Доклад Л.В.Камневой
на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 16 мая 2007 г.

Камнева Людмила Валерьевна

**РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ
В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ**

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
(01.01.02 – дифференциальные уравнения)

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Пацко Валерий Семенович

Диссертация опирается на фундаментальные работы

Н.Н. Красовского,
А.И. Субботина,
Р. Айзекса

по дифференциальным играм.

2

(*Слайд 1*) Уважаемый председатель. Уважаемые члены Ученого совета и все присутствующие. Я хотела бы предложить Вашему вниманию основные результаты моей диссертационной работы.

(*Слайд 2*) Диссертация посвящена изучению разрывной функции цены в игровых задачах быстродействия и опирается на фундаментальные работы по теории управления и дифференциальных игр Николая Николаевича Красовского, Андрея Измайловича Субботина, Руфуса Айзекса.

Дифференциальная игра быстродействия

- Динамика системы:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t))$$
$$t \geq 0, \quad x(t) \in R^n, \quad x(0) = x_0 \in R^n$$

- Управления 1-го и 2-го игроков: $u(t) \in P, \quad v(t) \in Q$
- Функционал платы:

$M \subset R^n$ – заданное замкнутое терминальное множество

$$J(x(\cdot); M) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \text{ для любого } t \geq 0; \\ \min\{t \geq 0 : \ x(t) \in M\} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

1-й игрок минимизирует, 2-й игрок максимизирует плату

3

Цена игры быстродействия

- Позиционные стратегии:

$$U\colon [0,\infty) \times R^n \to P, \quad V\colon [0,\infty) \times R^n \to Q$$

- Пучки конструктивных движений:

$$X_1(x_0, U), \quad X_2(x_0, V)$$

- Цена игры:

$$T(x_0; M) = \inf_U \sup\{J(x(\cdot); M) : x(\cdot) \in X_1(x_0, U)\} =$$
$$= \sup_V \inf\{J(x(\cdot); M) : x(\cdot) \in X_2(x_0, V)\}$$

- Функция цены игры:

$$x_0 \mapsto T(x_0; M) \in [0, \infty]$$

4

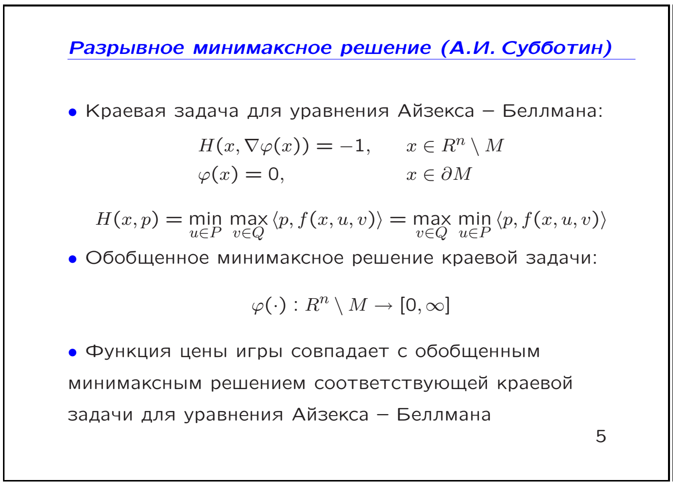
(*Слайд 3*) Рассматривается управляемая динамическая система с автономной правой частью, управления u и v 1-го и 2-го игроков стеснены геометрическими ограничениями. Функционал платы – время попадания траектории на заданное замкнутое терминальное множество.

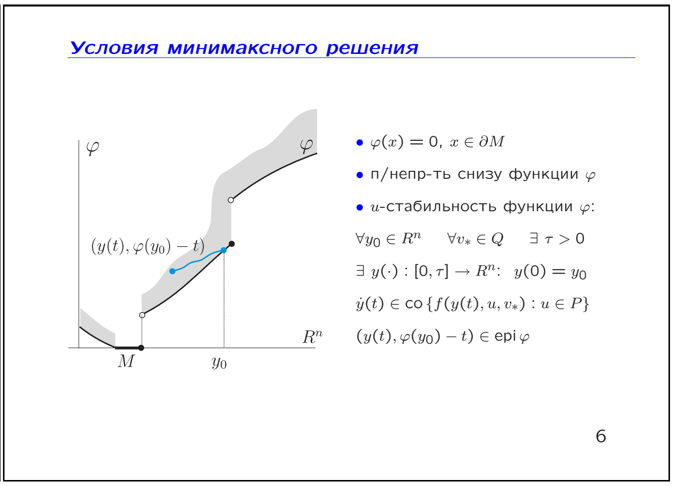
(*Слайд 4*) Задача рассматривается в рамках позиционной формализации.

Проблема возникла при нахождении функции цены в одной конкретной задаче быстродействия на плоскости. При помощи метода Айзекса, основанного на обработке семейств классических характеристик и построении сингулярных линий, было описано построение предполагаемой функции цены (тестируемой функции). Тестируемая функция оказалась разрывной. Нужно было доказать совпадение тестируемой функции с функцией цены игры.

С учетом разрывности тестируемой функции известно два подхода к решению такой задачи.

