -1,$$

где $\Phi(t) = \omega(\beta(t))$.

Предположим, что $v_* \in (-1, 1)$. Найдём такое $\lambda \in (0, 1)$, что $v_* = \lambda(-1) + (1-\lambda)$. Положим $u_* = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$, где $u_1 \in P$ – полупроницаемое управление в точке x_* ,

$$u_2 \in \arg \min_{u \in P} \langle f^{(1)}(x_*, u), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle.$$

Пусть $\beta(\cdot) : [0, \tau) \rightarrow \tilde{G}$ – решение начальной задачи (4.58). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(+0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \dot{\Phi}(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \langle f(\beta(t), u_*, v_*), \nabla \varphi_2(\beta(t)) \rangle = \\ &= \lambda \langle f(x_*, u_1, -1), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle + (1-\lambda) \langle f(x_*, u_2, 1), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\langle f(x_*, u_1, -1), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle \leq -1, \quad \langle f(x_*, u_2, 1), \nabla \varphi_2(x_*) \rangle = -1,$$

получаем, что $\dot{\Phi}(+0) \leq -1$.

В силу утверждения 2.2 неравенства (2.5) в точке $x_* \in \Gamma$ доказаны.

Для точек $\tilde{b} \in S(t_*) \cap \Omega^-$ доказательства аналогичны.

2. Проверим выполнение условия 2) теоремы 1. Положим

$$\Theta_0 = \sup_{x \in \Omega_0} \varphi(x), \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega : \varphi(x) < \infty\}.$$

Заметим, что $\Theta_0 = \infty$, если $h > w^2$; $\Theta_0 < \infty$, если $h < w^2$. Пусть $t_* \in (0, \Theta_0) \setminus \mathcal{T}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна на множестве $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$. Тогда любая точка $x_* \in G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$, является либо регулярной точкой, либо простейшей сингулярной точкой рассеивающего или экивокального типа, либо точкой дифференцируемости функции $\varphi(\cdot)$. Из результатов главы 2 следует, что функция $\varphi(\cdot)$ обладает свойствами u - и v -стабильности на множестве $G^F(t_*, \varepsilon, \delta)$.

Предположим, что $h < w^2$ и $t_* \geq \Theta_0$. Тогда $F(t_*) = \emptyset$ и условие 2) проверки не требует.

3. Проверим выполнение условия 3) теоремы 1. Определим функции

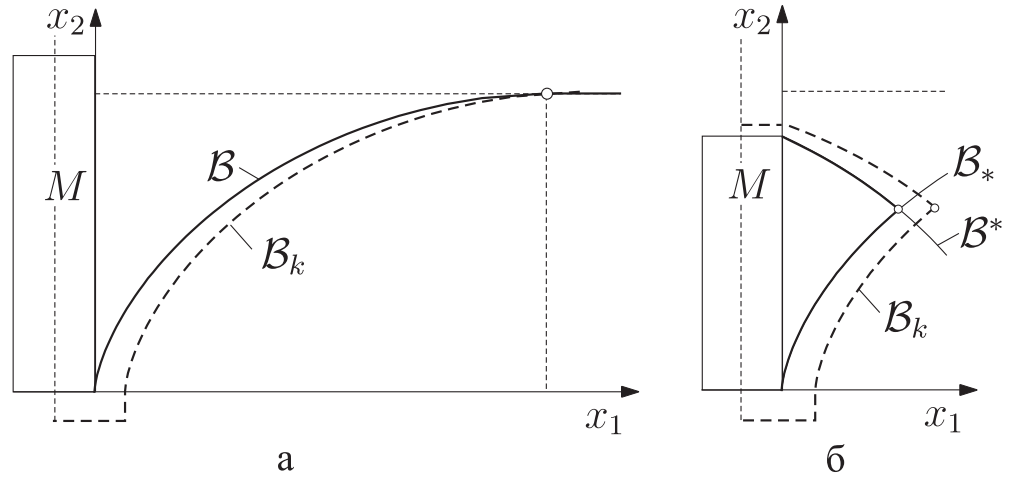
$$\omega_k^\infty(\cdot) : \Omega^+ \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

следующим образом.

а) Предположим, что $h > w^2$. Сдвинем кривую $\mathcal{B}$ вправо вдоль оси x_1 на величину $1/k$. Нижнюю точку окончания полученной кривой соединим с прямой $x_1 = -d/2$ ломаной, состоящей из вертикального отрезка длины $1/k$ и горизонтального отрезка длины $1/k + d/2$. Обозначим полученную кривую через $\mathcal{B}_k$ (рис. 4.13, а).

б) Предположим, что $h < w^2$. Сдвинем кривые $\mathcal{B}_*$ и $\mathcal{B}^*$ вправо вдоль оси x_1 на величину $1/k$. Отбросим части кривых $\mathcal{B}_*$ и $\mathcal{B}^*$ справа после точки пересечения. Соединим верхнюю точку окончания полученной кривой горизонтальным отрезком с прямой $x_1 = -d/2$. Нижнюю точку окончания полученной кривой соединим с прямой $x_1 = -d/2$ ломаной, состоящей из вертикального отрезка длины $1/k$ и горизонтального отрезка длины $1/k + d/2$. Обозначим полученную кривую через $\mathcal{B}_k$ (рис. 4.13, б).

