

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

---

На правах рукописи

КУМКОВ СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

**ОСОБЕННОСТИ МНОЖЕСТВ УРОВНЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ**

05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**ДИ С С Е Р Т А Ц И Я**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
В.С.Пацко

Екатеринбург — 2007

# Оглавление

Введение	4
Список обозначений	8
<b>1 «Узкие шейки» в линейных дифференциальных играх</b>	<b>10</b>
1.1 Линейные дифференциальные игры . . . . .	11
1.2 Построение множеств уровня функции цены . . . . .	13
1.3 Задача воздушного перехвата . . . . .	17
1.3.1 Задача перехвата: случай быстрого преследователя .	22
1.3.2 Задача перехвата: случай медленного преследователя	28
1.4 Обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина . . . . .	35
1.4.1 Пример 1 . . . . .	37
1.4.2 Пример 2 . . . . .	40
1.4.3 Пример 3 . . . . .	43
<b>2 Уровневое выметание функции цены</b>	<b>46</b>
2.1 Альтернированные суммы . . . . .	48
2.2 Связь операций над множествами и опорными функциями .	49
2.3 Локальная выпуклость . . . . .	51
2.4 Разность выпуклых функций . . . . .	55
2.4.1 Контрпример к обобщению лемм 2.4.1 и 2.4.2 . . . . .	61
2.5 Доказательство факта о сохранении уровневого выметания .	62
2.5.1 Сохранение полного выметания при алгебраической сумме . . . . .	62
2.5.2 Сохранение полного выметания при геометрической разности . . . . .	63

2.5.3	Контрпример к обобщению леммы 2.5.2 . . . . .	63
2.5.4	Сохранение полного выметания при предельном переходе . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Численное построение сингулярных поверхностей</b>	<b>68</b>
3.1	Оптимальные движения . . . . .	69
3.2	Типы сингулярных поверхностей . . . . .	71
3.3	Игры со скалярными управлениями . . . . .	74
3.3.1	Построение сингулярностей в случае скалярных ограничений . . . . .	75
3.3.2	Пример 1: материальная точка на прямой . . . . .	82
3.3.3	Пример 2: конфликтно-управляемый осциллятор . . . . .	86
3.3.4	Пример 3: «кнопка» . . . . .	90
3.3.5	Сравнение с аналитическими результатами . . . . .	93
3.3.6	Замечание к таблице классификации сингулярностей . . . . .	98
3.3.7	Пример линии переключения за второго игрока с покиданием . . . . .	100
3.3.8	Уточнение таблицы классификации сингулярностей . . . . .	102
3.3.9	Структура сингулярных поверхностей . . . . .	103
3.4	Игры с нескаллярными управлениями . . . . .	105
3.4.1	Построение сингулярностей в случае нескаллярных ограничений . . . . .	106
3.4.2	Пример 1: задача воздушного перехвата . . . . .	108
3.4.3	Пример 2: «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина» . . . . .	110
	<b>Литература</b>	<b>114</b>
	<b>Список иллюстраций</b>	<b>123</b>

# Введение

Теория дифференциальных игр в настоящее время — развитая математическая дисциплина. Первые отчеты Р.Айзекса по дифференциальным играм относятся к 1951-1954 годам [58, 59, 60, 61]. В 1965 году была опубликована его книга «Дифференциальные игры», переведенная на русский язык в 1967 году [1]. В нашей стране динамические задачи конфликтного управления рассматриваются с начала 60-х годов прошлого века. Первыми были работы Л.С.Понтрягина [27, 28] и Н.Н.Красовского [12, 13].

В 1967 году вышли две знаменитые статьи [29, 30] Л.С.Понтрягина о линейных дифференциальных играх. В 1968 году опубликована книга [14] Н.Н.Красовского по оптимальному управлению, в заключительной части которой был большой раздел, связанный с дифференциальными играми. В 1974 году вышла книга Н.Н.Красовского и А.И.Субботина «Позиционные дифференциальные игры». В ней, в частности, предложена позиционная формализация дифференциальных игр и доказана теорема об альтернативе, родственная теореме существования функции цены.

В эти же годы были опубликованы основополагающие работы [33, 34] Б.Н.Пшеничного о структуре дифференциальных игр.

Среди работ зарубежных авторов конца 60-х — начала 70-х годов прошлого века отметим работы L.D.Berkovitz [46], A.Blaquière [48], J.V.Breakwell [50, 64], W.H.Fleming [56, 57], G.Leitmann [63]. В этих работах рассматривались теоремы существования функции цены в подходящем классе стратегий и развивался метод Айзекса решения дифференциальных игр при помощи построения сингулярных поверхностей.

Более поздние результаты, относящиеся к 1980-м годам, связаны с истолкованием функции цены игры как обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса. Теория, опирающаяся на понятие минимаксного решения, была создана А.И.Субботиным. Полученные результаты отражены в книгах [36, 37]. Близкое понятие вязкостного ре-

шения было введено в работах M.G.Crandall и P.L.Lions [55]. В этом направлении интенсивно работают в настоящее время M.Bardi и I.Carpuzzo-Dolcetta [43].

Параллельно с развитием теории разрабатывались и численные методы. Опыт создания первых универсальных алгоритмов решения некоторых классов дифференциальных игр отражен в сборнике [2], опубликованном в 1984 г. в Екатеринбурге. Большую роль в создании алгоритмов и их обосновании сыграли работы Н.Л.Григоренко, М.С.Никольского, В.С.Пацко, Е.С.Половинкина, В.Н.Ушакова. Соответствующие результаты изложены в работах [39, 38, 7, 72, 31, 19].

За рубежом численные методы интенсивно разрабатываются с начала 1990-х годов. В этой области проводят исследования итальянские математики M.Bardi, M.Falcone, P.Soravia [44, 43, 45]; французские — P.Cardaliaguet, M.Quincampoix, P.Saint-Pierre [52, 53, 54]; немецкие — M.H.Breitner, H.J.Pesch [51].

Основные результаты диссертации базируются на создании вычислительных алгоритмов и программ решения линейных дифференциальных игр малой размерности. А именно, рассматриваются игры с фиксированным моментом окончания, которые после канонического преобразования при помощи фундаментальной матрицы Коши сводятся к играм с двумерным фазовым вектором. Автором значительно модернизированы существовавшие ранее алгоритмы и программы попятного построения множеств уровня функции цены (максимальных стабильных мостов) для таких задач.

Стимулом этой модернизации явилось желание получить результаты счета с хорошей точностью, что позволило использовать современные методы научной компьютерной визуализации для адекватного представления результатов. Программы для визуализации решений дифференциальных игр были созданы в 1997–2000 годах в процессе совместной работы с В.Л.Авербухом, А.И.Зенковым, Д.А.Юртаевым (сектор компьютерной визуализации отдела системного обеспечения ИММ УрО РАН). Другим стимулирующим фактором явилась попытка создания алгоритмов и программ автоматического построения сингулярных поверхностей в указанном классе игр. Такие программы были созданы автором, и они базируются на программе построения множеств уровня функции цены.

Перейдем к изложению содержания диссертации по главам.

**В первой главе** описывается базовый алгоритм поэтапного построения множеств уровня функции цены в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и геометрическими ограничениями на управления игроков.

Далее рассматривается задача воздушного перехвата одного слабоманеврирующего объекта другим (ракеты или самолета антиракетой). Задача рассматривается в линеаризованной постановке. При помощи разработанной программы детально исследуются особенности множеств уровня функции цены. Изучаемые особенности заключаются в том, что  $t$ -сечения множеств уровня функции цены могут иметь пустую внутренность. Такое явление создает «узкую шейку» множества уровня. Адекватное воспроизведение формы множества уровня вблизи узкой шейки требует хорошей точности вычислений. Исследование узких шеек важно, поскольку значительная часть тонкостей решения дифференциальной игры (в частности, наличие сингулярных поверхностей) сосредоточена именно в районе узкой шейки. Некоторое теоретическое исследование дифференциальной игры, связанной с задачей перехвата, проводилось в работах J.Shinar и его сотрудников [70, 71, 67]. Результаты численных построений, приведенные в первой главе, сравниваются с результатами этих работ.

В заключительном разделе первой главы представлены примеры линейных дифференциальных игр с несколькими узкими шейками. Они были выбраны из класса игр, называемого в российской литературе «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина». Опыт, накопленный в процессе исследования задачи воздушного перехвата, позволил провести осознанное и целенаправленное построение этих примеров.

**Вторая глава** посвящена доказательству свойства уровневого выметания функции цены. Это свойство заключается в том, что в каждый момент времени  $t$ -сечение меньшего множества уровня функции цены полностью выметает [8]  $t$ -сечение большего множества уровня. Доказана теорема о наследовании такого свойства функцией цены, если им обладает функция платы. При помощи контрпримеров показана специфичность такого свойства для линейных дифференциальных игр второго порядка по фазовой переменной с непрерывной квазивыпуклой функцией платы.

**Третья глава** диссертации связана с алгоритмами автоматического построения сингулярных поверхностей в линейных дифференциальных играх. Рассматривается тот же класс игр, что и в первых двух главах. Основ-

ная идея предлагаемых алгоритмов заключается в том, чтобы выделять и классифицировать сингулярные линии, расположенные на границе множеств уровня функции цены. Собирая сингулярные линии с разных множеств уровня, можно построить сингулярные поверхности в пространстве игры. Описаны алгоритмы построения сингулярных поверхностей для случая, когда управления игроков являются скалярными и ограниченными по модулю, а также для случая строго выпуклых компактных ограничений на управления игроков.

Рассмотрение сингулярных поверхностей составляет основу книги Р.Айзекса. Им предложена классификация сингулярных поверхностей: эквивокальные, рассеивающие, универсальные, поверхности переключения. Необходимые условия, связанные с различными типами сингулярных поверхностей, рассматривались в работах Р.Вернард [47] и А.А.Меликяна [66]. Автору неизвестны работы, в которых описывались бы численные алгоритмы автоматического глобального построения сингулярных поверхностей.

Алгоритмы для скалярного случая существенным образом используют специфику алгоритма построения множеств уровня функции цены, описанного в первой главе. Алгоритмы для не скалярных ограничений основаны на выявлении негладкостей множеств уровня функции цены и дальнейшем анализе динамики их развития.

В настоящее время пока не удалось провести полное аккуратное обоснование разработанных алгоритмов. Однако правильность их работы тщательным образом проверялась на примерах, в которых сингулярные поверхности были исследованы аналитическими методами [22, 23, 70, 71].

На защиту выносятся следующие результаты:

1) исследование численными методами феномена узких шеек множеств уровня функции цены в линеаризованной задаче воздушного перехвата, а также в линейных дифференциальных играх типа «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина»;

2) формулировка и доказательство теоремы о свойстве уровневого выметания функции цены;

3) разработка алгоритмов автоматического глобального построения сингулярных поверхностей для двух классов линейных дифференциальных игр.

# Список обозначений

$\mathbb{N}$	— множество натуральных чисел
$\mathbb{R}^+$	— множество положительных вещественных чисел
$\mathbb{R}_\infty$	— множество вещественных чисел, расширенное $\pm\infty$
$\mathbb{R}^n$	— евклидово пространство размерности $n$
$z$	— фазовая переменная размерности $n$ в исходной дифференциальной игре
$T$	— момент окончания в рассматриваемых дифференциальных играх
$\mathcal{V}(t, z)$	— функция цены исходной дифференциальной игры
$\mathcal{W}_c$	— множество уровня функции цены исходной дифференциальной игры, соответствующее константе $c$
$X(T, t)$	— фундаментальная матрица Коши исходной дифференциальной игры, вычисленная в момент $t$ для момента окончания $T$
$X_{i,j}(T, t)$	— матрица, составленная из $i$ -й и $j$ -й строк фундаментальной матрицы Коши $X(T, t)$ , соответствующих компонентам фазового вектора, определяющим функцию платы
$\xi$	— эквивалентная фазовая переменная размерности 2
$V(t, \xi)$	— функция цены эквивалентной дифференциальной игры
$\mathcal{W}_c$	— множество уровня функции цены эквивалентной дифференциальной игры, соответствующее константе $c$
$\rho(l, A), \rho_A(l)$	— значение опорной функции выпуклого компактного множества $A$ на векторе $l$
$\langle a, b \rangle$	— скалярное произведение векторов $a$ и $b$
$A^T, a^T$	— транспонирование матрицы $A$ или вектора $a$
$\tau$	— обратное время в рассматриваемых дифференциальных играх



$A \ast B$	— геометрическая разность множеств (разность Минковского)
$f _A$	— сужение функции $f$ на множество $A$
$\text{conv } f$	— операция взятия выпуклой оболочки функции $f$
$\text{conv} _A f$	— операция взятия выпуклой оболочки функции $f$ на выпуклом множестве $A$
$\text{gr } f$	— график функции $f$
$\text{epi } f$	— надграфик функции $f$
$\text{epi} _A f$	— надграфик функции $f$ на множестве $A$
$O_\varepsilon(x_0)$	— открытая $\varepsilon$ -окрестность точки $x_0$
$\text{Dom } f$	— область определения функции $f$
$\text{int } A$	— внутренность множества $A$
$\partial A$	— граница множества $A$
$\text{diam } A,  A $	— диаметр множества $A$ : $ A  = \sup_{x,y \in A} \ x - y\ $
$\text{diam } \vartheta,  \vartheta $	— диаметр разбиения $\vartheta = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$ : $ \vartheta  = \max_i \{t_{i+1} - t_i\}$
$\mathcal{N}(t, x)$	— конус внешних нормалей в точке $(t, x)$ к временному сечению $W(t)$ соответствующего максимального стабильного моста $W$ (множества уровня функции цены)
<b>P</b>	— многогранная аппроксимация множества $P$ ограничений на управление первого игрока
<b>Q</b>	— многогранная аппроксимация множества $Q$ ограничений на управление второго игрока
$W_c$	— аппроксимация максимального стабильного моста $W_c$
$\mathcal{P}(t)$	— вектограмма первого игрока в момент $t$ (точная или приближенная)
$\mathcal{Q}(t)$	— вектограмма второго игрока в момент $t$ (точная или приближенная)
$n_{\mathcal{P}}(t)$	— в случае скалярного управления первого игрока нормаль к отрезку его вектограммы в момент $t$
$n_{\mathcal{Q}}(t)$	— в случае скалярного управления второго игрока нормаль к отрезку его вектограммы в момент $t$

# Глава 1

## «Узкие шейки» в линейных дифференциальных играх

Исследуются четыре примера линейных антагонистических дифференциальных игр с геометрическими ограничениями на управления игроков, фиксированным моментом окончания и квазивыпуклой терминальной функцией платы. Предполагается, что функция платы зависит только от двух компонент фазового вектора в момент окончания. Это позволяет осуществить переход к эквивалентной игре с двумерным фазовым вектором.

Все подобранные примеры демонстрируют наличие «узких шеек» множеств уровня функции цены игры (максимальных стабильных мостов). Вблизи таких узких шеек сосредоточена значительная часть особенностей функции цены или, иными словами, наиболее сложные сингулярные поверхности. Правильное воспроизведение соответствующих множеств уровня требует весьма точных численных построений. В противном случае возможно искажение формы сечений множеств уровня или даже преждевременный обрыв построений.

Первый из рассматриваемых примеров представляет собой в линейном приближении математическую модель задачи преследования управляемой ракетой некоторой воздушной цели (самолета или другой ракеты). В этом примере возникает множество уровня с одной узкой шейкой.

Остальные три примера являются исключительно модельными. Они специально подбирались для того, чтобы продемонстрировать причины возникновения узких шеек, одной или нескольких.

Все разобранные примеры относятся к классу дифференциальных игр, называемых в российской литературе «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина».

В начальной части главы достаточно подробно излагается алгоритм численного попятного построения множеств уровня функции цены (максимальных стабильных мостов). Идеи этого алгоритма являются существенными для второй и третьей глав диссертации.

## 1.1 Линейные дифференциальные игры

Рассматривается линейная антагонистическая дифференциальная игра [16]

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)u + C(t)v, & t \in [t_0, T], & z \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, & v \in Q \subset \mathbb{R}^q, & \varphi(z_i(T), z_j(T)), \end{aligned} \quad (1.1)$$

с фиксированным моментом окончания  $T$  и квазивыпуклой непрерывной функцией платы  $\varphi$ , зависящей от двух компонент  $z_i, z_j$  фазового вектора. *Квазивыпуклой* называем такую функцию, все множества уровня которой — выпуклые множества. Первый (второй) игрок распоряжается управлением  $u$  ( $v$ ), выбирая его из выпуклого компакта  $P$  ( $Q$ ) в своем конечномерном пространстве так, чтобы минимизировать (максимизировать) значение функции  $\varphi$  в момент  $T$ .

Известно [16], что такая игра обладает функцией цены  $\mathcal{V}(t, z)$ , которая является основным элементом решения. Знание функции цены позволяет получить оптимальные стратегии игроков, пучки оптимальных движений и др.

Одним из способов описания функции является представление ее при помощи множеств уровня. Для заданной константы  $c$  обозначим через

$$\mathcal{W}_c = \{(t, z) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(t, z) \leq c\}$$

множество уровня функции цены, соответствующее этой константе. В дальнейшем также будет использоваться обозначение временного сечения ( $t$ -сечения) множества уровня в момент  $t$ :  $\mathcal{W}_c(t) = \{z \in \mathbb{R}^n : (t, z) \in \mathcal{W}_c\}$ .

Удобство такого представления заключается в том, что вместо достаточно сложного объекта — функции — изучается более простой — множество. При этом многие особенности функции имеют свое отражение в особенностях ее множеств уровня, рассмотренных в конкретный момент времени или на промежутке времени. Например, отсутствие дифференцируемости функции в какой-то точке порождает негладкость границы соответству-

ющего множества уровня. Эволюция негладкости во времени позволяет судить о типе недифференцируемости (сингулярности) функции цены.

Используя линейность динамики игры (1.1) и тот факт, что ее функция платы терминальная и зависит лишь от двух компонент фазового вектора, можно понизить размерность задачи. Это производится при помощи замены переменных

$$\xi(t) = X_{i,j}(T, t)z(t) \quad (1.2)$$

(см., например, [15, стр. 354], [4, стр. 334–335], [16, стр. 160]). Здесь  $\xi$  — новая фазовая переменная размерности 2, а  $X_{i,j}(T, t)$  — матрица, составленная из  $i$ -й и  $j$ -й строк фундаментальной матрицы Коши  $X(T, t)$  для системы линейных дифференциальных уравнений  $\dot{z} = A(t)z$ . Новая переменная  $\xi(t)$  имеет смысл прогноза целевых  $i$ -й и  $j$ -й компонент фазового вектора  $z$  вдоль свободного движения системы (при нулевых управлениях  $u$  и  $v$ ) на момент окончания  $T$ .

После применения указанной замены переменных приходим к игре

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= D(t)u + E(t)v, \\ t &\in [t_0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \\ D(t) &= X_{i,j}(T, t)B(t), \quad E(t) = X_{i,j}(T, t)C(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

с квазивыпуклой терминальной функцией платы  $\varphi(\xi_1(T), \xi_2(T))$ . Часто  $\xi$  называется *эквивалентным* фазовым вектором, а игру (1.3) — *эквивалентной* дифференциальной игрой. Символом  $V(t, z)$  обозначим функцию цены эквивалентной игры, а  $W_c$  — множество уровня функции цены, соответствующее константе  $c$ .

По отношению к игре (1.3) термин «эквивалентный» означает, что если позиции  $(t, \xi(t))$  и  $(t, z(t))$  игр (1.3) и (1.1) удовлетворяют соотношению (1.2), то значения  $V(t, \xi(t))$  и  $\mathcal{V}(t, z(t))$  функций цены этих игр совпадают.

Отметим, что если исходная игра уже имела двумерный фазовый вектор, то замена (1.2) является взаимно однозначной. В этом случае можно пересчитывать элементы решения эквивалентной игры (1.3) (множества уровня функции цены, оптимальные движения, сингулярные поверхности) в исходные координаты.

## 1.2 Построение множеств уровня функции цены

Для линейных дифференциальных игр вида (1.1) в 1980–90-е годы в Институте математики и механики Уральского отделения Академии Наук были разработаны попятные алгоритмы построения множеств уровня функции цены [2, 38, 72]. Для случая игр вида (1.3) с двумерной фазовой переменной разрабатывались специализированные алгоритмы [9], использующие специфику задачи. Позже эти алгоритмы были улучшены автором диссертации, были разработаны их версии для параллельных вычислительных машин [82, 76, 77].

Ниже, следуя статье [9], будет вкратце изложен алгоритм построения набора многоугольников, приближающих сечения  $W_c(t)$  некоторого множества уровня  $W_c$  функции цены  $V(t, \xi)$  игры (1.3) на основе многоугольника, приближающего некоторое множество уровня  $M$  функции платы  $\varphi$ .

Пусть на промежутке  $[t_0, T]$  задано разбиение

$$\vartheta = \{t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} = t_i + \Delta_i < \dots < t_N = T\}.$$

Разбиение не обязательно должно быть равномерным, но для простоты изложения положим, что все шаги  $\Delta_i$  одинаковы и равны  $\Delta$ .

Заменим динамику (1.3) кусочно-постоянной динамикой

$$\dot{\xi} = \mathbf{D}(t)u + \mathbf{E}(t)v, \quad \mathbf{D}(t) = D(t_i), \quad \mathbf{E}(t) = E(t_i) \text{ при } t \in [t_i, t_{i+1}). \quad (1.4)$$

Вместо множеств  $P$  и  $Q$  будем рассматривать их многогранные аппроксимации  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ . Пусть также  $\widehat{\varphi}$  — аппроксимирующая функция платы, такая что для любого значения  $c$  ее множество уровня  $\mathbf{M}_c = \{\xi : \widehat{\varphi}(\xi) \leq c\}$ , соответствующее этому значению, является выпуклым многоугольником. Считаем, что аппроксимирующие множества  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{M}_c$  близки в метрике Хаусдорфа к множествам  $P$ ,  $Q$ ,  $M$ , соответственно.

Аппроксимирующая игра (1.4) выбрана так, что на каждом шаге  $[t_i, t_{i+1}]$  попятной процедуры мы имеем игру с простыми движениями, выпуклыми многогранными ограничениями на управления игроков и выпуклым многоугольным целевым множеством. Положим  $\mathbf{W}_c(t_N) = \mathbf{M}_c$ . Далее найдем множество разрешимости  $\mathbf{W}_c(t_{N-1})$  игры с простыми движениями, затем множество  $\mathbf{W}_c(t_{N-2})$  и т.д. В качестве результата получим набор выпуклых множеств, которые приближают в метрике Хаусдорфа множество уровня  $W_c$  функции цены  $V(t, \xi)$  игры (1.3).

Обозначим  $\mathcal{P}(t_i) = -D(t_i)\mathbf{P}$ ,  $\mathcal{Q}(t_i) = E(t_i)\mathbf{Q}$ . Эти множества описывают возможные вклады игроков в скорость системы на очередном промежутке времени. В дальнейшем множества  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  будут называться *вектограммами* первого и второго игрока в момент  $t$ , а множества

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{(t, p) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^2 : p \in \mathcal{P}(t)\}, \\ \mathcal{Q} &= \{(t, q) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^2 : q \in \mathcal{Q}(t)\}\end{aligned}$$

— *трубками вектограмм*.

Построения ведутся в терминах опорных функций многоугольников  $\mathbf{W}_c(t_i)$ ,  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ ,  $\mathcal{P}(t_i)$  и  $\mathcal{Q}(t_i)$ .

Напомним определение опорной функции. Пусть имеется выпуклое замкнутое множество  $A$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Тогда оно взаимно однозначно сопоставляется [35] со своей *опорной функцией*  $\rho_A(\cdot)$ :

$$A \leftrightarrow \rho(l, A) = \rho_A(l) : l \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{a \in A} \langle l, a \rangle \in \mathbb{R}_\infty,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает скалярное произведение, а  $\mathbb{R}_\infty$  — множество вещественных чисел, расширенное значениями  $\pm\infty$ . Из определения следует, что опорная функция является положительно-однородной, т.е.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \rho(\alpha l) = \alpha \rho(l).$$

Кроме того, если  $A$  — многогранное множество (многоугольник в случае плоскости), то его опорная функция кусочно-линейна с множествами линейности в конусах, совпадающих с конусами внешних нормалей в вершинах многоугольника  $A$ .

Опорная функция  $l \mapsto \rho(l, \mathbf{W}_c(t_i))$  множества  $\mathbf{W}_c(t_i)$  совпадает [34] с выпуклой оболочкой функции

$$\gamma(l, t_i) = \rho(l, \mathbf{W}_c(t_{i+1})) + \Delta \cdot \rho(l, \mathcal{P}(t_i)) - \Delta \cdot \rho(l, \mathcal{Q}(t_i)). \quad (1.5)$$

Функция  $\gamma(\cdot, t_i)$  является положительно-однородной и кусочно-линейной. При этом свойство локальной выпуклости этой функции может нарушаться лишь на границе конусов линейности функции  $\rho(\cdot, \mathcal{Q}(t_i))$ , т.е. на границе конусов, порождаемых нормальными к ребрам многоугольника  $\mathcal{Q}(t_i)$ .

Разработано [32] достаточно много алгоритмов построения выпуклой оболочки множеств и функций, в том числе таких, которые используют специфику плоскости. Однако в данном случае имеется дополнительная

информация, которая позволяет создать еще более эффективный алгоритм.

В дальнейшем аргумент  $t_i$  в записи функции  $\gamma$  будет опускаться для упрощения записи. Вместо множеств  $\mathcal{P}(t_i)$ ,  $\mathcal{Q}(t_i)$  будем писать просто  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ . Также вместо  $\mathbf{W}_c(t_i)$  и  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$  будем писать  $\mathbf{W}_c^i$  и  $\mathbf{W}_c^{i+1}$ , соответственно.

Конусы линейности функции  $\gamma$  определяются нормальными к выпуклым многоугольникам  $\mathbf{W}_c^{i+1}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ . Собирая внешние нормали к этим множествам и упорядочивая их по часовой стрелке, получим набор векторов  $L$ . Набор значений  $\gamma(l)$  функции  $\gamma$  на векторах  $l \in L$  обозначим  $\Phi$ . Наборы  $L$ ,  $\Phi$  полностью описывают функцию  $\gamma$ .

Множество нормалей к многоугольнику  $\mathcal{Q}$ , упорядоченное по часовой стрелке, обозначим через  $S$ . Набор  $S$  будем называть набором «подозрительных» векторов. Это название связано с тем, что функция  $\gamma$  наверняка выпукла на конусах, чья внутренность не содержит нормалей к  $\mathcal{Q}$ . И, соответственно, нарушение локальной выпуклости может происходить лишь только на конусах, содержащих внутри себя по крайней мере одну нормаль к многоугольнику  $\mathcal{Q}$ .

Положим  $L^{(1)} = L$ ,  $\Phi^{(1)} = \Phi$ ,  $S^{(1)} = S$ . Шаг с номером  $(k + 1)$  процесса овыпукления заключается в замене наборов  $L^{(k)}$ ,  $\Phi^{(k)}$  некоторыми другими наборами  $L^{(k+1)} \subset L^{(k)}$ ,  $\Phi^{(k+1)} \subset \Phi^{(k)}$ . При этом  $S^{(k)}$  также подменяется новым набором  $S^{(k+1)}$ .

Опишем один шаг процесса овыпукления. Положим, что угол между любыми двумя соседними векторами из набора  $L^{(k)}$ , отсчитываемый по часовой стрелке, меньше  $\pi$ . Пусть  $l \mapsto \gamma^{(k)}(l)$  — кусочно-линейная функция, определяемая наборами  $L^{(k)}$ ,  $\Phi^{(k)}$ . Поскольку

$$L^{(k)} \subset L^{(k-1)} \subset \dots \subset L^{(1)}, \quad \Phi^{(k)} \subset \Phi^{(k-1)} \subset \dots \subset \Phi^{(1)},$$

то для любого вектора  $\bar{l} \in L^{(k)}$  значение  $\gamma^{(k)}(\bar{l})$  равно  $\gamma(\bar{l})$ .

Возьмем вектор  $l_* \in S^{(k)}$  и проверим локальную выпуклость функции  $\gamma^{(k)}$  на конусе, порожденном вектором  $l_*$  и двумя соседними к нему векторами  $l_-$  и  $l_+$ , взятыми по и против часовой стрелки из набора  $L^{(k)}$ . (Определение 2.3.1 локальной выпуклости дано в разделе 2.3 на стр. 51.)

В силу того, что функция  $\gamma^{(k)}$  является положительно-однородной на плоскости, проверка локальной выпуклости сводится к проверке, является ли неравенство  $\langle l_*, y \rangle \leq \gamma(l_*)$  существенным в тройке неравенств

$\langle l_-, y \rangle \leq \gamma(l_-)$ ,  $\langle l_*, y \rangle \leq \gamma(l_*)$ ,  $\langle l_+, y \rangle \leq \gamma(l_+)$ . Существенным называем такое неравенство, которое дает вклад в решение соответствующей системы неравенств. Иными словами, неравенство  $\langle l_*, y \rangle \leq \gamma(l_*)$  существенно в этой системе, если для множества

$$A = \{y : \langle l_-, y \rangle \leq \gamma(l_-), \langle l_+, y \rangle \leq \gamma(l_+)\}$$

выполняется соотношение

$$A \neq A \cap \{y : \langle l_*, y \rangle \leq \gamma(l_*)\}.$$

Заметим, что в силу упорядоченности векторов  $l_-$ ,  $l_*$ ,  $l_+$  лишь средний из них может быть несущественным.

Алгоритм проверки существенности: найдем точку  $y_*$ , в которой пересекаются прямые  $\langle l_-, y \rangle = \gamma(l_-)$  и  $\langle l_*, y \rangle = \gamma(l_*)$ . Затем проверим неравенство  $\langle l_+, y_* \rangle < \gamma(l_+)$ . Если оно выполняется, то локальная выпуклость имеет место (среднее неравенство существенно). В противном случае, локальная выпуклость отсутствует (среднее неравенство не является существенным).

В случае существенности неравенства вектор  $l_*$  исключается из набора  $S^{(k)}$ . Полученное множество обозначается  $S^{(k+1)}$ . При этом  $L^{(k+1)} = L^{(k)}$ ,  $\Phi^{(k+1)} = \Phi^{(k)}$ .

В противном случае возможны две ситуации. Обозначим через  $\alpha$  угол между векторами  $l_-$  и  $l_+$ , отсчитываемый по часовой стрелке:

- $\alpha < \pi$ . Вектор  $l_*$  извлекается из набора  $S^{(k)}$ , и, одновременно, векторы  $l_-$  и  $l_+$  туда включаются. (При этом один из них или оба уже могут присутствовать в наборе  $S^{(k)}$ .) Полученный таким образом новый набор «подозрительных» векторов обозначается через  $S^{(k+1)}$ . Набор  $L^{(k+1)}$  получается из  $L^{(k)}$  исключением вектора  $l_*$ . Аналогично, при переходе от  $\Phi^{(k)}$  к  $\Phi^{(k+1)}$  из набора  $\Phi^{(k)}$  выкидывается значение  $\gamma^{(k)}(l_*) = \gamma(l_*)$ ;

- $\alpha \geq \pi$ . Данное неравенство означает, что рассматриваемая тройка неравенств несовместна. И, стало быть, выпуклая оболочка функции  $\gamma$  не существует, т.е.  $\mathbf{W}_c^i = \emptyset$ . Дальнейшие построения прекращаются. (Если  $\alpha = \pi$ , то возможно, что  $\mathbf{W}_c(t_i)$  является вырожденным многоугольником, т.е.  $\mathbf{W}_c(t_i)$  – точка или отрезок. В этом случае дальнейшие построения также прекращаются.)

Тем самым завершено описание одного шага овыпукления. Процесс завершается на шаге с номером  $j$ , когда впервые  $S^{(j)} = \emptyset$ , т.е. когда в первый



раз множество «подозрительных» нормалей становится пустым. Последнее означает, что функция  $\gamma^{(j)}$ , определяемая наборами  $L^{(j)}$  и  $\Phi^{(j)}$ , является локально выпуклой всюду. Таким образом, она и является выпуклой оболочкой функции  $\gamma$ . В этом случае обозначим окончательные наборы  $L^{(j)}$  и  $\Phi^{(j)}$  через  $\bar{L}$  и  $\bar{\Phi}$ , соответственно. Другой вариант завершения процедуры: на каком-то шаге угол  $\alpha$  между векторами  $l_-$  и  $l_+$  становится больше или равным  $\pi$  после исключения проверяемого вектора  $l_*$  из набора «подозрительных» векторов. Это означает, что  $\mathbf{W}_c^i = \emptyset$ .

Доказательство сходимости алгоритма и оценки погрешности приведены в [49, 3]. Сходимость аналогичных схем обоснована в [26].

### 1.3 Задача воздушного перехвата

Множества уровня функции цены игры (1.3) могут быть представлены как трубки в пространстве *фазовые переменные*  $(\xi_1, \xi_2) \times$  *время*  $t$ . Такие трубки начинаются на множестве уровня функции платы  $\varphi$  и тянутся обратно во времени. При этом возможны различные ситуации: множество уровня тянется бесконечно во времени, или же оно может в какой-то момент обрываться.

Кроме того, существует и пограничный случай: множество уровня в какой-то момент «почти» обрывается — его сечение в этот момент представляет собой точку или отрезок. После этого момента сечения множеств уровня опять обладают внутренностью. Такую ситуацию будет называть «узкой шейкой» множества уровня функции цены. Также логически допустима конфигурация множества уровня, когда оно имеет несколько узких шеек.

В работах [70, 71, 67] рассматривалась трехмерная задача воздушного перехвата, сформулированная в виде игры преследования-уклонения. Преследователем выступала ракета-перехватчик, убегающим — маневренная воздушная цель (самолет или другая ракета). Естественной платой в такой игре является расстояние наименьшего сближения, т.е. промах, который минимизируется преследователем и максимизируется убегающим. Векторы номинальных скоростей  $(V_P)_{\text{ном}}$  и  $(V_E)_{\text{ном}}$  являются постоянными и направленными так, что имеется точная встреча на номинальных траекториях. Управляющее ускорение каждого объекта перпендикулярно вектору его текущей скорости. Максимальные значения боковых ускорений

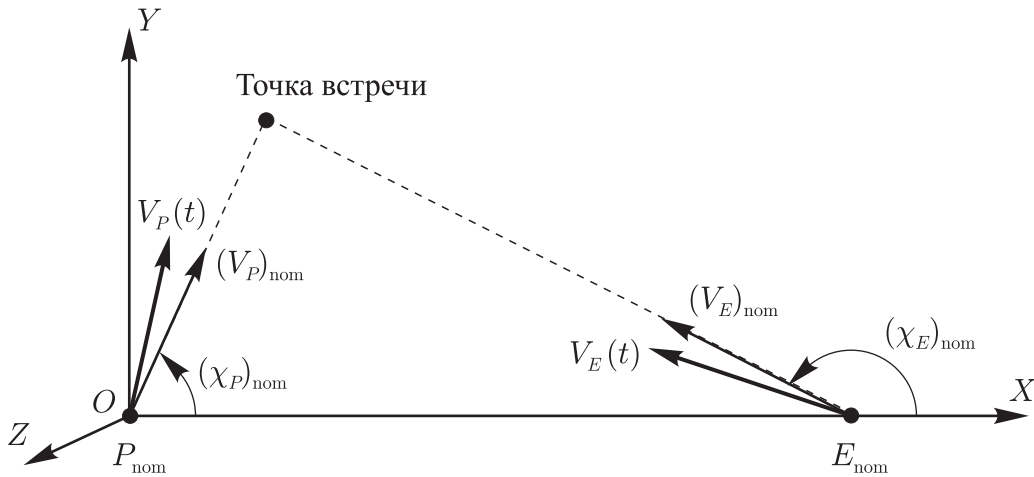


Рис. 1.1: Система координат в задаче трехмерного преследования

ограничены константами  $a_P$  и  $a_E$ . Полагается, что  $a_P > a_E$ . Убегающий непосредственно управляет своим ускорением, а догоняющий — инерционно, с постоянной времени  $\tau_P$ .

Выбор координат производится следующим образом. Начало координат  $O$  совмещается с номинальным положением  $P_{\text{ном}}$  догоняющего в начальный момент. Ось  $OX$  направлена вдоль начальной номинальной линии визирования. Ось  $OY$  перпендикулярна  $OX$  и лежит в плоскости, определяемой векторами номинальных скоростей объектов (рис. 1.1). Ось  $OZ$  направлена перпендикулярно первым двум осям.

Как отмечено, начальные условия таковы, что на номинальных курсах существует точное сближение:

$$(V_P)_{\text{ном}} \sin(\chi_P)_{\text{ном}} = (V_E)_{\text{ном}} \sin(\chi_E)_{\text{ном}}. \quad (1.6)$$

Также полагаем, что реализации векторов скоростей преследователя  $V_P(t)$  и убегающего  $V_E(t)$  близки к номинальным значениям  $(V_P)_{\text{ном}}$  и  $(V_E)_{\text{ном}}$ , соответственно. Такое предположение разумно, поскольку время сближения мало (скорость сближения весьма велика) и за это время боковые управляющие ускорения не успевают существенно развернуть векторы скоростей. Иными словами, объекты являются слабо маневрирующими. Считается, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \sin(\chi_P(t) - (\chi_P)_{\text{ном}}) &\approx \chi_P(t) - (\chi_P)_{\text{ном}}, \\ \cos(\chi_P(t) - (\chi_P)_{\text{ном}}) &\approx 1, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и

$$\begin{aligned}\sin\left(\chi_E(t) - (\chi_E)_{\text{nom}}\right) &\approx \chi_E(t) - (\chi_E)_{\text{nom}}, \\ \cos\left(\chi_E(t) - (\chi_E)_{\text{nom}}\right) &\approx 1.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Принимая во внимание предположения (1.7) и (1.8), относительные траектории могут быть линеаризованы вдоль начальной линии визирования (оси  $OX$ ). Более того, относительное движение вдоль оси  $OX$  может рассматриваться как равномерное. Таким образом, от начального трехмерного движения можно перейти к двумерному в плоскости  $YZ$ . Для заданного начального расстояния равномерная скорость сближения определяет время  $T$  номинальной встречи. И, стало быть, задача минимизации трехмерного промаха в нефиксированный момент времени сводится к минимизации (максимизации) расстояния в плоскости  $YZ$  в зафиксированный момент номинальной встречи.

Поскольку, вообще говоря, векторы номинальных скоростей  $(V_P)_{\text{nom}}$  и  $(V_E)_{\text{nom}}$  неколлинеарны линии визирования в начальный момент, то проекции в плоскость  $YZ$  исходных круговых ограничений на управления игроков, перпендикулярных соответствующим векторам, становятся эллипсами. Эксцентриситеты этих эллипсов определяются величинами  $\cos(\chi_P)_{\text{nom}}$  и  $\cos(\chi_E)_{\text{nom}}$ , а поскольку углы  $(\chi_P)_{\text{nom}}$  и  $(\chi_E)_{\text{nom}}$  различны, то и эксцентриситеты будут разными.

Таким образом, получаем следующую линейную дифференциальную игру:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= F, \\ \dot{F} &= -(F - u)/\tau_P, \\ \ddot{y} &= v\end{aligned}\quad \begin{aligned}t &\in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \\ \varphi(x(T), y(T)) &= |x(T) - y(T)|.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Здесь  $x$  — вектор положения первого (догоняющего) игрока,  $y$  — вектор положения второго (убегающего) игрока,  $\tau_P$  — постоянная времени, характеризующая инерционность отработки управления первого игрока. Множества  $P$  и  $Q$ , ограничивающие управления первого и второго игроков соответственно, являются эллипсами:

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{A_P^2} + \frac{u_2^2}{B_P^2} \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{A_E^2} + \frac{v_2^2}{B_E^2} \leq 1 \right\}.$$

Полуоси  $A_P, B_P, A_E, B_E$  параллельны координатным осям и вычисляются на основе ограничений  $a_P, a_E$  на ускорения игроков и косинусов уг-

лов  $(\chi_P)_{\text{ном}}$  и  $(\chi_E)_{\text{ном}}$ . Момент окончания игры предполагается фиксированным. Платой является геометрическое расстояние между объектами в момент окончания.

Исключая компоненту  $F$  в динамике (1.9) и обозначая  $\alpha = 1/\tau_P$ , приходим к следующему виду динамики:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \alpha u, \quad \ddot{y} = v. \quad (1.10)$$

Чтобы привести динамику (1.10) к виду (1.1), произведем замену

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_1, & z_2 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_1, & z_3 &= \ddot{x}_1, \\ z_4 &= x_2 - y_2, & z_5 &= \dot{x}_2 - \dot{y}_2, & z_6 &= \ddot{x}_2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Получаем игру в стандартной форме (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az + Bu + Cv, \quad t \in [0, T], \quad z \in \mathbb{R}^6, \\ A &= \left[ \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array} \right], \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/\tau_P \end{bmatrix}, \\ B^T &= (1/\tau_P) \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \\ C^T &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$u \in P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : u^T \begin{bmatrix} 1/\cos^2 \chi_P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \leq a_P^2 \right\},$$

$$v \in Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : v^T \begin{bmatrix} 1/\cos^2 \chi_E & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \leq a_E^2 \right\},$$

$$\varphi(z_1(T), z_4(T)) = \sqrt{z_1^2(T) + z_4^2(T)}.$$

В таком виде линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания записана в [70].