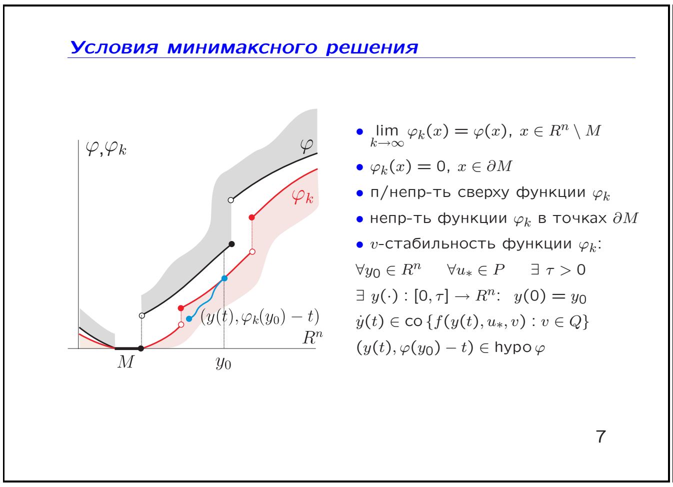
Первый подход – использовать определение цены игры, что предполагает построение позиционных стратегий обоих игроков, гарантирующих плату, равную значению тестируемой функции. Однако в случае разрывной тестируемой функции для второго игрока не известно общего способа построения позиционных стратегий уклонения от окрестности терминального множества, основанного на свойстве v-стабильности тестируемой функции, что существенно осложняет нахождение соответствующих стратегий уклонения.

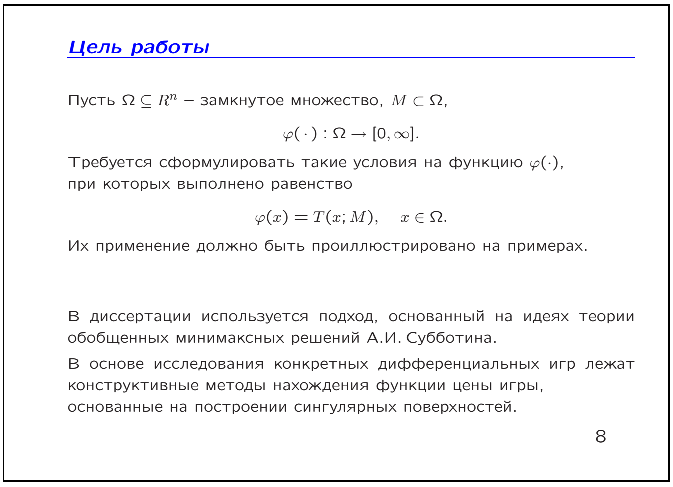




(*Слайд 5*) Второй подход – опираться на совпадение функции цены игры с обобщенным (разрывным) минимаксным решением соответствующей краевой задачи для уравнения Айзекса – Беллмана. Такая теория разработана А.И.Субботиным. В этом случае применительно к тестируемой функции требуется проверка условий обобщенного минимаксного решения, которые также оказываются достаточно сложными при исследовании конкретных задач.

(*Слайд 6*) А именно, условия минимаксного решения включают, во-первых, краевое условие, полунепреравность снизу и u-стабильность функции, т.е. слабую инвариантность надграфика относительно соответствующего дифференциального включения.

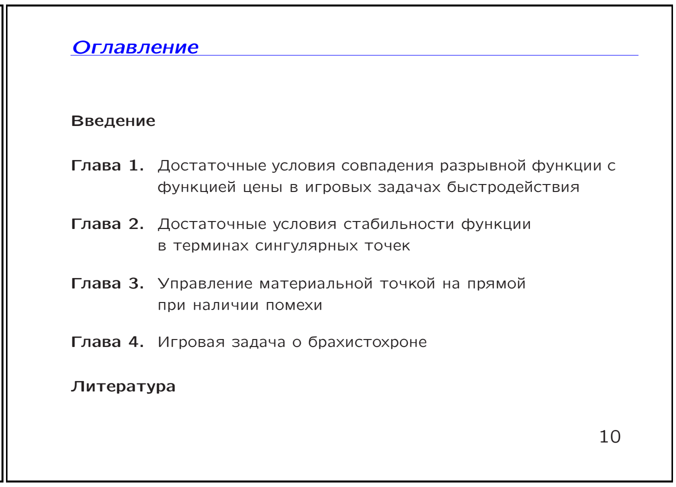




(*Слайд 7*) Во-вторых, условия минимаксного решения включают существование последовательности полунепрерывных сверху функций, поточечно сходящейся к данной функции, каждая функция последовательности удовлетворяет краевому условию, свойству v-стабильности и непрерывна на множестве ∂M. Это условия минимаксного решения. При попытке проверки таких условий для конкретной тестируемой функции возникли сложности с построением указанной последовательности с перечисленными свойствами.

(*Слайд 8*) Целью диссертационной работы было сформулировать такие условия на тестируемую функцию, выполнения которых достаточно для ее совпадения с функцией цены дифференциальной игры быстродействия. Формулируемые условия должны быть сравнительно удобны для проверки в конкретных задачах. Их применение должно быть проиллюстрировано на примерах.