В обоих случаях а), б) в точке $x \in R^2$, лежащей на множестве, ограниченном кривой $\mathcal{B}_k$ и прямой $x_2 = -d/2$, исключая кривую $\mathcal{B}_k$, положим $\omega_k^\infty(x) = 0$; в остальных точках $x \in R^2$ правее прямой $x_2 = -d/2$ положим

Рис. 4.13: Проверка условий теоремы для множества $B(t_*)$

$\omega_k^\infty(x) = \infty$. В левой полуплоскости $x_2 < -d/2$ функцию $\omega_k^\infty(\cdot)$ определим симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$.

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta < \varepsilon$. Нетрудно показать, что последовательность функций

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t_*, \varepsilon, \delta) \rightarrow [0, \infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

удовлетворяет условию 3) теоремы 1. □

2°. Сформулируем эквивалентное определение цены игры при помощи пучков ломаных Эйлера. Это определение непосредственно следует из теоремы 19.2 об альтернативе [6, стр. 85].

Обозначим через $X_1(x_0, U, \Delta)$ ($X_2(x_0, V, \Delta)$) множество всех ломаных Эйлера $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow R^n$ с начальным условием $x(0) = x_0$, возникающих при выборе первым (вторым) игроком позиционной стратегии U (V) и диаметра разбиения полуоси $[0, \infty)$, не превосходящего величины $\Delta > 0$. Пусть

$$M_\alpha = \{x + y : x \in M, \|y\| \leq \alpha\}.$$

Определение 4.1. Значение $\vartheta^0 \in [0, \infty]$ называется *ценой игры* для начальной позиции $x_0 \in R^n$ и замкнутого терминального множества $M \subset R^n$, если выполнены следующие условия.

1) Для любого числа $\alpha > 0$ найдутся число $\Delta_\alpha > 0$ и стратегия U_α первого игрока, такие, что

$$\sup\{J(x(\cdot); M_\alpha) : x(\cdot) \in X_1(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)\} \leq \vartheta^0.$$

2) Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\alpha_\varepsilon, \Delta_\varepsilon > 0$ и стратегия V_ε второго игрока, такие, что

$$\inf\{J(x(\cdot); M_{\alpha_\varepsilon}) : x(\cdot) \in X_2(x_0, V_\varepsilon, \Delta_\varepsilon)\} \geq \vartheta^0 - \varepsilon.$$

Далее покажем, что построенная функция $\varphi(\cdot)$ будет ценой игры в смысле определения 4.1.

3°. Произвольному числу $\delta \in (0, w^2)$ поставим в соответствие вспомогательную дифференциальную игру быстрогодействия

$$\dot{x} = f^\delta(x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad x \in R^2, \quad t \geq 0,$$

с целевым множеством M^δ . Здесь

$$f^\delta(x, u, v) := \begin{pmatrix} r_\delta(x_2) \cos u \\ r_\delta(x_2) \sin u + wv \end{pmatrix}, \quad r_\delta(x_2) := \begin{cases} \sqrt{x_2}, & \text{если } x_2 \geq \delta; \\ \sqrt{\delta}, & \text{если } x_2 < \delta, \end{cases}$$

$$M^\delta := \{x \in R^2 : \varphi(x) \leq \varphi(b_\delta), x_2 \geq \delta\}, \quad b_\delta := (\beta_*(\delta), \delta),$$

функция $\beta_*(\cdot)$ задана формулой (4.25). Для краткости будем называть вспомогательную дифференциальную игру δ -игрой.

Обозначим через $X_1^\delta(x_0, U, \Delta)$ ($X_2^\delta(x_0, V, \Delta)$) множество всех ломаных Эйлера $x(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow R^n$ для δ -игры с начальным условием $x(0) = x_0$, возникающих при выборе первым (вторым) игроком позиционной стратегии U (V) и некоторого разбиения полуоси $[0, \infty)$, диаметром не превосходящего величины $\Delta > 0$.

Указанная δ -игра удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4), обеспечивающим существование функции цены игры (1.5).

В случае $h \neq w^2$, опираясь на лемму 4.1 и теорему 1, нетрудно показать, что функция

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \varphi(b_\delta), & x \in R^2 \setminus M^\delta, x_2 \geq \delta, \\ 0, & x \in M^\delta, \\ \infty, & x_2 < \delta \end{cases}$$

является функцией цены для δ -игры.