В работах [70, 71] явно производился переход от игры (1.12) к эквивалентной игре вида (1.3). В силу блочности матриц  $A$ ,  $B$  и  $C$  матрицы  $D(t)$  и  $E(t)$  в динамике эквивалентной игры (1.3) приобретают вид

$$D(t) = \zeta(t) \cdot I_2, \quad \zeta(t) = (T - t) + \tau_P e^{-(T-t)/\tau_P} - \tau_P, \quad (1.13)$$

$$E(t) = \eta(t) \cdot I_2, \quad \eta(t) = -(T - t), \quad (1.14)$$

где  $I_2$  — единичная матрица размера  $2 \times 2$ . В целом эквивалентная игра будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta(t)u + \zeta(t)v, \\ t \in [0, T], \quad \xi &\in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \varphi(\xi(T)) = |\xi(T)|. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для того, чтобы малый промах был достижим, преследователь должен иметь преимущество в управлении. Это означает, что множество  $P$ , ограничивающее управление преследователя, должно полностью содержать ограничение  $Q$  управления убегающего. Иными словами, должны выполняться неравенства

$$a_P/a_E > 1, \quad a_P |\cos(\chi_P)_{\text{ном}}| > a_E |\cos(\chi_E)_{\text{ном}}|, \quad (1.16)$$

описывающие отношение полуосей эллипсов  $P$  и  $Q$ . Такое преимущество позволяет преследователю уменьшить начальный промах (если такой есть) и парировать маневры убегающего в процессе сближения. Однако в силу инерционности отработки управления преследователя и безынерционности динамики убегающего нулевой промах не может быть достигнут при условии оптимальности стратегии убегающего.

В работах [70, 71, 67] приведено аналитическое исследование дифференциальной игры (1.13)–(1.15). На качественном уровне изучены структура сингулярных поверхностей и геометрия множеств уровня функции цены. Для некоторых типов наборов начальных данных представлены критические множества уровня.

*Критическим* в рамках рассматриваемой задачи называется такое множество уровня функции цены, которое разделяет множества уровня конечные и бесконечные во времени. Само критическое множество бесконечно во времени. В рассматриваемой задаче критическое множество уровня функции цены имеет узкую шейку.

В следующих двух параграфах будут описаны результаты численного исследования этой задачи, проведенного при помощи программ, созданных автором работы на основе алгоритма, описанного в разделе 1.2.

При численных построениях мы конструируем множества уровня функции цены на некотором конечном промежутке времени  $[t_*, T]$ . Определение критического множества при этом можно дать следующим образом: множество уровня функции цены с непустыми  $t$ -сечениями на  $[t_*, T]$  назовем

*критическим*, если оно имеет на интервале  $(t_*, T)$  хотя бы одно  $t$ -сечение с пустой внутренностью.

### 1.3.1 Задача перехвата: случай быстрого преследователя

Первый, более простой случай задачи (1.12) соответствует ситуации, когда скорость  $(V_P)_{\text{ном}}$  преследователя превосходит скорость  $(V_E)_{\text{ном}}$  убегающего. Геометрия номинального перехвата для этого случая изображена на рис. 1.2.

Соотношение (1.6), определяющее наличие номинального перехвата, вместе с неравенством  $(V_P)_{\text{ном}} > (V_E)_{\text{ном}}$  влечет, что эксцентриситет эллипса  $P$  меньше эксцентриситета эллипса  $Q$  (см. рис. 1.3).

Для численного исследования были взяты следующие данные:

$$\frac{(V_E)_{\text{ном}}}{(V_P)_{\text{ном}}} = 0.666, \quad \frac{a_P}{a_E} = 5.0,$$

$$|\cos(\chi_P)_{\text{ном}}| = 0.87, \quad |\cos(\chi_E)_{\text{ном}}| = 0.66, \quad \tau_P = 1.$$

Следовательно, эллиптические ограничения на управления игроков описываются как

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{0.87^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \leq 5.0^2 \right\},$$

$$Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{0.66^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \leq 1.0^2 \right\}.$$

Ниже, символом  $\tau$  будет обозначаться обратное время задач (1.1) и (1.3):  $\tau = T - t$ .

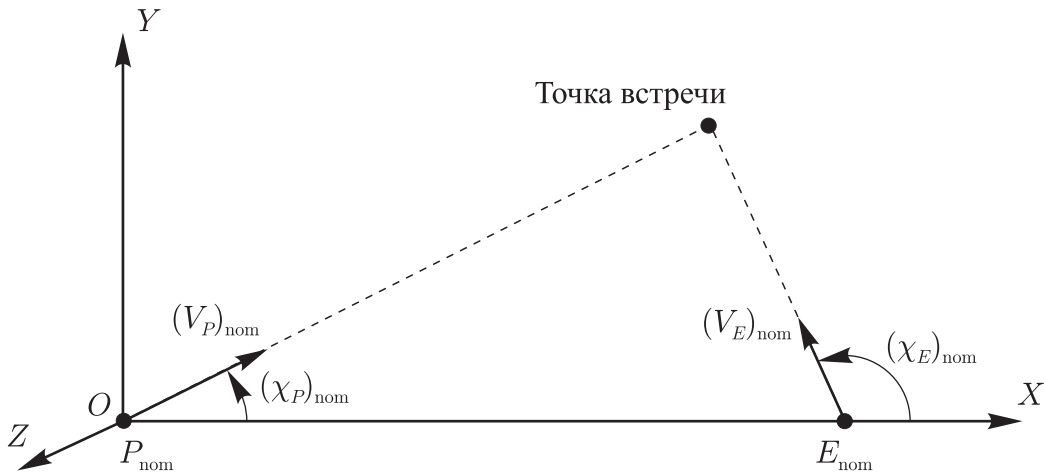


Рис. 1.2: Геометрия номинального перехвата для случая быстрого преследователя

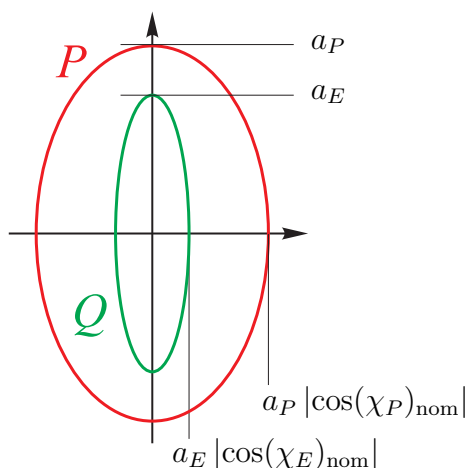


Рис. 1.3: Эллиптические ограничения на управления игроков в случае быстрого преследователя. Эллипс  $P$  изображен красным цветом,  $Q$  — зеленым. Эксцентриситет эллипса  $P$  меньше, чем эксцентриситет  $Q$

Пример был просчитан на интервале времени  $\tau \in [0, 2]$  обратного времени. Шаг  $\Delta$  по времени был взят равным 0.025. Круги множеств уровня платы и эллипсы  $P$ ,  $Q$  ограничений на управления игроков подменялись соответствующими 100-угольниками.

Рис. 1.4 представляет трубки вектограмм. Трубка вектограмм первого игрока изображена голубым цветом, второго — пурпурным.

Увеличенная часть предыдущего рисунка для другой точки зрения приведена на рис. 1.5. На трубке вектограмм второго игрока нанесены контуры

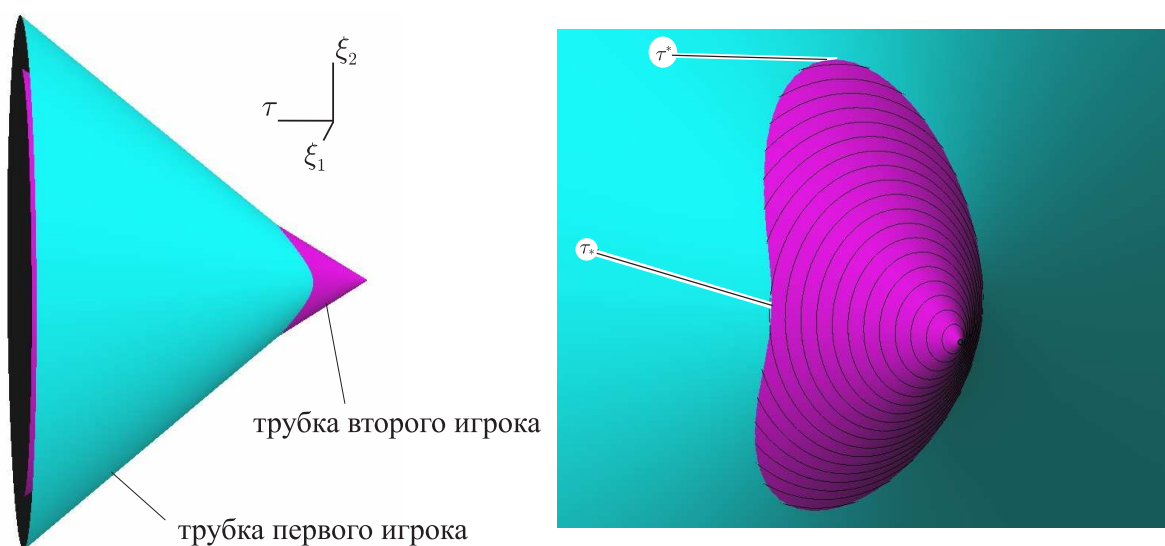


Рис. 1.4: (слева) Трубки вектограмм для случая быстрого преследователя

Рис. 1.5: (справа) Увеличенный фрагмент трубок вектограмм. Первый игрок получает преимущество в горизонтальном направлении в момент  $\tau_*$  и полное преимущество в момент  $\tau^*$

$t$ -сечений.

Поскольку  $\mathcal{Q}(t) = E(t)Q = \eta(t)I_2Q = \eta(t)Q$ , где  $\eta(\cdot)$  описывается соотношением (1.14), пурпурная трубка расширяется линейно по  $\tau$ . Для трубки  $\mathcal{P}$  имеем  $\mathcal{P}(t) = \zeta(t)P$ , где  $\zeta(\cdot)$  берется из (1.13). Поэтому вначале (для малых значений обратного времени  $\tau$ ) голубая трубка растет медленнее, чем линейно, но для бóльших значений  $\tau$  рост становится почти линейным, и эта трубка расширяется быстрее, чем  $\mathcal{Q}$ . Более быстрый рост обуславливается неравенствами (1.16).

Итак, имеем, что при  $\tau < \tau_*$  второй игрок (убегающий) имеет полное преимущество, т.е. его вектограмма  $\mathcal{Q}(\tau)$  для этих моментов обратного времени полностью покрывает вектограмму первого игрока  $\mathcal{P}(\tau)$  (рис. 1.6а). Момент  $\tau_*$  определяется тем, что горизонтальные размеры эллипсов  $\mathcal{P}(\tau_*)$  и  $\mathcal{Q}(\tau_*)$  совпадают (рис. 1.6б). На промежутке  $\tau_* < \tau < \tau^*$  ни один из игроков не имеет полного преимущества: первый игрок сильнее в горизонтальном направлении, а второй — в вертикальном (рис. 1.6в). Когда  $\tau = \tau^*$ , вертикальные размеры эллипсов становятся равными (рис. 1.6г), и для  $\tau > \tau^*$  первый игрок получает полное преимущество (рис. 1.6д). Такое поведение вектограмм  $\mathcal{P}(\tau)$  и  $\mathcal{Q}(\tau)$  объясняется соотношением эксцентриситетов, размеров эллипсов ограничений  $P, Q$  и видом функций  $\zeta(t), \eta(t)$ .

Переход преимущества от второго игрока к первому приводит к появлению узкой шейки. Рис. 1.7 содержит изображение множества уровня, близкого сверху к критическому. Это множество уровня соответствует значению  $c = 0.141$ . Узкая шейка расположена около момента  $\tau^* = 0.925$ .

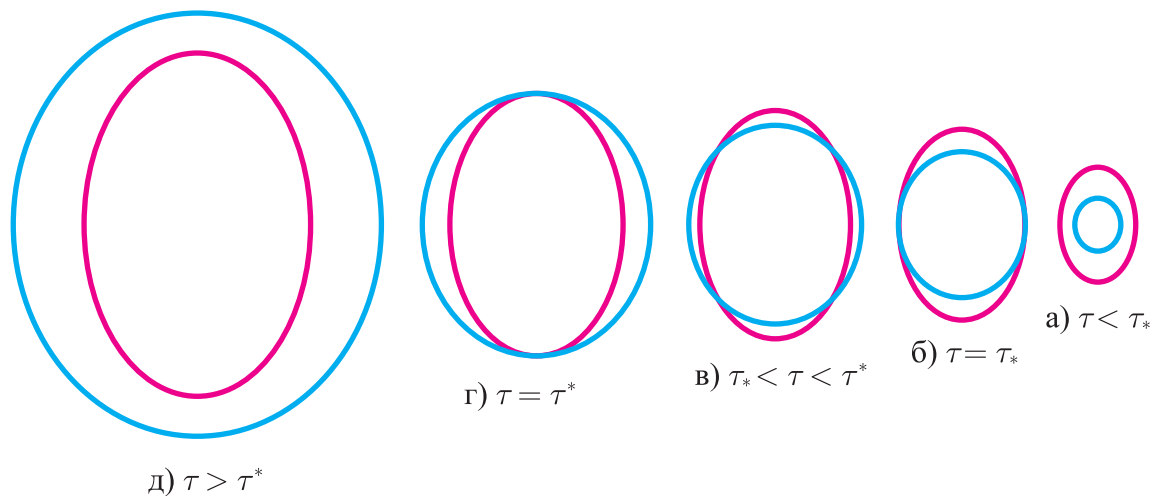


Рис. 1.6: Сечения трубок вектограмм в некоторые моменты времени. Сечения трубки вектограмм первого игрока нарисованы голубым цветом, второго — пурпурным.



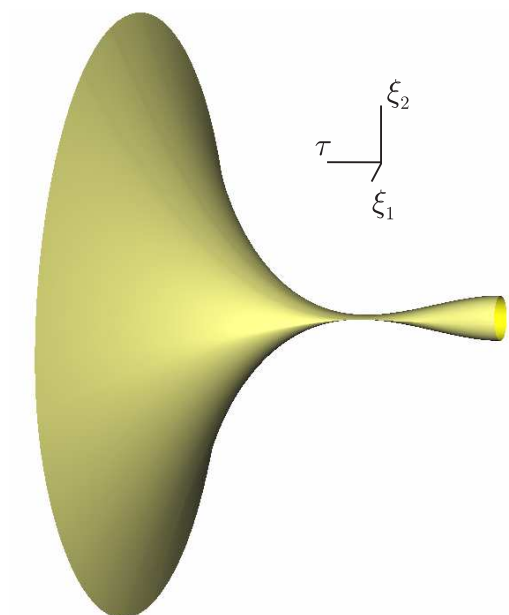


Рис. 1.7: Множество уровня, близкое сверху к критическому,  $c = 0.141$ . Момент наиболее узкого сечения  $\tau^* = 0.925$

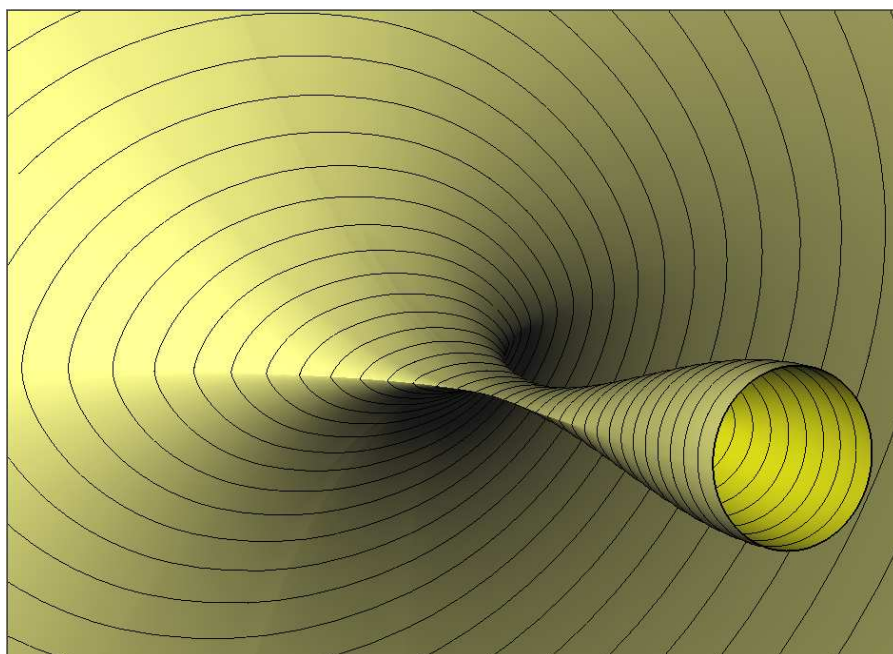


Рис. 1.8: Увеличенный фрагмент множества уровня, близкого к критическому для начального промежутка обратного времени; нанесены контуры некоторых  $t$ -сечений

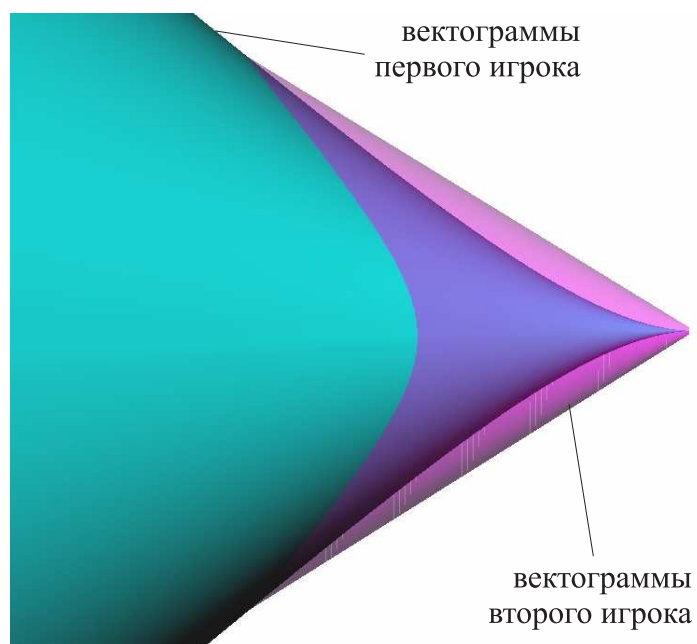


Рис. 1.9: Наложение трубок вектограмм. Трубка второго игрока изображена прозрачной

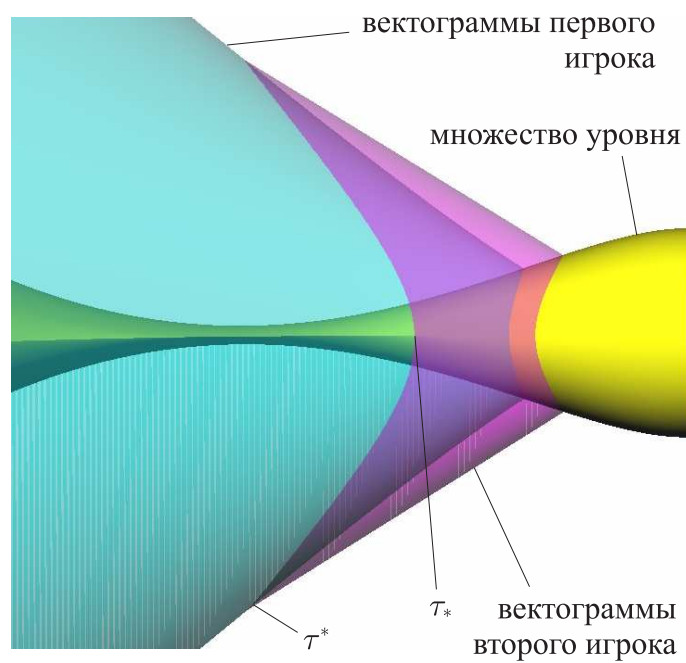


Рис. 1.10: Наложение трубок вектограмм и множества уровня, близкого к критическому. Трубки вектограмм изображены прозрачными

Крупный фрагмент узкой шейки изображен на рис. 1.8. Показаны контуры некоторых  $t$ -сечений. Можно видеть, что сечения  $\mathbf{W}_c(t)$  множества уровня около узкой шейки вытянуты горизонтально. Это происходит в силу имеющегося соотношения возможностей игроков. При  $\tau < \tau_*$  второй игрок в вертикальном направлении более силен, чем в горизонтальном. Поэтому сечения  $\mathbf{W}_c(t)$  по вертикали сжимаются сильнее. Когда  $\tau$  немногим больше  $\tau^*$ , первый игрок получает преимущество по горизонтали (рис. 1.6в), что приводит к растяжению сечений в горизонтальном направлении. Для достаточно больших значений обратного времени  $\tau$  преимущество первого игрока по вертикали становится больше, чем преимущество по горизонтали,  $t$ -сечения начинают по вертикали расти быстрее, чем по горизонтали и в какой-то момент становятся вытянутыми вертикально. Для представленного примера вертикальная вытянутость  $t$ -сечения множества уровня появляется уже вне промежутка времени, для которого приведены изображения на рис. 1.7, 1.8.

Следующий рисунок 1.9 опять показывает трубки вектограмм игроков. Трубка вектограмм второго игрока сделана прозрачной. Ось обратного времени  $\tau$  идет справа налево, ось  $\xi_2$  направлена вверх. Ось  $\xi_1$  направлена на читателя перпендикулярно листу.

Для той же точки зрения приведена (рис. 1.10) сцена, содержащая в дополнение к трубкам вектограмм множество уровня, близкое к критическому. Обе трубки вектограмм сейчас сделаны прозрачными. Наложение трубок и множества уровня ясно показывает влияние отношения вектограмм игроков на изменение размеров и геометрии сечений множества уровня. Например, можно видеть, что в момент получения первым игроком полного преимущества (момент  $\tau^* = 0.925$ ) узкая шейка прекращается и начинается расширение множества уровня. Также можно видеть, что до этого трубка сжимается вследствие преимущества второго игрока (полного или частичного).

Результаты численного исследования, приведенные в этом параграфе, качественно согласуются с теми, которые были получены в результате аналитического исследования в работах [70, 67].

### 1.3.2 Задача перехвата: случай медленного преследователя

В этом параграфе приводятся результаты численного исследования задачи воздушного перехвата (1.14)–(1.15) для случая медленного преследователя:  $(V_P)_{\text{ном}} < (V_E)_{\text{ном}}$ . Геометрия номинальных траекторий выглядит так, как это показано на рис. 1.1. Эксцентриситет эллипса  $P$  в рассматриваемой ситуации больше эксцентриситета  $Q$  (см. рис. 1.11).

Исследовался пример, соответствующий следующему набору числовых данных исходной задачи:

$$\begin{aligned} \frac{(V_E)_{\text{ном}}}{(V_P)_{\text{ном}}} &= 1.054, & \frac{a_P}{a_E} &= 1.3, \\ |\cos(\chi_P)_{\text{ном}}| &= 0.67, & |\cos(\chi_E)_{\text{ном}}| &= 0.71, & \tau_P &= 1. \end{aligned}$$

Эти данные определяют такие параметры системы:  $\alpha = 1/\tau_P = 1$ ,

$$\begin{aligned} P &= \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{0.67^2} + \frac{u_2^2}{1.00^2} \leq 1.30^2 \right\}, \\ Q &= \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{0.71^2} + \frac{v_2^2}{1.00^2} \leq 1.00^2 \right\}. \end{aligned}$$

Пример просчитывался на промежутке обратного времени  $\tau \in [0, 7]$  с шагом  $\Delta = 0.01$ . Круги множеств уровня функции платы и эллипсы ограничений  $P, Q$  на управления игроков приближались 100-угольниками.

Так же, как и в примере из предыдущего параграфа, здесь тоже имеется узкая шейка. На рис. 1.12 можно видеть общий план множества уров-

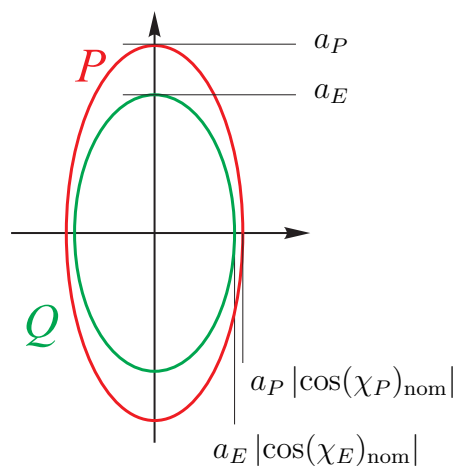


Рис. 1.11: Эллиптические ограничения на управления игроков в случае медленного преследователя. Эллипс  $P$  изображен красным,  $Q$  — зеленым. Эксцентриситет эллипса  $P$  больше, чем эксцентриситет  $Q$

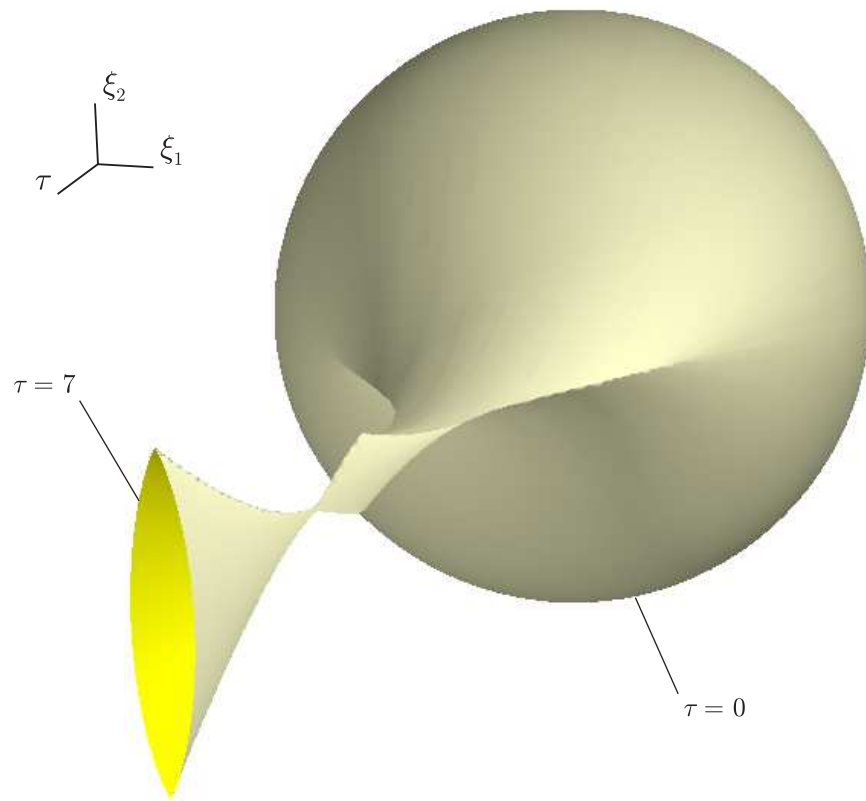


Рис. 1.12: Общий вид множества уровня функции цены с узкой шейкой

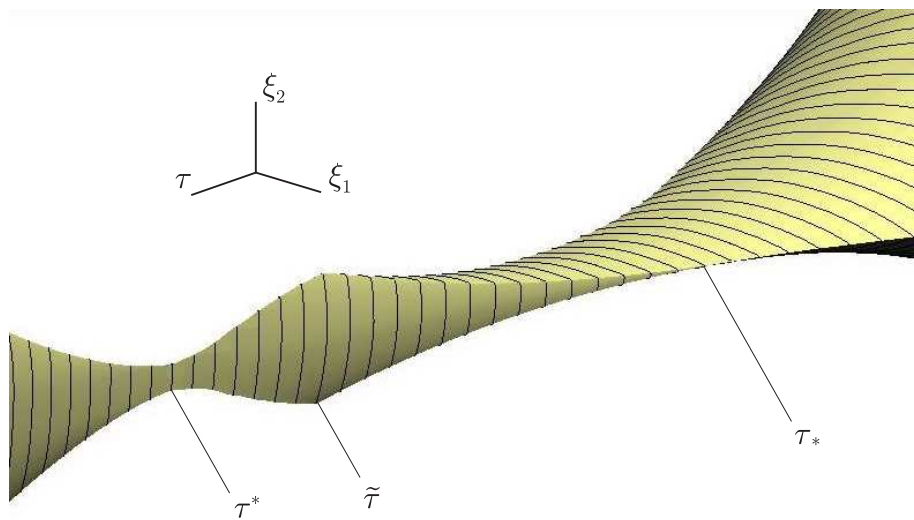


Рис. 1.13: Увеличенный фрагмент узкой шейки

ня  $\mathbf{W}_c$ , соответствующего значению  $c = 1.546$ , которое чуть больше критического. В отличие от примера, описанного в параграфе 1.3.1, здесь узкая шейка имеет более сложную структуру: направление вытянутости  $t$ -сечений меняется весьма хитрым образом. Крупный план узкой шейки изображен на рис. 1.13.

Для объяснения формы сечений множества уровня вблизи узкой шейки опять обратимся к трубкам вектограмм игроков. Трубки вектограмм показаны на рис. 1.14. Трубка вектограмм первого игрока ( $\mathcal{P}$ ) изображена красным цветом, второго ( $\mathcal{Q}$ ) — зеленым. В рассматриваемом случае трубка  $\mathcal{Q}$  растет линейно по  $\tau$ , в то время как трубка  $\mathcal{P}$  растет медленнее, чем линейно, для малых значений обратного времени  $\tau$  и становится почти линейной по времени при больших значениях обратного времени. В конце концов, для больших моментов  $\tau$  трубка  $\mathcal{P}$  растет быстрее, чем  $\mathcal{Q}$ , в силу соотношений (1.16).

Поскольку эллипсы  $P$  и  $Q$  имеют разные эксцентриситеты, вектограмма первого игрока  $\mathcal{P}(\tau)$  начинает покрывать вектограмму второго игрока  $\mathcal{Q}(\tau)$  по различным направлениям в различные моменты времени. Так, при  $\tau < \tau_* = 4.18$  эллипс  $\mathcal{Q}(\tau)$  полностью включает эллипс  $\mathcal{P}(\tau)$  (рис. 1.15а). В некоторый момент  $\tau = \tau_*$  размеры эллипсов совпадают по вертикали (рис. 1.15б). На интервале  $\tau_* < \tau < \tau^*$  эллипс  $\mathcal{P}(\tau)$  все больше и больше захватывает эллипс  $\mathcal{Q}(\tau)$ . И, наконец, в момент  $\tau = \tau^* = 5.3$  множество  $\mathcal{P}(\tau)$  покрывает  $\mathcal{Q}(\tau)$  и по горизонтали (рис. 1.15в). Для  $\tau > \tau_*$ , множество  $\mathcal{P}(\tau)$  полностью покрывает множество  $\mathcal{Q}(\tau)$  (рис. 1.15г).

Описанное соотношение между вектограммами игроков объясняет специфическое изменение  $t$ -сечений около узкой шейки, что показано на рис. 1.12, 1.13 и 1.16. Последний рисунок содержит группы сечений на различных интервалах  $\tau$  для показа различных фаз изменения формы сечений.

При  $\tau < \tau_*$  второй игрок имеет полное преимущество над первым. Поскольку в обратном времени второй игрок пытается сжать множество уровня функции цены, то  $t$ -сечения трубки  $\mathbf{W}_c$  сокращаются на интервале  $0 < \tau < \tau_*$ . На рис. 1.16а эти сечения показаны для интервала  $\tau \in [0, 3.8]$ . Поскольку преимущество второго игрока больше в вертикальном направлении, то трубка множества уровня сжимается больше по вертикали. Поэтому к моменту  $\tau = \tau_*$  сечения становятся вытянутыми по горизонтали.

На интервале  $\tau_* < \tau < \tau^*$  первый игрок постепенно получает преимущество, начиная с вертикального направления. При этом второй игрок сохраняет преимущество по горизонтали. По этой причине  $t$ -сечения начинают расширяться по вертикали, сокращаясь по горизонтали. Рассматриваемый интервал можно разделить на две части.

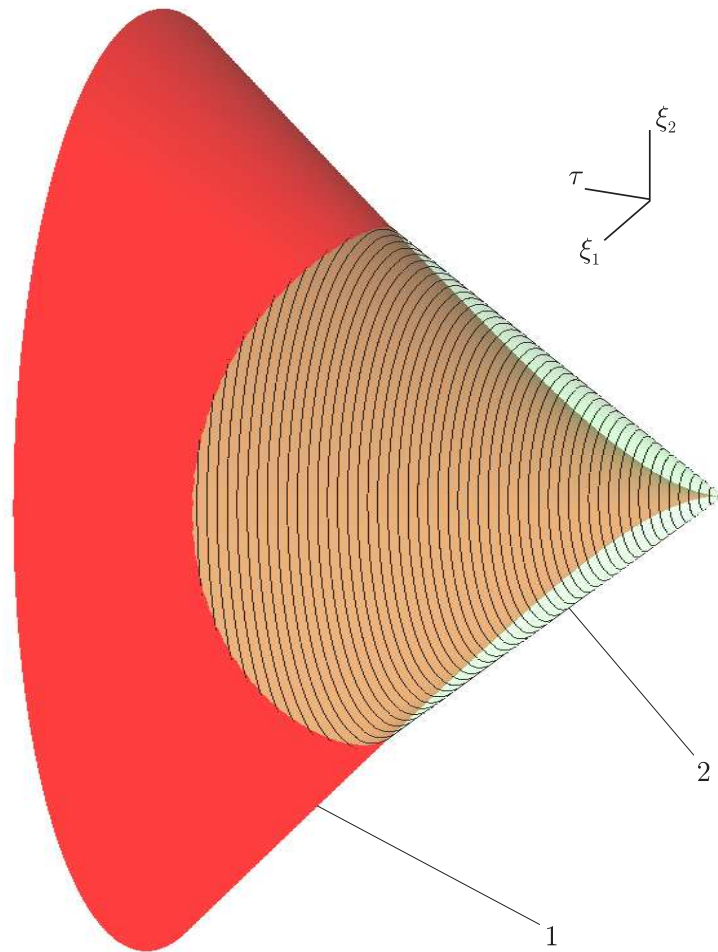


Рис. 1.14: Общий вид трубок вектограмм первого (1) и второго (2) игроков. Трубка вектограмм второго игрока изображена прозрачной, показаны контуры некоторых  $t$ -сечений

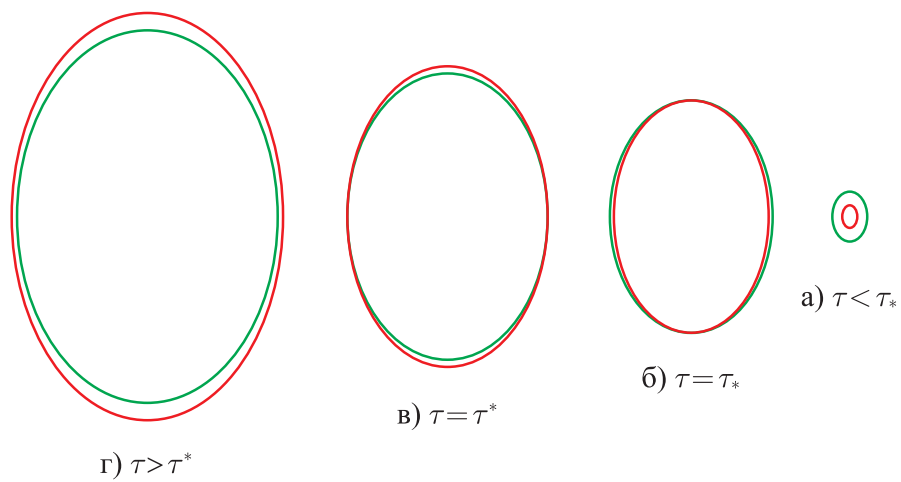


Рис. 1.15: Сечения трубок вектограмм для некоторых моментов времени. Вектограммы первого игрока изображены красным, второго — зеленым

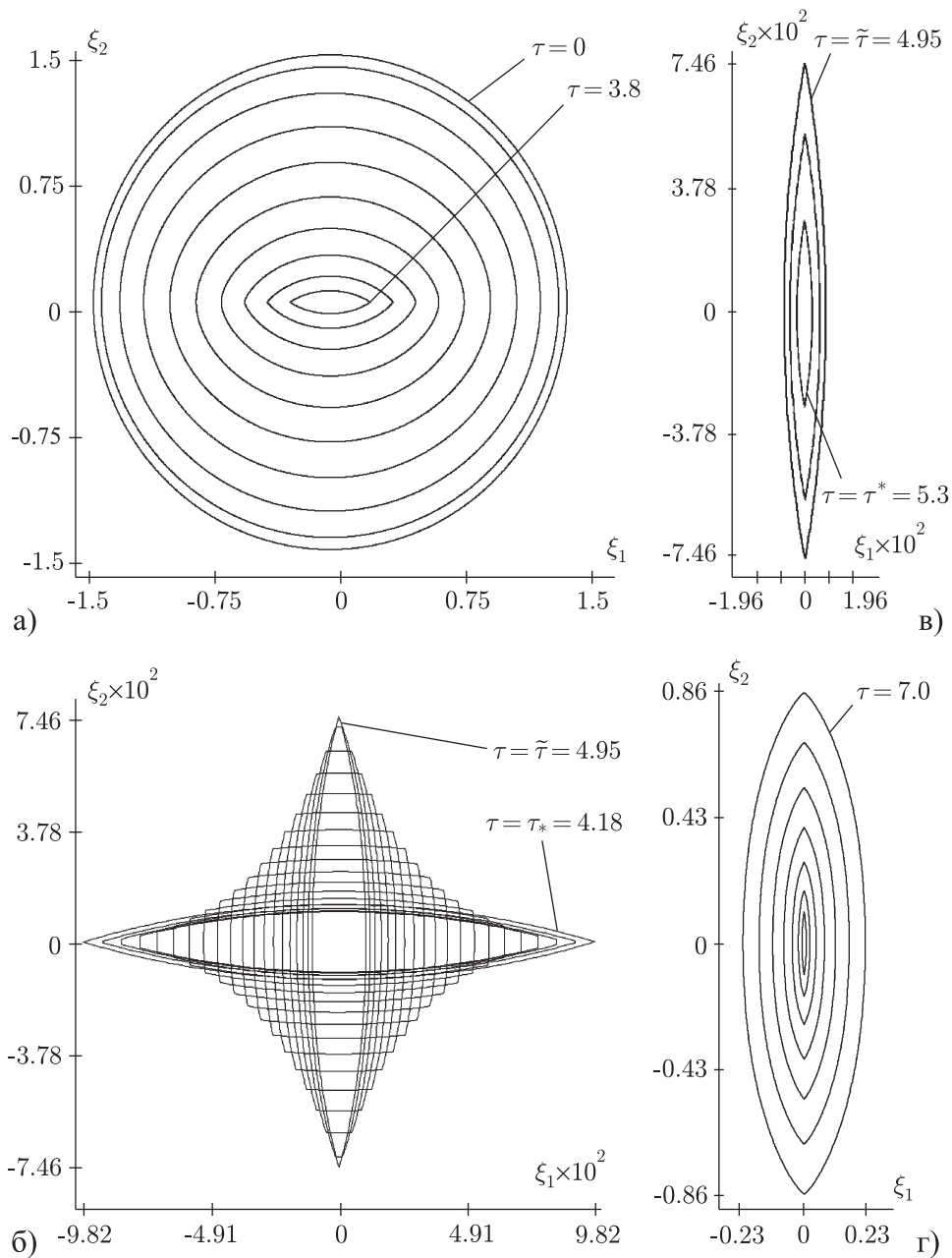


Рис. 1.16: Группы  $t$ -сечений множества уровня, близкого к критическому для некоторых промежутков обратного времени: а)  $\tau \in [0, 3.8]$ ; б)  $\tau \in [\tau_*, \tilde{\tau}]$ ; в)  $\tau \in [\tilde{\tau}, \tau^*]$ ; г)  $\tau \in [5.41, 7.0]$

Между  $\tau_*$  и  $\tilde{\tau} = 4.95$  сечения имеют форму «криволинейного прямоугольника», как это показано на рис. 1.16б. Форма сечения постепенно меняет свою вытянутость с горизонтальной на вертикальную.

В момент  $\tilde{\tau}$  горизонтальная дуга полностью пропадает, и форма  $t$ -сечения напоминает вертикальную линзу. В этот же момент вертикальное растяжение сменяется сжатием, несмотря на преимущество первого игрока в вертикальном направлении (рис. 1.16в), поскольку сжатие в горизонтальном направлении (вызванное преимуществом второго игрока в



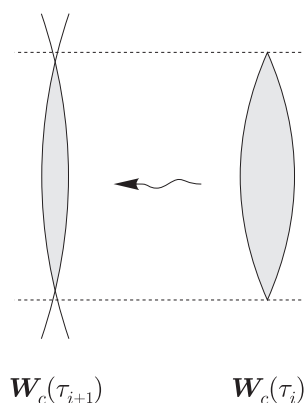


Рис. 1.17: Сокращение размера  $t$ -сечения по вертикали вследствие сжатия по горизонтали

горизонтальном направлении) приводит к сжатию и по вертикали из-за такой формы сечений. Сказанное поясняется на рис. 1.17. Боковые дуги предыдущего сечения  $\mathbf{W}_c(\tau_i)$  увеличиваются по вертикали под действием первого игрока и сближаются под действием второго. Следующее сечение  $\mathbf{W}_c(\tau_{i+1})$  ограничено пересечением новых дуг.