В диссертации используется подход, основанный на идеях теории обобщенных минимаксных решений А.И. Субботина. В основе исследования конкретных дифференциальных игр лежат конструктивные методы нахождения функции цены игры, основанные на построении сингулярных поверхностей.



(*Слайд 9*) Следует отметить, что дифференциальными играми быстродействия и задачами быстродействия в теории оптимального управления в разное время занимались многие ученые, работы которых посвящены общетеоретическим вопросам формализации задачи и определения ее цены, аналитическому исследованию конкретных задач и разработке численных методов решения задач быстродействия.

(*Слайд 10*) Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы.

Первая глава диссертации посвящена формулировке и доказательству двух теорем о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия.

Условия теорем включают в себя проверку свойств u- и v-стабильности полунепрерывных функций. Во второй главе сформулированы утверждения, упрощающие такую проверку.

В последних двух главах рассматриваются конкретные игровые задачи быстродействия на плоскости, строится предполагаемая функция цены, для обоснования решения применяются теоремы первой и второй глав.

(*Слайд 11*) В **первой главе** доказаны две теоремы о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия. Основной является первая теорема.

Глава 1

Достаточные условия совпадения разрывной функции с функцией цены в игровых задачах быстродействия

11

Теорема 1 о достаточных условиях

Пусть $\Omega \subseteq R^n$, $M \subseteq \Omega$ – замкнутые множества, задана функция

$$\varphi(\cdot) : \Omega \to [0, \infty]$$

и введены обозначения

$$\Theta = \sup_{z \in \Omega} \varphi(z), \quad D(t) = \{x \in \Omega : \varphi(x) \le t\}, \quad t \in [0, \Theta),$$

$$F(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) = t\}, \quad B(t) = \{x \in \partial D(t) : \varphi(x) < t\},$$

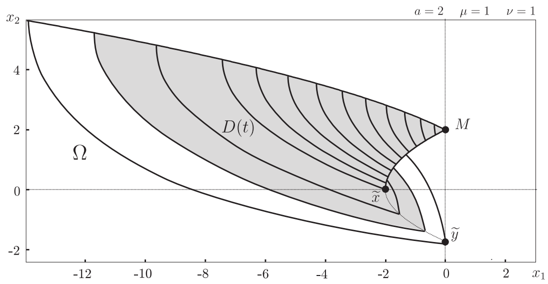
$$S(t) = \overline{F(t)} \cap \overline{B(t)}, \quad G(t,\varepsilon) = \begin{cases} \varnothing, & S(t) = \varnothing; \\ S(t) + \operatorname{int} \mathrm{B}(0,\varepsilon), & S(t) \ne \varnothing, \end{cases} \quad \varepsilon > 0.$$

Предположим, что функция $\varphi(\cdot)$ полунепрерывна снизу, $D(0) = M$, $\mathcal{T} \subset (0, \Theta)$ – некоторое конечное (либо пустое) множество и выполнены следующие условия.

12

Пояснения теоремы 1 на примере

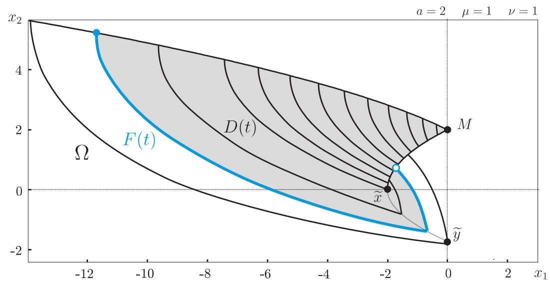
$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu, \quad M = \{(0,a)^T\}, \quad a > \nu$$



13

Пояснения теоремы 1 на примере

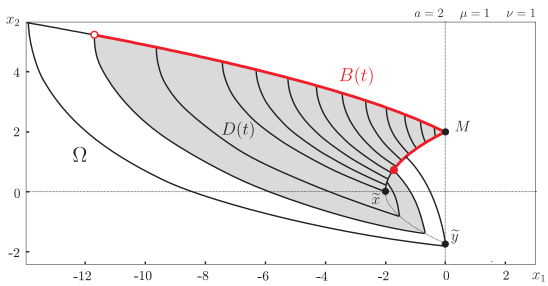
$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu, \quad M = \{(0,a)^T\}, \quad a > \nu$$



14

Пояснения теоремы 1 на примере

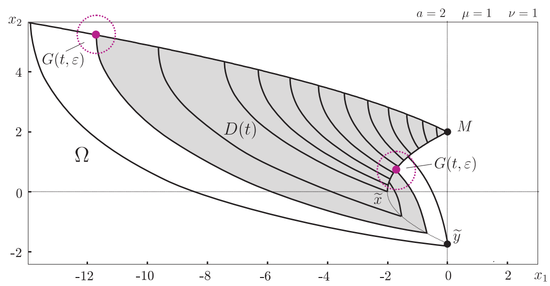
$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu, \quad M = \{(0,a)^T\}, \quad a > \nu$$



15

Пояснения теоремы 1 на примере

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu, \quad M = \{(0,a)^T\}, \quad a > \nu$$



16

На нескольких следующих слайдах представлены формулировка теоремы 1 и ее пояснения на конкретном примере, который подробно рассматривается в главе 3.