В случае $h = w^2$ аналогичное утверждение следует из неравенств

$$T(x; M(h_1)) \geq T(x; M(w^2)) \geq T(x; M(h_2)), \quad h_1 < w^2 < h_2,$$

где $M(h)$ – терминальное множество высоты h , и предельных соотношений

$$\varphi_\delta(x) = \lim_{h_1 \rightarrow w^2 - 0} T(x; M(h_1)) = \lim_{h_2 \rightarrow w^2 + 0} T(x; M(h_2)).$$

4°. Сформулируем и докажем две леммы, из которых будет следовать, что $\varphi(\cdot)$ – функция цены исходной дифференциальной игры в смысле определения 4.1.

Лемма 4.2. Для любых $x_0 \in R_+^2 \setminus M$ и $\alpha > 0$ найдутся число $\Delta_\alpha > 0$ и стратегия U_α первого игрока, такие, что

$$\sup\{J(x(\cdot); M_\alpha) : x(\cdot) \in X_1(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)\} \leq \varphi(x_0). \quad (4.59)$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in R_+^2 \setminus M$ и $\alpha > 0$. В случае $\varphi(x_0) = \infty$ заключение леммы очевидно. Предположим, что $\varphi(x_0) < \infty$.

Если $x_0 \in M_\alpha$, то для любой стратегии U_α , числа $\Delta_\alpha > 0$ и траектории $x(\cdot) \in X_1(x_0, U, \Delta_\alpha)$ имеем $J(x(\cdot); M_\alpha) = 0$, то есть неравенство (4.59) выполнено.

Пусть $x_0 \notin M_\alpha$. Выберем $\delta \in (0, w^2)$ и $\alpha_1 > 0$ так, что $M_{\alpha_1}^\delta \subset M_\alpha$ и

$$\beta_*(\delta) + \alpha_1 + \sqrt{\delta}\varphi(x_0) < \alpha. \quad (4.60)$$

Множества M_α , M^δ и $M_{\alpha_1}^\delta$ показаны на рис. 4.14, а.

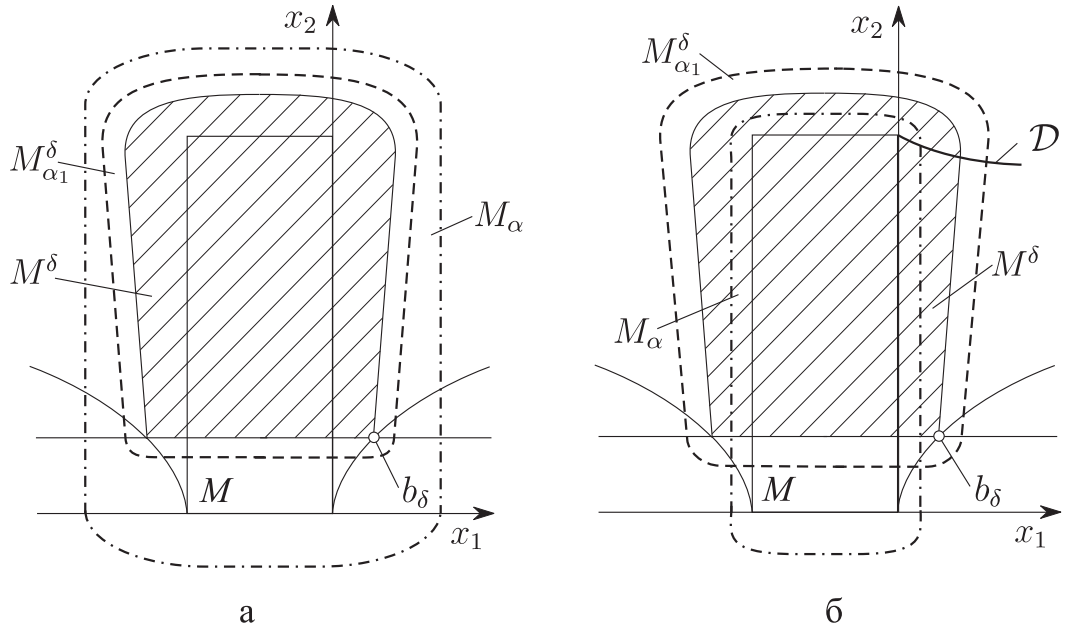
Рассмотрим δ -игру. Поскольку $x_0 \notin M_\alpha$ и $\varphi(x_0) < \infty$, то $\varphi_\delta(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(b_\delta)$ и, следовательно, $\varphi_\delta(x_0) < \varphi(x_0)$. В силу того, что $\varphi_\delta(\cdot)$ – функция цены в δ -игре, существуют число $\Delta_\alpha > 0$ и стратегия U_α первого игрока, такие, что

$$\sup\{J(x(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) : x(\cdot) \in X_1^\delta(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)\} \leq \varphi_\delta(x_0) < \varphi(x_0). \quad (4.61)$$

Рассмотрим произвольную траекторию $x(\cdot) \in X_1(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)$. Пусть

$$\bar{\vartheta} = J(x(\cdot); M_\alpha), \quad \Xi = \{t \in [0, \bar{\vartheta}) : x_2(t) \leq \delta\}.$$

Предположим сначала, что $\Xi \neq \emptyset$ и $\tau = \min\{t : t \in \Xi\}$. Поскольку $\tau < \bar{\vartheta}$, то $x(t) \notin M_\alpha$, $t \in [0, \tau]$. Учитывая, что $x_2(\tau) = \delta$, имеем $x_1(\tau) \notin [-d - \alpha, \alpha]$. Заметим также, что $\bar{\vartheta} < \varphi(x_0)$.