Наконец, в момент  $\tau = \tau^*$ , когда первый игрок получает полное преимущество, множество уровня имеет наиболее узкое сечение (рис. 1.13 и 1.16в), которое вытянуто по вертикали. При  $\tau > \tau^*$  первый игрок продолжает обладать полным преимуществом, и  $t$ -сечения множества уровня начинают монотонно расти по всем направлениям. Однако скорость роста по разным направлениям неодинакова, хотя сечения сохраняют вертикальную вытянутость (рис. 1.16г).

Следующие два рисунка показывают множество уровня функции цены, близкое к критическому, в сравнении с соседними множествами уровня. Первый из них — рис. 1.18 — показывает критическую трубку (прозрачная, изображена желтым цветом) и трубку, просчитанную для значения  $c = 1.48$  функции платы, которое меньше, чем критическое. Трубка обрывается (конечна во времени) и изображена красным цветом. На рис. 1.19 представлены критическая трубка (красная) и трубка, просчитанная для значения  $c = 1.67$  (на рисунке — прозрачная желтая). Видно, что большее множество имеет гладкую границу. Это означает, что именно около узкой шейки сосредоточены нерегулярности функции цены. Чтобы правильно отразить их, нужны очень аккуратные вычисления в районе узкой шейки.

Отметим, что строение узкой шейки, описанное в этом параграфе, типично для ситуации медленного преследователя. Конечно, при изменении

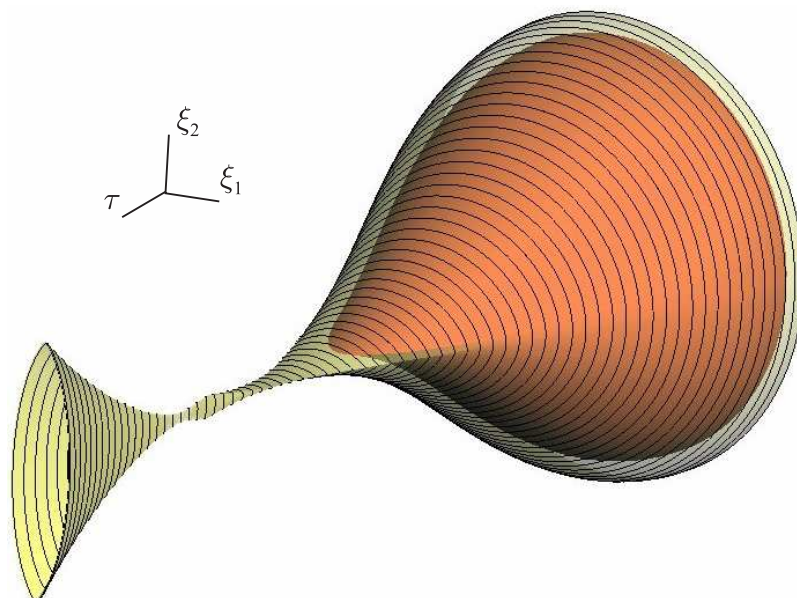


Рис. 1.18: Множество уровня с узкой шейкой, просчитанное для значения  $c = 1.546$ , (желтое прозрачное) и множество уровня, просчитанное для меньшего значения  $c = 1.48$  (красное)

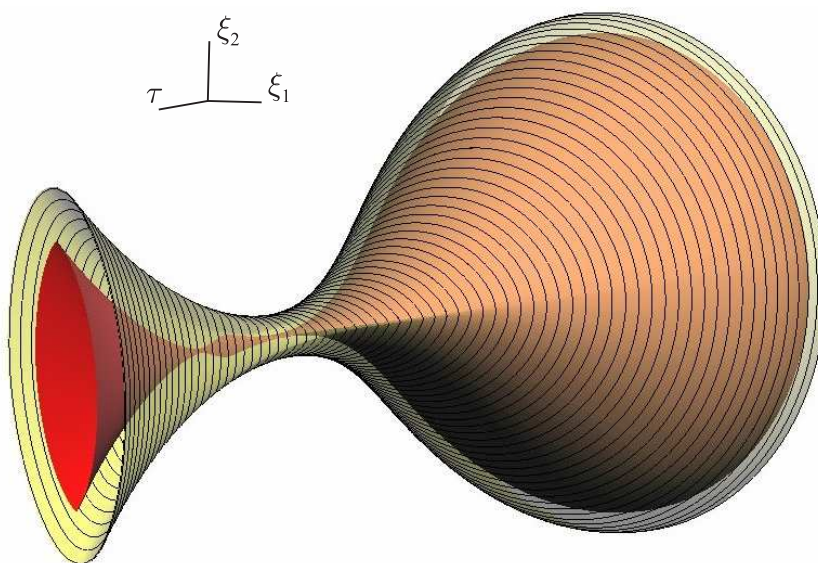


Рис. 1.19: Множество уровня с узкой шейкой, просчитанное для значения  $c = 1.546$ , (красное) и множество уровня, просчитанное для большего значения  $c = 1.67$  (желтое прозрачное)

параметров задачи длительность узкой шейки во времени и размеры  $t$ -сечений в районе шейки будут меняться.

## 1.4 Обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина

В работах [27, 28] в качестве иллюстрации к теоретическим результатам был взят пример следующей дифференциальной игры двух лиц

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} &= u, \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} &= v, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leq \rho, \quad |v| \leq \sigma. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  — положительные константы,  $x, y$  — положения объектов,  $u, v$  — управляющие воздействия первого и второго игроков. Под окончанием игры понимается совпадение геометрических координат  $x = y$ . Первый игрок минимизирует время поимки, второй препятствует этому.

Позже дифференциальные игры с такой или более общей линейной динамикой двух объектов и с условием окончания в терминах геометрических координат стали называть «контрольным примером Л.С.Понтрягина» (иногда «обобщенным контрольным примером» [18, 42]). Контрольный пример использовался во многих исследованиях [18, 42, 8, 6, 25, 41, 24] для проверки работоспособности теоретических методов. Имеются работы [17, 5], посвященные изучению конкретно этого примера.

Среди дифференциальных игр с динамикой контрольного примера самостоятельное значение имеют постановки, в которых момент окончания считается фиксированным. Первый игрок стремится привести вектор  $(x, y)$  в момент окончания на заданное терминальное множество, второй препятствует этому. Решение задач с фиксированным моментом окончания может быть использовано при исследовании игр с нефиксированным моментом.

В разделе рассматривается линейная дифференциальная игра вида

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = u, \quad (1.18)$$

$$y^{(s)} + b_{s-1}y^{(s-1)} + \dots + b_1\dot{y} + b_0y = v, \quad (1.19)$$

$$t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

обобщающая пример (1.17). Здесь  $a_i, b_j$  — константы,  $T$  — фиксированный момент окончания,  $u, v$  — управляющие воздействия первого и второго игроков, выбираемые из выпуклых компактов  $P$  и  $Q$ . Терминальное множество  $\widetilde{M}_c$  задается соотношением  $\widetilde{M}_c = \{(x, y) : |x - y| \leq c\}$ . Первый игрок стремится привести движение системы на терминальное множество  $\widetilde{M}_c$  в момент  $T$ , второй препятствует этому. Именно эту игру чаще всего называют «обобщенным контрольным примером Л.С.Понтрягина».

Заметим, что пример, изучавшийся в предыдущих трех параграфах, имеет динамику (1.10) вида (1.18), (1.19).

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned}
 z_1 &= x_1 - y_1, & z_{2k+1} &= y_1, \\
 z_2 &= x_2 - y_2, & z_{2k+2} &= y_2, \\
 z_3 &= \dot{x}_1, & z_{2k+3} &= \dot{y}_1, \\
 z_4 &= \dot{x}_2, & z_{2k+4} &= \dot{y}_2, \\
 z_5 &= \ddot{x}_1, & z_{2k+5} &= \ddot{y}_1, \\
 z_6 &= \ddot{x}_2, & z_{2k+6} &= \ddot{y}_2, \\
 & \dots & & \dots \\
 z_{2k-1} &= x_1^{(k-1)}, & z_{2(k+s)-1} &= y_1^{(s-1)}, \\
 z_{2k} &= x_2^{(k-1)}, & z_{2(k+s)} &= y_2^{(s-1)}.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Несложно проверить, что в новых переменных динамика игры запишется в стандартной форме (1.1). Ограничения на управления имеют прежний вид  $u \in P$ ,  $v \in Q$ . Терминальное множество записывается теперь через новые координаты в виде  $M_c = \{z : \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \leq c\}$ .

Следует отметить, что замена (1.20) имеет несколько другую структуру, чем замена (1.11), использованная при изучении примера (1.10). Однако в силу того, что целевыми компонентами фазового вектора (определяющими значение функции платы) в обоих случаях будут разностные геометрические координаты, то после замены (1.2) и в рассматриваемом примере эквивалентная игра будет также иметь матрицы  $D(t)$  и  $E(t)$  вида (1.13), (1.14), т.е.  $D(t) = \zeta(t) \cdot I_2$ ,  $E(t) = \eta(t) \cdot I_2$ . Пояснить это явление можно тем, что в системе (1.3) матрица  $D(t)$  (и функция  $\zeta(t)$ ) целиком определяется коэффициентами уравнения (1.18), матрица  $E(t)$  (и функция  $\eta(t)$ ) — коэффициентами уравнения (1.19). Стало быть, динамика первой и второй компонент эквивалентного фазового вектора  $\xi$  будет идентична, что и приводит к появлению матриц  $D(t)$  и  $E(t)$  указанного вида.

Отмеченный факт упрощает построение примеров с узкими шейками, поскольку вектограммы игроков вычисляются теперь как  $\mathcal{P}(t) = \zeta(t) \cdot P$  и  $\mathcal{Q}(t) = \eta(t) \cdot Q$ . Появление узких шеек обуславливается переходом преимущества от второго игрока к первому, поэтому нужно подобрать множества  $P$  и  $Q$ , а также функции  $\zeta(t)$  и  $\eta(t)$  такими, чтобы размеры множеств  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  менялись друг относительно друга во времени заданным образом.

### 1.4.1 Пример 1

Динамика игры описывается соотношениями

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\dot{x} &= u, \\ \ddot{y} + 0.2\dot{y} + y &= v, \\ x, y &\in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q.\end{aligned}$$

Первый игрок управляет материальной точкой, движущейся в плоскости. Второй управляемый объект — двумерный математический маятник. В обоих случаях присутствует трение, пропорциональное скорости. Ограничения на управления игроков выбраны в виде эллипсов

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{0.8^2} + \frac{u_2^2}{0.4^2} \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{1.5^2} + \frac{v_2^2}{1.05^2} \leq 1 \right\}.$$

Терминальное множество  $M$  после перехода к эквивалентным координатам является кругом радиуса  $c$  с центром в нуле.

На рис. 1.20а показаны развернутые в обратном времени вектограммы  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  первого и второго игроков. Поскольку динамика второго игрока описывает осциллирующую систему, то характер преимущества одного игрока над другим меняется во времени. В начале обратного времени второй игрок имеет полное преимущество над первым, но для достаточно больших моментов обратного времени  $\tau$  преимущество получает первый игрок. Увеличенный фрагмент трубок вектограмм приведен на рис. 1.20б.

На рис. 1.21 показан стабильный мост  $\mathbf{W}_c$  для  $c = 2.45098$ . Этот мост обрывается (конечен во времени). Перед обрывом ориентация вытянутости меняется. А именно, до последней «шейки» сечения моста вытянуты по вертикали, а после нее — по горизонтали. Изменение характера вытянутости происходит вследствие взаимодействия вектограмм  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  в районе этой шейки.

С увеличением значения  $c$  протяженность стабильного моста во времени резко возрастает. Стабильный мост для  $c = 2.45100$  показан на рис. 1.22. На рис. 1.23 приведен его увеличенный фрагмент в районе узкой шейки, возникающей при  $\tau = 11.95$ . Указанное значение параметра  $c$  можно считать критическим: при  $c < 2.45100$  мост обрывается, при  $c \geq 2.45100$  обрыва не происходит.

Для достаточно больших значений  $c$  структура мостов упрощается. Рис. 1.24 содержит вид моста для  $c = 3.87300$ .

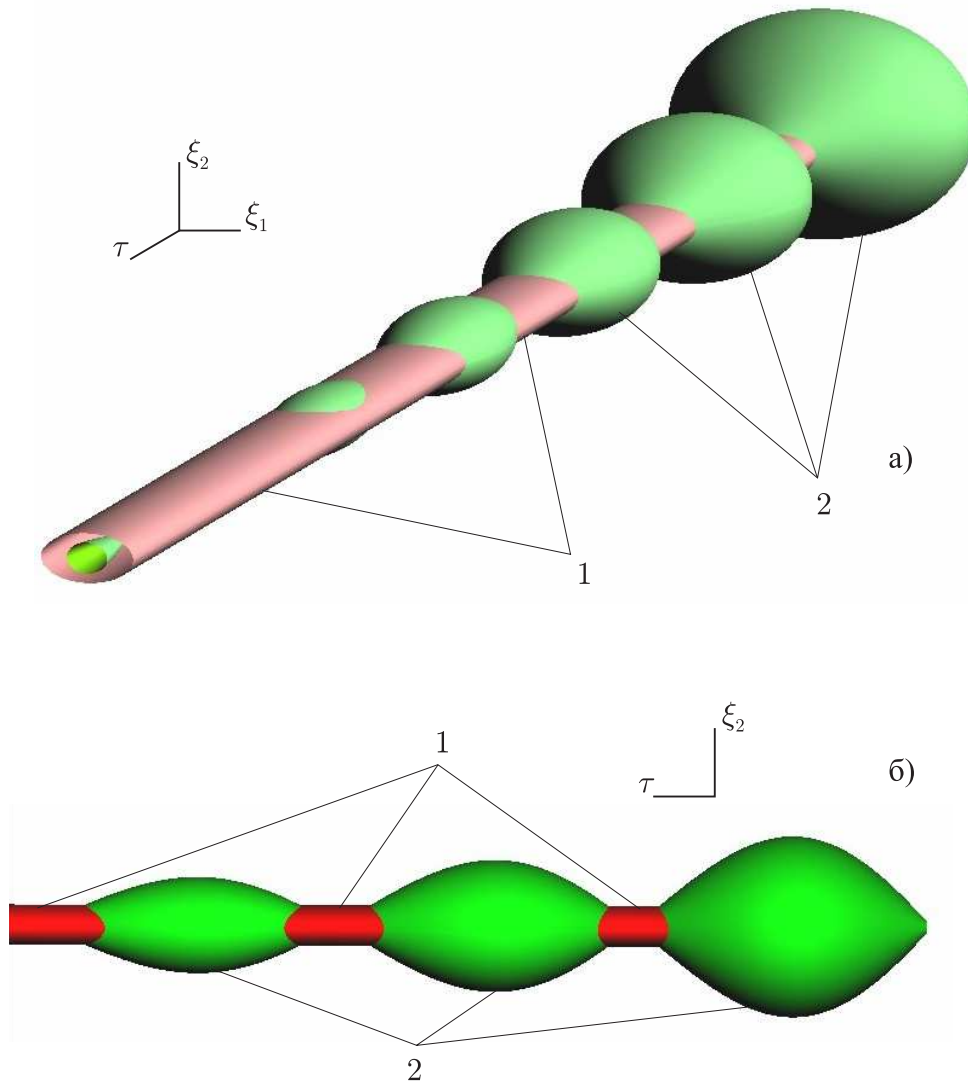


Рис. 1.20: Пример 1. Эллиптические вектограммы первого (1) и второго (2) игроков: а) общий вид; б) увеличенный фрагмент, вид сбоку

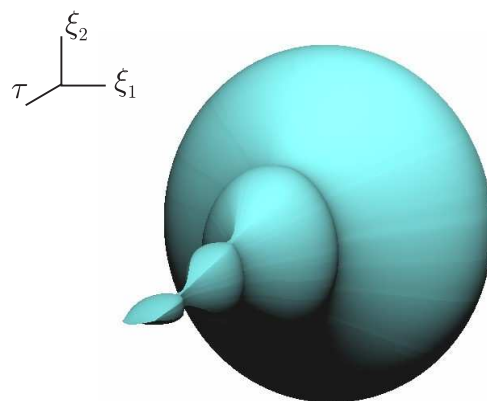


Рис. 1.21: Пример 1. Конечный во времени максимальный стабильный мост,  $c = 2.45098$

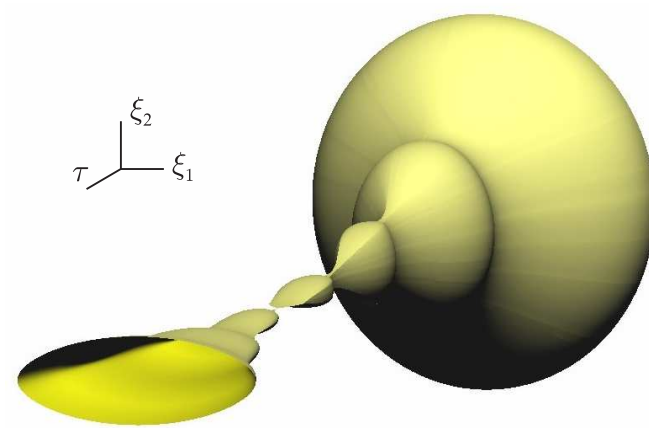


Рис. 1.22: Пример 1. Максимальный стабильный мост с узкой шейкой,  $c = 2.45100$

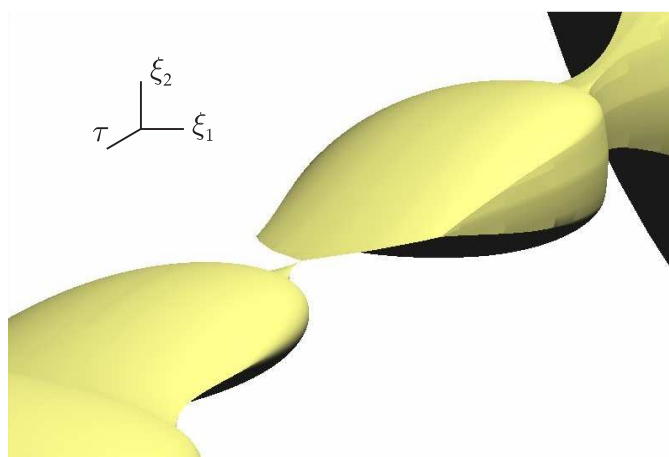


Рис. 1.23: Пример 1. Увеличенный фрагмент шейки,  $c = 2.45100$

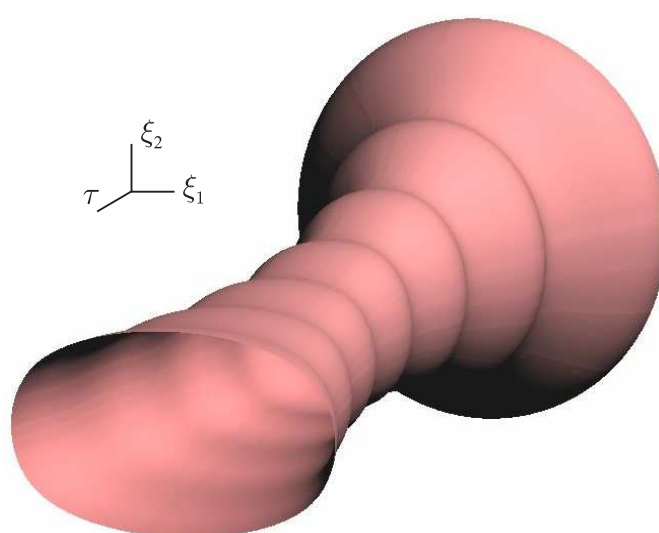


Рис. 1.24: Пример 1. Максимальный стабильный мост для значения параметра  $c$ , большего критического:  $c = 3.87300$

Счет примера производился на промежутке обратного времени  $\tau \in [0, 20]$ . Шаг по времени  $\Delta = 0.05$ . Круги — терминальные множества  $M$  — подменялись правильными 100-угольниками, эллипсы  $P$  и  $Q$  ограничений на управления игроков — многоугольниками с 100 вершинами.

### 1.4.2 Пример 2

Динамика игры имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 0.025 \dot{x} + 1.3 x &= u, \\ \ddot{y} + y &= v, \\ x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q.\end{aligned}$$

Ограничения на управления игроков выбраны в виде одинаковых эллипсов

$$P = Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{1.5^2} + \frac{v_2^2}{1.05^2} \leq 1 \right\}.$$

Терминальное множество  $M$  (в эквивалентных координатах) выбрано в виде круга радиуса  $c = 1.2$ .

Поскольку множества  $P$  и  $Q$  совпадают, то в каждый момент времени эллипсы  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  подобны:  $\mathcal{P}(t) = |\zeta(t)| \cdot P$ ,  $\mathcal{Q}(t) = |\eta(t)| \cdot P$ . (О подобии имеет смысл говорить, когда ни одно из множеств  $\mathcal{P}(t)$  или  $\mathcal{Q}(t)$  не обращается в точку.) Если есть преимущество первого игрока, т.е.  $|\zeta(t)| \geq |\eta(t)|$ , то процедура овыпукления при построении мостов не прорабатывает — в такие моменты времени функция  $\gamma(\cdot, t)$  получается выпуклой. Если же преимущество имеет второй игрок, т.е.  $|\zeta(t)| < |\eta(t)|$ , то овыпукление происходит.

На рис. 1.25 и 1.26 показаны трубки вектограмм. Рис. 1.26 отличается от рис. 1.25 тем, что трубка вектограмм второго игрока сделана прозрачной. На рис. 1.27 приведен общий вид просчитанного стабильного моста. На рис. 1.28 показан более крупно фрагмент первой шейки. Моменты наиболее узких частей шеек  $\tau_1 = 8.50$  и  $\tau_2 = 11.30$ .

Счет примера производился на промежутке обратного времени  $\tau \in [0, 16]$ . Шаг по времени  $\Delta = 0.05$ . В районе шеек шаг измельчался в 10 раз:  $\Delta = 0.005$ . Количество вершин аппроксимирующих многоугольников было таким же, что и для первого примера.



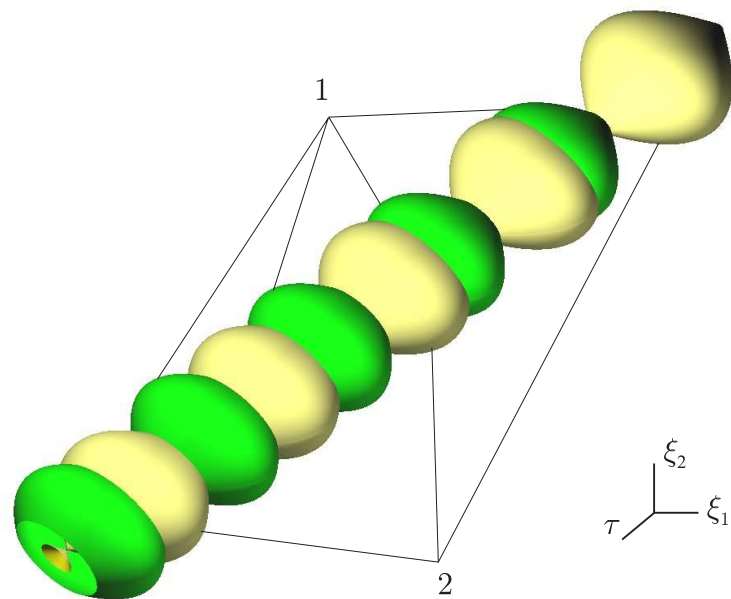


Рис. 1.25: Пример 2. Вектограммы игроков: 1 — первого, 2 — второго

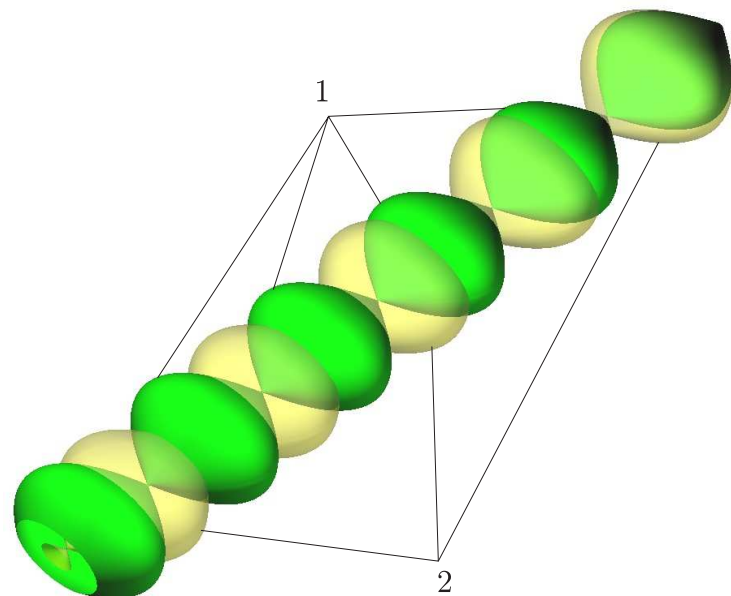


Рис. 1.26: Пример 2. Вектограммы игроков: 1 — первого, 2 — второго. Трубка вектограмм второго игрока сделана прозрачной

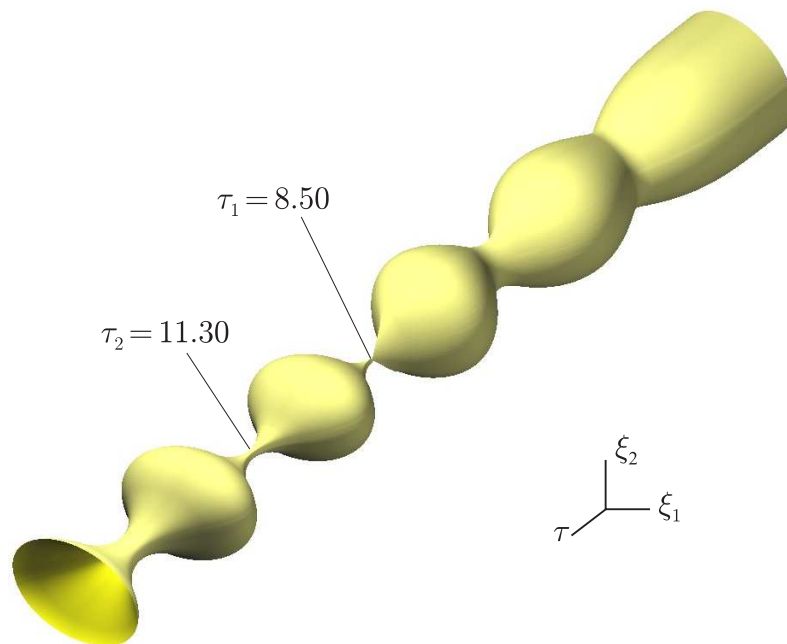


Рис. 1.27: Пример 2. Общий вид максимального стабильного моста с двумя узкими шейками

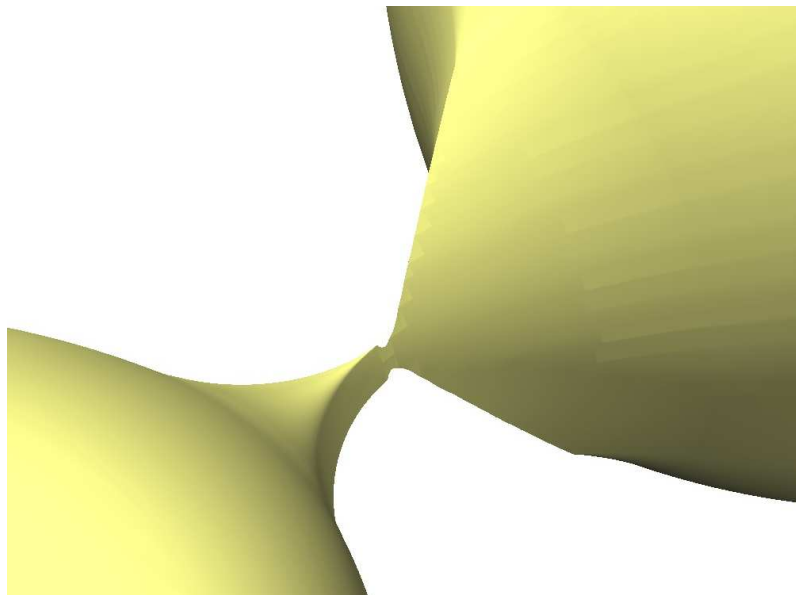


Рис. 1.28: Пример 2. Вид первой узкой шейки максимального стабильного моста

Отметим еще раз, что несмотря на подобие вектограмм игроков (множеств  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$ ) отсутствует подобие вектограмм и сечений  $W_c(t)$ . Это приводит к нарушению «однотипности» задачи в целом и, следовательно, к появлению узких шеек со сложной структурой.

### 1.4.3 Пример 3

Динамика игры описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 0.025 \dot{x} + 1.2 x &= u, \\ \ddot{y} + 0.01 \dot{y} + 0.85 y &= v, \\ x, y &\in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q. \end{aligned}$$

Ограничения на управления игроков взяты в виде эллипсов

$$P = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 : \frac{u_1^2}{2.0^2} + \frac{u_2^2}{1.3^2} \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 : \frac{v_1^2}{1.5^2} + \frac{v_2^2}{1.05^2} \leq 1 \right\}.$$

Терминальное множество  $M$  после перехода к эквивалентным координатам является кругом с центром в нуле радиуса  $c = 0.3970$ .

Вектограммы, возникающие в этом примере, приведены на рис. 1.29. Множество уровня  $W_c$  функции цены игры, соответствующее  $c = 0.397$ , показано на рис. 1.30а. Видны три узкие шейки, возникающие при значениях обратного времени  $\tau_1 = 6.05$ ,  $\tau_2 = 9.35$  и  $\tau_3 = 12.70$ . Крупный план

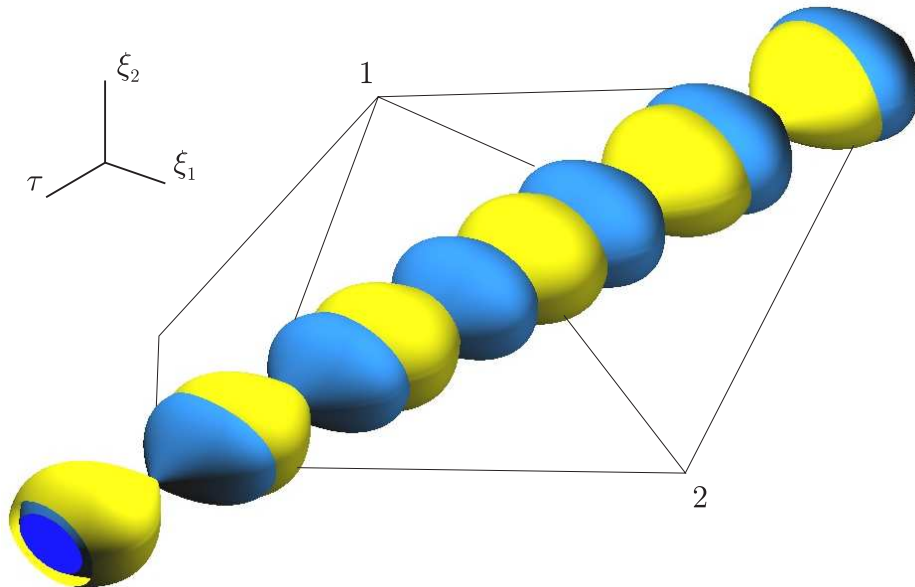


Рис. 1.29: Пример 3. Общий вид трубок вектограмм: 1 — вектограмма первого игрока (множество  $\mathcal{P}$ ), 2 — вектограмма второго игрока (множество  $\mathcal{Q}$ )

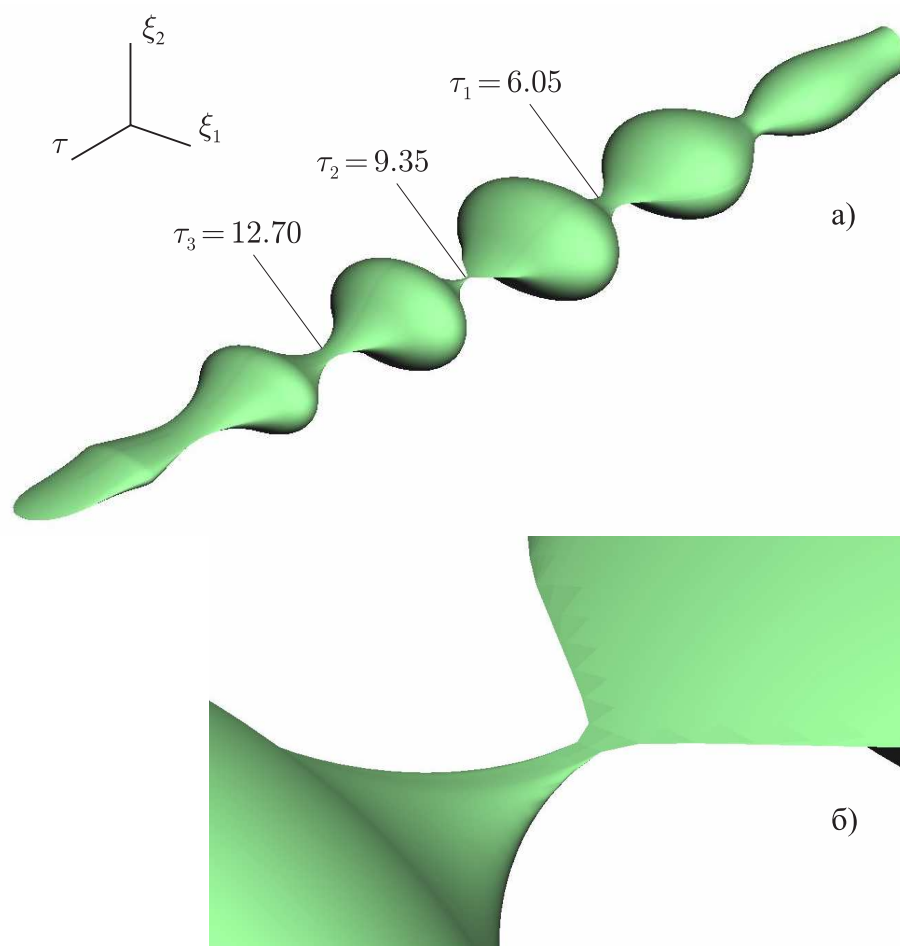


Рис. 1.30: Пример 3. а) Общий вид максимального стабильного моста с тремя узкими шейками,  $c = 0.397$ ; б) Крупный план наиболее узкой из трех имеющихся шеек (средней) при  $\tau = \tau_2 = 9.35$

наиболее узкой из них (средней) приведен на рис. 1.30б. Мост обрывается в момент  $\tau = 19.35$ .

Счет данного примера производился на промежутке обратного времени  $\tau \in [0, 20]$ . Шаг по времени  $\Delta = 0.05$ . Количество вершин аппроксимирующих многоугольников такое же, что и в первых двух примерах.

Рис. 1.31 показывает множество уровня с наложенными на него трубками вектограмм. Трубки вектограмм сделаны прозрачными. Синим цветом показана трубка  $\mathcal{P}$  вектограмм первого игрока, зеленым — трубка  $\mathcal{Q}$  вектограмм второго игрока. На увеличенном фрагменте в районе первой шейки видно, как со сменой преимущества в пользу того или другого игрока сечения  $\mathbf{W}_c(t)$  начинают увеличиваться или уменьшаться.

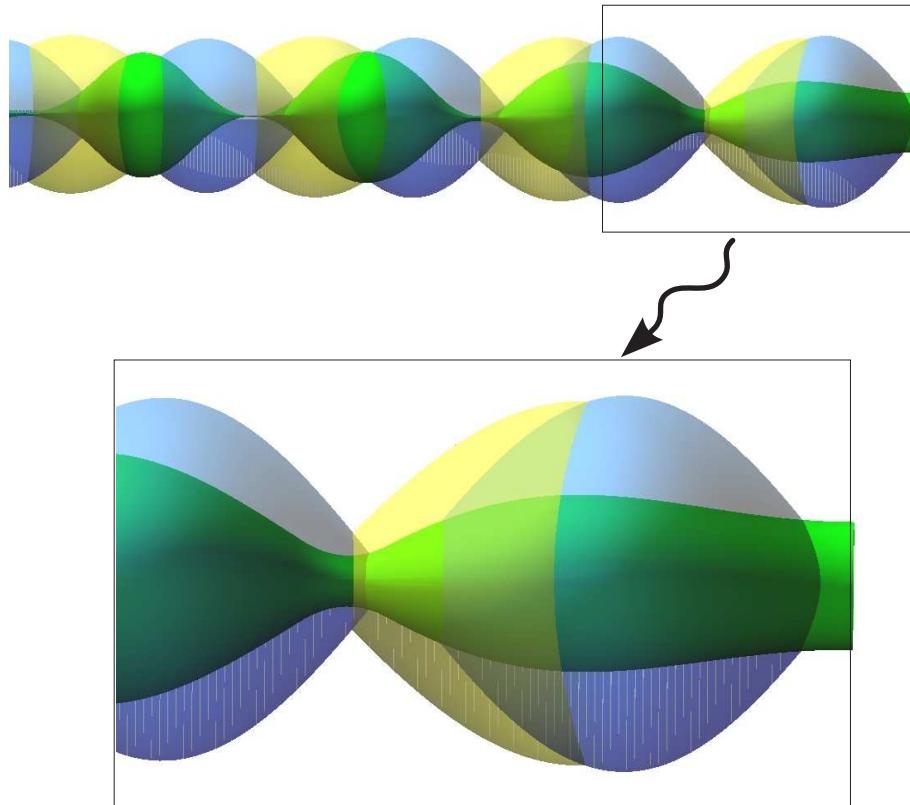


Рис. 1.31: Пример 3. Общий вид максимального стабильного моста с наложенными на него трубками вектограмм игроков: зеленая трубка — стабильный мост, синяя прозрачная трубка — вектограмма первого игрока (множество  $\mathcal{P}$ ), желтая прозрачная трубка — вектограмма второго игрока (множество  $\mathcal{Q}$ )

## Глава 2

### Уровневое выметание функции цены

Одной из основных теоретико-множественных операций, используемых при построении максимальных стабильных мостов в линейных дифференциальных играх, является геометрическая разность (разность Минковского) [40, 29]. *Геометрической разностью* множеств  $A$  и  $B$  называют совокупность элементов, «вдвигающих» множество  $B$  в множество  $A$  при помощи алгебраической суммы:

$$A * B = \{x : B + x \subseteq A\}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим примеры на плоскости. Пример на рис. 2.1а показывает геометрическую разность большого квадрата и маленького круга. В результате получаем квадрат со стороной, меньшей стороны исходного квадрата на диаметр круга. Пример на рис. 2.1б показывает геометрическую разность двух кругов. Результатом является круг с радиусом, равным разности радиусов исходных кругов.

Для геометрической разности выполняется следующее соотношение

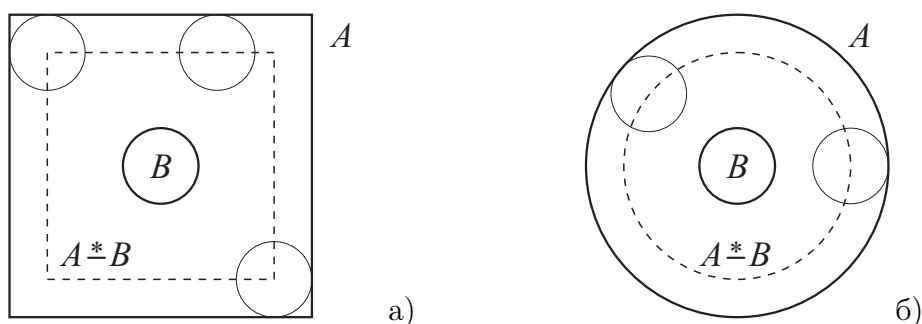


Рис. 2.1: Примеры вычисления геометрической разности: а) геометрическая разность квадрата и круга; б) геометрическая разность двух кругов. Геометрическая разность показана пунктирной линией. Тонкой линией показаны крайние положения множества-вычитаемого

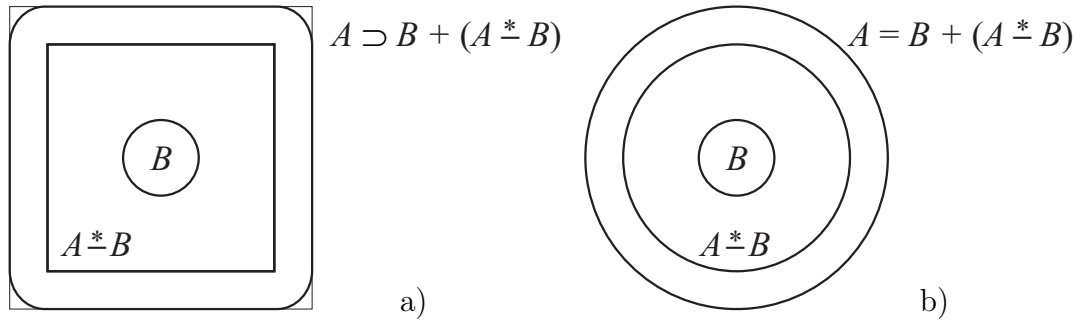


Рис. 2.2: Сумма геометрической разности и множества-вычитаемого для примеров на рис. 2.1

между уменьшаемым, вычитаемым и разностью:

$$B + (A * B) \subseteq A. \quad (2.2)$$

Т.е. после суммирования множества-вычитаемого с геометрической разностью получается, вообще говоря, лишь подмножество множества-уменьшаемого. В первом из приведенных примеров после обратного сложения получаем квадрат со скругленными углами (рис. 2.2а). В примере б) после суммирования получаем исходный круг (рис. 2.2б).