(*Слайды 12 – 16*) Условия теоремы наложены на множества уровня $D(t)$ тестируемой функции. А именно, на границе множества уровня $D(t)$ выделены три подмножества: фронт $F(t)$ – множество точек, в которых тестируемая функция равна значению t; барьер $B(t)$ – множество точек, в которых тестируемая функция строго меньше значения t; граничные точки $S(t)$ этих двух множеств.

Условия теоремы 1 требуют проверки свойств, аналогичных свойствам разрывного минимаксного решения, но в сколь угодно малых окрестностях указанных подмножеств. Т.е. происходит локализация свойств минимаксного решения на указанные окрестности. При этом происходит их упрощение.

Теорема 1 о достаточных условиях (*продолжение*)

1) Для любого $t \in (0,\Theta) \setminus \mathcal{T}$ существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и множество $G_\infty \subset G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$, такие, что

а) выполнены соотношения $G(t,\varepsilon_0) \subset G_\infty \cup \Omega$,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sup\{\varphi(x) : x \in G(t,\varepsilon) \setminus G_\infty\} = t, \tag{1.16}$$

и функция

$$\omega(x) = \begin{cases} \varphi(x) - t, & x \in G(t,\varepsilon_0) \setminus (G_\infty \cup D(t)); \\ 0, & x \in D(t) \cap G(t,\varepsilon_0); \\ \infty, & x \in G_\infty \end{cases} \tag{1.17}$$

u-стабильна на множестве $G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$;

17

Теорема 1 о достаточных условиях (*продолжение*)

б) существуют функции

$$\omega_k(\cdot) : G(t,\varepsilon_0) \to [0,\infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

которые v-стабильны на множестве $G(t,\varepsilon_0) \setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G(t,\varepsilon_0)$, и

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k(x) = \omega(x), \quad x \in G(t,\varepsilon_0). \tag{1.18}$$

2) Для любых $t \in (0,\Theta) \setminus \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что функция $\varphi(\cdot)$ определена, непрерывна и обладает свойствами u- и v-стабильности на множестве

$$G^F(t,\varepsilon,\delta) = \begin{cases} \varnothing, & F_\varepsilon(t) = \varnothing; \\ F_\varepsilon(t) + \operatorname{int} \mathbf{B}(0,\delta), & F_\varepsilon(t) \neq \varnothing, \end{cases}$$

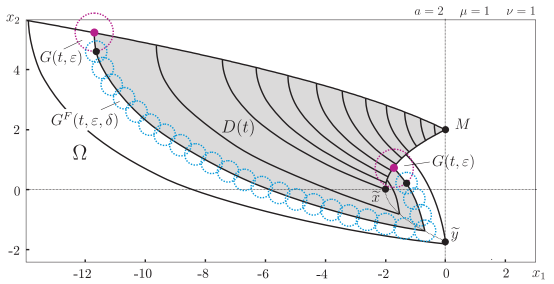
где

$$F_\varepsilon(t) = F(t) \setminus G(t,\varepsilon).$$

18

Пояснения теоремы 1 на примере

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu, \quad M = \{(0,a)^T\}, \quad a > \nu$$



19

Теорема 1 о достаточных условиях (*продолжение*)

3) Для любых $t \in (0,\Theta) \setminus \mathcal{T}$ и $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и функции

$$\omega_k^\infty(\cdot) : G^B(t,\varepsilon,\delta) \to [0,\infty], \quad k \in \mathbf{N},$$

где

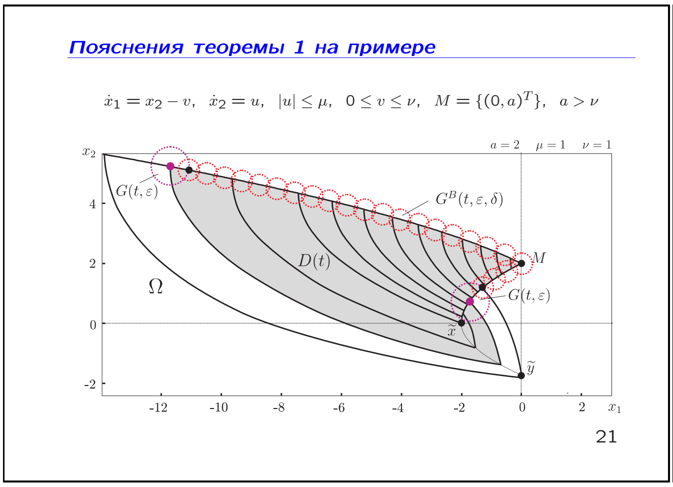
$$G^B(t,\varepsilon,\delta) = \begin{cases} \varnothing, & B_\varepsilon(t) = \varnothing; \\ B_\varepsilon(t) + \operatorname{int} \mathbf{B}(0,\delta), & B_\varepsilon(t) \neq \varnothing, \end{cases} \quad B_\varepsilon(t) = B(t) \setminus G(t,\varepsilon),$$