Рис. 4.14: Окрестности множества M в доказательстве лемм 4.2 и 4.3

Пусть $\{t_i\}_1^\infty$ – разбиение полуоси $[0, \infty)$, соответствующее выбранной ранее траектории $x(\cdot)$. Обозначим через $\tilde{z}(\cdot)$ ломаную Эйлера, удовлетворяющую следующей начальной задаче

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \sqrt{\delta} \cos U_\alpha(z(t_i)), & \dot{z}_2(t) &= \sqrt{\delta} \sin U_\alpha(z(t_i)) - w, \\ t &\in [t_i, t_{i+1}) \cap [\tau, \infty), & z(\tau) &= x(\tau). \end{aligned}$$

Покажем, что $\tilde{z}(t) \notin M_{\alpha_1}^\delta$ при $t \in [\tau, \varphi(x_0)]$. Так как $\delta < w^2$, то $\sqrt{\delta} \sin u - w < 0$ для любого $u \in [0, 2\pi]$. Отсюда получаем, что $\dot{\tilde{z}}_2(t) < 0$, $t \in [\tau, \infty)$. Поскольку $x_2(\tau) = \delta$, то $\tilde{z}_2(t') \leq \delta$, $t' \in [\tau, \infty)$. Имеем

$$\dot{\tilde{z}}_1(t') = \sqrt{\delta} \cos U_\alpha(\tilde{z}(t_i)) \geq -\sqrt{\delta}, \quad t' \in [t_i, t_{i+1}) \cap [\tau, \infty).$$

Интегрируя неравенство $\dot{\tilde{z}}_1(t') \geq -\sqrt{\delta}$ в пределах от τ до t , получаем

$$\tilde{z}_1(t) \geq x_1(\tau) - \sqrt{\delta}(t - \tau).$$

Рассмотрим случай $x_1(\tau) > \alpha$. Тогда, учитывая условие (4.60), для любого $t \in [\tau, \varphi(x_0)]$ имеем оценку

$$\tilde{z}_1(t) \geq x_1(\tau) - \sqrt{\delta}(\varphi(x_0) - \tau) > \alpha - \sqrt{\delta}\varphi(x_0) > \beta_*(\delta) + \alpha_1.$$

Следовательно,

$$\tilde{z}_1(t) > \beta_*(\delta) + \alpha_1, \quad t \in [\tau, \varphi(x_0)].$$

Для случая $x_1(\tau) < -d - \alpha$ аналогично можно показать, что

$$\tilde{z}_1(t) < -d - \beta_*(\delta) - \alpha_1, \quad t \in [\tau, \varphi(x_0)].$$

Поскольку $\tilde{z}_2(t) \leq \delta$, то $\tilde{z}(t) \notin M_{\alpha_1}^\delta$ при $t \in [\tau, \varphi(x_0)]$.

Пусть

$$x^*(t) := \begin{cases} x(t), & t \in [0, \tau], \\ \tilde{z}(t), & t \in (\tau, \infty). \end{cases}$$

Из условия $x_2(t) \geq \delta$, $t \in [0, \tau]$, следует, что $f(x(t), u, v) = f^\delta(x(t), u, v)$, $u \in P$, $v \in Q$. Поэтому $x^*(\cdot) \in X_1^\delta(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)$.

Имеем $x^*(t) \notin M_{\alpha_1}^\delta$, $t \in [0, \varphi(x_0)]$. Следовательно, $J(x^*(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) > \varphi(x_0)$, что противоречит (4.61). Таким образом, предположение $\Xi \neq \emptyset$ неверно.

Следовательно, $\Xi = \emptyset$. Это значит, что $x_2(t) \geq \delta$, $t \leq \bar{\vartheta}$ и найдется $x^\delta(\cdot) \in X_1^\delta(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)$, такое, что $x^\delta(t) = x(t)$, $t \leq \bar{\vartheta}$, то есть $J(x^\delta(\cdot); M_\alpha) = \bar{\vartheta}$. Поскольку $M_{\alpha_1}^\delta \subset M_\alpha$, то получаем $\bar{\vartheta} \leq J(x^\delta(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta)$, и, учитывая (4.61), имеем

$$J(x(\cdot); M_\alpha) = \bar{\vartheta} \leq \sup\{J(x(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) : x(\cdot) \in X_1^\delta(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)\} < \varphi(x_0).$$

Так как траектория $x(\cdot) \in X_1(x_0, U_\alpha, \Delta_\alpha)$ выбрана произвольно, то неравенство (4.59) доказано. $\square$