Если же множества  $A$  и  $B$  таковы, что в соотношении (2.2) имеет место равенство

$$B + (A * B) = A, \quad (2.3)$$

то говорят, что множество  $A$  *полностью выметается* множеством  $B$  (множество  $B$  *полностью выметает* множество  $A$ ). Понятие полного выметания введено в работе [8].

Эквивалентно полное выметание множества  $A$  множеством  $B$  можно определить как

$$\forall a \in A \exists x : a \in B + x \text{ и } B + x \subset A. \quad (2.4)$$

В данной главе устанавливается следующий факт. Оказывается, что если непрерывная квазивыпуклая функция платы  $\varphi(\cdot)$  игры (1.3) такова, что для любой пары констант  $c_1 < c_2$  множество уровня  $M_{c_1}$  полностью выметает множество уровня  $M_{c_2}$ , то таким же свойством обладают сечения множеств уровня функции цены:

$$\forall t \in [t_0, T] \forall c_1 < c_2 \left( W_{c_1}(t) + (W_{c_2}(t) * W_{c_1}(t)) = W_{c_2}(t) \right). \quad (2.5)$$

Ниже это свойство называется *свойством уровневого выметания* функции цены игры.

Наследование свойства уровня выметания является специфичным для игр с размерностью фазового вектора, равной 2. Это иллюстрируется соответствующими контрпримерами.

Среди утверждений, рассматриваемых в этой главе, основными являются леммы 2.4.2, 2.5.2, 2.5.3 и итоговая теорема. Поскольку многие свойства положительно-однородных функций в  $\mathbb{R}^2$  аналогичны свойствам функций в  $\mathbb{R}$ , то из соображений наглядности утверждения сначала формулируются и доказываются для функций, заданных в  $\mathbb{R}$ , и только потом — для положительно-однородных функций в  $\mathbb{R}^2$ . Для функций в  $\mathbb{R}$  аналогом леммы 2.4.2 является лемма 2.4.1.

При рассмотрении функций, заданных в  $\mathbb{R}$ , часто будут использоваться бесконечные промежутки. Традиционная запись  $[a, b]$  может при этом обозначать бесконечные лучи или даже всю прямую, если один из объектов  $a, b$  или оба совпадают с  $\pm\infty$ .

Все функции, рассматриваемые в данной главе, предполагаются непрерывными.

## 2.1 Альтернированные суммы

Пусть игра (1.3) имеет частный вид

$$\dot{x} = u + v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad \varphi(\cdot),$$

где терминальная функция платы  $\varphi$  непрерывна и квазивыпукла. Тогда, зафиксировав значение платы  $c$  и множество уровня  $M_c$  функции платы, можно построить соответствующее множество уровня функции цены. Его сечение в момент  $t \in [t_0, T]$  будет выражаться формулой

$$W_c(t) = (M_c + (T - t)(-P)) \ast (T - t)Q. \quad (2.6)$$

Эта формула верна для игр с простыми движениями и с фазовым вектором любой размерности.

Рассмотрим теперь общий случай игры (1.3). Как описывалось в разделе 1.2, для приближенного построения множества уровня функции цены можно использовать рекуррентную процедуру, основанную на формуле (1.5). Пусть  $t^*$  — некоторый момент из промежутка  $[t_0, T]$ . Если записать эту формулу через операции над множествами, подобно формуле (2.6), получим выражение

$$\mathbf{W}_c(t_i) = (\mathbf{W}_c(t_{i+1}) + \Delta P(t_i)) \ast \Delta Q(t_i).$$



Здесь  $t_i$  — моменты временного разбиения отрезка  $[t^*, T]$ . Так можно сделать, поскольку после дискретизации на каждом промежутке времени  $[t_i, t_{i+1}]$  имеем игру с простыми движениями.

Если рекуррентно развернуть последнее выражение в явном виде, получим соотношение

$$\mathbf{W}(t^*) = \left( \dots \left( \left( \left( (M_c + \Delta \mathcal{P}(t_{N-1})) * \Delta \mathcal{Q}(t_{N-1}) \right) + \Delta \mathcal{P}(t_{N-2}) \right) * \Delta \mathcal{Q}(t_{N-2}) \right) \dots + \Delta \mathcal{P}(t^*) \right) * \Delta \mathcal{Q}(t^*), \quad (2.7)$$

которое называется альтернированной суммой последовательностей  $\{\mathcal{P}(t_i)\}$  и  $\{\mathcal{Q}(t_i)\}$  с начальным значением  $M_c$  [30].

Таким образом, для того, чтобы проверить наличие уровневого выметания для сечений  $W_{c_1}(t^*)$  и  $W_{c_2}(t^*)$  множеств уровня в некоторый момент  $t^*$ , в предположении о полном выметании множества  $M_{c_2}$  множеством  $M_{c_1}$ , следует проверить сохранение этого свойства при операциях алгебраической суммы, геометрической разности и при предельном переходе в альтернированной сумме.

## 2.2 Связь операций над множествами и опорными функциями

Пусть  $A$  — выпуклое замкнутое множество в пространстве  $\mathbb{R}^n$  и  $\rho_A(\cdot)$  — его опорная функция:

$$\rho_A(l) : l \in \mathbb{R}^n \mapsto \sup_{a \in A} \langle l, a \rangle \in \mathbb{R}_\infty.$$

Уравнение  $\rho_A(l) = \langle l, x \rangle$  с переменной  $x$  задает опорную гиперплоскость к множеству  $A$ , перпендикулярную вектору  $l$  (рис. 2.3а). Соответственно, неравенство  $\rho_A(l) \leq \langle l, x \rangle$  с переменной  $x$  задает опорное полупространство множества  $A$ , перпендикулярное вектору  $l$  (рис. 2.3б).

В случае, когда множество  $A$  ограничено, его опорная функция является собственной, т.е. принимает только конечные значения. Напомним также, что если множество  $A$  является многогранником, то его опорная функция кусочно-линейна с участками линейности в конусах нормалей в вершинах многогранника  $A$  (рис. 2.4).

Установим связь нужных нам операций над множествами (алгебраическая сумма, геометрическая разность) с опорными функциями.

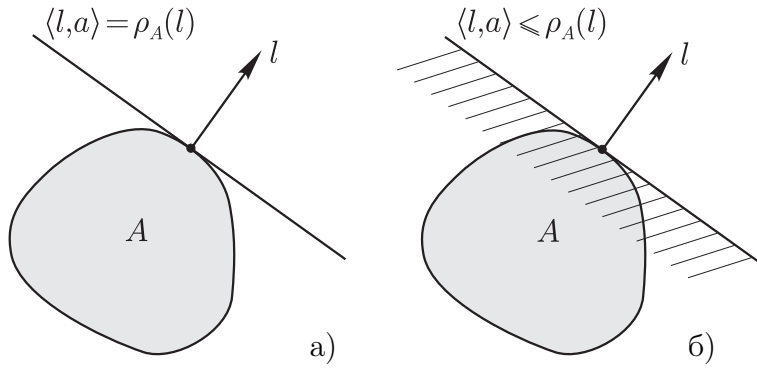


Рис. 2.3: Иллюстрация к определению опорной функции: а) опорная гиперплоскость; б) опорное полу-пространство

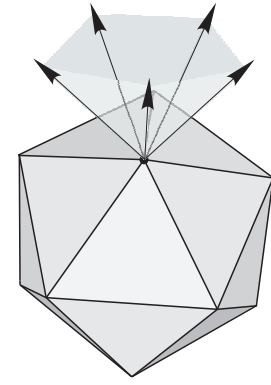


Рис. 2.4: Конус линейности опорной функции

Вложение  $B \subseteq A$  означает, что  $\rho_B \leq \rho_A$ .

Пусть имеются два выпуклых ограниченных множества  $A$  и  $B$ . Их алгебраическая сумма определяется как

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Опорная функция алгебраической суммы равна

$$\rho_{A+B}(l) = \rho_A(l) + \rho_B(l).$$

Рассмотрим геометрическую разность  $A \overset{*}{-} B$ . Ее опорная функция записывается [42, 62] в виде

$$\rho_{A \overset{*}{-} B}(l) = \text{conv}\{\rho_A(l) - \rho_B(l)\}.$$

Здесь  $\text{conv } f$  — операция взятия выпуклой оболочки функции  $f$ . При этом, если  $A \overset{*}{-} B \neq \emptyset$ , то  $\rho_{A \overset{*}{-} B}(\cdot)$  — собственная функция. Если же  $A \overset{*}{-} B = \emptyset$ , то  $\rho_{A \overset{*}{-} B}(l) \equiv -\infty$ .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением выпуклых замкнутых ограниченных множеств.

Как было отмечено ранее, для двух произвольных множеств  $A$  и  $B$  и их геометрической разности выполняется соотношение (2.2). Соотношение (2.2) можно переформулировать на языке опорных функций как

$$\rho_B + \text{conv}\{\rho_A - \rho_B\} \leq \rho_A.$$

Соотношение (2.3) будет иметь вид

$$\rho_B + \text{conv}\{\rho_A - \rho_B\} = \rho_A.$$

Иначе говоря, множество  $A$  полностью выметается множеством  $B$  тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{conv}\{\rho_A - \rho_B\} = \rho_A - \rho_B. \quad (2.8)$$

### 2.3 Локальная выпуклость

В этом разделе сформулируем несколько простых свойств, связанных с выпуклыми функциями.

**Предложение 2.3.1.** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  определена на некотором промежутке  $[a, b]$  (возможно, бесконечном). Пусть задан отрезок  $I = [\alpha, \beta]$ , вложенный в  $[a, b]$ . Тогда выпуклая оболочка функции  $f$ , взятая на всей области определения и суженная на отрезок  $I$ , не превосходит выпуклой оболочки сужения функции  $f$  на отрезок  $I$ :  $(\operatorname{conv} f)|_{[\alpha, \beta]} \leq \operatorname{conv}|_{[\alpha, \beta]} f$ .

**Определение 2.3.1.** Назовем функцию  $f$  локально выпуклой в точке  $x \in \operatorname{Dom} f$ , если найдется число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $f$  выпукла на множестве  $O_\varepsilon(x_0) \cap \operatorname{Dom} f$ , где  $\operatorname{Dom} f$  — область определения функции  $f$ , а  $O_\varepsilon(x_0)$  —  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$ .

**Определение 2.3.2.** Функцию  $f$  назовем локально выпуклой, если она локально выпукла в любой точке  $x \in \operatorname{Dom} f$ .

**Лемма 2.3.1 (критерий выпуклости).** Пусть функция  $f$  определена на промежутке  $[a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ). Функция  $f$  является выпуклой тогда и только тогда, когда она локально выпукла.

Для доказательства сформулированного критерия понадобится вспомогательная

**Лемма 2.3.2 (о выпуклости на объединении).** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла на промежутках  $[a, b]$  и  $[c, d]$  (конечных или бесконечных). Предположим, что промежутки пересекаются, причем внутренность пересечения непуста. Тогда функция  $f$  является выпуклой на объединении  $[a, b] \cup [c, d]$  этих промежутков.

*Доказательство.* Если  $[a, b] \subset [c, d]$  или  $[c, d] \subset [a, b]$ , то утверждение очевидно. Пусть, без ограничения общности,  $a < c < b < d$  (рис. 2.5).

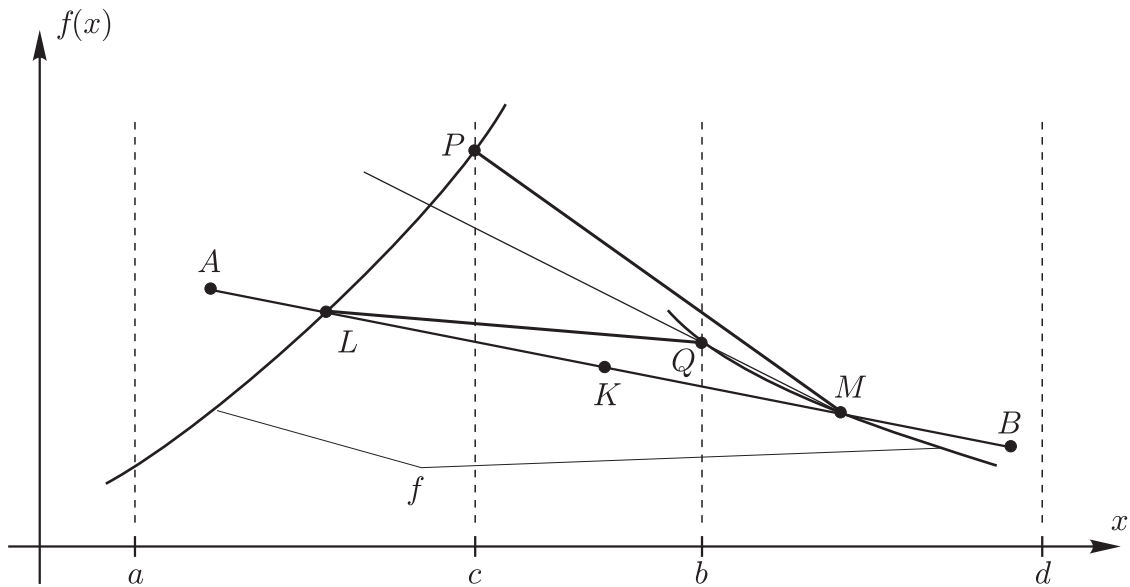


Рис. 2.5: Иллюстрация к доказательству леммы 2.3.2

Докажем выпуклость функции  $f$  на промежутке  $[a, d]$ . Предположим противное: существуют точки  $A$  и  $B$  в надграфике  $f$  такие, что отрезок  $[AB]$ , их соединяющий, не принадлежит целиком надграфу. Такое возможно разве лишь, если абсцисса точки  $A$  находится слева от  $c$ , а абсцисса точки  $B$  — справа от  $b$ . Возьмем произвольную точку  $K$  на  $[AB]$ , которая не принадлежит надграфу. Двигаясь от нее по  $[AB]$  влево и вправо, найдем ближайшие к ней точки  $L$  и  $M$ , лежащие на графике  $f$ . Очевидно, что абсцисса точки  $L$  расположена слева от  $c$ , а абсцисса точки  $M$  — справа от  $b$ .

Обозначим через  $P$  и  $Q$  точки на графике  $f$ , имеющие абсциссы  $c$  и  $b$  соответственно.

В силу выпуклости функции  $f$  на интервале  $[c, d]$  отрезок  $[PM]$  лежит в надграфике  $f$ . Точка  $Q$  лежит на графике, т.е. не выше отрезка  $[PM]$ . При этом точка  $Q$  лежит выше отрезка  $[LM]$  по построению этого отрезка.

Проведем отрезок  $[LQ]$ . Точка  $P$  лежит выше этого отрезка, так как она лежит не ниже луча  $[MQ)$ , а отрезок  $[LQ]$  — ниже этого луча.

Однако в силу выпуклости функции  $f$  на промежутке  $[a, b]$  точка  $P$  должна лежать не ниже отрезка  $[LQ]$ . Получили противоречие.  $\square$

Теперь докажем эквивалентность локальной и глобальной выпуклостей.

*Доказательство (критерия выпуклости).* Очевидно, что локальная выпуклость следует из глобальной в силу определения выпуклости. Докажем

обратное следование.

Пусть функция  $f$  локально выпукла. Зафиксируем точку  $x_0 \in (a, b)$  и выберем  $\varepsilon > 0$  такое, что  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b]$  и  $f$  выпукла на промежутке  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ .

Выберем максимальное число  $x_1 \in (x_0, b]$  такое, что функция  $f$  выпукла на интервале  $[x_0 - \varepsilon, x_1]$ . Если  $b = +\infty$ , то и  $x_1$  может быть равно  $+\infty$ .

Покажем, что  $x_1 = b$ . Пусть, от противного,  $x_1 \in (x_0, b) \subset [a, b]$ . Тогда в силу локальной выпуклости  $f$  найдется число  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что

$$[x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset (x_0 - \varepsilon, b]$$

и  $f$  выпукла на  $[x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1]$ . Применяя предыдущую лемму 2.3.2 к промежуткам  $(x_0 - \varepsilon, x_1)$  и  $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_1)$ , получаем, что  $f$  выпукла на их объединении, т.е. на промежутке  $(x_0 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon_1)$ , что противоречит построению промежутка  $[x_0 - \varepsilon, x_1]$ .

Аналогично показывается, что  $f$  выпукла на промежутке  $[a, x_0 + \varepsilon)$ .

Доказательство глобальной выпуклости функции  $f$  на  $[a, b]$  завершается через «сращивание» промежутков  $[a, x_0 + \varepsilon]$  и  $[x_0 - \varepsilon, b]$  также с использованием леммы 2.3.2.  $\square$

Лемма 2.3.1 верна и многомерном случае, когда  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Предложение 2.3.2.** Пусть функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определена на выпуклом множестве  $D$  (ограниченном или неограниченном). Функция  $f$  выпукла тогда и только тогда, когда она локально выпукла на  $D$ .

Действительно, если где-то нарушается выпуклость функции  $f$ , то найдется отрезок  $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}^n$ , на котором  $f$  невыпукла. Переходя к сужению функции на этот отрезок, получим одномерный случай, рассмотренный в лемме.

**Лемма 2.3.3 (о сопряжении).** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла на промежутке  $[a, b]$  (конечном или бесконечном). Зададим промежуток  $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$  и функцию  $f$  подменим новой функцией  $\tilde{f}$  так, что  $\tilde{f}$  непрерывна,  $\tilde{f}(x) = f(x)$  при  $x \in [a, b] \setminus [\alpha, \beta]$ ,  $\tilde{f} \geq f$  на  $[\alpha, \beta]$ ,  $\tilde{f}$  выпукла на  $[\alpha, \beta]$ . Тогда функция  $\tilde{f}$  выпукла на всем промежутке  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Воспользуемся доказанным выше критерием. Локальная выпуклость функции  $\tilde{f}$  очевидна на промежутках  $[a, \alpha]$  и  $[\beta, b]$  (там

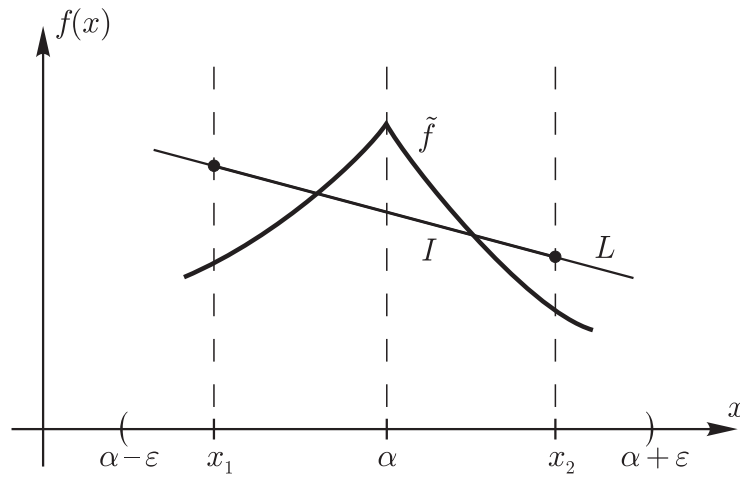


Рис. 2.6: Иллюстрация к лемме 2.3.3

она совпадает с выпуклой функцией  $f$ ) и на промежутке  $[\alpha, \beta]$  (там она выпукла по построению). Таким образом, для доказательства леммы нужно показать локальную выпуклость функции  $\tilde{f}$  в точке  $\alpha$ , если она принадлежит интервалу  $(a, b)$ , и, аналогично, локальную выпуклость в точке  $\beta$ .

Докажем локальную выпуклость в точке  $\alpha$  (для точки  $\beta$  доказательство аналогично).

Предположим противное. Пусть  $\tilde{f}$  не является локально выпуклой в точке  $\alpha$ . Иначе говоря, для любой окрестности точки  $\alpha$  функция  $\tilde{f}$  невыпукла в этой окрестности:  $\forall \varepsilon > 0$  функция  $\tilde{f}$  невыпукла на  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \cap [a, \beta]$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  такое, что  $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset (a, \beta)$ . При этом найдутся две точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  из надграфика  $\tilde{f}$  на интервале  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  (т.е.  $y_1 \geq \tilde{f}(x_1)$  и  $y_2 \geq \tilde{f}(x_2)$ ) такие, что отрезок  $I = [(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$  не лежит целиком в надграфике  $\text{epi } \tilde{f}$ . Обозначим линейную функцию, график которой содержит этот отрезок, через  $L(x)$  (см. рис. 2.6).

Имеем  $L(\alpha) < \tilde{f}(\alpha)$ . Действительно, если бы  $L(\alpha) \geq \tilde{f}(\alpha)$ , то отрезок  $I$  целиком содержался бы в  $\text{epi } \tilde{f}$ . Часть  $[(x_1, y_1), (\alpha, L(\alpha))]$  лежала бы в  $\text{epi } \tilde{f}$  в силу выпуклости  $\tilde{f}$  на  $[a, \alpha]$  — там  $\tilde{f}$  совпадает с  $f$ , которая выпукла; а часть  $[(\alpha, L(\alpha)), (x_2, y_2)]$  лежала бы в  $\text{epi } \tilde{f}$  в силу выпуклости  $\tilde{f}$  на  $[\alpha, \beta]$ .

Итак, получаем конфигурацию, изображенную на рис. 2.6. Поскольку  $y_1 \geq \tilde{f}(x_1) = f(x_1)$ , а  $y_2 \geq \tilde{f}(x_2) > f(x_2)$ , находим, что точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  лежат в надграфике  $f$ . Стало быть, весь отрезок  $I$  лежит в надграфике  $f$ . Поэтому  $f(\alpha) \leq L(\alpha) < \tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$ . Противоречие. Стало быть, исходное предположение о локальной невыпуклости  $\tilde{f}$  в точке  $\alpha$  неверно.  $\square$

**Лемма 2.3.4 (о локализации овыпукления).** Пусть  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ . Если величина  $a$  — конечное число, предположим, что  $f(a) = (\text{conv } f)(a)$ ; аналогично предположим, что  $f(b) = (\text{conv } f)(b)$ . Тогда  $\text{conv}|_{[a,b]} f = (\text{conv } f)|_{[a,b]}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $f_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}|_{[a,b]} f$ ,  $f_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv } f$ .

В силу предложения 2.3.1 на  $[a, b]$  справедливо неравенство  $f_1 \geq f_2$ .

Определим функцию  $\tilde{f}$  совпадающей с  $f_1$  на  $[a, b]$  и с  $f_2$  на  $\text{Dom } f \setminus [a, b]$ . Эта функция будет выпуклой по предыдущей лемме. Кроме того, она подпират  $f$  и не меньше  $\text{conv } f$ . Поэтому  $\tilde{f} = \text{conv } f$ .  $\square$

**Лемма 2.3.5 (о локализации области овыпукления положительно-однородной функции).** Пусть  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  — положительно-однородная функция такая, что  $\text{conv } f$  — собственная функция. Пусть  $C$  — выпуклый конус с вершиной в нуле и  $f = \text{conv } f$  на  $\partial C$ . Тогда  $\text{conv}|_C f = (\text{conv } f)|_C$ .

*Доказательство леммы* аналогично доказательству случая на прямой.

Лемму 2.3.4 можно расширить на пространство любой размерности для любой функции (не обязательно положительно-однородной) и для любой выпуклой области (не обязательно конуса с вершиной в нуле).

**Предложение 2.3.3.** Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{Dom } f$  — выпуклое множество,  $D \subset \text{Dom } f$  — выпуклое замкнутое подмножество,  $f = \text{conv } f$  на  $\partial D$ . Тогда  $\text{conv}|_D f = (\text{conv } f)|_D$ .

## 2.4 Разность выпуклых функций

**Лемма 2.4.1.** Пусть функции  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны и определены на промежутках  $I_f = \text{Dom } f \subset I_g = \text{Dom } g$  (конечных или бесконечных). Предположим, что  $\text{conv } f$  и  $\text{conv } g$  — собственные функции и функция  $h = f - g$  выпукла на  $I_f$ . Тогда разность  $\text{conv}|_{I_f} f - \text{conv}|_{I_g} g$  выпукла на  $I_f$ .

*Доказательство.*

**А.** Обозначим  $\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \text{conv}|_{I_g} g$ ,  $S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in I_g : \tilde{g}(x) = g(x)\}$ . В силу непрерывности функций  $\tilde{g}$  и  $g$  множество  $S$  замкнуто, стало быть,  $\hat{S} = I_g \setminus S$  открыто и представляется в виде не более чем счетного дизъюнктного

объединения интервалов (среди них может быть не более двух бесконечных):  $\widehat{S} = \bigcup \{(\alpha_i, \beta_i) : i = \overline{1, N}\}$ , где  $N \leq \infty$ ,  $\forall i - \infty \leq \alpha_i < \beta_i \leq +\infty$ ,  $(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset$  для  $i \neq j$ .

Видно, что для любого  $i$

- 1)  $\text{conv}|_{[\alpha_i, \beta_i]}(g|_{[\alpha_i, \beta_i]}) = (\text{conv } g)|_{[\alpha_i, \beta_i]}$  (по лемме 2.3.4);
- 2)  $(\text{conv } g)|_{[\alpha_i, \beta_i]}$  — линейная функция.

Рассмотрим процесс построения выпуклой оболочки функции  $g$  как пошаговый:  $g = g_0 \rightsquigarrow g_1 \rightsquigarrow g_2 \rightsquigarrow \dots$ . Очередная функция  $g_i$  получается из  $g_{i-1}$  заменой последней на отрезке  $[\alpha_i, \beta_i]$  линейной функцией:

- 1)  $l_i \stackrel{\text{def}}{=} (\text{conv } g)|_{[\alpha_i, \beta_i]}$ ;
- 2)  $l_i \leq g_{i-1}$  на  $[\alpha_i, \beta_i]$ ;
- 3)  $l_i(\alpha_i) = g_{i-1}(\alpha_i)$ ,  $l_i(\beta_i) = g_{i-1}(\beta_i)$ .

Параллельно будем осуществлять процесс подправки функции  $f$ :

$f = f_0 \rightsquigarrow f_1 \rightsquigarrow f_2 \rightsquigarrow \dots$  так, что

- 1) если  $(\alpha_i, \beta_i) \cap I_f = \emptyset$ , то  $f_i = f_{i-1}$ ;
- 2) если  $(\alpha_i, \beta_i) \cap I_f \neq \emptyset$ , то функция  $f_{i-1}$  подправляется на промежутке  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_i, \beta_i] \cap I_f$  следующим образом:

$$f_i|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} = \text{conv}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]}(f_{i-1}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]}), \quad f_i|_{I_f \setminus [\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} = f_{i-1}|_{I_f \setminus [\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]}.$$

Т.е. функция  $f_i$  получается из функции  $f_{i-1}$  вы выпуклением последней на общей части промежутков  $[\alpha_i, \beta_i]$  и  $I_f$  (если таковая существует).

**В.** Обозначим  $h_i \stackrel{\text{def}}{=} f_i - g_i$ . Для любого числа  $i$  функция  $h_i$  выпукла. Докажем это по индукции.

База индукции: Имеем  $h_0 = f_0 - g_0 = f - g$ , а функция  $f - g$  выпукла.

Шаг индукции: Пусть  $h_{i-1}$  выпукла. Докажем, что  $h_i$  тоже будет выпуклой. Возможны три случая.

Случай а:  $(\alpha_i, \beta_i) \cap I_f = \emptyset$ . Тогда  $f_i = f_{i-1}$  и  $g_i|_{I_f} = g_{i-1}|_{I_f}$ . Следовательно,  $h_i|_{I_f} = h_{i-1}|_{I_f}$  выпукла.

Случай б:  $I_f \subset [\alpha_i, \beta_i]$ . Тогда  $f_i = \text{conv}|_{I_f} f_{i-1}$  выпукла,  $g_i \equiv l_i$  на  $I_f$  и поэтому линейна. Следовательно,  $h_i = f_i - g_i$  выпукла. Более того, в этом случае  $\forall j > i$   $h_j = h_i = f_i - g_i = \text{conv}|_{I_f} f - \left(\text{conv}|_{I_f} g\right)|_{I_f}$ . Стало быть, с этого номера  $i$  последовательность  $\{f_j\}$  стабилизируется. Также



стабилизируется  $\{g_j|_{I_f}\}: \forall j > i \quad g_j|_{I_f} = l_i|_{I_f}$ . Следовательно, существует поточечный предел  $\lim h_j = \tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{g} = \lim f_j - \lim g_j = f_i - l_i$ , являющийся выпуклой функцией.

Случай в:  $(\alpha_i, \beta_i) \cap I_f \neq \emptyset, I_f \not\subset [\alpha_i, \beta_i]$ . Обозначим, как было указано выше,  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha_i, \beta_i] \cap I_f$ . Заметим, что хотя бы одна из точек  $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$  лежит внутри  $I_f$ .

Выполняется неравенство  $g_i|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} \leq g_{i-1}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]}$ . При этом  $g_i$  линейна на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ . Стало быть, на отрезке  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$  имеем

$$f_{i-1} - g_i \geq f_{i-1} - g_{i-1} = h_{i-1}.$$

Поэтому

$$f_{i-1} \geq g_i + h_{i-1}.$$

Здесь  $g_i$  линейна,  $h_{i-1}$  выпукла. Следовательно, сумма  $g_i + h_{i-1}$  выпукла на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ . Поскольку отмеченная сумма, являясь выпуклой функцией, подпирает функцию  $f_{i-1}$ , то эта же сумма подпирает и выпуклую оболочку  $f_{i-1}$ , т.е. подпирает и функцию  $f_i$ :  $f_i = \text{conv}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} f_{i-1} \geq g_i + h_{i-1}$  на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ . Преобразуя последнее неравенство, получаем  $f_i - g_i \geq h_{i-1}$ , т.е.  $h_i \geq h_{i-1}$  на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ .

Функция  $f_i|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} = \text{conv}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} f_{i-1}$  выпукла на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ . Следовательно,  $h_i = f_i - g_i$  выпукла на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$  как разность выпуклой и линейной функций.

Итак, о непрерывной функции  $h_i$  мы имеем следующие сведения:

- 1)  $h_i \geq h_{i-1}$  на  $I_f$ , а на  $I_f \setminus [\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$  функции  $h_i$  и  $h_{i-1}$  совпадают;
- 2)  $h_i$  является локально выпуклой на  $[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$  и на  $I_f \setminus [\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]$ .

Выпуклость функции  $h_i$  следует из леммы 2.3.3.

Таким образом, доказан шаг индукции.

**С.** Воспользуемся выпуклостью функций  $h_i$  на  $I_f$ . Верны следующие поточечные пределы:

$$f_i \searrow \tilde{f}, \quad g_i \searrow \tilde{g} = \text{conv}|_{I_f} g, \quad h_i \nearrow \tilde{h}.$$

(Здесь  $\tilde{f}$  — некоторая функция, про которую будет ниже доказано, что она совпадает с выпуклой оболочкой  $f$ .)

Имеем  $\forall x \in I_f \forall i \in \mathbb{N} \quad h_i(x) \leq \tilde{h}(x), \quad h_i(x) \rightarrow \tilde{h}(x)$ . Отсюда получается, что  $\tilde{h}(x) = \sup h_i(x)$ , т.е.  $\tilde{h} = \sup h_i$ . Следовательно,  $\tilde{h}$  выпукла как верхняя огибающая семейства выпуклых функций.

Кроме того, из определения функций  $\tilde{f}$  и  $\tilde{g}$  как поточечных пределов функций  $f$  и  $g$ , соответственно, вытекает, что  $\tilde{h} = \tilde{f} - \tilde{g}$ . Поэтому функция  $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$  выпукла как сумма выпуклых функций.

Приведенные рассуждения верны, если в процессе подправки функций не имеет места случай б. Если же он все-таки встречается, то выпуклость  $\tilde{h}$  обоснована непосредственно в доказательстве индукции.

Докажем, что  $\tilde{f} = \operatorname{conv}|_{I_f} f$  (это нужно сделать, если в процессе подправки функций  $f$  и  $g$  не встретился случай б индукции).

Имеем  $\tilde{f} = f \geq \operatorname{conv} f$  на  $S \cap I_f$ . Здесь  $S$ , как вводилось в начале доказательства — множество, на котором функция  $g$  совпадает со своей выпуклой оболочкой. (Равенство верно в силу построения функций  $f_i$ : они отличаются от  $f$  только там, где  $g_i$  отличаются от  $g$ ).

Поскольку для любого  $x \in I_f \setminus S$  найдется номер  $i \in \mathbb{N}$  такой, что  $x \in (\alpha_i, \beta_i)$ , то для этого  $i$

$$\tilde{f}(x) = f_i(x) = \operatorname{conv}|_{[\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i]} f_{i-1} \geq (\operatorname{conv} f)(x).$$

При этом очевидно, что  $f_i(x) \leq f(x)$ .

Из определения  $\tilde{f}$  и предыдущих двух абзацев следует, что верно неравенство  $f \geq \tilde{f} \geq \operatorname{conv} f$ . Т.е.  $\tilde{f}$  — выпуклая функция, подпирающая  $f$  и не меньшая, чем  $\operatorname{conv} f$ . Стало быть,  $\tilde{f}$  совпадает с функцией  $\operatorname{conv} f$ .

Тем самым показано, что разность  $\operatorname{conv}|_{I_f} f - \operatorname{conv}|_{I_g} g$  выпукла на  $I_f$ .  $\square$

**Замечание.** В условиях леммы, вообще говоря,

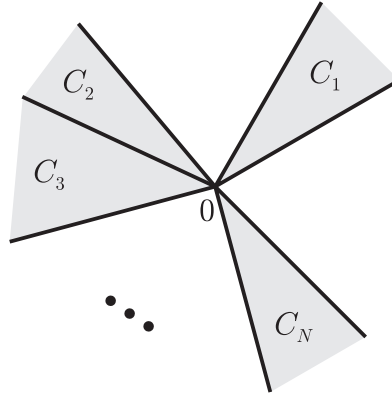
$$f - g \neq \operatorname{conv}|_{I_f} f - \operatorname{conv}|_{I_g} g.$$

В дальнейшем потребуются утверждение, аналогичное лемме 2.4.1, для положительно-однородных функций на плоскости:

**Лемма 2.4.2.** Пусть функции  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  являются непрерывными и положительно-однородными. Пусть  $\operatorname{conv} f, \operatorname{conv} g$  — собственные функции и функция  $h = f - g$  выпукла. Тогда разность  $\operatorname{conv} f - \operatorname{conv} g$  выпукла.

*Доказательство.*

**А.** Обозначим  $\tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{conv} g$ ,  $S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 : \tilde{g}(x) = g(x)\}$ . В силу непрерывности функций  $\tilde{g}$  и  $g$  множество  $S$  замкнуто. С учетом положительной

Рис. 2.7: Область исправления функции  $g$  в лемме 2.4.2

однородности этих функций множество  $\widehat{S} = (\mathbb{R}^2 \setminus S) \cup \{0\}$  представляется в виде не более чем счетного объединения открытых конусов (т.е., без граничных образующих), пересекающихся лишь в точке  $\{0\}$ :

$$\widehat{S} = \bigcup \{C_i : i = \overline{1, N}\}, \text{ где } N \leq \infty, \quad C_i \cap C_j = \{0\} \text{ для } i \neq j.$$

При этом раствор каждого из конусов не превышает  $\pi$  (см. рис. 2.7). Обозначим через  $\bar{C}_i$  замыкание конуса  $C_i$ .

Для любого  $i$  имеем

- 1)  $\text{conv}|_{\bar{C}_i}(g|_{\bar{C}_i}) = (\text{conv } g)|_{\bar{C}_i}$  (по лемме 2.3.5);
- 2)  $(\text{conv } g)|_{\bar{C}_i}$  — линейная функция.

Так же, как это было сделано в доказательстве леммы 2.3.4, рассмотрим процесс построения выпуклой оболочки функции  $g$  как пошаговый:  $g = g_0 \rightsquigarrow g_1 \rightsquigarrow g_2 \rightsquigarrow \dots$ . Очередная функция  $g_i$  получается из  $g_{i-1}$  заменой последней на конусе  $\bar{C}_i$  линейной функцией:

- 1)  $l_i \stackrel{\text{def}}{=} (\text{conv } g)|_{\partial \bar{C}_i}$ ;
- 2)  $l_i \leq g_{i-1}$  на  $\bar{C}_i$ ;
- 3)  $l_i = g_{i-1}$  на  $\partial \bar{C}_i$ .

Параллельно будем осуществлять процесс подправки функции  $f$ :  $f = f_0 \rightsquigarrow f_1 \rightsquigarrow f_2 \rightsquigarrow \dots$  так, что

$$f_i|_{\bar{C}_i} = \text{conv}|_{\bar{C}_i}(f_{i-1}), \quad f_i|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}_i} = f_{i-1}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}_i}.$$

Т.е. функция  $f_i$  получается из функции  $f_{i-1}$  овыпуклением последней на конусе  $\bar{C}_i$ .

**С.** Обозначим  $h_i \stackrel{\text{def}}{=} f_i - g_i$ . Для любого числа  $i$  функция  $h_i$  выпукла. Докажем это по индукции.

База индукции: Имеем  $h_0 = f_0 - g_0 = f - g$ , а функция  $f - g$  выпукла.

Шаг индукции: Выполняется неравенство  $g_i|_{\bar{C}_i} \leq g_{i-1}|_{\bar{C}_i}$ . Из него вытекает, что на конусе  $\bar{C}_i$

$$f_{i-1} - g_i \geq f_{i-1} - g_{i-1} = h_{i-1}.$$

Поэтому

$$f_{i-1} \geq g_i + h_{i-1}.$$

Здесь функция  $g_i$  линейна, функция  $h_{i-1}$  выпукла. Следовательно, сумма  $g_i + h_{i-1}$  выпукла на  $\bar{C}_i$ . Поскольку отмеченная сумма, являясь выпуклой функцией, подпирает функцию  $f_{i-1}$ , то эта же сумма подпирает и выпуклую оболочку  $f_{i-1}$ , т.е. подпирает и функцию  $f_i$ :  $f_i = \text{conv}|_{\bar{C}_i} f_{i-1} \geq g_i + h_{i-1}$  на  $\bar{C}_i$ . Преобразуя последнее неравенство, получаем  $f_i - g_i \geq h_{i-1}$ , т.е.,  $h_i \geq h_{i-1}$  на  $\bar{C}_i$ .

Функция  $f_i|_{\bar{C}_i} = \text{conv}|_{\bar{C}_i} (f_{i-1}|_{\bar{C}_i})$  выпукла на  $\bar{C}_i$ . Тогда  $h_i = f_i - g_i$  выпукла на  $\bar{C}_i$  как разность выпуклой и линейной функций.

Итак, о непрерывной положительно-однородной функции  $h_i$  мы имеем следующие сведения:

- 1)  $h_i \geq h_{i-1}$  на  $\mathbb{R}^2$ , а на  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}_i$  функции  $h_i$  и  $h_{i-1}$  совпадают;
- 2)  $h_i$  является локально выпуклой на множествах  $\bar{C}_i$  и  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}_i$ .

Выпуклость функции  $h_i$  следует из леммы 2.3.3. Действительно, выберем какой-нибудь отрезок  $I = [AD]$ , пересекающий границу конуса  $\bar{C}_i$  в точке  $B$ , не совпадающей с нулем плоскости (см. рис. 2.8). Его можно взять достаточно малым, поскольку нужно будет доказать локальную выпуклость функции  $h_i$  на отрезке лишь в точке  $B$ . Функция  $h_{i-1}$  выпукла на  $[AD]$ ,  $h_i = h_{i-1}$  на  $[AB]$ , функция  $h_i$  выпукла на  $[BD]$  и  $h_i \geq h_{i-1}$ . Поэтому в силу леммы 2.3.3 функция  $h_i$  выпукла на  $[AD]$ .

Таким образом, доказан шаг индукции.

**С.** Окончание доказательства (обоснование выпуклости предельной функции  $\tilde{h}$  и совпадение предельной функции  $\tilde{f}$  с выпуклой оболочкой  $\text{conv } f$ ) повторяет окончание доказательства леммы 2.4.1.  $\square$

I

Рис. 2.8: К доказательству выпуклости функции  $h_i$  в лемме 2.4.2

### 2.4.1 Контрпример к обобщению лемм 2.4.1 и 2.4.2

Отметим, что для произвольных функций, имеющих область определения в пространстве размерности 2 или выше, утверждение, аналогичное леммам 2.4.1 и 2.4.2, вообще говоря, неверно. Это демонстрируется следующим контрпримером.