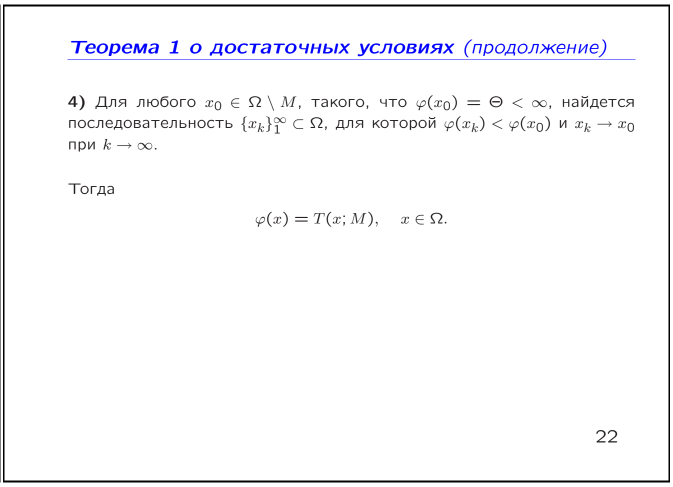
такие, что функции $\omega_k^\infty(\cdot)$, $k \in \mathbf{N}$, v-стабильны на множестве $G^B(t,\varepsilon,\delta) \setminus D(t)$, равны нулю и непрерывны в точках множества $D(t) \cap G^B(t,\varepsilon,\delta)$, и выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \to \infty} \omega_k^\infty(x) = \infty, \quad x \in G^B(t,\varepsilon,\delta) \setminus D(t). \tag{1.19}$$

20

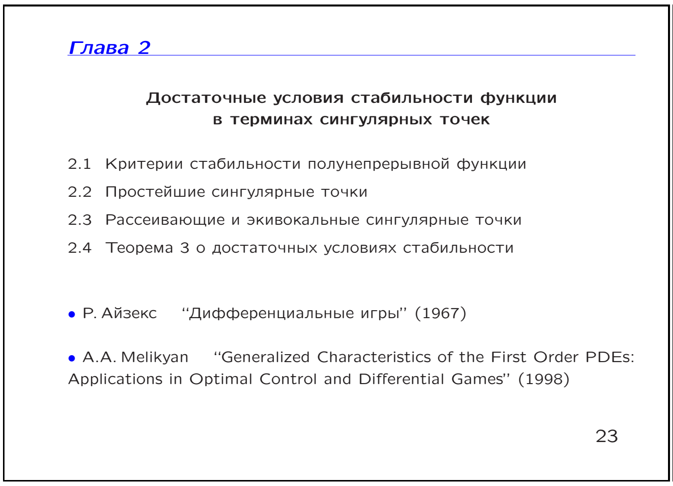
(*Слайды 17 – 21*) Наиболее сложными являются условия в окрестности $G(t,\varepsilon)$ граничных точек $S(t)$: требуется проверка как свойства u-стабильности тестируемой функции, так и существование последовательности v-стабильных функций. В окрестности точек фронта условия упрощаются до проверки свойств u- и v-стабильности тестируемой функции. В окрестности точек барьера условия упрощаются до проверки существования последовательности v-стабильных функций, не связанных с тестируемой функцией.

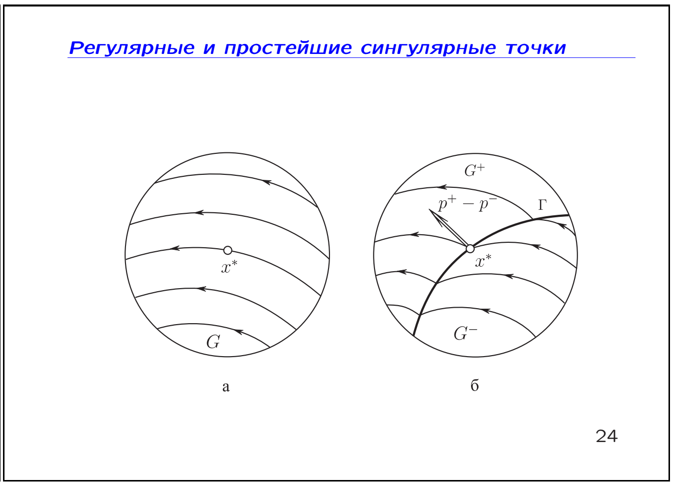




(*Слайд 22*) Рассмотрение нескольких окрестностей делает полученные условия более удобными для практической проверки, чем непосредственное использование определения разрывного минимаксного решения. Кроме того, теорема допускает ситуацию, когда тестируемая функция определена не на всем фазовом пространстве.

Теорема 2 данной главы также содержит условия совпадения тестируемой функции и функции цены игры, но одно из условий теоремы трудно проверяется на практике.





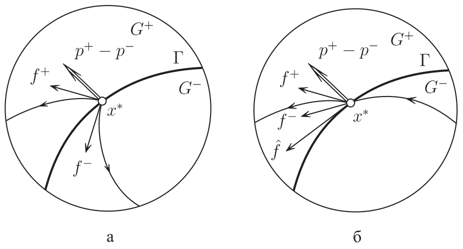
(*Слайд 23*) Условия теорем 1 и 2 включают в себя проверку свойств u- и v-стабильности полунепрерывных функций. Во **второй главе** сформулированы утверждения, упрощающие такую проверку.