Лемма 4.3. Для любого $x_0 \in R_+^2 \setminus M$ и числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа α_ε , $\Delta_\varepsilon > 0$ и стратегия V_ε второго игрока, такие, что

$$\inf\{J(x(\cdot); M_{\alpha_\varepsilon}) : x(\cdot) \in X_2(x_0, V_\varepsilon, \Delta_\varepsilon)\} \geq \varphi(x_0) - \varepsilon. \quad (4.62)$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in R_+^2 \setminus M$ и $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta \in (0, w^2)$, такое, что $x_0 \notin M^\delta$ и $x_{02} \geq \delta$. Рассмотрим δ -игру. Для выбранного δ будет выполнено равенство $\varphi_\delta(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(b_\delta)$. Поскольку $\varphi_\delta(\cdot)$ – функция цены в δ -игре, то существуют числа $\alpha_1 = \alpha_1(\delta) > 0$, $\Delta_1 = \Delta_1(\delta) > 0$ и стратегия V^δ второго игрока, такие, что

$$\inf\{J(x(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) : x(\cdot) \in X_2^\delta(x_0, V^\delta, \Delta_1)\} \geq \varphi_\delta(x_0) - \varepsilon. \quad (4.63)$$

Множества M^δ и $M_{\alpha_1}^\delta$ показаны на рис. 4.14, б. Будем считать, что число δ выбрано так, что $a \notin M_{\alpha_1}^\delta$, где a – точка окончания рассеивающей линии $\mathcal{D}$.

Определим стратегию V_ε второго игрока на множестве Ω^+ :

$$V_\varepsilon(x) := \begin{cases} V^\delta(x), & \text{если } x_2 > \delta, x \notin M_{\alpha_1}^\delta, \\ \tilde{V}(x), & \text{если } x_2 > \delta, x \in M_{\alpha_1}^\delta, \\ -1, & \text{если } x_2 \leq \delta. \end{cases}$$

Здесь $\tilde{V}(x) = 1$ ($\tilde{V}(x) = -1$), если точка x лежит выше (ниже) рассеивающей линии $\mathcal{D}$. На линии $\mathcal{D}$ значение $\tilde{V}(x)$ определяется произвольно. На множестве Ω^- стратегия V_ε определяется симметрично относительно прямой $x_1 = -d/2$. В нижней полуплоскости R_-^2 полагаем $V_\varepsilon(x) = -1$.

Пусть $\mathcal{K} := \{z \in \partial M_{\alpha_1}^\delta : z_2 \geq \delta\}$. Покажем, что найдутся такие числа $\Delta_0 > 0$ и $\gamma > 0$, что для любого $z_0 \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство

$$J(z(\cdot); M) \geq \varphi(b_\delta) + \gamma, \quad z(\cdot) \in X_2(z_0, V_\varepsilon, \Delta_0). \quad (4.64)$$

Пусть $\Delta > 0$, $z_0 \in \mathcal{K}$, $z(\cdot) \in X_2(z_0, V_\varepsilon, \Delta)$. Если $J(z(\cdot); M) = \infty$, то (4.64) выполнено. Пусть $J(z(\cdot); M) = \vartheta_1 < \infty$. В силу определения стратегии V_ε имеем $\varphi(z(t)) < \infty$, $t \in [0, \vartheta_1]$. Можно считать, что $z(t) \notin \mathcal{K}$, $t \in (0, \vartheta_1]$. По построению функции $\varphi(\cdot)$ и определению стратегии V_ε для почти всех $t \in [0, \vartheta_1]$ имеем

$$d\varphi(z(t))/dt \geq -1 + \tilde{\gamma}(\Delta), \quad \lim_{\Delta \downarrow 0} \tilde{\gamma}(\Delta) = 0.$$

Далее предполагаем, что $\tilde{\gamma}(\Delta) < 1$. Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до ϑ_1 , имеем

$$\varphi(z(\vartheta_1)) - \varphi(z_0) \geq -\vartheta_1(1 - \tilde{\gamma}(\Delta)).$$

Так как $z(\vartheta_1) \in M$, то $\varphi(z(\vartheta_1)) = 0$. Следовательно,

$$\vartheta_1 = J(z(\cdot), M) \geq \varphi(z_0)/(1 - \tilde{\gamma}(\Delta)).$$

Поскольку $\varphi(z_0) > \varphi(b_\delta)$, то найдутся такие числа Δ_0 , $\gamma > 0$, что

$$\varphi(z_0)/(1 - \tilde{\gamma}(\Delta_0)) \geq \varphi(b_\delta) + \gamma.$$

Из последнего неравенства получаем (4.64).

Положим

$$\Delta_\varepsilon = \min\{\Delta_0, \Delta_1\}.$$

Рассмотрим произвольную траекторию $x(\cdot) \in X_2(x_0, V_\varepsilon, \Delta_\varepsilon)$. Введем обозначения

$$\tilde{\vartheta} = J(x(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta), \quad \Xi = \{t \in [0, \tilde{\vartheta}) : x_2(t) \leq \delta\}.$$

Возможны два случая: $\Xi \neq \emptyset$ и $\Xi = \emptyset$.