Выберем функции  $f$  и  $g$  кусочно-линейными. График функции  $f$  получается из четырехугольной пирамиды срезанием вершины двумя плоскостями, параллельными диагонали основания (см. рис. 2.9а). Получается нечто, похожее на долото. График функции  $-g$  (более наглядным является именно график  $-g$ , а не  $g$ ) представляет собой «крышу», «конек» которой имеет углубление, по форме повторяющее выступ «долота» (рис. 2.9б). При этом нуль пространства полагаем на середине выступа «долота» и на середине вмятины «крыши». Тогда график функции  $f - g = f + (-g)$  будет напоминать график  $f$ . Наклон нижнего выступа будет более крутым, а боковых граней, наоборот — более пологим в сравнении с графиком функции  $f$ . Подбором наклонов плоскостей исходных графиков (достаточно крутые боковые грани функции  $f$  и достаточно пологие наклоны скатов функции  $-g$  и выступа «долота») можно достичь того, что график  $f - g$  будет выпуклым.

Рассмотрим график функции  $\text{conv } f - \text{conv } g = f + (-\text{conv } g)$ . Выпуклая оболочка  $\text{conv } f$  совпадает с  $f$ , поскольку функция  $f$  исходно выпукла. График функции  $-\text{conv } g$  (или, что то же самое, вогнутая оболочка  $-g$ ) будет представлять собой «крышу» без всяких вмятин (рис. 2.9в). Рассмотрим сечения графиков  $\text{conv } f$ ,  $-\text{conv } g$  и их суммы, проведенные в верти-

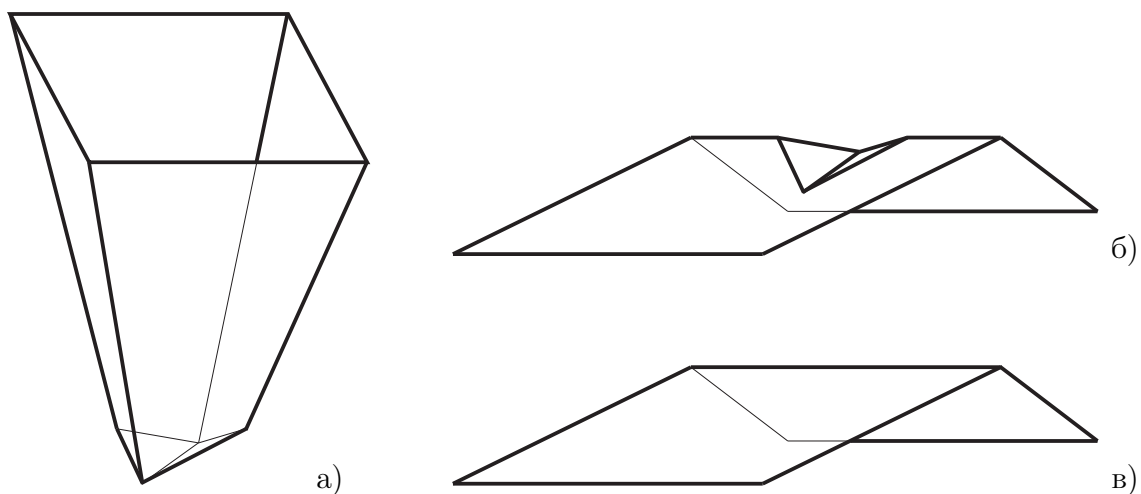


Рис. 2.9: Графики функций  $f$  (а),  $-g$  (б) и  $-\text{conv } g$  (в)

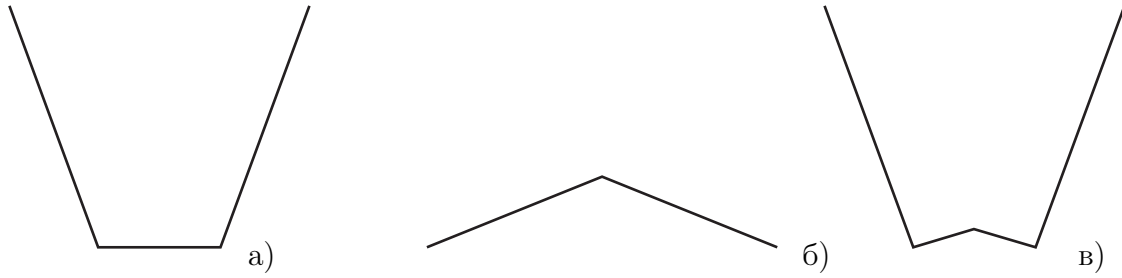


Рис. 2.10: Сечения графиков  $\text{conv } f = f$  (а),  $-\text{conv } g$  (б) и  $\text{conv } f - \text{conv } g$  (в)

кальной плоскости, проходящей по прямой выступа «долота»  $f$  (рис. 2.10). Поскольку сечение графика функции  $\text{conv } f - \text{conv } g$  невыпукло, то и вся функция  $\text{conv } f - \text{conv } g$  невыпукла.

## 2.5 Доказательство факта о сохранении уровня выметания

### 2.5.1 Сохранение полного выметания при алгебраической сумме

**Лемма 2.5.1.** Пусть множества  $A$  и  $B$  таковы, что множество  $A$  полностью выметается множеством  $B$ , т.е.  $A = B + (A * B)$ . Тогда для любого множества  $P$  имеем

$$(A + P) = (B + P) + ((A + P) * (B + P)).$$

*Доказательство.* Будем использовать эквивалентное определение полного выметания, т.е. докажем, что

$$\forall a \in A + P \exists x : a \in (B + P) + x \text{ и } (B + P) + x \subset (A + P).$$

Выберем  $a' \in A + P$ . Тогда найдутся такие  $a \in A$  и  $p \in P$ , что  $a' = a + p$ . В силу полной выметаемости  $A$  при помощи  $B$  находим, что  $\exists x : a \in B + x$  и  $B + x \subset A$ .

Раскрывая первое включение, имеем

$$\begin{aligned} \exists x \exists b \in B : a = b + x &\Rightarrow a + p = (b + x) + p \Rightarrow a + p = (b + p) + x \Rightarrow \\ &\Rightarrow a + p \in (B + p) + x \subset (B + P) + x \Rightarrow a + p \in (B + P) + x. \end{aligned}$$

Расписывая второе вложение, получаем

$$B + x \subset A \Rightarrow \forall p \in P (B + p) + x \subset A + p \Rightarrow (B + P) + x \subset A + P.$$

Нужные свойства показаны. □

### 2.5.2 Сохранение полного выметания при геометрической разности

**Лемма 2.5.2.** Пусть выпуклые компакты  $A, B \subset \mathbb{R}^2$  таковы, что множество  $A$  полностью выметается множеством  $B$ :  $A = B + (A \stackrel{*}{-} B)$ . Тогда для любого выпуклого компактного множества  $Q \subset \mathbb{R}^2$  такого, что  $B \stackrel{*}{-} Q \neq \emptyset$ , имеем

$$(A \stackrel{*}{-} Q) = (B \stackrel{*}{-} Q) + ((A \stackrel{*}{-} Q) \stackrel{*}{-} (B \stackrel{*}{-} Q)).$$

*Доказательство.* Проведем доказательство на языке опорных функций.

Обозначим  $AQ = A \stackrel{*}{-} Q$ ,  $BQ = B \stackrel{*}{-} Q$ . В этих обозначениях имеем

$$\rho_{A \stackrel{*}{-} B} = \rho_A - \rho_B, \quad \rho_{AQ} = \text{conv}\{\rho_A - \rho_Q\}, \quad \rho_{BQ} = \text{conv}\{\rho_B - \rho_Q\}.$$

Требуется показать, что

$$\rho_{AQ \stackrel{*}{-} BQ} = \rho_{AQ} - \rho_{BQ}.$$

Рассмотрим функции  $f = \rho_A - \rho_Q$  и  $g = \rho_B - \rho_Q$ . По условию леммы выражение

$$f - g = (\rho_A - \rho_Q) - (\rho_B - \rho_Q) = \rho_A - \rho_B$$

есть выпуклая функция. Тогда по лемме 2.4.2 функция

$$\text{conv } f - \text{conv } g = \text{conv}\{\rho_A - \rho_Q\} - \text{conv}\{\rho_B - \rho_Q\} = \rho_{AQ} - \rho_{BQ}$$

также будет выпуклой. Стало быть, она совпадает со своей выпуклой оболочкой.  $\square$

### 2.5.3 Контрпример к обобщению леммы 2.5.2

Отметим, что только что доказанный факт неверен для множеств высокой размерности. Это демонстрируется следующим контрпримером.

Выберем множество  $A$  в трехмерном пространстве в виде полушара, срезанного двумя плоскостями (см. рис. 2.11). Множество  $B$  возьмем подобным множеству  $A$  с коэффициентом подобия 0.5. Известно, что меньшее из двух выпуклых подобных множеств выметает большее. Меридиональные сечения (вертикальные плоские грани) множеств  $A$  и  $B$  приведены справа от них. Выберем множество  $Q$  в виде отрезка, перпендикулярного меридиональным плоскостям множеств  $A$  и  $B$ . При этом длина

отрезка  $Q$  больше срезанной части  $B$ , но меньше срезанной части  $A$  (эти части условно обозначены на рис. 2.11 тонкими вертикальными линиями).

Легко показать, что геометрическая разность выпуклого множества и отрезка есть пересечение двух экземпляров этого множества, смещенных друг относительно друга на этот отрезок. Геометрические разности  $A \overset{*}{-} Q$  и  $B \overset{*}{-} Q$  изображены в правой части рисунка. Тонкими линиями отмечены исходные множества  $A$  и  $B$ . В силу выбора длины отрезка  $Q$  «крыша» на множестве  $A \overset{*}{-} Q$  сохранилась. Вертикальная плоская грань разности приведена справа: она имеет угловую точку. В то же время исходная «крыша» множества  $B$  пропала, и вертикальная плоская грань множества  $B \overset{*}{-} Q$  есть просто круг. Очевидно, что множество  $A \overset{*}{-} Q$  не выметается полностью множеством  $B \overset{*}{-} Q$ : угол сечения  $A \overset{*}{-} Q$  не может быть накрыт множеством  $B \overset{*}{-} Q$  так, чтобы последнее полностью находилось в  $A \overset{*}{-} Q$ .

Тем самым показано, что для трехмерных множеств свойство полной выметаемости, вообще говоря, не сохраняется при геометрической разности. Следовательно, это в общем случае неверно и в пространствах более высокой размерности.

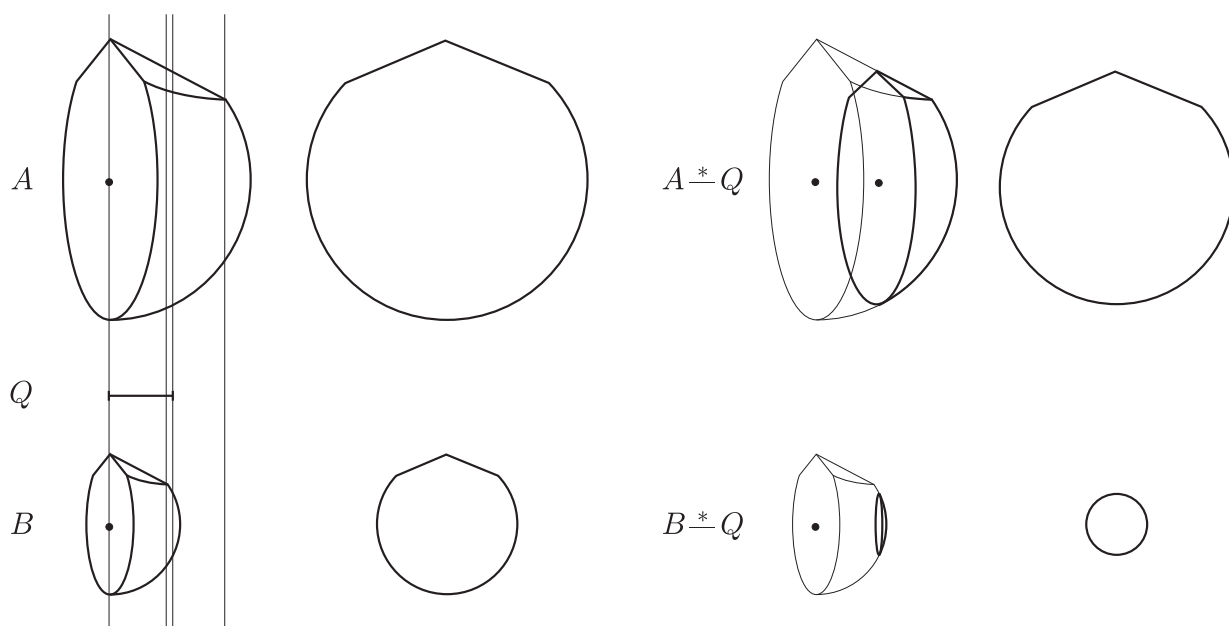


Рис. 2.11: Контрпример к сохранению полной выметаемости после геометрической разности в случае множеств размерности три или выше



### 2.5.4 Сохранение полного выметания при предельном переходе

**Лемма 2.5.3.** Пусть задана игра

$$\dot{x} = u + v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in P(t), \quad v(t) \in Q(t)$$

с фиксированным моментом окончания  $T$ . Предположим, что многозначные функции  $P(t), Q(t) : [t_0, T] \rightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$  непрерывны и имеют значениями выпуклые компактные множества. Зафиксируем момент  $t_* \in [t_0, T]$  и рассмотрим два максимальных стабильных моста  $W_1$  и  $W_2$ , построенных на промежутке времени  $[t_*, T]$  от двух множеств  $M_1$  и  $M_2$  соответственно. Считаем, что  $\text{int } W_1(t) \neq \emptyset$  для всех моментов  $t \in [t_*, T]$ . Пусть множество  $M_1$  полностью выметает множество  $M_2$ .

Тогда множество  $W_1(t_*)$  полностью выметает множество  $W_2(t_*)$ .

*Доказательство.* Выберем последовательность разбиений

$$\{\vartheta_k\} = \{t_* = t_0^{(k)} < \dots < t_{N_k}^{(k)} = T\}$$

промежутка  $[t_*, T]$  с диаметром  $\Delta_k \rightarrow 0$ . Обозначим через  $\mathbf{W}_1^{(k)}(t_*)$  и  $\mathbf{W}_2^{(k)}(t_*)$  альтернированные суммы (2.7) последовательностей  $\{P(t_i^{(k)})\}$  и  $\{Q(t_i^{(k)})\}$  с начальными значениями  $\mathbf{W}_1^{(k)}(T) = M_1$  и  $\mathbf{W}_2^{(k)}(T) = M_2$ .

Поскольку множество  $\mathbf{W}_1(T)$  полностью выметает  $\mathbf{W}_2(T)$ , то в силу лемм 2.5.1 и 2.5.2 имеем, что каждое множество  $\mathbf{W}_1^{(k)}(t_i)$  полностью выметает множество  $\mathbf{W}_2^{(k)}(t_i)$ . Следовательно, для любого  $k$  множество  $\mathbf{W}_1^{(k)}(t_*)$  полностью выметает множество  $\mathbf{W}_2^{(k)}(t_*)$ .

В силу предположения о том, что для любого момента  $t \in [t_*, T]$  непуста внутренность сечения  $W_1(t)$  множества уровня  $W_1$  функции цены, имеются сходимости множеств  $\mathbf{W}_1^{(k)}(t_*) \rightarrow W_1(t_*)$  и  $\mathbf{W}_2^{(k)}(t_*) \rightarrow W_2(t_*)$  в метрике Хаусдорфа при  $k \rightarrow \infty$ .

Стало быть, чтобы доказать полное выметание множества  $W_2(t_*)$  множеством  $W_1(t_*)$ , требуется обосновать следующий факт. Пусть две последовательности  $\{A_k\}$  и  $\{B_k\}$  выпуклых компактных множеств сходятся в метрике Хаусдорфа к компактным множествам  $A$  и  $B$  соответственно. Предположим, что для любого  $k$  множество  $B_k$  полностью выметает множество  $A_k$ . Тогда предельные множества обладают тем же свойством: множество  $B$  полностью выметает множество  $A$ .

Используем альтернативное определение полного выметания, т.е. докажем, что  $\forall a \in A \exists x : 1) a \in B + x$  и 2)  $B + x \subset A$ .

Возьмем произвольный элемент  $a \in A$ . В силу сходимости  $A_k \rightarrow A$ , можно выбрать последовательность  $\{a_k\}$ ,  $a_k \in A_k$ , такую, что  $a_k \rightarrow a$ . Поскольку множество  $A_k$  полностью выметается множеством  $B_k$ , то

$$\forall k \exists x_k : a_k \in B_k + x_k \text{ и } B_k + x_k \subset A_k.$$

Рассмотрим последовательность  $\{x_k\}$ . Она ограничена. Стало быть, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, будем считать, что сама последовательность  $\{x_k\}$  сходится к некоторому элементу  $x$  пространства  $\mathbb{R}^2$ . Покажем, что этот элемент совпадает с тем, который фигурирует в определении полного выметания.

Первое свойство:  $a \in B + x$ . Имеем  $\forall k a_k \in B_k + x_k$ . Выберем такие  $b_k \in B_k$ , что  $a_k = b_k + x_k$ . Поскольку  $a_k \rightarrow a$  и  $x_k \rightarrow x$ , то  $b_k \rightarrow b = a - x$ . Принимая во внимание сходимость  $B_k \rightarrow B$ , получаем  $b \in B$ . Следовательно, существует элемент  $b \in B$  такой, что  $a = b + x$ . Поэтому  $a \in B + x$ .

Второе свойство:  $B + x \subset A$ . Выберем произвольный элемент  $b \in B$ . В силу сходимости  $B_k \rightarrow B$  можно выбрать последовательность  $\{b_k\}$ ,  $b_k \in B_k$ , такую, что  $b_k \rightarrow b$ . Поскольку  $B_k + x_k \subset A_k$ , то  $b_k + x_k \in A_k$ . Следовательно,  $\forall k \exists a_k \in A_k : b_k + x_k = a_k$ . В силу того, что  $b_k \rightarrow b$  и  $x_k \rightarrow x$ , имеем  $a_k \rightarrow \bar{a} = b + x$ . Принимая во внимание сходимость  $A_k \rightarrow A$ , получаем  $\bar{a} \in A$ . Отсюда для любого  $b \in B$  вытекает  $b + x \in A$ . Стало быть,  $B + x \subset A$ .

Таким образом, множество  $B$  полностью выметает множество  $A$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть функция платы  $\varphi(\cdot)$  дифференциальной игры (1.3) такова, что для любых двух констант  $c_1 < c_2$  ее множество уровня  $M_{c_1}$  (если оно непусто) полностью выметает множество уровня  $M_{c_2}$ .

Тогда соответствующие множества уровня  $W_{c_1}$  и  $W_{c_2}$  функции цены  $V(\cdot)$  игры (1.3) обладают следующим свойством: для каждого момента  $t_* \in [t_0, T]$  такого, что сечение меньшего множества уровня  $W_{c_1}(t_*)$  непусто, сечение  $W_{c_1}(t_*)$  полностью выметает сечение  $W_{c_2}(t_*)$  большего множества уровня.

*Доказательство.* Если  $\text{int } W_{c_1}(t) \neq \emptyset$  для всех  $t \in [t_*, T]$ , то утверждение теоремы следует непосредственно из леммы 2.5.3.

Пусть теперь  $W_{c_1}(t_*) \neq \emptyset$ , но  $\text{int } W_{c_1}(\bar{t}) = \emptyset$  в некоторый момент  $\bar{t} \in [t_*, T]$ . Из непрерывности функции цены следует, что  $\text{int } W_c(\bar{t}) \neq \emptyset$ , если  $c > c_1$ . Тогда  $\text{int } W_c(t) \neq \emptyset$  при  $c > c_1$  для всех моментов времени  $t \in [t_*, T]$ . В силу факта, отмеченного в предыдущем абзаце, множество  $W_c(t_*)$  полностью выметает множество  $W_{c_2}(t_*)$ , если  $c \in (c_1, c_2)$ . Поскольку  $W_c(t_*) \rightarrow W_{c_1}(t_*)$  в метрике Хаусдорфа при  $c \rightarrow c_1 + 0$ , то множество  $W_{c_1}(t_*)$  полностью выметает множество  $W_{c_2}(t_*)$ .  $\square$

Таким образом, теорема утверждает, что если функция платы обладает свойством уровневого выметания, то это свойство наследуется функцией цены для любого момента времени из промежутка  $[t_0, T]$ .

Факт, обоснованный в теореме, используется ниже в параграфе 3.3.9 при обсуждении возможной структуры  $t$ -сечений сингулярных поверхностей линейной дифференциальной игры со скалярными управлениями и непрерывный квазивыпуклой функцией платы, удовлетворяющей условию уровневого выметания.

## Глава 3

# Численное построение сингулярных поверхностей

Понятие *сингулярных поверхностей* дифференциальной игры введено американским математиком Р.Айзексом в книге [1]. Соответствующие определения базировались на анализе поведения оптимальных движений на рассматриваемой поверхности и вблизи нее. Позже определения такого типа были использованы J.V.Breakwell, J.Lewin, A.W.Merz, J.G.Olsder, J.Shinar [50, 64, 68, 65, 69] при исследовании конкретных задач игрового быстрогодействия. Необходимые условия, характеризующие сингулярные поверхности, исследовались Р.Bernhard в статье [47]. Определения сингулярных поверхностей, основанные на рассмотрении точек недифференцируемости функции цены игры и классификации геометрии предельных значений векторов ее градиентов в точках поверхности, были предложены в работах А.А.Меликяна [66] и Л.В.Камневой [11]. А.А.Меликяном доказаны утверждения о необходимых условиях сингулярных поверхностей с использованием понятия обобщенного (минимаксного, вязкостного) решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса.

В данной главе излагаются разработанные автором алгоритмы глобального построения сингулярных поверхностей в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания и непрерывной квазивыпуклой функцией платы, зависящей от двух компонент фазового вектора. Существенным образом используется выпуклость  $t$ -сечений множеств уровня функции цены и двумерность фазового вектора эквивалентной дифференциальной игры.

Общая идеология построения сингулярных поверхностей заключается в следующем. В процессе построения очередного сечения  $\mathbf{W}_c(t_i)$  макси-

максимального стабильного моста  $\mathbf{W}_c$  на границе  $\partial\mathbf{W}_c(t_i)$  выделяются сингулярные точки, которые классифицируются и связываются с точками на границе  $\partial\mathbf{W}_c(t_{i+1})$  ранее построенного сечения  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ . В результате после построения рассматриваемого стабильного моста имеем совокупность сингулярных линий на его границе. Сингулярные поверхности строятся на основе набора сингулярных линий, снятых с системы мостов (множеств уровня функции цены).

Таким образом, первичными являются сингулярные линии на границе множеств уровня.

Разработаны два варианта алгоритма. Первый предполагает, что управление каждого из игроков является скалярным и ограниченным по модулю. Второй вариант рассчитан на случай строго выпуклых компактных ограничений на управления игроков.

Среди примеров построения сингулярных поверхностей, включенных в текст главы, имеются задачи [22, 23, 70, 71], исследованные ранее аналитическими методами. Результаты, полученные при помощи разработанных программ, достаточно хорошо совпадают с результатами этих статей.

Информация о сингулярных линиях, лежащих на границе максимального стабильного моста, может быть использована для построения пучков оптимальных движений, выходящих из заданной начальной точки на границе этого моста. В тексте главы приведены примеры построения таких пучков движений.

### 3.1 Оптимальные движения

Говоря об оптимальных движениях в дифференциальной игре, мы подразумеваем движения, которые возникают, когда игроки применяют свои оптимальные стратегии. Сказанное следует понимать только на содержательном уровне. Трудность строгого определения заключается в том, что оптимальные позиционные стратегии неединственны и, кроме того, чтобы перейти от них к идеальным движениям, следует проанализировать в начале движения, порождаемые дискретными схемами управления, а потом сделать предельный переход.

Рассматриваемые ниже способы построения сингулярных линий на границе множеств уровня функции цены предполагают, что эти множества строятся численно с использованием алгоритма, описанного в разделе 1.2.

В этом алгоритме на очередном шаге попятных построений имеем дело с игрой с простыми движениями и многоугольными аппроксимациями выпуклых множеств. Опираясь на это, мы уже можем дать строгое определение оптимальных движений аппроксимирующей игры. Сингулярные линии и поверхности затем рассматриваются также для аппроксимирующей игры. Какой-либо переход к пределу в данной работе не исследуется.

Итак, для промежутка времени  $[t_i, t_{i+1}]$  рассмотрим игру с простыми движениями. В прямом времени первый игрок пытается перевести систему с многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$  на многоугольник  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ , второй препятствует этому. Вводя дискриминацию второго игрока, определим оптимальные движения.

Зафиксируем некоторую точку  $y_0$  на границе многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$ . Управление второго игрока (постоянное на промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$ ) назовем *оптимальным*, если первый игрок не может направить результирующее движение из точки  $y_0$  во внутренность многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ . При выбранном оптимальном управлении второго игрока, управление первого игрока (также постоянное на этом интервале) назовем *оптимальным парирующим*, если соответствующее движение остается на границе моста. Движение, порожаемое оптимальными управлениями игроков, называется *оптимальным*.

Управление  $v^*$ , удовлетворяющее условию максимума

$$v^* \in \arg \max \{ \langle l, v \rangle : v \in \mathcal{Q}(t_i) \},$$

назовем *экстремальным* управлением второго игрока на векторе  $l$ . Аналогично, *экстремальное* управление первого игрока на векторе  $l$  — это такое управление  $u^*$ , которое удовлетворяет условию минимума

$$u^* \in \arg \min \{ \langle l, u \rangle : u \in \mathcal{P}(t_i) \}.$$

Легко видеть, что если  $y_0$  является внутренней точкой какого-либо ребра многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$ , то постоянное управление второго игрока оптимально тогда и только тогда, когда оно экстремально на внешней нормали многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$  в этой точке. Оптимальное парирующее управление первого игрока экстремально на том же векторе.

Если  $y_0$  — вершина многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$ , то ей соответствуют две внешние нормали инцидентных ей ребер. Структура оптимальных управлений в этом случае описывается следующим образом [10].

Для любой вершины многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$  управление второго игрока, экстремальное хотя бы на одном из векторов внешних нормалей, соответствующих этой вершине, является оптимальным. При этом оптимальное парирующее управление первого игрока экстремально на том же векторе.

Отметим, что, вообще говоря, мы не описали весь набор оптимальных управлений игроков. А именно, в некоторых случаях (не являющихся ситуациями общего положения) управление второго игрока, экстремальное на внутреннем векторе из конуса внешних нормалей в вершине многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$ , является оптимальным. Такое управление не попадает в набор, описанный выше.

Ниже в следующих двух разделах описываются алгоритмы построения и классификации сингулярных поверхностей для двух классов игр. Они рассчитаны на ситуации общего положения.

### 3.2 Типы сингулярных поверхностей

Опишем на содержательном уровне типы сингулярных поверхностей, которые могут возникать в двумерных дифференциальных играх с квазивыпуклой непрерывной функцией платы. В основу определения сингулярных точек положим понятие множеств экстремальных управлений игроков.

Пусть точка  $(t, x)$  принадлежит границе  $\partial W$  некоторого максимального стабильного моста  $W$  (множества уровня функции цены  $V$ ). Рассмотрим векторы из конуса  $\mathcal{N}(t, x)$  внешних нормалей к сечению  $W(t)$  этого моста в точке  $x$ . Если граница  $\partial W(t)$  в рассматриваемой точке гладкая, то конус  $\mathcal{N}(t, x)$  состоит из одного луча. В случае излома границы такой конус будет включать бесконечное количество направлений.

Если перейти на язык функции цены, то набор представителей из конуса внешних нормалей дает субдифференциал  $\partial_x V(t, x)$ . В случае дифференцируемости функции цены он состоит из одного вектора, а именно, из градиента функции цены по переменной  $x$ .

Назовем *множествами экстремальных управлений* первого и второго игроков на векторах внешних нормалей в точке  $(t, x)$  для игры (1.3)

следующие объекты:

$$\mathcal{U}^*(t, x) = \bigcup_{p \in \partial_x V(t, x)} \arg \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, D(t)u + E(t)v \rangle,$$

$$\mathcal{V}^*(t, x) = \bigcup_{p \in \partial_x V(t, x)} \arg \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, D(t)u + E(t)v \rangle.$$

Множества  $\mathcal{U}^*(t, x)$  и  $\mathcal{V}^*(t, x)$  включают в себя значения оптимальных управлений игроков. В случае, когда эти множества одноточечные, они состоят только из оптимальных управлений.

Точку  $(t, x)$  будем называть *регулярной*, если множества  $\mathcal{U}^*(t, x)$  и  $\mathcal{V}^*(t, x)$  одноточечны, и *сингулярной* в противном случае. Тип сингулярности устанавливается на основе поведения полей оптимальных движений, порожденных максимально широкими оптимальными стратегиями игроков.

При рассмотрении в малом ситуации общего положения считаем, что взятая сингулярная точка принадлежит поверхности из сингулярных точек одного и того же типа. Поверхность делит малую окрестность точки на три части: сама поверхность и две регулярные области, через каждую точку которых проходит одно оптимальное движение.

Возможны следующие ситуации (рис. 3.1). Случаи 3.1а и 3.1б показывают так называемые *поверхности переключения*: оптимальные движения приходят на поверхность, терпят излом вследствие скачкообразной смены управления одного из игроков, после чего либо сходят с поверхности (случай *переключения с покиданием*), либо идут по поверхности (случай *переключения без покидания*). В зависимости от того, управление какого игрока меняется, различаем ситуации *переключения за первого игрока* и *за второго игрока*. Случай переключения без покидания в рассматриваемом классе игр (имеющих квазивыпуклую при каждом  $t$  функцию цены) возможен только за первого игрока.

Случай 3.1в показывает *рассеивающую поверхность*. Такая поверхность не принимает на себя оптимальных движений (за исключением, быть может, своих граничных точек), а движения, на ней начинающиеся, расщепляются на два: одно сходит по одну сторону поверхности, другое — по другую. В зависимости от того, меняется ли управление одного из игроков или обоих, различаем ситуации *рассеивания за первого игрока*, *за второго игрока* и *за обоих игроков*. В рассматриваемом классе игр случай



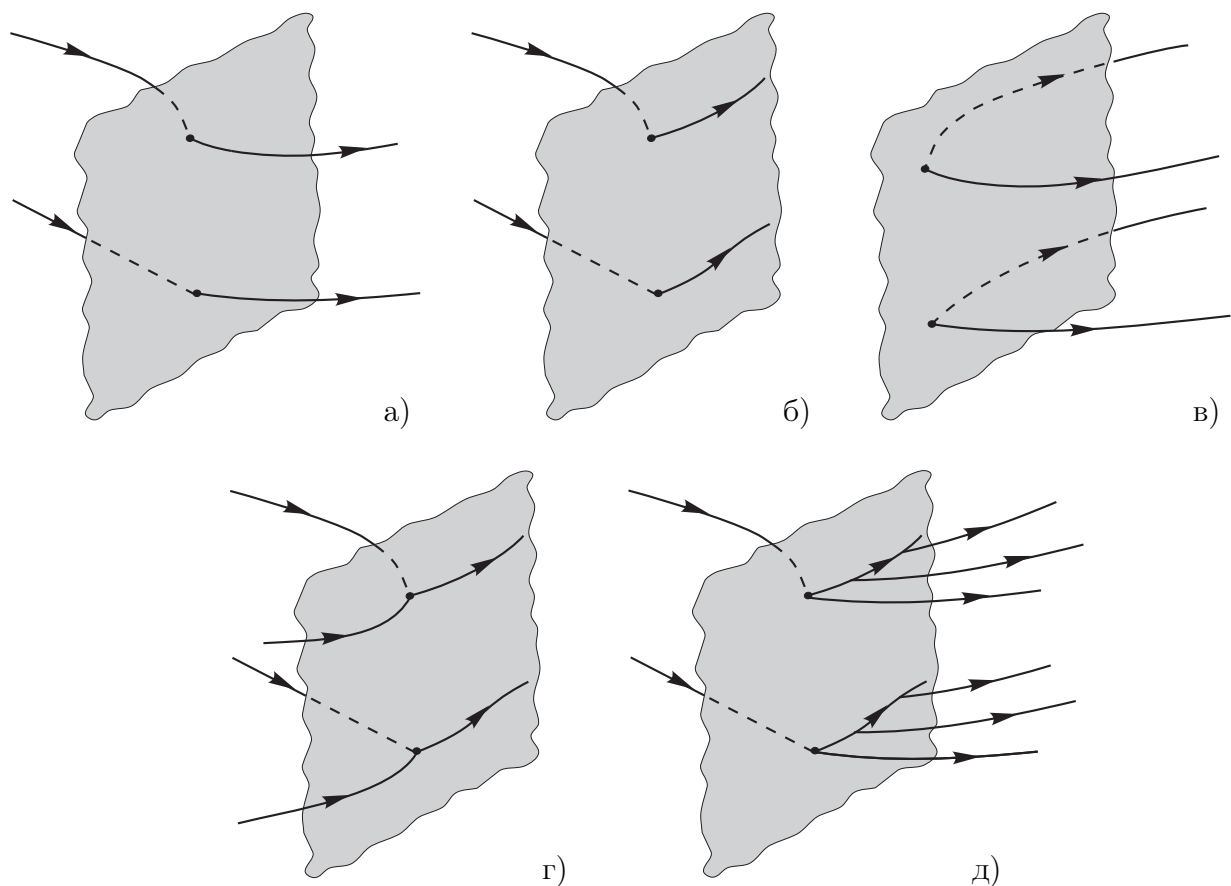


Рис. 3.1: Типы сингулярностей: а) переключение с покиданием; б) переключение без покидания; в) рассеивающая поверхность; г) универсальная/фокальная поверхность; д) эквивокальная поверхность

рассеивания за первого игрока невозможен.

Случай 3.1г показывает обратную ситуацию: каждая точка поверхности принимает два оптимальных движения с разных сторон поверхности, после чего результирующее движение идет по самой поверхности. Возможны два случая. Первый — оба движения подходят под углом к поверхности; тогда поверхность называется *универсальной* и на ней функция цены дифференцируема. Если же хотя бы одно из движений подходит по касательной, то поверхность называется *фокальной* и функция цены на ней не дифференцируема.

Последний случай 3.1д показывает наиболее сложную поверхность, возникающую в дифференциальных играх и невозможную в задачах управления — *эквивокальную поверхность*. Оптимальные движения подходят к этой поверхности с одной стороны и идут в дальнейшем по ней, в каждый момент расщепляясь и давая движения, уходящие на сторону, противоположную той, откуда пришло исходное движение. Выбор конкретного

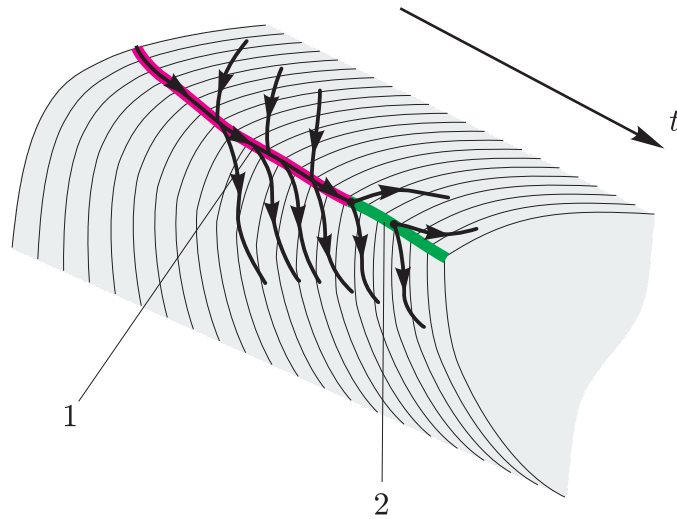


Рис. 3.2: Схема фрагмента границы максимального стабильного моста с пучком оптимальных движений: 1 — экивокальная линия, 2 — рассеивающая линия

движения зависит от выбора управления того или иного игрока. Соответственно, экивокальные поверхности делят на *управляемые первым игроком* и *управляемые вторым игроком*.

Для рассматриваемого класса игр любое оптимальное движение идет по границе соответствующего множества уровня функции цены (максимального стабильного моста). Поэтому основой наших рассмотрений является исследование пучков оптимальных движений, снятых с границы моста. Рис. 3.2 схематично показывает экивокальную и рассеивающую ситуации.

Сингулярные поверхности в трехмерном пространстве  $t, \xi_1, \xi_2$  эквивалентной игры строятся на базе сингулярных точек, снятых с отдельных мостов.

### 3.3 Игры со скалярными управлениями

Предположим, что множества  $P, Q$  ограничений на управления игроков являются отрезками в своих пространствах, а стало быть вслед за ними и вектограммы  $\mathcal{P}(t), \mathcal{Q}(t)$  в любой момент  $t$  являются отрезками в пространстве  $\mathbb{R}^2$ . В таком случае одноточечность множеств экстремальных управлений игроков будет иметь место для точек границы  $\partial \mathbf{W}_c(t)$ , в которых конус внешних нормалей  $\mathcal{N}(t, x)$  не содержит нормалей к отрезку  $\mathcal{P}(t), \mathcal{Q}(t)$ , соответственно. Более богатыми эти множества могут быть только в точках, где  $\mathcal{N}(t, x)$  включает нормали к отрезку  $\mathcal{P}(t)$  или  $\mathcal{Q}(t)$ : там  $\mathcal{U}^*(t, x)$  ( $\mathcal{V}^*(t, x)$ ) совпадает со всем отрезком  $\mathcal{P}(t)$  ( $\mathcal{Q}(t)$ ). Поэтому

для игр такого типа удалось предложить достаточно простой алгоритм, базирующийся на информации, собираемой во время построения выпуклой оболочки функции  $\gamma$  (1.5).

### 3.3.1 Построение сингулярностей в случае скалярных ограничений

Пусть  $t_i$  — некоторый момент дискретной схемы построений приближенных сечений максимального стабильного моста (раздел 1.2). Предполагаем выполненным *условие непараллельности*: отрезки вектограмм  $\mathcal{P}(t_i)$  и  $\mathcal{Q}(t_i)$  непараллельны друг другу, а также ни одному из ребер многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$  предыдущего (в обратном времени) сечения. Это условие выделяет ситуации общего положения.

Суть алгоритма построения и классификации сингулярностей заключается в присвоении нормалям, описывающих функцию  $\gamma$  (1.5) (стр. 14), дополнительных меток, которые проходят, возможно изменяясь, через алгоритм построения выпуклой оболочки, описанный в разделе 1.2.

Имеются два типа меток. Метки  $N\mathcal{P}$  первого типа присваиваются тем нормалям  $n_{\mathcal{P}}(t_i)$ , которые берутся с отрезка  $\mathcal{P}(t_i)$ . Если такая нормаль остается в финальном наборе, определяющем опорную функцию нового сечения  $\mathbf{W}_c(t_i)$ , это означает, что в точках границы, лежащих по разные стороны ребра, соответствующего этой нормали, управления первого игрока разные. Если же эта нормаль исключается из списка в процессе построения выпуклой оболочки функции  $\gamma$ , то смена управления первого игрока происходит в той вершине многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$ , чей конус нормалей содержит вектор  $n_{\mathcal{P}}(t_i)$ . Само обозначение  $N\mathcal{P}$  идет от «normal of  $\mathcal{P}$ », «нормаль  $\mathcal{P}$ ».

Метки  $FS$  второго типа присваиваются тем нормалям, которые в процессе построения выпуклой оболочки функции  $\gamma$  включались в набор  $S^{(i)}$  подозрительных нормалей, но остались в финальном наборе  $\bar{L}$ . Сокращение  $FS$  означает «former suspicious», «бывшая подозрительная». По построению нормали  $n_{\mathcal{Q}}(t_i)$  вектограммы  $\mathcal{Q}(t_i)$  второго игрока не могут остаться в финальном наборе  $\bar{L}$ . Отсюда следует, что нормали, помеченные  $FS$ , могут образовываться только парами. При этом каждая пара охватывает конус, который в начале процесса овыпукления содержал одну из двух нормалей  $n_{\mathcal{Q}}(t_i)$ . Может возникнуть исключительная ситуация, когда мно-

Таблица 3.1: Классификация сингулярностей

Число нормалей	Метки	Дополнительное условие	Выделяемый объект	Подусловие	Тип сингулярности
1	$NP$		Ребро		Переключение за 1-го
2	$FS, FS$	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Вершина	В конусе <i>не</i> содержится нормаль $n_P(t_i)$	Рассеивание за 2-го
				В конусе содержится нормаль $n_P(t_i)$	Рассеивание за обоих
2	$FS, FS + NP$	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Ребро, связанное с нормалью $n_P(t_i)$		Эквивокальность

гоугольник  $\mathbf{W}_c(t_i)$  является четырехугольником и все четыре имеющихся конуса охватываются нормальями, несущими пометку  $FS$ . В этом случае для выделения нужных конусов необходима непосредственная проверка того, какие конусы содержат нормали  $n_Q(t_i)$ .

В итоге, алгоритм поиска и классификации сингулярностей для случай скалярных управлений работает следующим образом. В процессе построения следующего сечения нормали снабжаются метками, которые анализируются по окончании построения. Возможные ситуации помечивания одной или двух соседних нормалей приведены в табл. 3.1.