В теории дифференциальных игр для функции цены известны различные типы сингулярных поверхностей, в точках которых оптимальные движения имеют те или иные особенности. Исследования сингулярных поверхностей имеются в работах Р.Айзекса, А.А.Меликяна.

(*Слайд 24*) В диссертации понятия рассеивающей и экивокальной сингулярных поверхностей распространяются на случай произвольной функции. Область называется регулярной, если в ней функция является классическим решением уравнения Айзекса – Беллмана и выполнены условия, обеспечивающие существование поля классических характеристик в этой области.

Точка называется простейшей сингулярной, если она лежит на некоторой гладкой гиперповерхности, разделяющей регулярные области.

Рассеивающие и эквивокальные сингулярные точки



а б

25

Теорема 3 о достаточных условиях стабильности

Пусть $f(x,u,v) = f_1(x,u) + f_2(x,v)$ и множество

$$f_2(x,Q) := \{f_2(x,v) \colon v \in Q\}$$

– линейный отрезок в R^n. Если точка $x^* \in \Sigma(\omega)$ – рассеивающая или эквивокальная, причем $f_2(x^*, v^+) \neq f_2(x^*, v^-)$, то в ней выполнены условия стабильности

$$\inf\{d^- \omega(x_*; \eta) \colon \eta \in \operatorname{co} f(x_*, P, v)\} \leq -1, \quad v \in Q,$$

$$\sup\{d^+ \omega(x_*; \eta) \colon \eta \in \operatorname{co} f(x_*, u, Q)\} \geq -1, \quad u \in P.$$

26

(*Слайд 25*) На основе поведения характеристик в смежных регулярных областях выделяются простейшие сингулярные точки рассеивающего и эквивокального типов.

(*Слайд 26*) Для класса игр с автономной разделенной динамикой и ограничением на управление второго игрока в виде линейного отрезка доказана теорема 3 о том, что в точках рассеивающей и эквивокальной сингулярных поверхностей автоматически выполнены инфинитезимальные свойства u- и v-стабильности.

Глава 3

Управление материальной точкой на прямой при наличии помехи

3.1 Постановка задачи и тестируемая функция

3.2 Обоснование решения задачи

- В.С. Пацко Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II, Дифф. уравнения (1971, 1972)

- М.Ю. Филимонов Сопряжение сингулярных линий в дифференциальной игре, Сборник статей УНЦ АН СССР (1985)

27

Постановка задачи

$$\ddot{y}_P = u, \;\; \dot{y}_E = v, \;\; |u| \le \mu, \;\; 0 \le v \le \nu, \;\; \mu > 0$$

Преследователь стремится за наименьшее время совместить точку y_P с точкой y_E так, чтобы в момент совмещения скорость $\dot{y}_P$ точки y_P равнялась наперед заданному числу $a > \nu$.

Введем замену

$$x_1 = y_P - y_E, \quad x_2 = \dot{y}_P.$$

Имеем

$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu, \quad 0 \le v \le \nu.$$

Первый игрок минимизирует время перевода фазовой точки $x = (x_1, x_2)$ из заданного начального положения x_0 на терминальное множество $M = (0, a)^T$, $a > \nu$, интересы второго игрока противоположны.

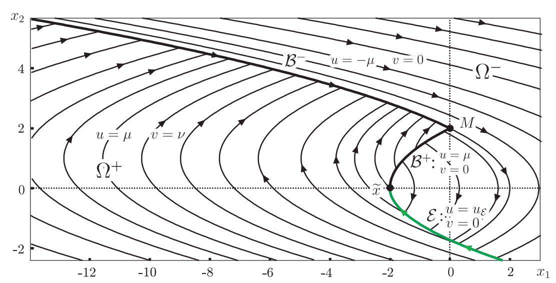
28

(*Слайд 27*) В **третьей главе** диссертации рассматривается игровая задача быстродействия на плоскости, представляющая собой модификацию известной задачи “мальчик и крокодил”. Ранее исследования такой игры проводились в работах В.С. Пацко, М.Ю. Филимонова.

(*Слайд 28*) Рассматривается задача сближения-уклонения на прямой, преследователь управляет ускорением, убегающий – скоростью. Условие поимки – совпадение фазовых координат преследователя и убегающего и равенство скорости преследователя наперед заданному числу a. После подходящей замены переменных получаем игру быстродействия на плоскости с терминальной точкой на вертикальной координатной оси.