1. Пусть $\Xi \neq \emptyset$ и $\tau = \min\{t : t \in \Xi\}$. Покажем, что $J(x(\cdot); M_{\alpha_1}) = \infty$. Поскольку $\tau < \tilde{\vartheta}$, то $x(t) \notin M_{\alpha_1}^\delta$ и $x(t) \notin M_{\alpha_1}$, $t \in [0, \tau]$. Учитывая, что $x_2(\tau) = \delta$, имеем

$$x_1(\tau) \notin [-\beta_*(\delta) - \alpha_1 - d, \beta_*(\delta) + \alpha_1].$$

Так как $\delta < w^2$, то $\sqrt{\delta} \sin u - w < 0$ для любого $u \in [0, 2\pi]$. По определению числа $\tau > 0$ имеем $\dot{x}_2(\tau) < 0$. Следовательно, $x_2(t) \leq \delta$ и $V_\varepsilon(x(t)) = -1$, $t \in [\tau, \infty)$.

Рассмотрим случай $x_1(\tau) > \beta_*(\delta) + \alpha_1$. Линия, задаваемая равенством

$$y_1 = \beta_*(y_2) + (x_1(\tau) - \beta_*(\delta)), \quad y_2 \in [0, \delta],$$

проходит через точку $x(\tau)$, является полупроницаемой и соответствует полупроницаемому управлению $v(t) \equiv -1$ второго игрока. Поскольку $V_\varepsilon(x(t)) = -1$, $t \in [\tau, \infty)$, получаем, что

$$x_1(t) \geq \beta_*(x_2(t)) + (x_1(\tau) - \beta_*(\delta)), \quad t \in [\tau, \infty).$$

Поскольку $x_1(\tau) > \beta_*(\delta) + \alpha_1$, то

$$x_1(t) > \beta_*(x_2(t)) + \alpha_1 \geq \alpha_1, \quad t \in [\tau, \infty).$$

В случае $x_1(\tau) < -\beta_*(\delta) - \alpha_1 - d$ аналогично можно показать, что

$$x_1(t) < -d - \alpha_1, \quad t \in [\tau, \infty).$$

Следовательно, $x(t) \notin M_{\alpha_1}$, $t \in [\tau, \infty)$. Таким образом, $J(x(\cdot), M_{\alpha_1}) = \infty$.

2. Пусть $\Xi = \emptyset$. Тогда $x_2(t) \geq \delta$, $t \in [0, \tilde{\vartheta})$.

Если $\tilde{\vartheta} = \infty$, то $J(x(\cdot), M_{\alpha_1}) = \infty$.

Рассмотрим случай $\tilde{\vartheta} < \infty$. Поскольку $\Xi = \emptyset$, то существуют траектории

$$\tilde{x}(\cdot) \in X_2^\delta(x_0, V^\delta, \Delta_\varepsilon), \quad \tilde{z}(\cdot) \in X_2(x(\tilde{\vartheta}), V_\varepsilon, \Delta_\varepsilon),$$

такие, что $\tilde{x}(t) = x(t)$, $t \in [0, \tilde{\vartheta}]$, и $\tilde{z}(t) = x(t)$, $t \in [\tilde{\vartheta}, \infty)$. Следовательно,

$$J(x(\cdot); M) = J(\tilde{x}(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) + J(\tilde{z}(\cdot); M).$$

В силу (4.63) имеем

$$J(\tilde{x}(\cdot); M_{\alpha_1}^\delta) \geq \varphi(x_0) - \varphi(b_\delta) - \varepsilon. \quad (4.65)$$

Поскольку $x(\tilde{v}) \in \mathcal{K}$, то из (4.64) следует, что

$$J(\tilde{z}(\cdot); M) \geq \varphi(b_\delta) + \gamma. \quad (4.66)$$

Учитывая (4.65) и (4.66), получаем

$$J(x(\cdot); M) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon + \gamma.$$

Объединяя рассмотренные случаи 1 и 2, находим, что

$$J(x(\cdot); M) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon + \gamma, \quad x(\cdot) \in X_2(x_0, V_\varepsilon, \Delta_\varepsilon).$$

Тогда существует число $\alpha_\varepsilon > 0$ такое, что выполнено неравенство (4.62). $\square$

Из лемм 4.2 и 4.3 следует, что $\varphi(\cdot)$ — функция цены игры в смысле определения 4.1.