**Строка 1. Переключение за 1-го игрока.** Если угол между отрезками  $\mathcal{P}(t_i)$  и  $\mathcal{Q}(t_i)$  значителен и геометрия сечения  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ , предыдущего в обратном времени, такова, что нормали  $n_P(t_i)$  и  $n_Q(t_i)$  прикладываются в существенно разных точках границы  $\partial\mathbf{W}_c(t_{i+1})$  (так что процесс овыпукления вблизи  $n_Q(t_i)$  не затрагивает  $n_P(t_i)$ ), то на границе многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_i)$  появляется ребро, связанное с возникновением в обратном времени пучка оптимальных движений. Эти движения выходят при всевозможных управлениях первого игрока из вершины многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ , в конус нормалей которой попал вектор  $n_P(t_i)$ . При этом особыми являются все точки этого нового ребра.

Как отмечалось, возможны две ситуации: линия переключения с покиданием и линия переключения без покидания (рис. 3.1а и б). Различие этих ситуаций связано с тем, с какой скоростью поворачивается отрезок  $\mathcal{P}(t)$ .

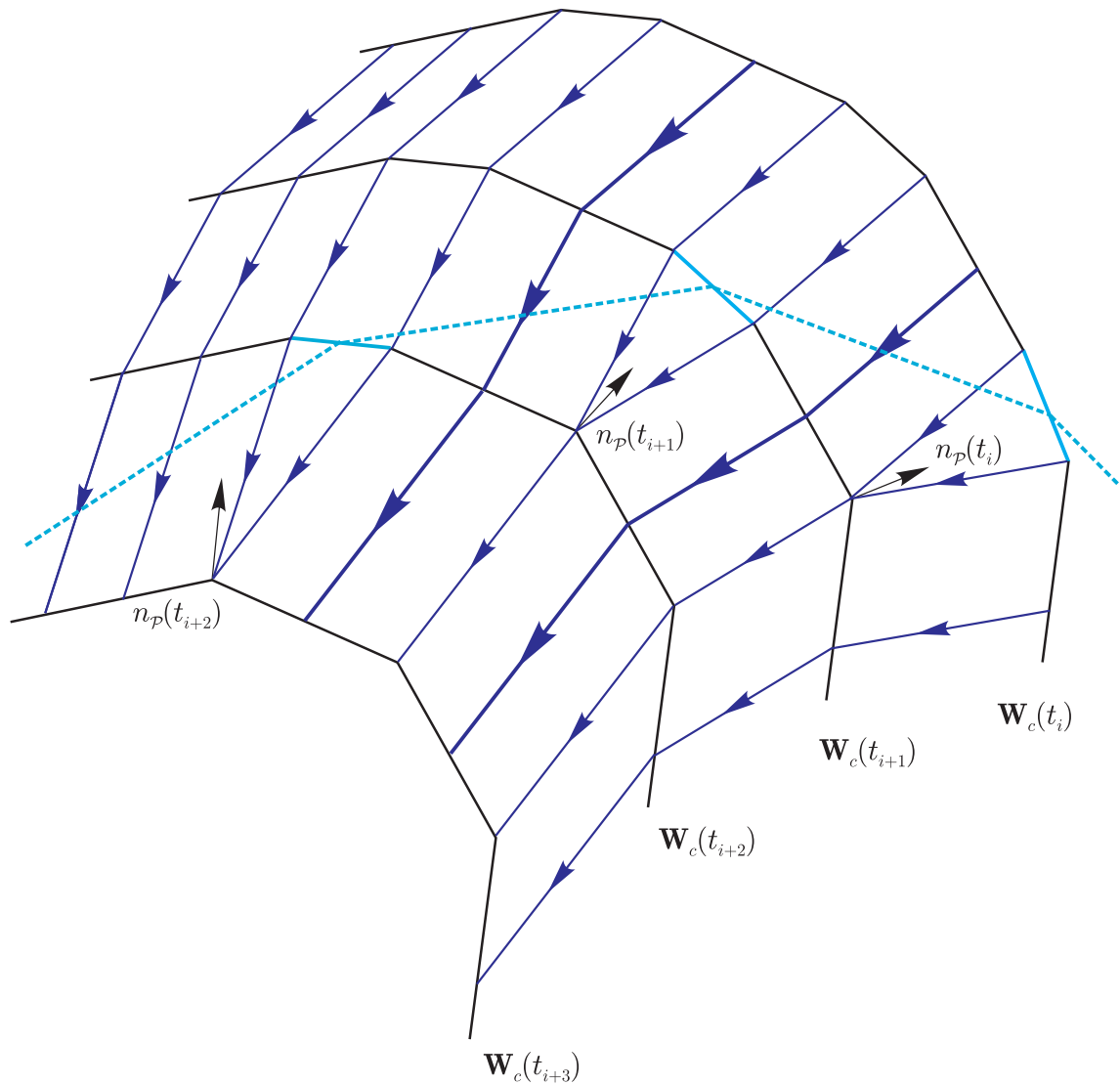


Рис. 3.3: Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи линии переключения с покиданием за первого игрока. Черные ломаные линии — фрагменты границ сечений моста  $\mathbf{W}_c$ , голубые отрезки на них — ребра, возникающие за счет возможностей первого игрока, черными стрелками показаны места приложения нормалей  $n_P(t)$ . Голубой штриховой линией условно отмечена строящаяся линия переключения. Синие линии со стрелками — оптимальные движения аппроксимирующей игры, некоторые из которых выделены жирными линиями

Если границы многоугольников  $\mathbf{W}_c(t)$  в районе нормали  $n_P(t)$  достаточно «гладкие» (углы при вершинах многоугольников  $\mathbf{W}_c(t)$  почти развернутые, а конусы нормалей, соответственно, достаточно узкие), то точка приложения отрезка  $\mathcal{P}(t)$  «перескакивает» с одной вершины на другую. При этом движения «протыкают» линию переключения (см. рис. 3.3). Это объясняется тем, что в рамках одного ребра, не являющегося вставкой за первого игрока, экстремальные управления игроков одни и те же и порождаемые этими управлениями движения не могут «догнать» «уходящую» линию переключения.

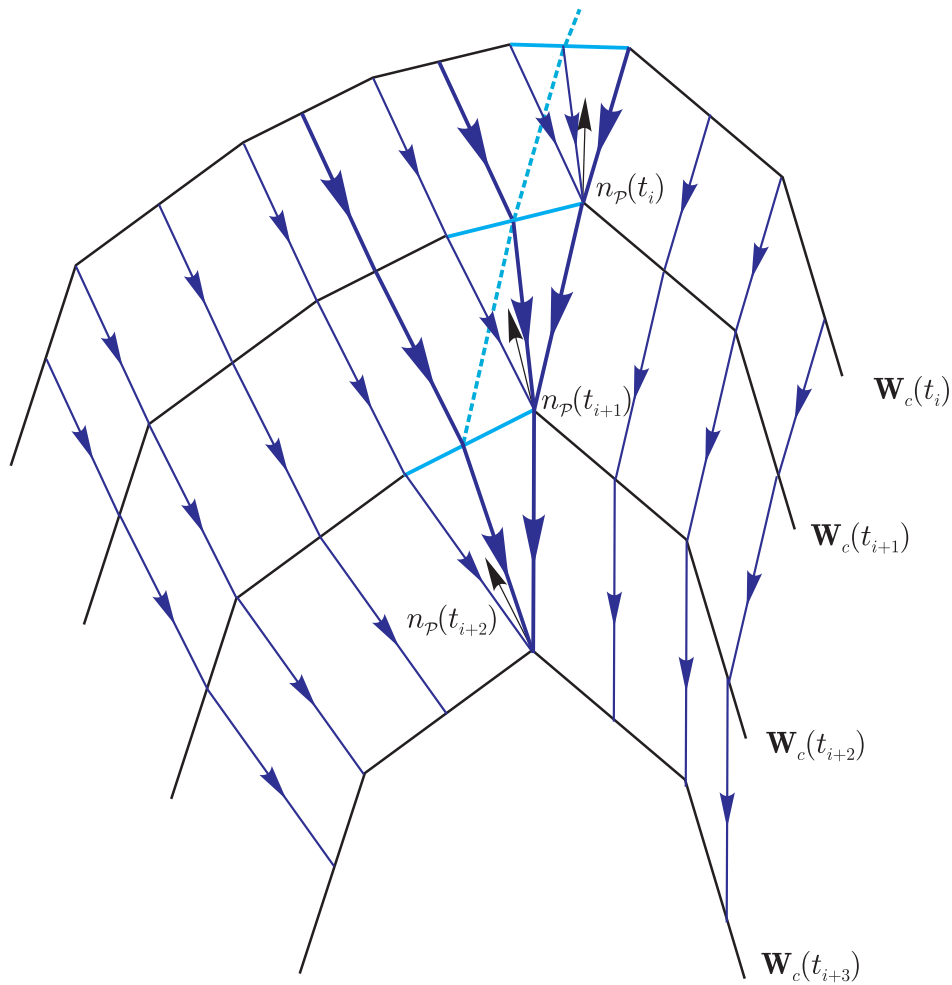


Рис. 3.4: Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи линии переключения без покидания за первого игрока. Черные ломаные линии — фрагменты границ сечений моста  $W_c$ , голубые отрезки на них — ребра, возникающие за счет возможностей первого игрока, черными стрелками показаны места приложения нормалей  $n_P(t)$ . Голубой штриховой линией условно отмечена строящаяся линия переключения. Синие линии со стрелками — оптимальные движения аппроксимирующей игры, некоторые из которых выделены жирными линиями

Пусть ситуация такова, что на границе многоугольников  $W_c(t)$  есть излом — вершина, угол в которой достаточно далек от развернутого. Если вектор  $n_P(t)$  попал в конус нормалей этой вершины, то он остается в конусе в течение некоторого промежутка времени. Предположим, кроме того, что процесс овыпукления, начинающийся с нормали  $n_Q(t_i)$ , не затрагивает вектор  $n_P(t_i)$ . Тогда ребра, возникающие за счет вставок за первого игрока, появляются рядом друг с другом (рис. 3.4). При этом пучок движений собирается в одной из вершин этих отрезков и идет «по» линии переключения. Таким образом, ситуация переключения без покидания образуется, когда отрезок  $P(t)$  прикладывается к «острой» вершине, и продолжается,

пока нормаль  $n_{\mathcal{P}}(t)$  не покинет конус нормалей этой вершины (в это время острая вершина сглаживается).

В первой строке табл. 3.1 нет подразделения ситуации переключения за первого игрока на переключение с покиданием и без покидания. Это подразделение возможно с учетом дополнительной информации о локальной «гладкости» границы сечения. Уточненная таблица классификации приводится в параграфе 3.3.7.

**Строка 2. Ситуации рассеивания.** В случае, когда оба крайних вектора конуса внешних нормалей некоторой вершины несут метки  $FS$  и внутрь конуса попадает нормаль  $n_{\mathcal{Q}}(t_i)$  ограничения  $\mathcal{Q}(t_i)$  на управление второго игрока, мы заключаем, что в этом конусе происходило исправление начальной функции  $\gamma$ . Если в рассматриваемый конус попадает нормаль  $n_{\mathcal{P}}(t_i)$ , это означает, что второй игрок здесь локально сильнее первого и управляет ситуацией.

Геометрически наличие такой вершины связано с появлением «ласточки хвоста» при попятном построении сечений моста: второй игрок «сдвигает» границу стабильного моста так, что часть дуг границы предыдущего сечения становится неоптимальной (см. рис. 3.5; сравни с рис. 1.17 на стр. 33).

Рассматриваемая вершина классифицируется как рассеивающая за второго игрока, если нормаль первого игрока не попадает в конус этой верши-

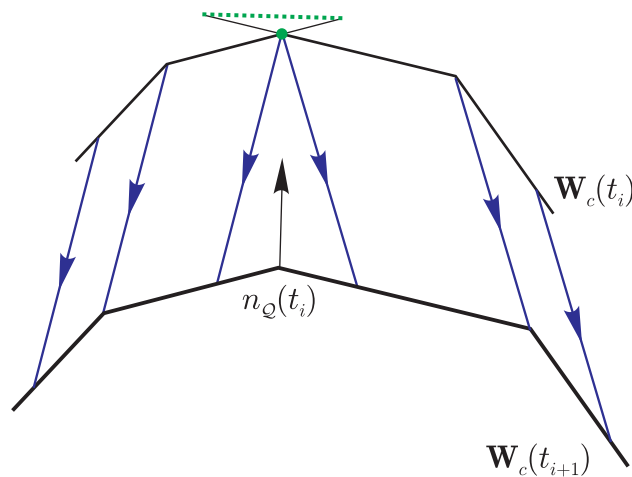


Рис. 3.5: Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи рассеивающей линии. Черные ломаные линии — фрагменты границ сечений моста  $\mathbf{W}_c$ , зеленая пунктирная линия — «ласточкин хвост», черной стрелкой показано место приложения нормали  $n_{\mathcal{Q}}(t_i)$ . Точка, которая берется для построения рассеивающей линии, отмечена зеленым. Синие линии со стрелками — оптимальные движения аппроксимирующей игры

ны, и как рассеивающая за обоих игроков, если нормаль первого игрока попадает в такой конус. Разделение «за второго»/«за обоих» подчеркивает факт смены управлений только второго или обоих игроков по разные стороны от вершины.

Вторая строка табл. 3.1 учитывает ситуации рассеивания за второго игрока и рассеивания за обоих. Тщательное исследование показало, что если вблизи рассматриваемой вершины граница сечения «гладкая», т.е. угол конуса внешних нормалей этой вершины меньше некоторого порога, то классификация ситуации рассеивания согласно второй строке может быть неверной. Для получения верной классификации нужно привлечь дополнительную информацию. По этому поводу см. параграф 3.3.7.

**Строка 3. Ситуации экивокальности.** Если нормали  $n_P(t_i)$  и  $n_Q(t_i)$  попадают в конус одной вершины сечения  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ , но второй игрок недостаточно силен, чтобы «съесть» вставку первого игрока, возникает ситуация, изображенная на рис. 3.6а. При этом имеются как черты переключения за первого игрока, так и рассеивания. Если убрать вспомогательные построения и отрисовать границу строящегося сечения  $\mathbf{W}_c(t_i)$  вместе с оптимальными движениями аппроксимирующей игры, то получится изображение, приведенное на рис. 3.6б. Из точек ребра, отмеченного фиолетовым цветом и классифицируемого как экивокальное, в прямом времени выходят дви-

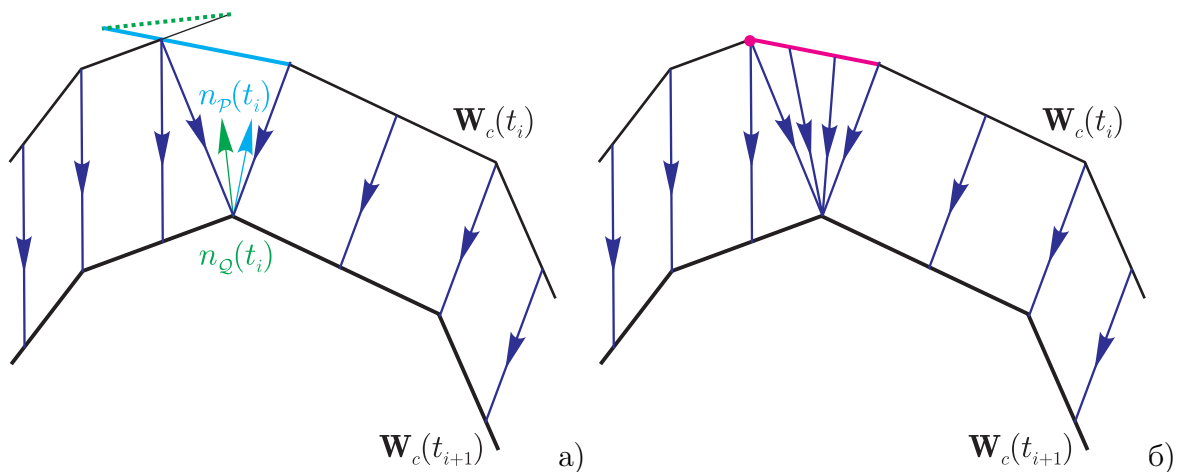


Рис. 3.6: а) схема появления экивокального ребра в аппроксимирующей игре (1.4): черные ломаные линии — фрагменты границ сечений моста  $\mathbf{W}_c$ ; голубой и зеленой стрелками показаны, соответственно, нормали  $n_P(t_i)$  и  $n_Q(t_i)$ ; голубой отрезок — вставка за первого игрока; зеленая пунктирная линия — «ласточкин хвост». Синие линии со стрелками — оптимальные движения аппроксимирующей игры; б) подробная схема поведения оптимальных движений в прямом времени вблизи экивокального ребра (отмечено фиолетовым)



жения, приходящие в одну вершину многоугольника  $\mathbf{W}_c(t_{i+1})$ . При этом они идут в силу крайнего управления второго игрока и некоторого промежуточного управления первого игрока. Из конца этого ребра, отмеченного фиолетовой точкой, так же, как и в ситуации рассеивания, выходят два движения. Отличие заключается в том, что в рассеивающем случае оба движения шли в силу крайних управлений игроков, здесь же — только одно из двух (а именно, левое).

Отметим, однако, что управления второго игрока являются крайними на обоих движениях, выходящих из эквивокальной точки. И то, пойдет ли движение по эквивокальной линии или же сойдет с нее, зависит от выбора одного из крайних управлений вторым игроком. Поэтому говорят, что эквивокальная поверхность *управляется вторым игроком*. В играх рассматриваемого класса в силу выпуклости функции цены (при каждом значении  $t$ ) эквивокальные поверхности могут управляться только вторым игроком.

После получения набора сингулярных точек на поверхности отдельного моста записываем эту информацию в выходные файлы. Дальнейшее ее использование осуществляется другими программами, например, для той или иной визуализации сингулярностей [79, 80, 81] или для моделирования пучков оптимальных движений [75].

Были разработаны алгоритмы восстановления всей системы сингулярных поверхностей на основе набора сингулярных линий, снятых с совокупности множеств уровня функции цены, просчитанных для достаточно частой сетки значений платы. Сложность восстановления системы сингулярных поверхностей состоит в том, что априори тяжело предсказать в автоматическом режиме, как будут себя вести множества уровня в обратном времени: расширяться или сжиматься. Вследствие различия изменения размеров множеств уровня исходно равномерная сетка по  $s$  с течением времени теряет свою равномерность. Поэтому типичной является ситуация, когда какие-то области пространства игры заполнены сингулярными линиями слишком плотно, даже избыточно с точки зрения аппроксимации и дальнейшей визуализации, а некоторые значительные пространства — наоборот, не содержат вообще линий.

Общая идея восстановления сингулярных линий на основе отдельных точек и сингулярных поверхностей на основе линий заключается в том, что у нас имеется информация о соответствии отдельных точек. Соответ-

ствие выстраивается на основе анализа смены знака скалярного произведения вектора внешней нормали к сечению множества уровня и векторов, параллельных отрезкам  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  вектограмм игроков. На границе сечения имеются по две точки приложения отрезка  $\mathcal{P}(t)$  и, соответственно, две точки приложения отрезка  $\mathcal{Q}(t)$ . При этом в одной точке из пары скалярное произведение вектора внешней нормали и вектора, параллельного отрезку соответствующей вектограммы, меняет знак с плюса на минус при обходе границы, скажем, против часовой стрелки, а в другой точке — наоборот, с минуса на плюс. Эта характеристика точек приложения отрезков вектограмм игроков позволяет устанавливать соответствие между сечениями одного моста в разные моменты времени или же между сечениями разных мостов в один момент времени.

### 3.3.2 Пример 1: материальная точка на прямой

Опишем результаты численного построения сингулярных линий в следующей игре:

$$\dot{x}_1 = x_2 + v, \quad \dot{x}_2 = u, \quad t \in [0, 5], \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1. \quad (3.1)$$

Рассматривались два варианта функции платы:

$$\varphi_1(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Множествами уровня первой функции платы являются квадраты, с вершинами на осях координат, второй — круги.

На рис. 3.7а приведен общий вид максимального стабильного моста для игры (3.1) с функцией платы  $\varphi_1$ . Значение платы, определяющее терминальное множество, равно 1.7. Мост изображен в пространстве эквивалентной игры  $\xi_1, \xi_2, \tau$ .

На заднем плане виден квадрат множества уровня функции платы. На поверхности моста нанесены просчитанные сингулярные линии. Зеленым цветом отмечены рассеивающие линии, голубым — линии переключения, фиолетовым — экивокальные линии.

В целом, в плоскости геометрических координат (как исходных, так и эквивалентных) задача симметрична относительно начала координат — центра моста, поэтому система сингулярных линий также симметрична и состоит из двух частей: идущей по верхней части моста и по нижней (от последней виден конец экивокальной линии слева снизу).

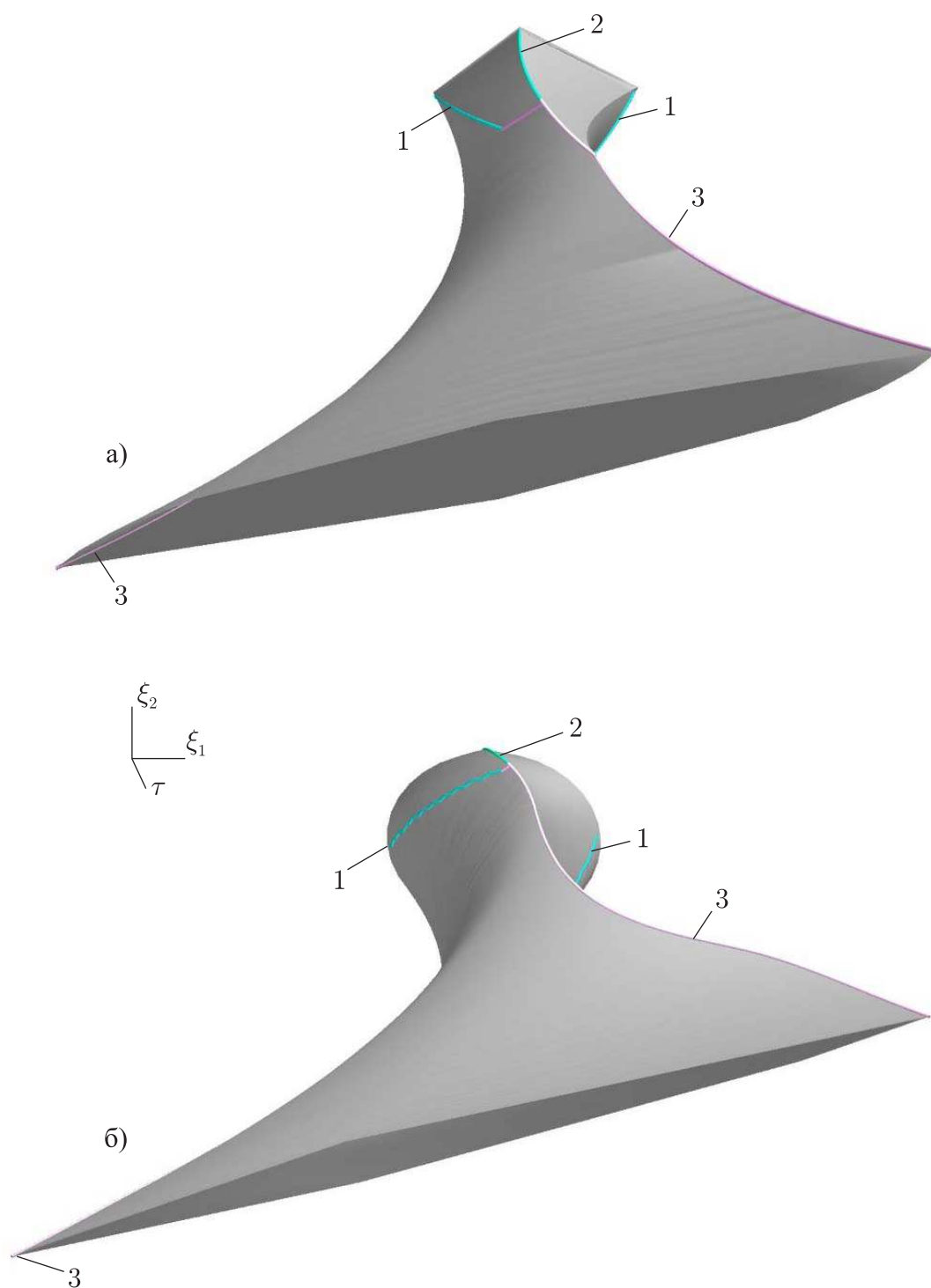


Рис. 3.7: Общий вид максимального стабильного моста и сингулярных линий на нем в игре (3.1): а) с функцией платы  $\varphi_1$ ; б) с функцией платы  $\varphi_2$ . Значение платы  $c = 1.7$  одинаково. Промежуток времени  $t \in [0, 5]$ . Зеленым цветом отмечены рассеивающие линии второго игрока (2), голубым — линии переключения первого игрока (1), фиолетовым — эквивокальные линии (3)

Вектограмма второго игрока  $\mathcal{Q}(t)$  в этой задаче — горизонтальный отрезок и прикладывается всегда к верхнему и нижнему углам сечения моста. Поэтому по верхнему гребню моста на начальном промежутке обратного времени идет рассеивающая линия. Вектограмма первого игрока  $\mathcal{P}(t)$  в начальный момент обратного времени — вертикальный отрезок, который с ростом обратного времени  $\tau$  начинает наклоняться. Видна линия переключения, идущая по боковой стороне моста. Когда отрезок вектограммы первого игрока получает наклон 45 градусов и становится параллельным стороне квадрата, происходит скачок сингулярной линии: в этот момент виден фиолетовый отрезок, совпадающий с плоской площадкой на боковой стороне моста и классифицированный как эквивокальный. В этот момент нарушается условие непараллельности, поэтому классификация не является точной.

Далее в обратном времени обе нормали  $n_{\mathcal{P}}(t)$  и  $n_{\mathcal{Q}}(t)$  попадают в конус нормалей верхней угловой точки. Поэтому по верхнему гребню идет эквивокальная линия.

На рис. 3.7б приведен общий вид максимального стабильного моста для игры (3.1) с функцией платы  $\varphi_2$ , сделанный с той же точки зрения, что и вид для предыдущего примера. Значение платы, определяющее терминальное множество, также равно 1.7. Мост просчитан на том же промежутке времени  $t \in [0, 5]$ . На заднем плане виден круг множества уровня функции платы. Мост также изображен в пространстве эквивалентной игры  $\xi_1, \xi_2, \tau$ .

Видно, что в целом структура сингулярных линий та же: вначале по верху моста идет рассеивающая линия за второго игрока, по боковой стороне — линия переключения за первого. Затем эти линии сливаются, на этот раз на негладкости, созданной вторым игроком, после чего возникает эквивокальная линия, которая далее идет по этому излому моста.

Различие ситуаций состоит в том, что в первом случае линия переключения идет по негладкости моста, а именно по излому, созданному углом начального квадрата. Поэтому линия переключения в задаче с функцией платы  $\varphi_1$  — без покидания. Наоборот, в задаче с функцией платы  $\varphi_2$  множества уровня платы гладкие, и линия переключения идет по гладкой боковой стороне. Поэтому в результате имеем линию переключения с покиданием. На рис. 3.8 показано поведение пучков оптимальных движений в этих примерах вблизи линий переключения. Оптимальные движения отме-

чены желтыми линиями. (Некоторая прерывистость этих линий обусловлена методикой визуализации.) Пучки оптимальных движений строятся программой, разработанной автором совместно с А.Н.Жариновым.

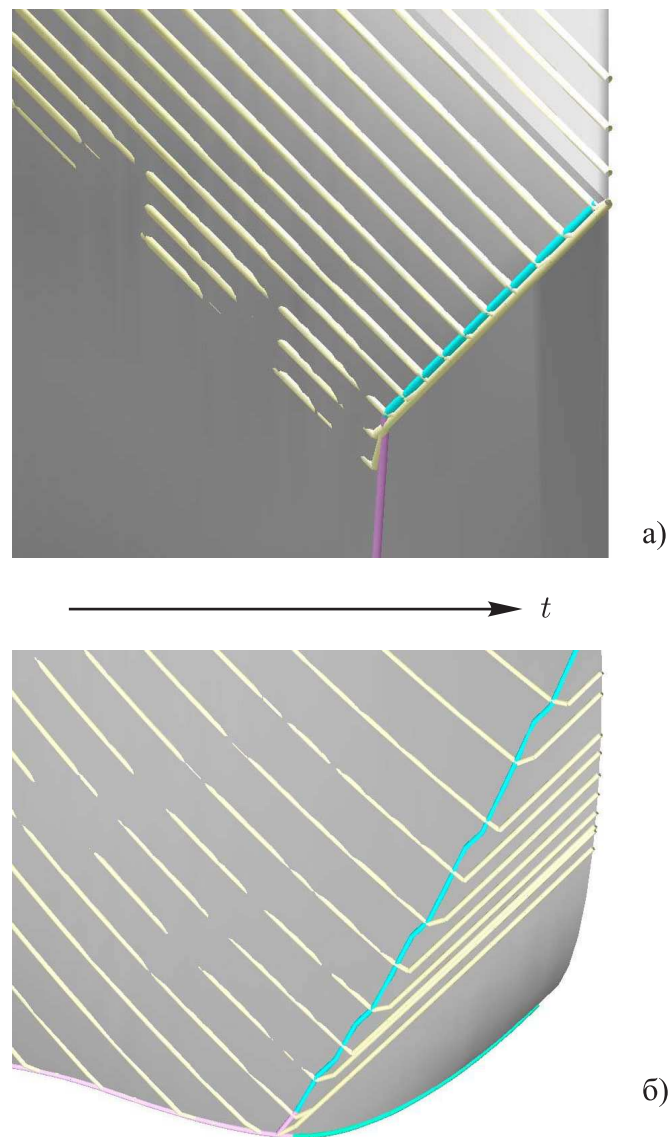


Рис. 3.8: Поведение пучков оптимальных движений вблизи линий переключения первого игрока. Движения отмечены желтыми линиями. а) линия переключения без покидания в примере с функцией платы  $\varphi_1$ ; б) линия переключения с покиданием в примере с функцией платы  $\varphi_2$

### 3.3.3 Пример 2: конфликтно-управляемый осциллятор

В качестве второго примера приведем численное исследование сингулярных линий в следующей игре:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + v, & \dot{x}_2 &= -x_1 + u, & t &\in [0, 8], \\ |u| &\leq 1, & |v| &\leq 0.9, & \varphi(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

На рис. 3.9 показаны три множества уровня функции цены (максимальных стабильных моста). Они просчитаны на промежутке  $[0, 8]$  обратного времени  $\tau$ . Эти множества соответствуют значениям  $c = 1.05, 1.4, 2.7$  функции платы.

Внутренний мост обрывается. На рис. 3.9а внешние два моста рассечены плоскостью, параллельной осям  $x_1, \tau$ . На рис. 3.9б плоскостью рассечены все три множества.

На рис. 3.10 приведен общий вид максимального стабильного моста для игры (3.2). Значение платы, определяющее терминальное множество, равно 1.4. Мост изображен в пространстве эквивалентной игры  $\xi_1, \xi_2, \tau$ .

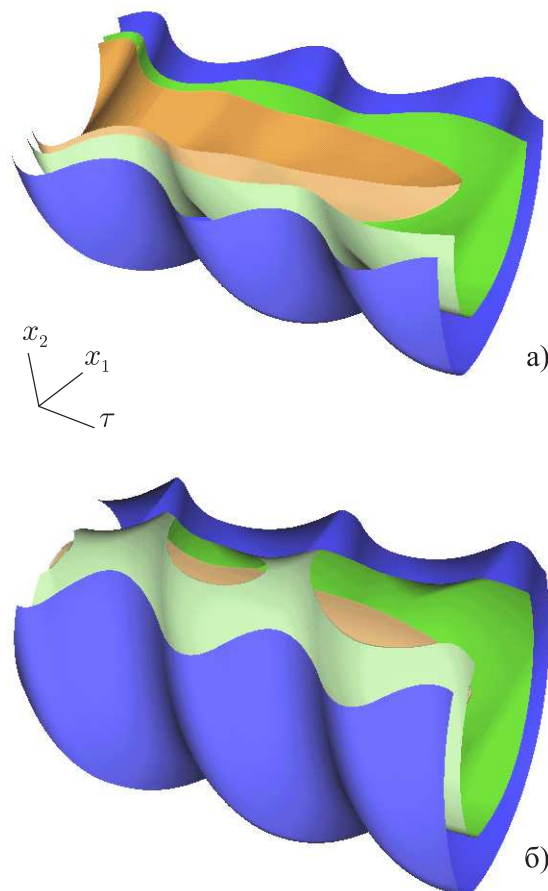


Рис. 3.9: Три максимальных стабильных моста для игры (3.2)

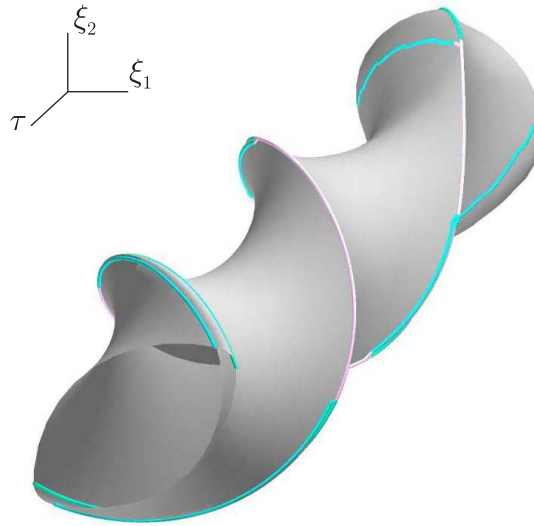


Рис. 3.10: Общий вид максимального стабильного моста и сингулярных линий на нем в игре (3.2); промежуток времени  $t \in [0, 8]$ , значение платы  $c = 1.4$ . Зеленым цветом отмечены рассеивающие линии, голубым — линии переключения, фиолетовым — эквивокальные линии

На заднем плане виден круг множества уровня функции платы. Цвета обозначений сингулярных линий те же, что и раньше: зеленый цвет — рассеивающие линии, голубой — линии переключения, фиолетовый — эквивокальные линии. Задача, как и ранее, симметрична по  $\xi$  относительно начала координат, поэтому сингулярные линии также состоят из двух симметричных групп.

В силу периодичности динамики игры мост тоже имеет некоторую периодичность. Сингулярные линии, в отличие от примеров из предыдущего параграфа, «закручиваются» вокруг оси моста. Кроме того, отметим следующий интересный момент. В начале обратного времени, как и в примерах предыдущего параграфа, линия переключения за первого игрока (с покиданием) и рассеивающая линия за второго игрока сливаются, образуя эквивокальную линию. Особенность состоит в том, что в дальнейшем, сделав примерно четверть полного оборота, эквивокальная линия расщепляется на линию переключения за первого игрока и рассеивающую за второго. Указанные две линии, в свою очередь, не расходясь далеко, через четверть оборота вновь соединяются в эквивокальную. Ситуация повторяется и далее. В целом, такое поведение сингулярностей понятно: сечение моста поворачивается, и с той же скоростью поворачиваются отрезки  $\mathcal{P}(t)$  и  $\mathcal{Q}(t)$  вектограмм игроков.

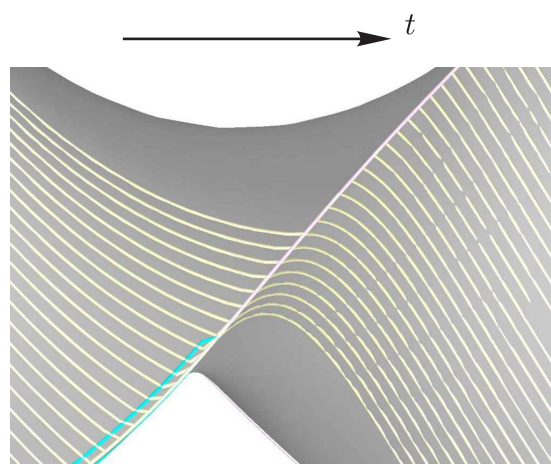


Рис. 3.11: Поведение пучка оптимальных движений вблизи экивокальной линии

На данном примере хорошо видно поведение пучка оптимальных движений вблизи экивокальной линии (рис. 3.11). Прямое время здесь идет слева направо. Ранее сформировавшийся пучок оптимальных движений приходит слева, попадая на экивокальную линию (отмечена фиолетовым цветом), собирается на ней и идет в дальнейшем по ней, расщепляясь в каждый момент (пучок движений, сходящих направо).

Рис. 3.12 показывает два вида системы сингулярных поверхностей для игры (3.2). Цвета поверхностей повторяют раскраску сингулярных линий на предыдущих рисунках: зеленым цветом отмечены рассеивающие поверхности за второго или за обоих игроков, голубым — поверхности переключения за первого игрока, фиолетовым — экивокальные поверхности.

На рис. 3.12 обратное время идет справа налево. Вблизи начала обратного времени  $\tau$  видны огрехи восстановления рассеивающей поверхности. На поверхностях нанесена сетка связей соответственных точек: одно семейство линий, «вертикальное», показывает связи между точками, снятыми с разных мостов в один и тот же момент времени; другое семейство, «продольное» — связи между точками, снятыми с одного моста. Видно, как некоторые линии сетки, идущие вдоль мостов, сходятся к центру. Это объясняется тем, что отдельные мосты обрываются; при этом размеры их сечений уменьшаются.

Пустое место в центре около оси времени получается потому, что при использованных начальных данных там недостаточно информации для восстановления: сказывается как раз то, что происходит разрежение сетки линий вследствие специфического поведения стабильных мостов перед обрывом. Были проведены расчеты, дающие плотность сингулярных точек,



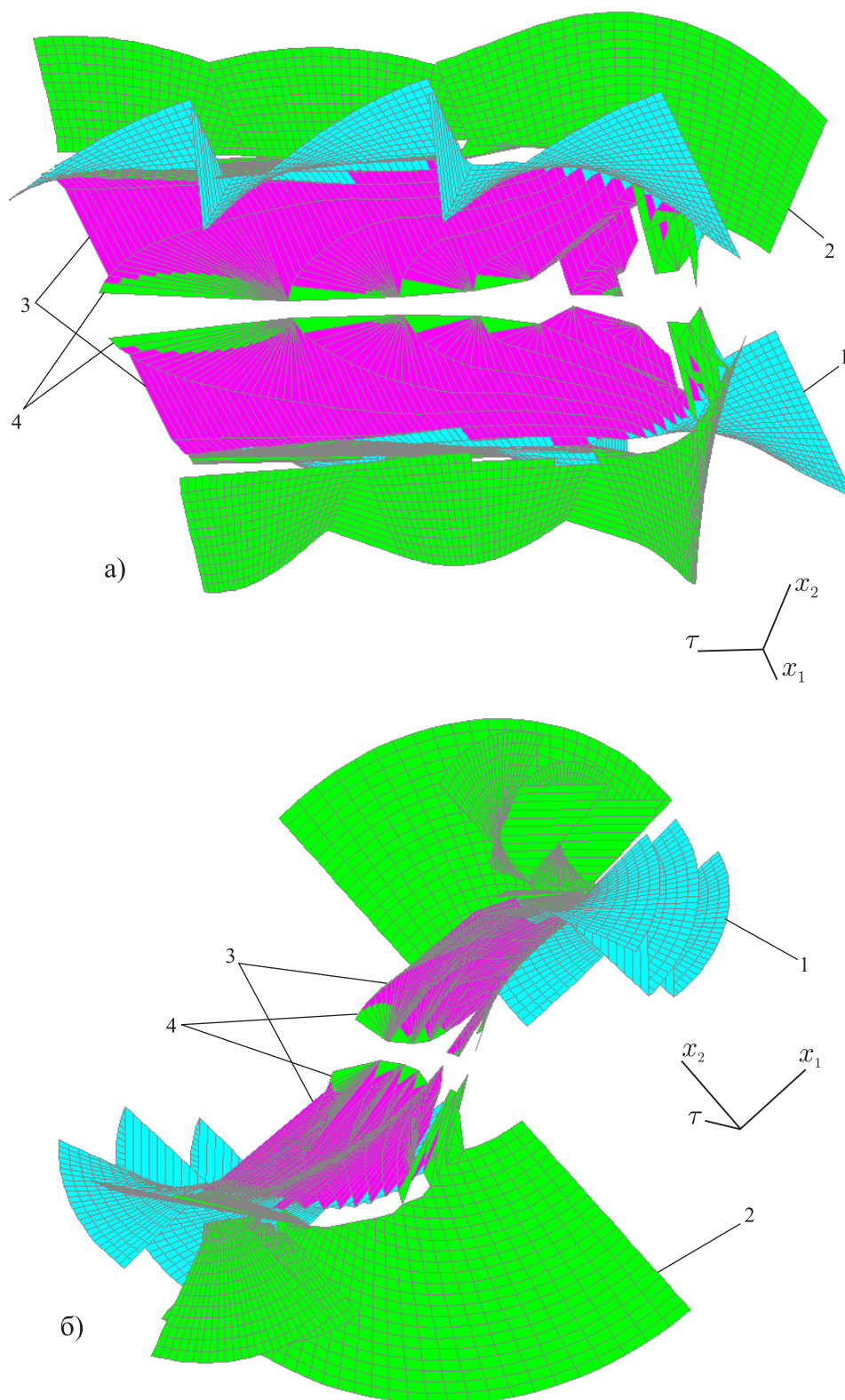


Рис. 3.12: Два вида системы сингулярных поверхностей для игры (3.2): 1 — поверхность переключения за первого игрока; 2 — рассеивающая поверхность за второго игрока; 3 — экивокальная поверхность; 4 — рассеивающая поверхность за обоих игроков

достаточную для аккуратного восстановления поверхности в этой области. Однако при этом плотность точек получилась избыточной в начале обратного времени, что не дало существующим алгоритмам визуализации восстановить и отобразить поверхности.