Построение тестируемой функции $\varphi(\cdot)$

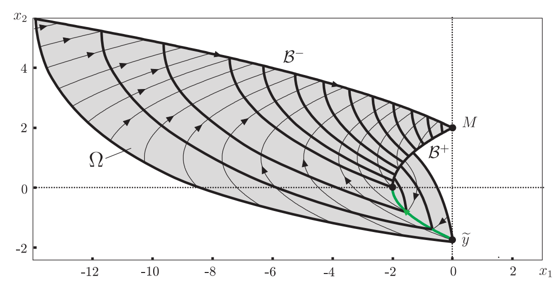
$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \;\; \dot{x}_2 = u, \;\; |u| \le \mu, \;\; 0 \le v \le \nu.$$



29

Множества уровня тестируемой функции $\varphi(\cdot)$

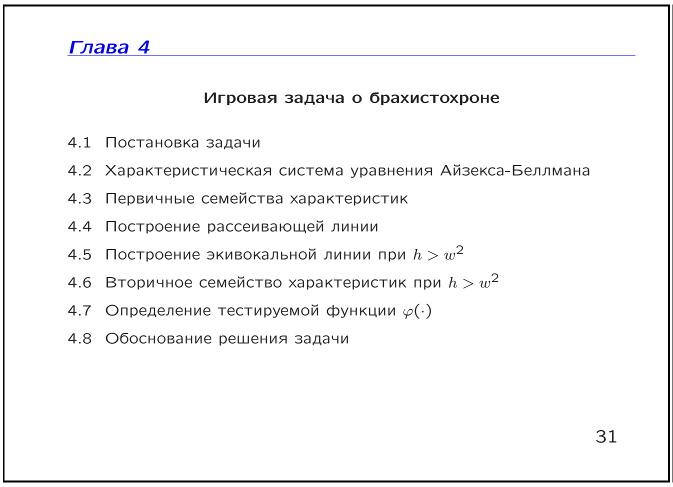
$$\dot{x}_1 = x_2 - v, \;\; \dot{x}_2 = u, \;\; |u| \le \mu, \;\; 0 \le v \le \nu.$$

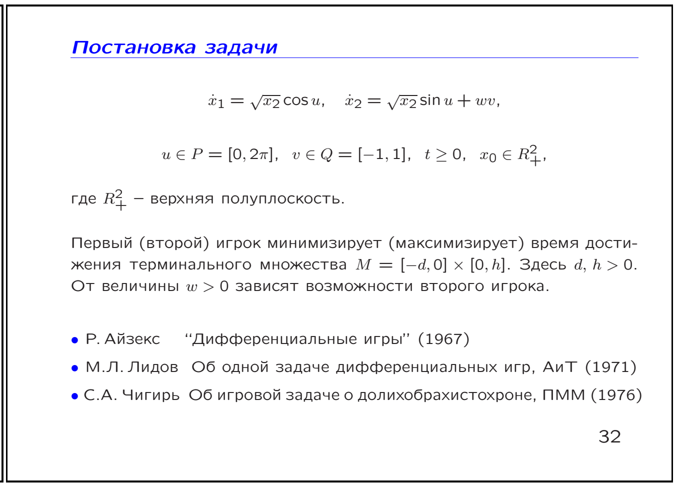


30

(*Слайд 29*) Основываясь на результатах упомянутых работ, описывается построение тестируемой функции как времени движения по траекториям, представленным на рисунке.

(*Слайд 30*) Тестируемая функция сужается на некоторое ограниченное множество. Функция является разрывной на этом множестве. Проводится проверка всех условий теоремы 1, что дает совпадение тестируемой функции с функцией цены игры.

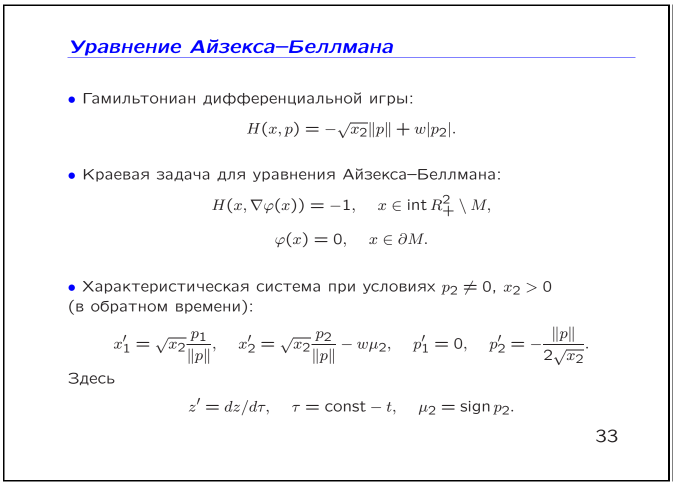


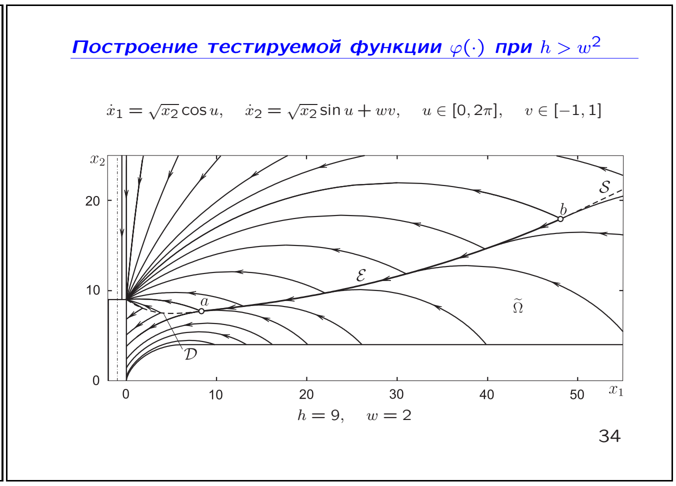


(*Слайд 31*) В **четвертой главе** изучается игровая задача о брахистохроне.