Литература

- [1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. – М.: Мир, 1967. – 480 с.
- [2] *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
- [3] *Болтянский В.Г.* Пример нелинейного синтеза // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 4. – С. 644–649.
- [4] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
- [5] *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. – 1978. – Т. 107, № 4. – С. 541–571.
- [6] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
- [7] *Кружков С.Н.* Обобщенные решения уравнений Гамильтона – Якоби типа эйконала. I // Мат. сб. – 1975. – Т. 98, №3. С. 450–493.
- [8] *Кряжсимский А.В.* К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // ДАН СССР. – 1978. – Т. 239, № 4. С. 779–782.
- [9] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. – М.; Л.: Гостехиздат, 1945. – 620 с.
- [10] *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. – М.; Л: Гостехиздат, 1938. – 192 с.
- [11] *Лидов М.Л.* Об одной задаче дифференциальных игр // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 4. – С. 173–175.
- [12] *Меликян А.А.* О минимальных наблюдениях в одной игре сближения // Прикл. математика и механика. – 1973. – Т. 37, вып. 3. – С. 426–433.

- [13] Меликян А.А. Об оптимальном выборе интервалов помех в дифференциальных играх сближения // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39, вып. 2. – С. 207–215.
- [14] Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I. // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 3. – С. 424–435.
- [15] Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. II. // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1423–1434.
- [16] Пацко В.С. Задача качества в линейных дифференциальных играх второго порядка // Дифференц. игры и задачи упр.: сб. ст. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. – С. 167–227.
- [17] Пацко В.С. Дифференциальная игра уклонения на плоскости // Прикл. математика и механика. – 1977. – Т. 41, вып. 4. – С. 604–608.
- [18] Пацко В.С., Турова В.Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости: препринт. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1995. – 77 с.
- [19] Пашков А.Г. Об одной игре сближения // Прикл. математика и механика. – 1970. – Т. 34, вып. 5. – С. 804–811.
- [20] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
- [21] Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об убежении одного управляемого объекта от другого // ДАН СССР. – 1969. – Т. 189, № 4. – С. 721–723.
- [22] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона – Якоби. – М.: Наука, 1991. – 216 с.
- [23] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. – М.;Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. – 336 с.
- [24] Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр: сб. науч. тр. / ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко; АН СССР, УНЦ. – Свердловск, 1984. – 296 с.

- [25] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
- [26] *Турова В.Л.* Нелинейная дифференциальная игра качества на плоскости // Исслед. задач минимакс. упр.: сб. ст. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 91–116.
- [27] *Турова В.Л.* Построение множества позиционного поглощения в линейной дифференциальной игре второго порядка с нефиксированным временем окончания // Управление с гарантированным результатом: сб. науч. трудов. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. – С. 92–111.
- [28] *Филимонов М.Ю.* Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре // Исслед. задач минимакс. упр.: сб. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – С. 117–124.
- [29] *Чугирь С.А.* Об игровой задаче о долихобрахистохроне // Прикл. математика и механика. – 1976. – Т. 40, вып. 6. – С. 1003–1013.
- [30] *Alvarez O., Koike S., Nakayama I.* Uniqueness of lower semicontinuous viscosity solutions for the minimum time problem // SIAM J. Contr. and Optim. – 2000. – Vol. 38, № 2. – P. 470–481.
- [31] *Bardi M., Bottacin S., Falcone M.* Convergence of discrete schemes for discontinuous value functions of pursuit-evasion games // New Trends in Dynamic Games and Appl. – Boston: Birkhäuser, 1995. – P. 273–307.
- [32] *Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equation. Boston: Birkhäuser, 1997. – 570 p.
- [33] *Bardi M., Falcone M.* An Approximation Scheme for the Minimum Time Function // SIAM J. Contr. and Optim. – 1990. – V. 28, № 4. – P. 950–965.
- [34] *Bardi M., Falcone M., Soravia P.* Numerical Methods for Pursuit-Evasion Games via Viscosity Solutions // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games. – Boston: Birkhäuser, 1999. – Vol. 4. – P. 105–175.
- [35] *Bernhard P.* Singular Surfaces in Differential Games: an Introduction // Differential Games and Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1977. – P. 1–33.

- [36] *Breakwell J.V., Merz A.W.* Towards a Complete Solution of the Homocidal Chauffeur Game // Proc. 1st Intern. Conf. Theory and Appl. of Differential Games, Amherst, Mass., 1969. – P. III-1–III-5.
- [37] *Cannarsa P., Frankowska H., Sinestrari C.* Optimality Conditions and Synthesis for the Minimum Time Problem // Set-Valued Analysis. – 2000. – Vol. 8. – P. 127–148.
- [38] *Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.* Some Algorithms for Differential Games with Two Players and One Target. // RAIRO-Modélisation-Mathématique-et-Analyse-Numérique. – 1994. Vol. 28, No. 4. – P. 441–461.
- [39] *Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.* Numerical Methods for Optimal Control and Differential Games. Ceremade CNRS URA 749, Univ. of Paris – Dauphine. – 1995.
- [40] *Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.* Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games. – Boston: Birkhäuser, 1999. – Vol. 4. – P. 177–247.
- [41] *Crandall M.G., Lions P.L.* Viscosity solutions of Hamilton – Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 277, № 1. – P. 1–42.
- [42] *Elliott R.J., Kalton N.J.* The existence of value in differential games of pursuit and evasion // J. Different. Equat. – 1972. – Vol. 12, № 3. – P. 504–523.
- [43] *Fleming W.H.* The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. and Appl. – 1961. – Vol. 3. – P. 102–116,
- [44] *Isaacs R.P.* Games of Pursuit, Paper P-257. – RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1951.
- [45] *Isaacs R.P.* Differential Games, I: Introduction. Research Memorandum RM-1391. – RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1954.
- [46] *Isaacs R.P.* Differential Games, II: The Definition and Formulation. Research Memorandum RM-1399. – RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1954.