Интересным также является феномен расщепления экивокальной поверхности на рассеивающую поверхность и поверхность переключения с ростом значения цены. Подробнее это явление рассмотрено и объяснено в параграфе 3.3.9. Рис. 3.10 и 3.11 изображают мост, поверхность границы которого расположена как раз вблизи зоны расщепления экивокальности на рассеивание и переключение. Это объясняет то, что эти линии на границе моста расходятся не слишком далеко друг от друга.

### 3.3.4 Пример 3: «кнопка»

После отработки алгоритма построения и классификации сингулярных поверхностей на различных вариантах классических примеров «материальная точка на прямой» и «конфликтно-управляемый осциллятор» возник интерес к исследованию сингулярных поверхностей в других задачах. В результате поиска был обнаружен пример, названный «кнопка». Соответствующая дифференциальная игра описывается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + v_1, & |u| &\leq 1, & (v_1, v_2)^T &\in Q, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u + v_2, & \varphi(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Данный пример является исключительно модельным. Общий вид типичного максимального стабильного моста в исходных координатах  $x_1$ ,  $x_2$  приведен на рис. 3.13. Этот стабильный мост просчитывался для случая, когда множество  $Q$  было выбрано в виде отрезка  $\{(v_1, v_2) : |v_1| \leq 0.9, v_2 = 0\}$ . Значение платы было взято равным  $c = 7.0$ . Обрыв моста произошел в момент  $\tau = 6.9$  обратного времени.

Свое название пример получил за характерное сходство внешнего вида стабильного моста с канцелярской кнопкой. Такая форма моста обуславливается существенной асимптотической устойчивостью системы в обратном времени, которую не в состоянии разрушить своим воздействием первый игрок. Это приводит к тому, что сечения моста уменьшаются и мост обрывается под действием второго игрока.

Структура сингулярных поверхностей в рассматриваемом примере ти-

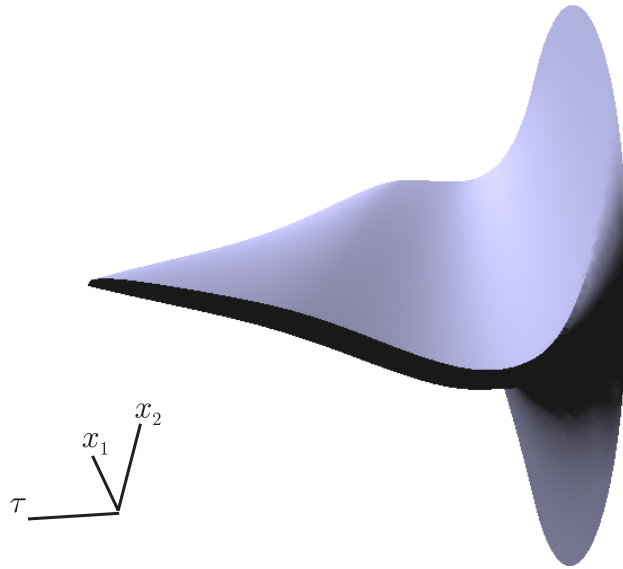


Рис. 3.13: Общий вид типичного моста для игры (3.3)

пична: начальные лепестки рассеивающей поверхности за второго игрока и поверхности переключения за первого сливаются затем в эквивокальную поверхность, которая в центре у оси времени переходит в рассеивающую поверхность за обоих игроков.

В силу такой простой структуры именно этот пример был выбран для исследования зависимости строения сингулярных поверхностей от параметров игры. Для одного и того же интервала значений платы  $c \in [0.5, 7.0]$  было просчитано шесть вариантов игры с различным размером и ориентацией отрезка  $Q$  ограничений на управление второго игрока. Были взяты два размера отрезка  $Q$ : отрезок длины 1.8 — случай «сильного» первого игрока — и отрезок длины 2.2 — случай «слабого» первого игрока. (В первом случае длина отрезка  $Q$  меньше длины отрезка  $P$ , а во втором — больше.) Для каждого из этих случаев просчитывалось три варианта положения отрезка  $Q$ . Он брался с серединой в начале координат, но с разной ориентацией:

а) отрезок  $Q$  лежит на горизонтальной оси  $v_1$ :

$$Q = \{v_2 = 0\} \cap \{v_1^2 + v_2^2 \leq l^2\};$$

б) отрезок  $Q$  лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов:

$$Q = \{v_1 = v_2\} \cap \{v_1^2 + v_2^2 \leq l^2\};$$

в) отрезок  $Q$  лежит на вертикальной оси  $v_2$ :

$$Q = \{v_1 = 0\} \cap \{v_1^2 + v_2^2 \leq l^2\}.$$

Здесь  $l$  — половина длины отрезка  $Q$ , равная, соответственно, 0.9 или 1.1.

Результаты построения системы сингулярных поверхностей приведены на рис. 3.14 и 3.15. Обозначение подрисунков соответствует вариантам ориентации отрезка  $Q$ . Цифровые выноски сохраняют тот же смысл, что и на рис. 3.12. Все рисунки сделаны в одинаковом масштабе.

На рисунках а) сингулярные поверхности имеют в целом сходную структуру, за тем лишь исключением, что на рис. 3.15 протяженность в обратном времени системы поверхностей меньше в силу бóльших возможностей

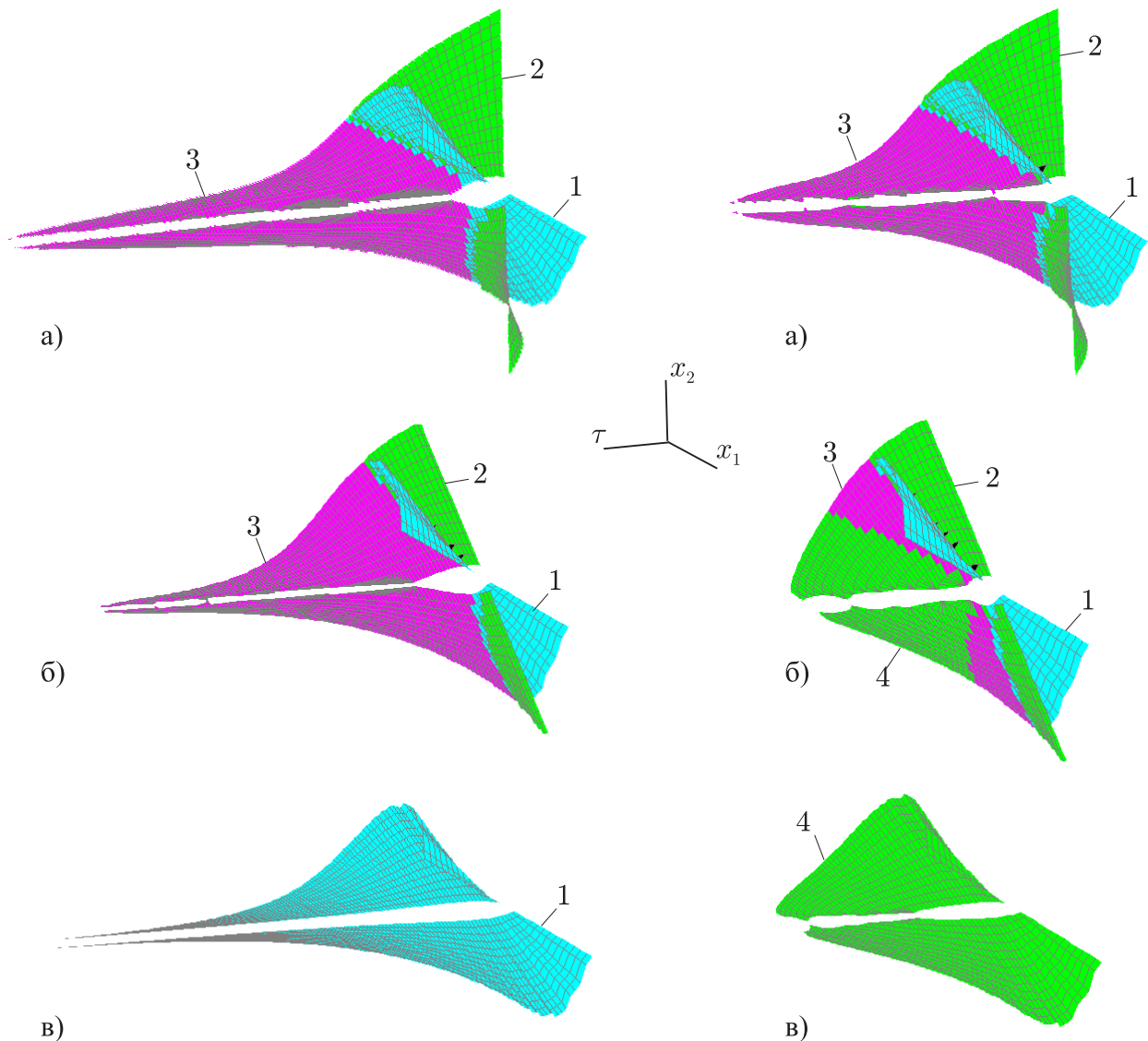


Рис. 3.14: Изменение структуры сингулярных поверхностей в игре (3.3) при сближении отрезков  $P$  и  $Q$  в случае сильного первого игрока

Рис. 3.15: Изменение структуры сингулярных поверхностей в игре (3.3) при сближении отрезков  $P$  и  $Q$  в случае слабого первого игрока

второго игрока. На рисунках б) становятся видны различия в изменении системы поверхностей: в случае сильного первого игрока увеличивается экивокальная область, а в случае слабого первого игрока — рассеивающая. Наконец, в случае в), когда имеет место «однотипность» объектов и игра фактически сводится к задаче управления, остается единственный тип поверхности, соответствующий более сильному игроку. В случае сильного первого игрока это — поверхность переключения (в данном случае, за обоих игроков), а в случае слабого первого игрока — рассеивающая поверхность (также за обоих игроков).

Важным является то, что когда игра превращается в задачу управления, в обоих случаях полностью пропадает экивокальная поверхность, которая не может существовать в задачах управления.

### 3.3.5 Сравнение с аналитическими результатами

Приведем результаты численного исследования сингулярных поверхностей, полученные при помощи нашего алгоритма, для следующего примера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + v, & \dot{x}_2 &= u, & |u| &\leq 1, & |v| &\leq 1, \\ \varphi(x_1, x_2) &= \begin{cases} |x_1|, & \text{если } x_2 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отметим, что множества уровня функции платы представляют собой отрезки, расположенные на оси абсцисс. Вследствие этого они имеют пустую внутренность. Качественное исследование рассматриваемого примера было сделано в работах [20, 21, 22, 23].

А именно, в этих работах аналитическими методами была построена система сингулярных поверхностей на промежутке  $\tau \in [0, +\infty)$ . Некоторые части этих поверхностей были описаны явно, для остальных частей было дано качественное описание с подробным указанием их свойств.

В целом пространство игры разбивается некоторой поверхностью на две части. По одну сторону от этой поверхности оптимальные управляющие воздействия игроков принимают одно крайнее значение, по другую — противоположное. Сама поверхность набирается из некоторых кусков, одни из которых — рассеивающие (за обоих игроков), другие — экивокальные.

Эволюция множеств уровня в обратном времени в этом примере идет следующим образом. Поскольку изначально вектограмма  $\mathcal{P}(t)$  первого иг-

рока — вертикальный отрезок, далее начинающий наклоняться, сохраняя при этом вертикальный полуразмер, равный 1, то сечения множеств уровня функции цены начинают расти по вертикали. При этом они получают внутренность.

Одновременно, из-за того, что вектограмма  $Q(t)$  второго игрока — горизонтальный отрезок, множество начинает сокращаться по горизонтали. Так происходит до тех пор, пока у сечений множеств уровня не пропадут горизонтальные площадки, обусловленные формой начального сечения в виде горизонтального отрезка. Момент обратного времени, когда горизонтальные площадки полностью исчезают, обуславливается начальным их размером, т.е. выбранным уровнем платы.

В этот момент сечение множества уровня принимает вид наклонной «чечевицы», в целом, сходный с изображением на рис. 3.7 (стр. 83). Нормали  $n_P(t)$  и  $n_Q(t)$  отрезков вектограмм первого и второго игроков при этом попадают в конус внешних нормалей угловой точки. В зависимости от того, насколько отрезок вектограммы первого игрока успел наклониться и, как следствие, насколько он успел увеличить свой размер, далее могут иметь место несколько ситуаций:

1) горизонтальный размер отрезка вектограммы  $P(t)$  настолько мал в сравнении с размером отрезка вектограммы  $Q(t)$  второго игрока, что вставка первого игрока полностью исчезает, размер сечения начинает быстро уменьшаться и мост обрывается. При этом угловая точка классифицируется как рассеивающая.

2) первый игрок достаточно силен, чтобы его вставка не уничтожалась полностью, однако отбрасывается ее значительная часть и при дальнейших построениях размер сечения стабильного моста начинает уменьшаться (см. рис. 3.16), хотя и не так быстро, как в первом случае. Угловая точка классифицируется как эквивокальная.

3) наконец, если исходно горизонтальная площадка достаточно велика и до ее полного исчезновения проходит весьма большой промежуток времени, то вектограмма первого игрока достаточно велика и при построении следующего сечения его размер увеличивается (см. рис. 3.17). Угловая точка также классифицируется как эквивокальная.

Сравнение второй и третьей ситуаций свидетельствует о том, что существует некоторое критическое значение платы, мост для которого не

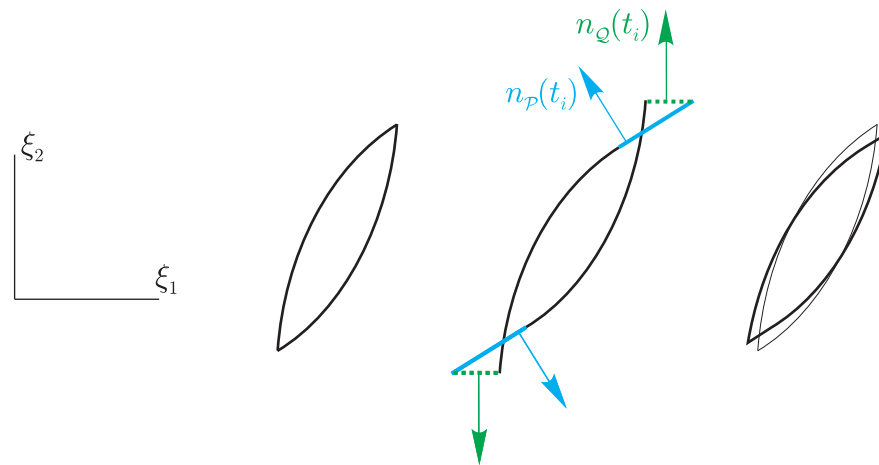


Рис. 3.16: Ситуация первого игрока, слабого к моменту исчезновения горизонтальных площадок: схема конструирования нового сечения при дискретных построениях с уменьшением вертикального размера

обрывается, но и не увеличивает размер своих сечений.

В работах [20, 21, 22, 23] проведено детальное исследование поведения эквивокальных линий. Установлено, что при значениях платы, близких к критическому, поведение мостов является весьма сложным. А именно, они не начинают сразу же уменьшать или увеличивать размер своих сечений, а некоторое время практически сохраняют его и только потом достаточно быстро срываются к нулю или к бесконечности. На рис. 3.18, взятом из статей [20, 23], показаны проекции эквивокальных линий на плоскость исходных координат  $x_1$ ,  $x_2$ , снятых с множеств уровня, соответствующих значениям платы, близким к критическому.

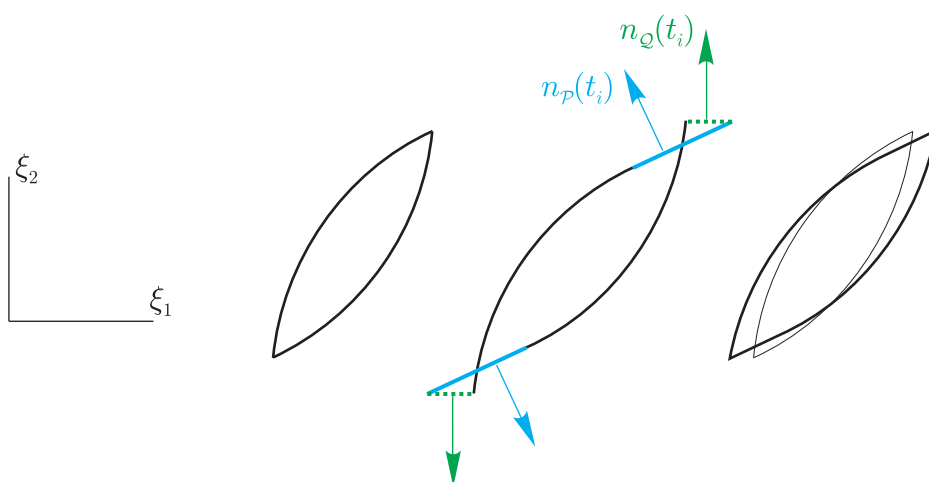


Рис. 3.17: Ситуация первого игрока, сильного к моменту исчезновения горизонтальных площадок: схема конструирования нового сечения при дискретных построениях с увеличением вертикального размера

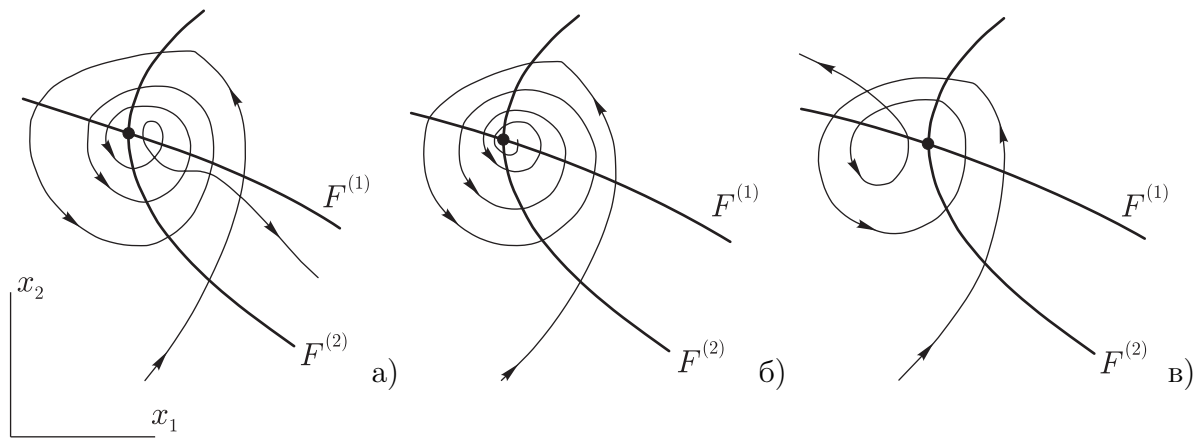


Рис. 3.18: Проекция на плоскость исходных координат  $x_1, x_2$  экивокальных линий, снятых с множеств уровня, соответствующих значениям платы, близким к критическому: а) для значений, меньших критического; б) для критического значения; в) для значений, больших критического.  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  — вспомогательные кривые (параболы), на точку пересечения которых «наматывается» экивокальная линия, снятая с критического множества уровня

Описываемый пример был исследован численно при помощи разработанных программ. Счет велся на промежутке обратного времени  $\tau \in [0, 6]$ . Множества уровня функции платы — отрезки — подменялись прямоугольниками, имеющими очень малую высоту: отрезок  $[-a, +a]$  на горизонтальной оси подменялся прямоугольником с вершинами в точках  $(-a, -0.001a)$ ,  $(-a, +0.001a)$ ,  $(+a, +0.001a)$ ,  $(+a, -0.001a)$ . Был охвачен промежуток значений платы  $c \in [0.1, 2.0]$  с шагом 0.1.

Система сингулярных линий, снятых с просчитанных мостов, в проекции на плоскость  $x_2, \tau$  показана на рис. 3.19. Справа, в начале обратного времени, видна область, заполненная рассеивающими линиями. Они лежат на мостах, описанных выше под случаем 1. Затем идет группа линий, снятых также с обрывающихся мостов, но соответствующих ситуации под номером 2. Вначале они имеют экивокальный тип, а в конце — рассеивающий. Далее на рисунке видна линия, не уходящая ни к оси времени, ни от нее, т.е. снятая с моста, очень близкого к критическому. Наконец, видны три линии, снятые с расширяющихся мостов (случай 3).

На рис. 3.20 показана проекция на плоскость  $x_1, x_2$  системы экивокальных линий в некоторой области точки пересечения вспомогательных линий  $F^{(1)}$  и  $F^{(2)}$  (рис. 3.18). Рис. 3.21 показывает увеличенный фрагмент предыдущей иллюстрации. Видно, что численные результаты хорошо совпадают с теоретическими, приведенными в работах [20, 23].



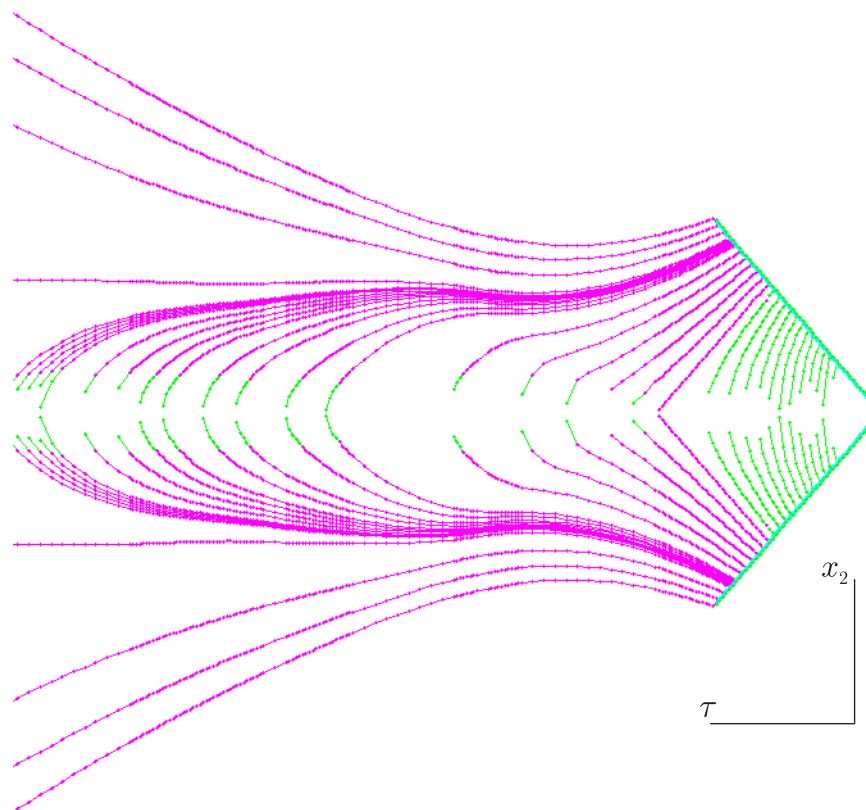


Рис. 3.19: Численно просчитанная система сингулярных линий для игры (3.4)

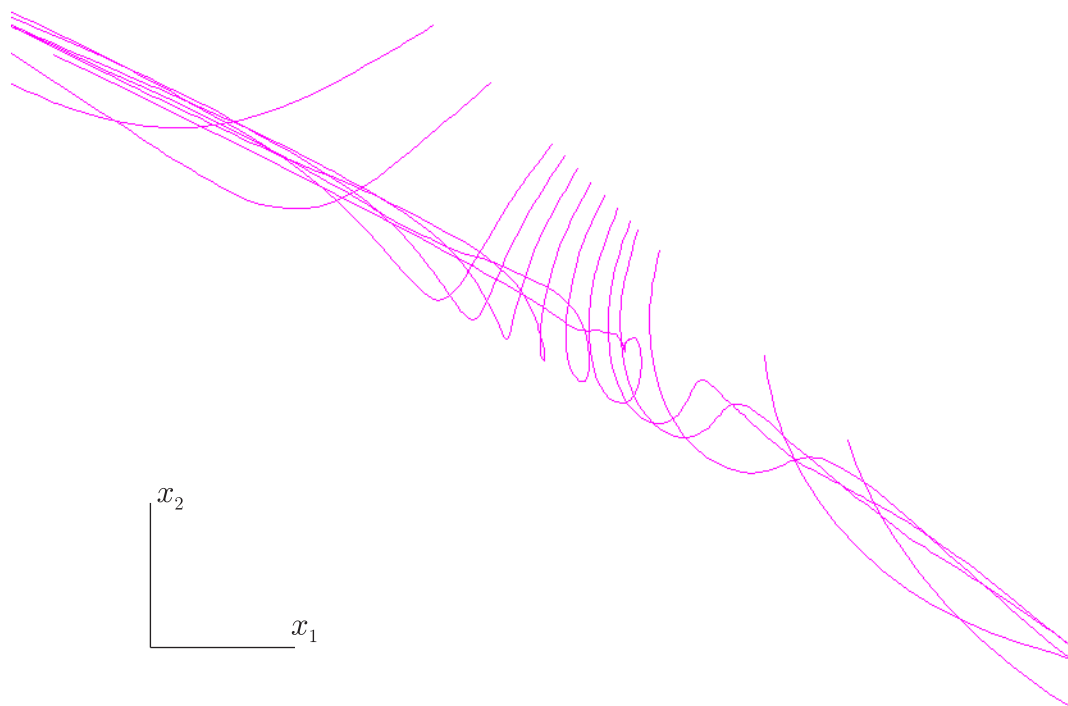


Рис. 3.20: Проекция экивокальных линий на плоскость  $x_1, x_2$

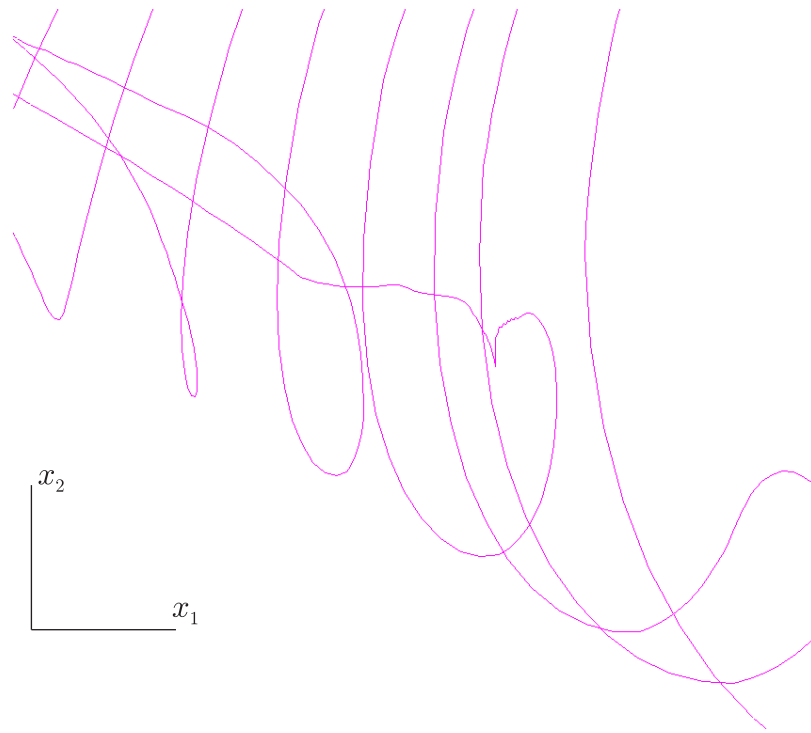


Рис. 3.21: Фрагмент рис. 3.20

Теоретически вычисленный диапазон значений платы, содержащий критическое значение, равен  $[1.298, 1.500]$ . Диапазон, полученный численным счетом:  $[1.34, 1.37]$  (для этого счет проводился на более частой сетке значений параметра  $c$ ).

### 3.3.6 Замечание к таблице классификации сингулярностей

Вернемся к примеру, рассматривавшемуся в параграфе 3.3.3. На рис. 3.12 (стр. 89) был приведен общий вид сингулярных поверхностей для этого примера. На рисунке имеются резкие в течение одного или нескольких шагов по времени скачки внешних «лепестков»: поверхностей переключения за первого игрока и рассеивания за второго.

На рис. 3.22 приведен фрагмент границы максимального стабильного моста, лежащий в области внешних «лепестков». Видны линии негладкости, соответствующие «медленному» развитию рассеивающей линии, и небольшой по времени промежутков, где негладкость границы моста отсутствует. На этом промежутке происходит «скачок» рассеивающей линии, набранной из точек негладкости.

Очевидно, что здесь должны присутствовать точки, не являющиеся регулярными в смысле определения, данного в начале главы в разделе 3.2 (стр. 72): существуют точки приложения отрезка вектограммы  $\mathcal{Q}(t)$  вто-

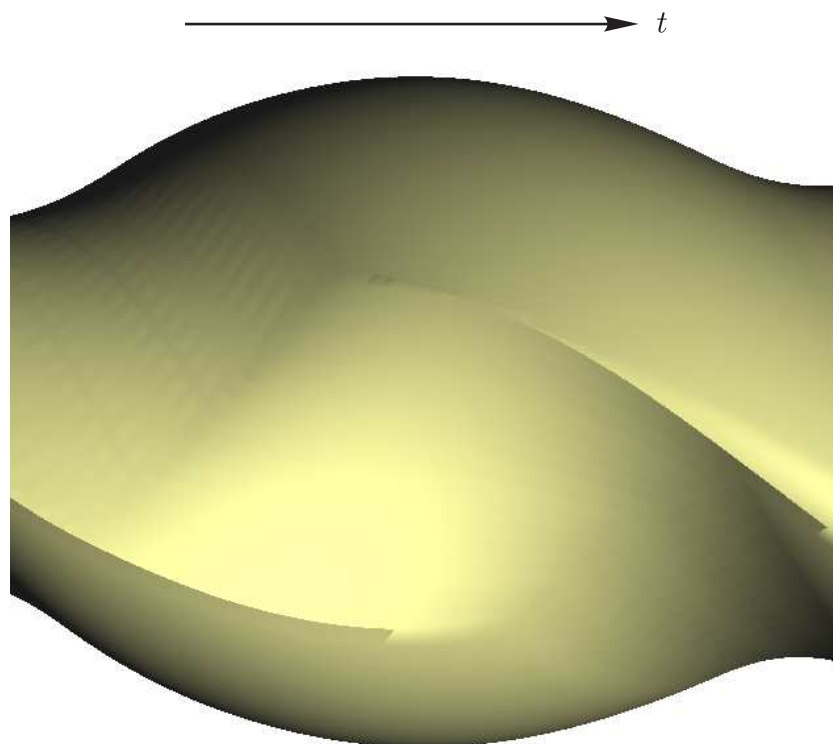


Рис. 3.22: Фрагмент границы моста для игры (3.2) около скачка рассеивающей линии

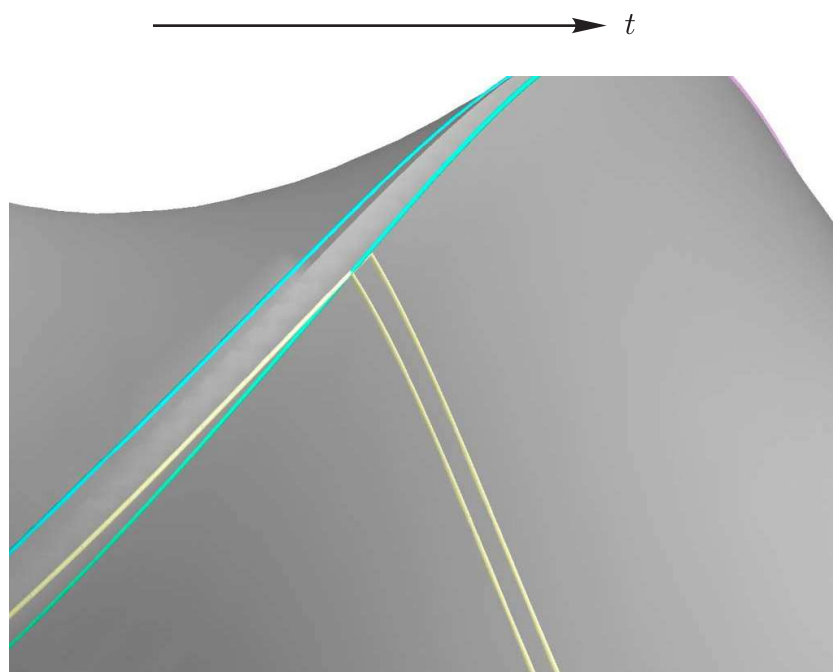


Рис. 3.23: Поведение оптимальных движений вблизи сингулярной линии, обусловленной вторым игроком. Моделирование пучка оптимальных движений проводилось в предположении, что это рассеивающая линия

рого игрока.

Формально, согласно табл. 3.1 (стр. 76) линия из точек приложения вектограммы  $Q(t)$  классифицируется как рассеивающая. Однако это неверно. На рис. 3.23 показан фрагмент моста, содержащий такую линию и оптимальное движение, просчитанное численно на основе приведенной выше классификации. Очевидно, что рассматриваемая линия не может быть рассеивающей. Во-первых, она принимает на себя оптимальное движение. Во-вторых, если выпустить движение из точки, лежащей на этой линии, и расщепить его под действием двух крайних управлений второго игрока (согласно определению рассеивающей точки), то оба полученных движения сойдут на одну сторону.

Если подвергнуть сомнению идею о том, что эта линия должна быть классифицирована как рассеивающая, то естественной ее классификацией должно быть переключение за второго игрока с покиданием. Действительно: движение приходит на линию, затем меняется управление второго игрока, движение изламывается и сходит на другую сторону.

### 3.3.7 Пример линии переключения за второго игрока с покиданием

Для подтверждения этой гипотезы рассмотрим следующий пример дифференциальной игры:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u + v, & x &\in \mathbb{R}^2, \\ u &\in P = \{(u_1, u_2) : u_2 = 0, |u_1| \leq 0.1\}, & v &\in Q(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Терминальное множество, от которого в обратном времени вытягивается максимальный стабильный мост, изображено на рис. 3.24. Его граница состоит из двух дуг окружностей радиуса  $R = 100$  и раствора  $\alpha = 4^\circ \approx 0.0349$  рад. Динамика системы в обратном времени имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = -u - v.$$

Множество  $Q(t)$  является отрезком длины  $l = 2$  с центром в начале координат. Пусть в начальный момент обратного времени отрезок  $Q(t)$  наклонен вправо от вертикальной оси на угол  $2^\circ$ . Тогда в этот момент верхняя точка приложения вектограммы второго игрока совпадает с верхней угловой точкой терминального множества. Предположим, что затем в

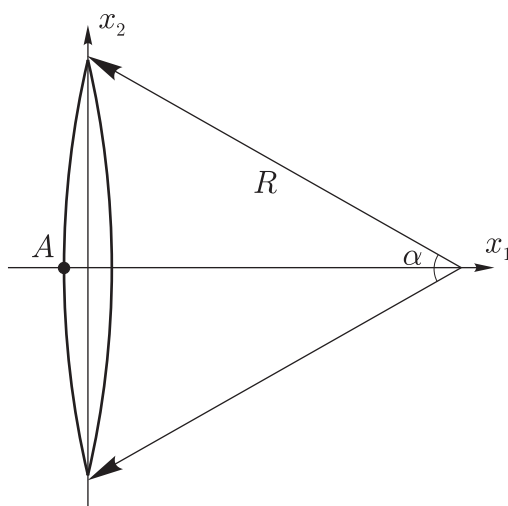
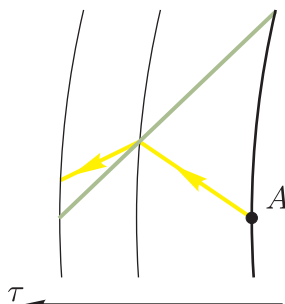


Рис. 3.24: Терминальное множество для игры (3.5)

обратном времени отрезок  $Q(t)$  поворачивается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega = 0.02$ , т.е. точка приложения вектограммы второго игрока смещается вниз по левой боковой стороне с линейной скоростью  $\omega R = 2$ .

Рассмотрим в обратном времени движение, выходящее из точки  $A$ , лежащей на середине левой боковой стороны. Оптимальным управлением первого игрока здесь будет  $u^* = (1, 0)$ , оптимальным управлением второго игрока — левый нижний конец отрезка  $Q(t)$ . В результате в обратном времени оптимальное движение пойдет вверх по левой боковой стороне с линейной скоростью  $l/2 = 1$ . Стало быть, в какой-то момент оптимальное движение встретит точку приложения отрезка  $Q(t)$  или, иными словами, выйдет на сингулярную линию, обусловленную вторым игроком. (Отрезок первого игрока всегда прикладывается в верхней и нижней точках сечения максимального стабильного моста.)

При этом точка приложения отрезка  $Q(t)$  продолжит движение вниз по

Рис. 3.25: Оптимальное движение, выходящее в обратном времени из точки  $A$  (желтая линия), и точка приложения вектограммы второго игрока (светло-зеленая линия)

левой боковой стороне со скоростью 2. Оптимальное управление второго игрока сменится на другой конец отрезка  $Q(t)$ , и оптимальное движение тоже пойдет вниз, но со скоростью только 1. Стало быть, движение отстанет от сингулярной линии, и мы получим ситуацию, типичную для случая переключения с покиданием (рис. 3.25).

### 3.3.8 Уточнение таблицы классификации сингулярностей

На основании рассуждений предыдущего параграфа можно сделать вывод, что классификация ситуации рассеивания за второго игрока должна быть уточнена. Уточнение производится на основе анализа «гладкости» границы вблизи соответствующей вершины; при численных построениях — на

Таблица 3.2: Уточненная классификация сингулярностей

Число нормалей	Метки	Дополнительное условие	Выделяемый объект	Подусловие	Тип сингулярности
1	$NP$		Ребро	Концы ребра — «гладкие» вершины	Переключение за 1-го с покиданием
				Один из концов ребра — «негладкая» вершина	Переключение за 1-го без покидания
2	$FS, FS$	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Вершина	В конусе <i>не</i> содержится нормаль $n_P(t_i)$ ; вершина «гладкая»	Переключение за 2-го с покиданием
				В конусе <i>не</i> содержится нормаль $n_P(t_i)$ ; вершина «негладкая»	Рассеивание за 2-го
				В конусе содержится нормаль $n_P(t_i)$	Рассеивание за обоих
2	$FS, FS + NP$	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Ребро, связанное с нормалью $n_P(t_i)$		Эквивокальность

основе проверки величины угла конуса внешних нормалей в сравнении с заданным порогом. Аналогичная информация привлекается при разделении ситуации переключения за первого игрока (с покиданием/без покидания). Исправленная таблица классификации сингулярностей представлена ниже (табл. 3.2). Подчеркнем, что теперь процедура классификации должна дополнительно анализировать раствор конуса нормалей обрабатываемой вершины или вершин, являющихся концами обрабатываемого ребра.

### 3.3.9 Структура сингулярных поверхностей

Многие естественные функции платы обладают свойством уровневого выметания. К ним относятся функции, использующие понятие расстояния в той или иной метрике (сумма модулей координат, евклидово расстояние, максимум модулей координат), а также функции платы, заданные в виде функционала Минковского некоторого выпуклого замкнутого множества:

$$\varphi_M(x) = \min\{c : x \in cM\}.$$

В главе 2 показано, что свойство уровневого выметания наследуется функцией цены. При наличии свойства уровневого выметания сечение сингулярных поверхностей в каждый момент распадается на две группы, каждая из которых имеет структуру, схематично изображенную на рис. 3.26. Обозначения на рисунке:

- $D_{I,II}$  — рассеивающая линия за обоих игроков;
- $E_q$  — эквивокальная линия;
- $D_{II}$  — рассеивающая линия за второго игрока;

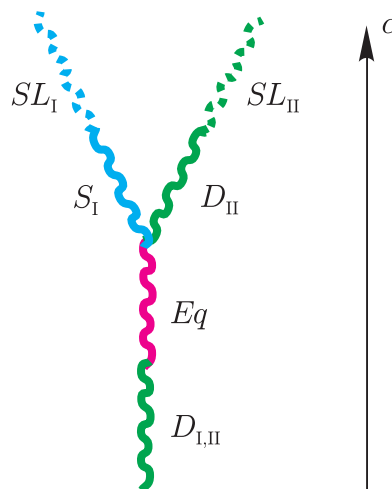


Рис. 3.26: Схема структуры сингулярных поверхностей в случае, когда функция платы удовлетворяет условию уровневого выметания

- $SL_{II}$  — переключение с покиданием за второго игрока;
- $S_I$  — переключение без покидания за первого игрока;
- $SL_I$  — переключение с покиданием за первого игрока.