(*Слайд 32*) Такое название связано с тем, что в динамике системы компонента скорости, связанная с первым игроком, по модулю пропорциональна корню квадратному из x_2 – расстояния от некоторого нулевого уровня высоты в вертикальной плоскости. Вектограмма второго игрока – вертикальный отрезок длины $2w$. Терминальным множеством является прямоугольник высоты h. Замечу, что правая часть динамики не удовлетворяет стандартным условиям, используемым в теории дифференциальных игр: не выполнено условие Липшица по фазовой переменной, более того, не выполнено условие единственности решений системы.

Подобная задача с другим терминальным множеством и другой вектограммой второго игрока исследовалась в работах Р. Айзекса, М.Л. Лидова, С.А. Чигиря.





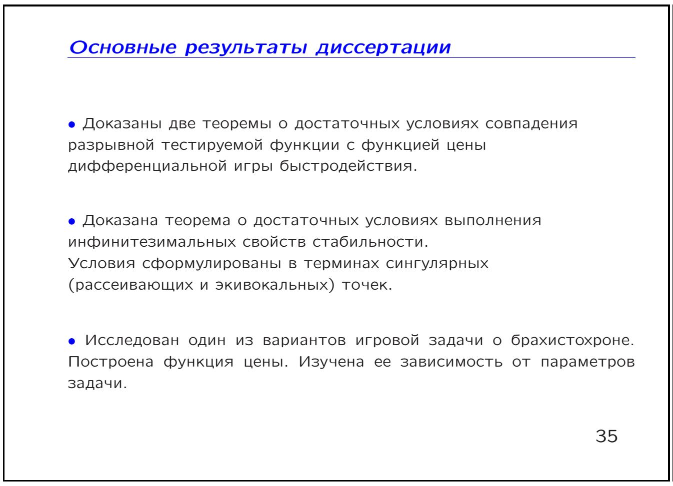
(*Слайд 33*) Для рассматриваемой задачи выписываются гамильтониан дифференциальной игры, краевая задача для уравнения Айзекса – Беллмана и характеристическая система.

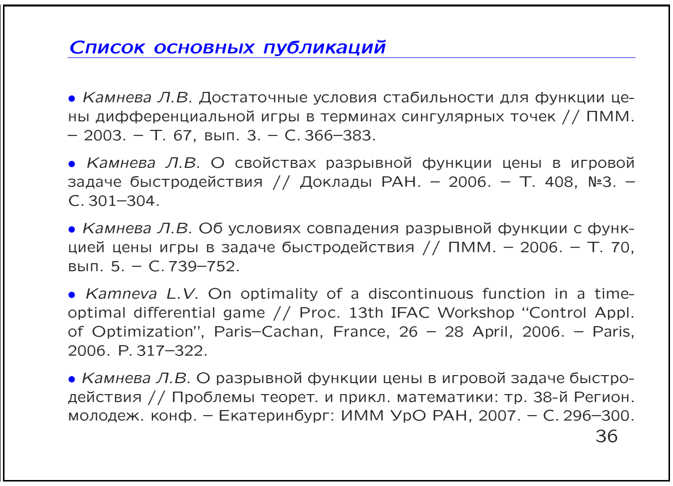
(*Слайд 34*) Основываясь на методе Айзекса обработки полей классических характеристик, для различных значений параметров строится тестируемая функция $\varphi(\cdot)$, определенная в полуплоскости R^2_+ как время движения по траекториям, представленным на рисунке.

В процессе построения возникают барьерные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ разрывна, а также рассеивающие и эквивокальные сингулярные линии, на которых функция $\varphi(\cdot)$ является негладкой.

При помощи теоремы 1 показывается совпадение тестируемой функции с функцией цены игры. Обоснование решения задачи осложняется тем, что правая часть динамики системы не удовлетворяет стандартным условиям существования цены игры: а именно, не выполнено локальное условие Липшица по фазовой переменной.

Решение симметрично относительно вертикальной прямой. Исследована зависимость решения от высоты h терминального множества. Выделяются три случая: $h > w^2$, $h < w^2$ и $h = w^2$. Структура оптимального решения в случае $h > w^2$ показана на слайде.





(*Слайд 35*) В заключение выступления перечислю основные результаты диссертации.

Доказаны две теоремы о достаточных условиях совпадения разрывной тестируемой функции с функцией цены дифференциальной игры быстродействия.

Доказана теорема о достаточных условиях выполнения инфинитезимальных свойств стабильности. Условия сформулированы в терминах сингулярных (рассеивающих и эквивокальных) точек.

Исследован один из вариантов игровой задачи о брахистохроне. Построена функция цены. Изучена ее зависимость от параметров задачи.

(*Слайд 36*) Основные результаты опубликованы в следующих работах.

Спасибо за внимание.