- [47] *Isaacs R.P.* Differential Games, III: The Basic Principles of the Solution Process. Research Memorandum RM-1411. – RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1954.
- [48] *Isaacs R.P.* Differential Games, IV: Mainly Examples. Research Memorandum RM-1486. – RAND Corporation, Santa Monica, California. – 1955.
- [49] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-Theoretical Control Problems. – N.Y.: Springer-Verlag, 1988. – 518 p.
- [50] *Leitmann G.* The calculus of variations and optimal control. An introduction. – New York etc.: Plenum Press, 1981. – 311 c.
- [51] *Lewin J., Breakwell J.V.* The Surveillance-Evasion Game of Degree // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1975. – Vol. 16, № 3–4. – P. 339–353.
- [52] *Lewin J., Olsder G.J.* Conic Surveillance Evasion // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1979. – Vol. 27, № 1. – P. 107–125.
- [53] *Melikyan A.A.* Generalized Characteristics of the First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. – Boston: Burkhäuser, 1998. – 310 p.
- [54] *Merz A.W.* The Homicidal Chauffeur – a Differential Game: PhD thesis. – Stanford Univ., 1971.
- [55] *Mignanego F., Pieri G.* Minimal time Function in Problems without Local Controllability // J. Optimiz. Theory and Appl. – 1993. – Vol. 78, № 1. – P. 49–58.
- [56] *Raivio T., Ehtamo H.* On Numerical Solution of a Class of Pursuit-Evasion Games // Annals Intern. Soc. Dynamics Games. Boston: Birkhäuser, 2000. – Vol. 5. – P. 177–192.
- [57] *Patsko V.S., Turova V.L.* Minimum-Time Problem for Linear Second-Order Conflict-Controlled Systems // Proc. UKACC Intern. Conf. CONTROL'96, Exeter, United Kingdom, 1996. – P. 947–952.
- [58] *Patsko V.S., Turova V.L.* Numerical Solutions to the Minimum-Time Problem for Linear Second-Order Conflict-Controlled Systems // Proc. 7th Intern. Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, 1997. – P. 327–338.

- [59] *Patsko V.S., Turova V.L.* Level Sets of the Value Function in Differential Games with the Homicidal Chauffeur Dynamics // Intern. Game Theory Review, 2001. – Vol. 3, № 1. – P. 67–112.
- [60] *Shinar J., Davidovitz A.* A Two-Target Game Analysis in Line-of-Sight Coordinates // Comput. Math. Applic., 1987. – Vol. 13, № 1–3. – P. 123–140.
- [61] *Ushakov V.N.* Construction of Solutions in Differential Games of Pursuit-Evasion // Differential Inclusions and Optimal Control. – Torun, 1998. – P. 269–281. (Lect. Notes in Nonlinear Anal., Vol. 2).
- [62] *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности функции цены в терминах сингулярных точек // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 33-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2002. – С. 249–253.
- [63] *Васильева Т.В., Камнева Л.В.* Построение семейства эквивокальных линий для заданного поля характеристик в игровой задаче о брахистохроне // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 35-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2004. – С. 212–216.
- [64] *Kamneva L.V., Patsko V.S., Turova V.L.* Construction of the Value Function for Game Brachistochrone Problem // Proc. 10th Intern. Symposium on Dynamic Games and Appl. – St.-Petersburg, Russia, 2002. – Vol. 1. – P. 408–415.
- [65] *Камнева Л.В.* Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 3. – С. 366–383.
- [66] *Камнева Л.В.* О свойствах разрывной функции цены в игровой задаче быстрогодействия // Доклады РАН. – 2006. – Т. 408, №3. – С. 301–304.
- [67] *Камнева Л.В.* Об условиях совпадения разрывной функции с функцией цены игры в задаче быстрогодействия // Прикл. математика и механика. – 2006. – Т. 70, вып. 5. – С. 739–752.
- [68] *Камнева Л.В.* О свойствах разрывной функции цены в игровой задаче быстрогодействия // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 37-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2006. – С. 321–325.

- [69] *Kamneva L. V.* On optimality of a discontinuous function in a time-optimal differential game // Proc. 13th IFAC Workshop “Control Appl. of Optimization”, Paris–Cachan, France, 26 – 28 April, 2006. – Paris, 2006. – P. 317–322.
- [70] *Камнева Л.В.* О разрывной функции цены в игровой задаче быстрого действия // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 38-й Регион. молодеж. конф. – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2007. – С. 296–300.