Ось  $s$  показывает направление возрастания цены.

Основные соображения при построении данной схемы следующие. В силу наличия свойства уровневого выметания у функции цены, в случае, когда внутреннее множество уровня имеет излом границы, внешние множества не могут иметь изломы с более острыми углами при вершине (т.е. с более широкими конусами внешних нормалей в точке излома). Более того, если внутреннее множество уровня имеет излом границы, внешние множества уровня, начиная с некоторого значения цены, могут иметь гладкую границу в данном диапазоне внешних нормалей.

Это наблюдение объясняет возможность расщепления линии рассеивания за обоих игроков или эквивокальной линии на линию рассеивания за второго игрока и линию переключения за первого. Действительно, острый излом границы множества уровня для малых значений функции цены, внешний конус нормалей которого включает нормали  $n_P(t)$  и  $n_Q(t)$  отрезков вектограмм обоих игроков, становится менее острым, и, например, нормаль  $n_P(t)$  выпадает из конуса. Как следствие, точки приложения отрезков вектограмм игроков становятся различными — единая сингулярная линия распадается на две.

Свойство уменьшения негладкостей с ростом значения цены обуславливает переход от линии переключения за первого игрока без покидания к линии переключения за первого игрока с покиданием. Первая из них связана с негладкостью границы сечения множества уровня в точке приложения отрезка вектограммы  $\mathcal{P}(t)$  первого игрока, вторая — с гладкостью границы в этой точке. Аналогично обстоит дело с переходом от линии рассеивания за второго игрока к линии переключения за второго игрока с покиданием.

Эта же свойство обосновывает невозможность слияния двух сингулярных линий в одну (при росте по  $s$  в фиксированный момент времени).

При рассмотрении схемы следует принимать во внимание, что любой ее сегмент может быть пустым. Например, рассеивающая линия за обоих игроков может сразу, без перехода в эквивокальность, расщепляться на рассеивание за второго игрока и переключение за первого.



Таким образом, можно утверждать, что наличие внешних сингулярных «лепестков» в примере, обсуждавшемся в параграфе 3.3.3, является типичным для линейных дифференциальных игр со скалярными управлениями игроков в случае, когда функция платы обладает свойством уровневого выметания.

### 3.4 Игры с нескаллярными управлениями

В этом разделе рассматриваются линейные дифференциальные игры, в которых ограничения  $P$  и  $Q$  на управления игроков являются строго выпуклыми компактами в своих пространствах. Множество называем *строго выпуклым*, если оно выпукло и кроме того в случае, когда концы некоторого отрезка принадлежат границе этого множества, то внутренние точки отрезка лежат во внутренности множества. Иными словами, множество строго выпукло, если его граница не содержит прямолинейных участков, площадок.

В силу того, что множества  $P$  и  $Q$  являются строго выпуклыми, векторы игроков  $\mathcal{P}(t)$ ,  $\mathcal{Q}(t)$  тоже являются строго выпуклыми компактами на плоскости во все моменты обратного времени.

Идеи построения и классификации сингулярных точек напрямую не переносятся со случая скалярных управлений на случай нескаллярных управлений. При дискретизации исходной системы получается аппроксимирующая игра, оптимальные движения которой могут расщепляться и сливаться в точках, которые для непрерывной игры являются регулярными. Такие ситуации условно можно называются «микрослияние» и «микрорасщепление» (см. рис. 3.27а и б). Они являются следствием дискретизации и исчезают при переходе к пределу.

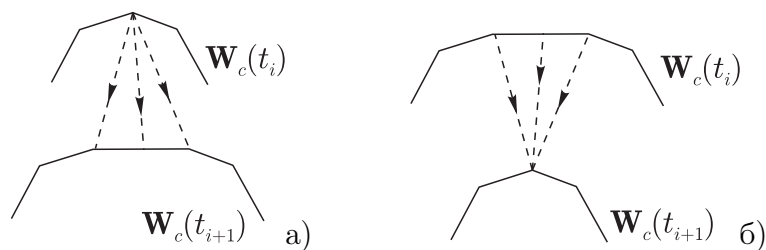


Рис. 3.27: Ситуации «микрорасщепления» (а) и «микрослияния» (б) в аппроксимирующей игре с нескаллярными управлениями

### 3.4.1 Построение сингулярностей в случае нескаллярных ограничений

Приведенный в этом параграфе алгоритм направлен на обнаружение сингулярных точек следующих трех типов: рассеивающих, эквивокальных и фокальных. Рассеивание в случае строго выпуклых ограничений на управления игроков может быть только за обоим игроком: оптимальные управления обоих меняются скачком при рассмотрении точек по разные стороны от рассеивающей поверхности. Эквивокальные поверхности по-прежнему могут управляться только вторым игроком.

Ситуации переключения с покиданием возникают на гладких участках границы стабильного моста и не обнаруживаются предлагаемым алгоритмом. Также алгоритм не обнаруживает универсальные сингулярные точки, поскольку в них функция цены дифференцируема и ее множества уровня не имеют там изломов границы, на поиске которых базируется алгоритм.

В основу алгоритма обнаружения сингулярных точек для случая нескаллярных управлений игроков положено непосредственное отыскание точек негладкости границ сечений максимальных стабильных мостов. Классификация основана на анализе динамики развития конусов внешних нормалей в соответствующих точках негладкости границ соседних сечений (рис. 3.28а) Соответствие точек негладкости между отдельными сечениями моста и между сечениями разных мостов в один момент времени устанавли-

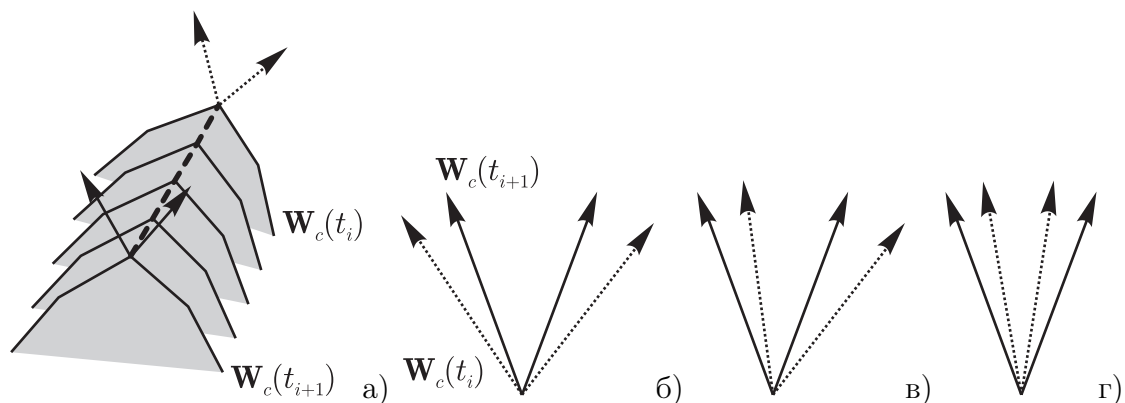


Рис. 3.28: а) основная идея алгоритма выявления и классификации сингулярностей — обнаружение точек «негладкости» на границе сечений максимальных стабильных мостов и анализ динамики развития конуса внешних нормалей вдоль линий негладкости; сплошные стрелки — конус нормалей в момент  $t_{i+1}$ , пунктирные стрелки — конус нормалей в момент  $t_i$ ; б) рассеивающая точка — конус раскрывается в обратном времени; в) эквивокальная точка — границы конуса движутся в одну сторону; г) фокальная точка — конус сужается в обратном времени

ливается по условию непустоты пересечения внутренностей конусов внешних нормалей для этих точек.

Возможны три случая эволюции конуса общего положения: конус нормалей расширяется в обратном времени (рис. 3.28б), конус сужается в обратном времени (рис. 3.28г), обе границы конуса идут в одном направлении — конус поворачивается (рис. 3.28в). В каждом из этих трех случаев можно изучить поведение пучков оптимальных движений вблизи линии негладкости так же, как это было сделано для скалярного случая в параграфе 3.3.1.

В случае расширения конуса в обратном времени, в прямом времени оптимальные движения сходят по разные стороны от сингулярной линии; такое поведение соответствует рассеивающей ситуации.

Если конус сужается в обратном времени, оптимальные движения в прямом времени приходят на сингулярную линию и далее идут по ней; это соответствует фокальной ситуации.

Третья ситуация, когда конус поворачивается, соответствует экивокальности. При этом оптимальные движения приходят с той стороны, которая в обратном времени поворачивается внутрь конуса, а сходят на ту сторону, которая поворачивается вовне конуса.

В качестве следствия из рассмотрения трех указанных ситуаций можно высказать гипотезу о невозможности ситуации переключения без покидания.

Заметим, что в силу дискретности аппроксимирующей задачи может оказаться так, что одна или обе границы конуса в точке негладкости границы на протяжении одного шага по времени стоят на месте. Во-первых, это может быть вызвано изменением направления движения границы конуса в исходной непрерывной задаче и, стало быть, связано с изменением типа сингулярности. Во-вторых, это может быть связано с несогласованностью временного и пространственного разбиений, т.е. с соотношением величины шага по времени и характерной длиной ребер ломаных, приближающих границы сечений стабильного моста и множеств ограничений на управления игроков.

В существующей реализации данного алгоритма поиска и классификации сингулярностей в случае появления «нестрогой» ситуации, когда одна или обе границы конуса стоят на месте, для уточнения типа исследуемой

сингулярной точки привлекаются сечения моста, отстоящие от текущего более, чем на один шаг по времени.

Другая неприятная ситуация — когда конус внешних нормалей данной негладкой точки не пересекается с конусами внешних нормалей негладких точек с предыдущего сечения. Это может свидетельствовать либо об окончании сингулярной линии, либо о грубости шага по времени, когда за один шаг по времени конус повернулся достаточно далеко от предыдущего своего положения.

Видно, что в версии алгоритма для случая нескалярных управлений важным моментом является согласование мелкостей разбиения по времени и по пространству. В этом предлагаемый алгоритм перекликается с сеточными алгоритмами решения уравнений в частных производных.

### **3.4.2 Пример 1: задача воздушного перехвата**

В работах [70, 71] были проведены аналитические исследования не только строения множеств уровня функции цены (максимальных стабильных мостов) в задаче воздушного перехвата, но и возникающих в этой задаче сингулярных поверхностей.

Задача воздушного перехвата в случае медленного преследователя (см. параграф 1.3.2), т.е. в случае возникновения сложной узкой шейки, использовалась для проверки качества работы предложенного алгоритма.

На рис. 3.29 приведен максимальный стабильный мост для этой задачи (ранее он изображался на рис. 1.12). Круговое сечение справа является терминальным множеством. Прямое время направлено слева направо.

На поверхности моста нанесены сингулярные линии. Синим цветом отмечены фокальные линии, зеленым — рассеивающие, фиолетовым — экивокальные. Можно видеть, что набор сингулярных линий устроен достаточно сложно, особенно в районе «шейки».

В отличие от случая скалярных управлений сингулярные точки могут появляться не на всех сечениях. Например, на начальном промежутке обратного времени сечения моста не имеют сингулярных точек.

Крупный план моста вблизи узкой шейки приведен на рис. 3.30.

Наряду с сингулярными линиями рис. 3.29 и 3.30 содержат пучок оптимальных движений, которые отмечены желтым цветом. На рис. 3.29 оп-

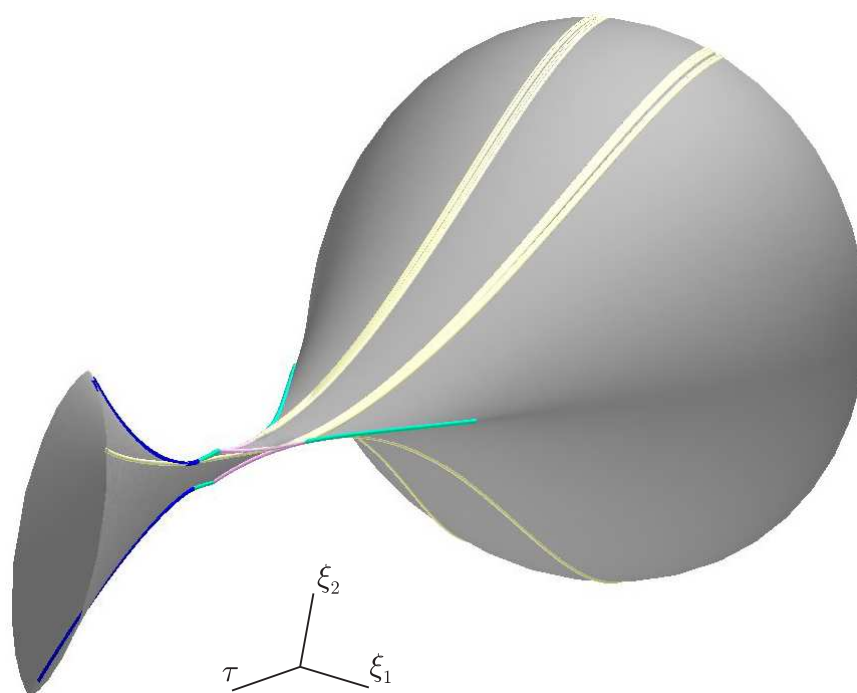


Рис. 3.29: Максимальный стабильный мост, близкий к критическому, для случая медленного преследователя в задаче воздушного перехвата. На границе моста нанесены сингулярные линии (синие, фиолетовые, зеленые линии) и оптимальные движения (желтые линии)

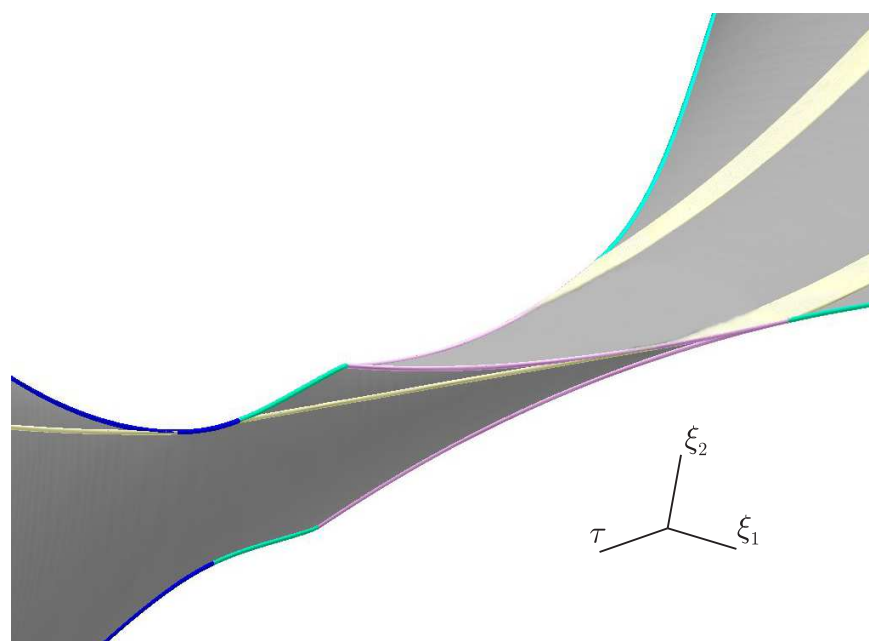


Рис. 3.30: Сингулярные линии и пучки оптимальных движений в районе узкой шейки

тимальное движение, выпущенное из точки на начальном сечении моста слева, приходит на фокальную линию, на которой остается до момента, когда фокальная линия переходит в рассеивающую. Здесь движение расщепляется на два. Поэтому переходную точку можно классифицировать как рассеивающую, хотя в этот момент времени векторы границ конуса внешних нормалей негладкости имеют нулевую угловую скорость, поскольку меняют направление движения.

Каждое из двух получившихся движений попадает на свою эквивокальную линию. Далее движения, идущие по эквивокальным линиям, порождают два пучка оптимальных движений, уходящих на верхнюю часть моста (выглядят, как две желтые полосы). В момент, когда эквивокальные линии переходят в рассеивающие, движения, шедшие по эквивокальным линиям, расщепляются на два. Одно уходит на верхнюю часть моста в составе порожденного ранее пучка, другое — на нижнюю часть моста.

Полученные сингулярные линии и построенные на их основе пучки оптимальных движений хорошо согласуются с результатами работы [71].

### **3.4.3 Пример 2: «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина»**

Алгоритм построения сингулярных линий тестировался также на примере, изложенном в параграфе 1.4.1.

На рис. 3.31 приведен максимальный стабильный мост для этой задачи (ранее он изображался на рис. 1.22). Круговое сечение справа является терминальным множеством. Прямое время направлено слева направо.

Цвета обозначений сингулярных линий и оптимальных движений те же, что и в предыдущем параграфе.

Интересной особенностью данного примера является то, что сингулярные линии появляются и исчезают несколько раз. В частности, это видно на увеличенном фрагменте, приведенном на рис. 3.32. В качестве еще одного интересного момента можно отметить то, что оптимальные движения, порожденные рассеивающей линией, снова собираются в районе узкой шейки на фокальной линии, как показано на этом же рисунке.

Рис. 3.33 показывает ситуацию, когда оптимальное движение проходит «мимо» сингулярных линий. Основная причина появления такой картины линий и движений заключается в следующем. В играх со скалярными

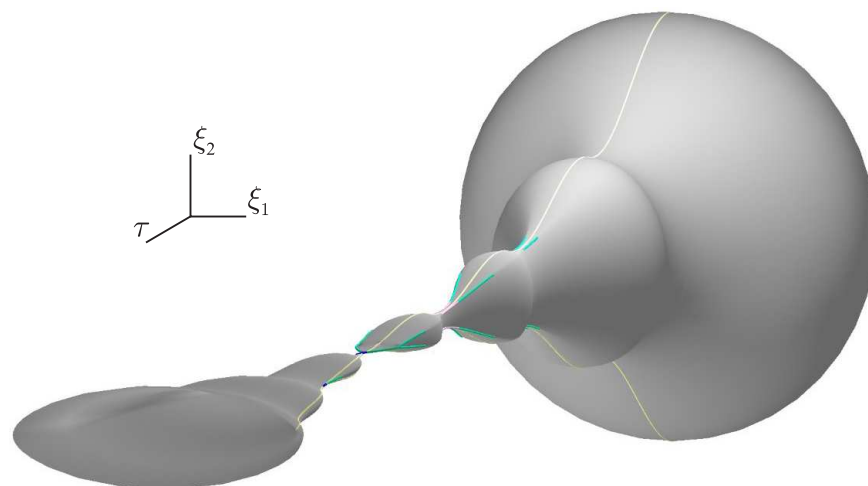


Рис. 3.31: Максимальный стабильный мост, близкий к критическому, для игры типа «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина». На границе моста нанесены сингулярные линии: синие — фокальные, фиолетовые — экивокальные и зеленые — рассеивающие. Желтым цветом отмечены оптимальные движения

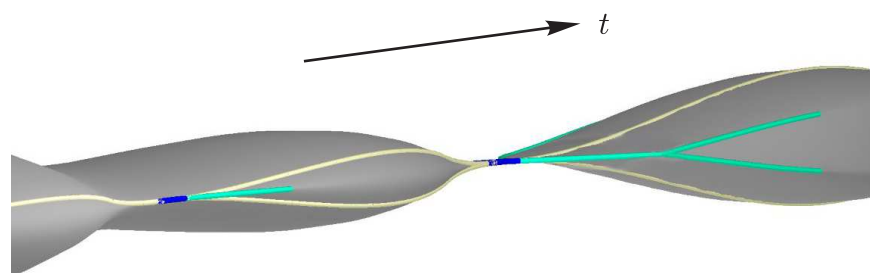


Рис. 3.32: Строение сингулярных линий и пучков оптимальных движений в районе узкой «шейки»

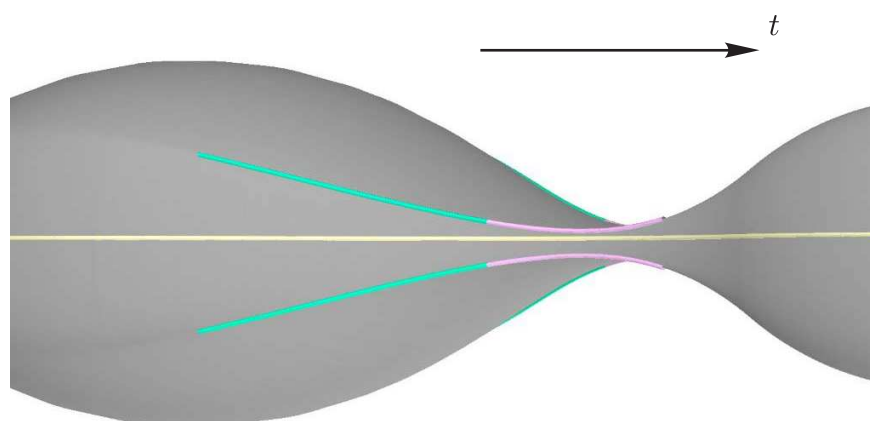


Рис. 3.33: Увеличенный фрагмент рис. 3.31, вид сверху на утоньшение моста, расположенное в прямом времени после узкой шейки. Прохождение оптимального движения «мимо» сингулярных линий

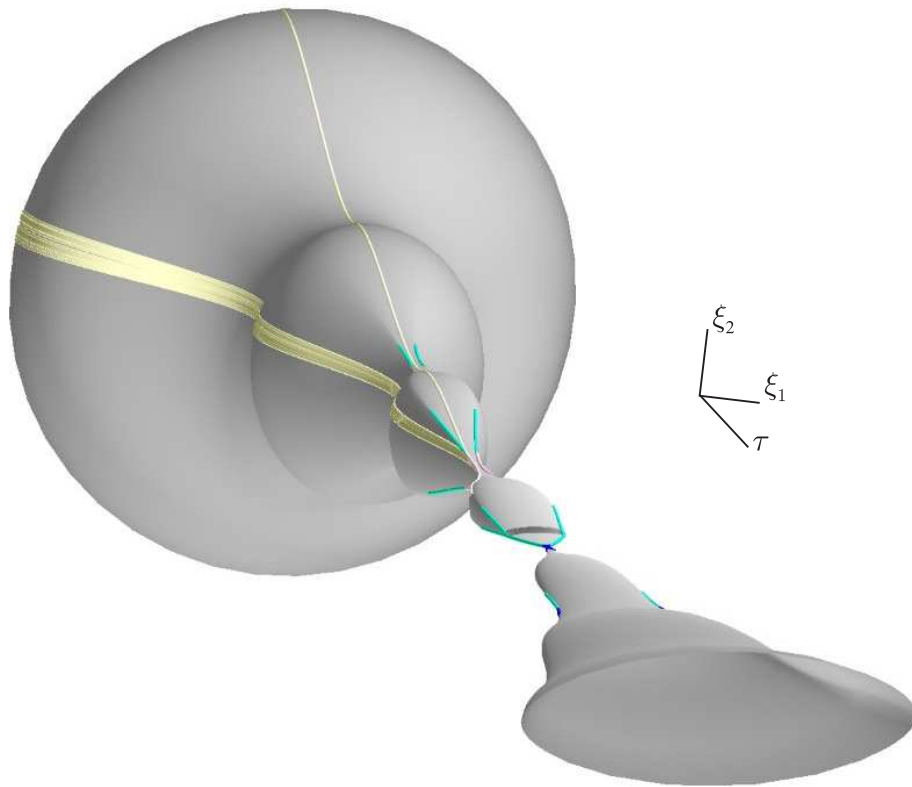


Рис. 3.34: Поведение пучка оптимальных движений, попавшего на эквикальную линию

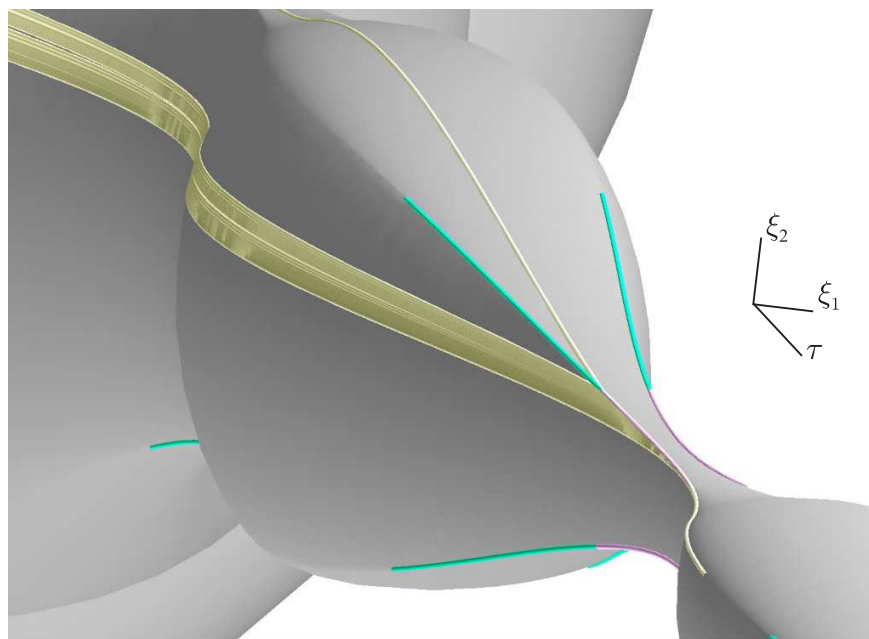


Рис. 3.35: Увеличенный фрагмент рис. 3.34



управлениями вся граница сечения максимального стабильного моста делилась самое большее на четыре части, в которых оптимальное управление каждого из игроков сохранялось и оптимальные движения были «параллельны» друг другу. В случае строго выпуклых ограничений оптимальное управление может отличаться (и отличается) от точки к точке на границе сечения моста. Поэтому два движения, вышедшие из близких точек, могут расходиться на границе моста, не приходя на сингулярные линии. Наоборот, два движения, вышедшие из удаленных точек, могут подходить близко друг к другу.

Пучок оптимальных движений, изображенный на рис. 3.31, не попадал на эквивокальную линию.

Выпустим другой пучок из начальной точки, лежащей на некотором промежуточном сечении (рис. 3.34). Увеличенный фрагмент приведен на рис. 3.35. Видно, что на начальном этапе пучок состоит из одного движения, которое попадает на начало эквивокальной линии. Далее возникает множество движений, порожденных расщеплением исходного движения на эквивокальной линии. Эта совокупность движений видна как желтая полоса на границе моста. Движение, идущее по эквивокальной линии, в последней ее точке расщепляется на два. Одно уходит вниз и является крайним в указанной полосе. Другое движение уходит вверх.

Эквивокальная линия, на которую пришло исходное движение, собирает на себя относительно небольшую часть движений, идущих по этой части границы моста. Если начальную точку взять левее, то движение обогнет эквивокальную линию слева и уйдет влево и вниз. Если же начальную точку взять на некотором расстоянии справа, то движение пройдет между двумя эквивокальными линиями, не попав ни на одну из них.

# Литература

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М: Мир, 1967. — 480 с.
- [2] Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Ред. А.И. Субботин, В.С. Пацко. — Свердловск, 1984. — 295 с.
- [3] Боткин Н.Д. Погрешность аппроксимации в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика, № 12, 1984. — С. 5–12.
- [4] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. — М: Мир, 1972. — 544 с.
- [5] Вязгин В.А. Об одной дифференциальной игре сближения // Прикл. математика и механика, Т. 47, Вып. 6, 1983. — С. 904–908.
- [6] Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М: Изд-во Моск. ун-та, 1990. — 197 с.
- [7] Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г. Методы решения дифференциальных игр // Математическое моделирование, 1993. — С. 296–316.
- [8] Гусятников П.Б., Никольский М.С. Об оптимальности времени преследования // Докл. АН СССР, Т. 168, № 3, 1969. — С. 518–521.
- [9] Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // В сборнике [2]. — С. 127–158.
- [10] Зарх М.А., Пацко В.С. Построение управления второго игрока в линейной дифференциальной игре на основе свойства отталкивания // Управление с гарантированным результатом: Сб. науч. трудов, Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. — С. 37–70.

- [11] Камнева Л.В. Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикл. математика и механика, Т. 67, Вып. 3, 2003. — С. 366–383.
- [12] Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика, Т. 26, Вып. 2, 1962. — С. 218–232.
- [13] Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования // Прикл. математика и механика, Т. 27, Вып. 3, 1963. — С. 244–254.
- [14] Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968. — 476 с.
- [15] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
- [16] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
- [17] Мезенцев А.В. О некотором классе дифференциальных игр // Изв. АН СССР, Техн. киб., № 6, 1971. — С. 3–7.
- [18] Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С.Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 64 с.
- [19] Никольский М.С. О приближенном вычислении геометрической разности множеств // Вестник Московского университета, Сер. 15, вычислительная математика и кибернетика, №1, 2003. — С. 49–54.
- [20] Пацко В.С., Тарасова С.И. Дифференциальная игра сближения с фиксированным моментом окончания, Деп. в ВИНТИ, 1983, Свердловск, № 5320–83, 112 с.
- [21] Пацко В.С., Тарасова С.И. Нерегулярная дифференциальная игра сближения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, № 4, 1984. — С. 134–142.
- [22] Пацко В.С., Тарасова С.И. Дифференциальная игра сближения второго порядка / Исследования задач минимаксного управления, Ред. А.И.Субботин, В.С.Пацко. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. — С. 29–47.

- [23] Пацко В.С., Тарасова С.И. Свойства сингулярной поверхности в игре сближения второго порядка / Исследования задач минимаксного управления, Ред. А.И.Субботин, В.С.Пацко. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. — С. 48–65.
- [24] Петров Н.Н. К нестационарному примеру Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // Изв. ин-та матем. и механ., Удмурт. Гос. унив., Ижевск, Вып. 2, 1998. — С. 53–58.
- [25] Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. — 224 с.
- [26] Пономарев А.П., Розов Н.Х. Устойчивость и сходимост альтернированных сумм Понтрягина // Вестник Моск. ун-та. Вычисл. матем. и киберн., № 1, 1978. — С. 82–90.
- [27] Понтрягин Л.С. О некоторых дифференциальных играх // Докл. АН СССР, Т. 156, № 4, 1964. — С. 738–741.
- [28] Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук, Т. 21, № 4, 1966. — С. 193–246.
- [29] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры, 1 // Докл. АН СССР, Т. 174, № 6, 1967. — С. 1278–1280.
- [30] Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры, 2 // Докл. АН СССР, Т. 175, № 4, 1967. — С. 764–766.
- [31] Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник, Т. 192, № 10, 2001. — С. 95–122.
- [32] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. — М: Мир, 1989. — 480 с.
- [33] Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр // Докл. АН СССР, № 2, Т.184, 1969. — С. 285–287.
- [34] Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, № 2, 1970. — С. 54–63.
- [35] Рокафеллар Р.Т., Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 469 с.

- [36] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. — М.: Наука, 1991. — 216 с.
- [37] Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. — М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. — 336 с.
- [38] Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. О построении множеств позиционного поглощения в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики, Том 1. — Екатеринбург: УрО РАН, 1992. — С. 160–177.
- [39] Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, № 4, 1980. — С. 29–36.
- [40] Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М: Наука, 1966. — 416 с.
- [41] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М: Наука, 1978. — 270 с.
- [42] Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова Думка, 1992. — 384 с.
- [43] Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equation. — Birkhäuser, Boston, 1997. — 570 p.
- [44] Bardi M., Falcone M. An approximation scheme for the minimum time function // SIAM J. Contr. and Optim., Vol. 28, № 4, 1990. — pp. 950–965.
- [45] Bardi M., Falcone M., Soravia P. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions // Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games, Vol. 4. — Birkhäuser, Boston, 1999. — pp. 105–175.
- [46] Berkovitz L.D. A variational approach to differential games // Advances in game theory, Vol. 3, 1964, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. — pp. 127–174.

- [47] Bernhard P. Singular surfaces in differential games: an introduction // *Differential Games and Applications*. — Springer-Verlag, Berlin, 1977. — pp. 1–33.
- [48] Blaquière A., Gerard F., Leitmann G. *Quantitive and Qualitative Games*. — Acad. Press., New York, London, 1969. — 172 p.
- [49] Botkin N.D. Evaluation of numerical construction error in differential game with fixed terminal time // *Problems of Control and Information Theory*, Vol. 11, № 4, 1982. — pp. 283–295.
- [50] Breakwell J.V., Merz A.W. Towards a complete solution of the homicidal chauffeur game // *Proc. 1st Intern. Conf. Theory and Appl. of Differential Games*, Amherst, Mass., 1969. — pp. III-1–III-5.
- [51] Breitner M.H., Lachner R., Pesch H.J. Three-dimensional air combat analysis – an example for the numerical solution of complex differential games // *Annals of the International Society of Dynamic Games.*, Vol. 3. — Birkhäuser, Boston, 1996. — pp. 53–77.
- [52] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Some algorithms for differential games with two players and one target // *RAIRO-Modélisation-Matématique-et-Analyse-Numérique*, Vol. 28, No. 4, 1994. — pp. 441–461.
- [53] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. *Numerical Methods for Optimal Control and Differential Games*. — Ceremade CNRS URA 749, Univ. of Paris – Dauphine. — 1995.
- [54] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // *Stochastic and Differential Games: Theory and Numerical Methods: Annals Intern. Soc. Dynamic Games*, Vol. 4. — Birkhäuser, Boston, 1999. — pp. 177–247.
- [55] Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 277, № 1, 1983. — pp. 1–42.
- [56] Fleming W.H. The convergence problem for differential games // *J. Math. Anal. and Appl.*, № 3, 1961. — pp. 102–116.
- [57] Fleming W.H. The convergence problem for differential games, 2 // *Adv. in Game Theory*, *Ann. Math. Studies*, № 52, 1964. — pp. 195–210.

- [58] Isaacs R.P. Games of Pursuit, Paper P-257. — RAND Corporation, Santa Monica, California. — 1951.
- [59] Isaacs R.P. Differential Games, I: Introduction. Research Memorandum RM-1391. — RAND Corporation, Santa Monica, California. — 1954.
- [60] Isaacs R.P. Differential Games, II: The Definition and Formulation. Research Memorandum RM-1399. — RAND Corporation, Santa Monica, California. — 1954.
- [61] Isaacs R.P. Differential Games, III: The Basic Principles of the Solution Process. Research Memorandum RM-1411. — RAND Corporation, Santa Monica, California. — 1954.
- [62] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. — Birkhäuser, Boston, 1997. — 321 p.
- [63] Leitmann G. A differential game of pursuit and evasion // Internat. J. Non-Linear Mech., Vol. 4, № 4, 1969. — pp. 72–89.
- [64] Lewin J., Breakwell J.V. The surveillance-evasion game of degree // J. Optimiz. Theory and Appl., Vol. 16, № 3–4, 1975. — pp. 339–353.
- [65] Lewin J., Olsder G.J. Conic surveillance evasion // J. Optimiz. Theory and Appl., Vol. 27, № 1, 1979. — pp. 107–125.
- [66] Melikyan A.A. Generalized Characteristics of the First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. — Burkhäuser, Boston, 1998. — 310 p.
- [67] Melikyan A.A., Shinar J. Identification and construction of singular surface in pursuit-evasion games // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol.5, Eds. J.A. Filar and V. Gaitsgory, 2000. — pp. 151–176.
- [68] Merz A.W., The Homicidal Chauffeur — A Differential Game, PhD Thesis, Stanford University, 1971.
- [69] Shinar J., Davidovitz A. A two-target game analysis in line-of-sight coordinates // Comput. Math. Applic., Vol. 13, No. 1–3, 1987. — pp. 123–140.
- [70] Shinar J., Medinah M., Biton M. Singular surfaces in a linear pursuit-evasion game with elliptical vectograms // Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 43, No. 3, 1984. — pp. 431–458.

- [71] Shinar J., Zarkh M. Pursuit of a faster evader — a linear game with elliptical vectograms // Proceedings of the Seventh International Symposium on Dynamic Games, Yokosuka, Japan, 1996. — pp. 855–868.
- [72] Ushakov V. Construction of solutions in differential games of pursuit-evasion // Lecture Notes in nonlinear analysis, Vol.2. Differential Inclusions and Optimal Control. — Nicholas Copernicus University, Torun, 1998. — pp. 269–281.

### Публикации автора по теме диссертации

- [73] Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // ПММ, Т. 70, Вып. 5, 2006. — С. 753–770.
- [74] Жаринов А.Н., Кумков С.С. Построение пучка оптимальных движений в линейной дифференциальной игре с эллиптическими вектограммами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 33-й Региональной молодежной конференции, Екатеринбург, УрО РАН, 2002. — С. 239–243.
- [75] Жаринов А.Н., Кумков С.С. Построение пучка оптимальных движений в линейной дифференциальной игре // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 31-й Региональной молодежной конференции. — Екатеринбург: УрО РАН, 2000. — С. 87–88.
- [76] Кумков С.С. О разработке параллельной программы решения линейных дифференциальных игр // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений, Вып. 3. — Екатеринбург: УрО РАН, 1999. — С. 145–164.
- [77] Кумков С.С. О разработке параллельной программы решения линейных дифференциальных игр // Сборник трудов конференции «Высокопроизводительные вычисления и их приложения», Черноголовка, 30 октября — 2 ноября 2000 г., М: Изд-во МГУ. — С. 268–271.
- [78] Кумков С.С., Пацко В.С. Максимальные стабильные мосты в контрольном примере Л.С.Понтрягина // Вестник Удмуртского Университета (Математика, Механика), Ижевск, № 1, 2000. — С. 92–103.



- [79] Averbukh V.L., Kumkov S.S., Shilov E.A., Yurtaev D.A., and Zenkov A.I. Specialized scientific visualization systems for optimal control application // A Proceedings Volume from the IFAC Workshop on Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998. — Batukhtin V.D., Kirillova F.M., and Ukhobotov, V.I. (Eds.), Pergamon Press, Great Britain, 1999. — pp. 28–33.
- [80] Averbukh V.L., Kumkov S.S., Patsko V.S., Pykhteev O.A., and Yurtaev D.A. Specialized visualization systems for differential games // Progress in Simulation, Modelling, Analysis and Synthesis of Modern Electrical and Electronic Devices and Systems. — Mastorakis N. (Ed.), World Scientific and Engineering Society Press, 1999. — pp. 301–306.
- [81] Averbukh V.L., Kumkov S.S., Pykhteev O.A., and Yurtaev D.A. Visualization of level sets and singular surfaces in differential games // Proceedings of the 15th Conference on Scientific Computing “ALGORITMY 2000”, Vysoke Tatry – Podbanske, Slovakia, September 10-15, 2000. — Handlovicova A., Komornikova M., Mikula K., and Sevcovic D. (Eds.), Slovak University of Technology, Bratislava Faculty of Civil Engineering Department of Mathematics and Descriptive Geometry, 2000. — pp. 196–206.
- [82] Kumkov S.S., Patsko V.S. Parallel algorithm for construction of singular surfaces in linear differential games. Analysis of singular surfaces // Proceedings of the Eighth International Colloquium on Differential Equations, August 18–23, Plovdiv, Bulgaria, 1997. — Bainov D. (Ed.), Utrecht, the Netherlands, 1998. — pp. 275–284.
- [83] Kumkov S.S., Patsko V.S. Level sets of value function and singular surfaces in linear differential games // A Proceedings Volume from the IFAC Workshop on Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization, Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998. — Batukhtin V.D., Kirillova F.M., Ukhobotov V.I. (Eds.), Pergamon Press, Great Britain, 1999. — pp. 143–148.
- [84] Kumkov S.S., Patsko V.S. Backward procedures in linear differential games of small dimension // Modern Applied Mathematics Techniques in Circuits, Systems and Control. — Mastorakis N. (Ed.), World Scientific and Engineering Society Press, 1999. — pp. 138–143.

- [85] Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. Level sets of the value function in linear differential games with elliptical vectograms // Proceedings of the 11th IFAC Workshop “Control Applications of Optimization” (CAO 2000), (July 3–6, 2000, St.Petersburg, Russia). — Zakharov V. (Ed.), Vol. 2, Saint-Petersburg, 2000. — pp. 579–584.
- [86] Kumkov S.S., Patsko V.S. Construction of singular surfaces in linear differential games // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6. — Altman E., Pourtallier O. (Eds.), Birkhäuser, Boston, 2001. — pp. 185–202.
- [87] Kumkov S.S., Patsko V.S. Level sweeping of the value function in linear differential games // Annals of the International Society on Dynamic Games, Vol. 8. — Haurie A., Raghavan T.E.S. (Eds.), Birkhauser, Boston, 2006. — pp. 23–37.
- [88] Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. On level sets with “narrow” throats in linear differential games // International Game Theory Review, Vol. 7, No. 3, September 2005. — pp. 285–312.

# Список иллюстраций

1.1	Система координат в задаче трехмерного преследования . . .	18
1.2	Геометрия номинального перехвата для случая быстрого преследователя . . . . .	22
1.3	Эллиптические ограничения на управления игроков в случае быстрого преследователя . . . . .	23
1.4	Трубки вектограмм для случая быстрого преследователя . . .	23
1.5	Увеличенный фрагмент трубок вектограмм . . . . .	23
1.6	Сечения трубок вектограмм в некоторые моменты времени .	24
1.7	Множество уровня, близкое сверху к критическому . . . . .	25
1.8	Увеличенный фрагмент множества уровня, близкого к критическому . . . . .	25
1.9	Наложение трубок вектограмм . . . . .	26
1.10	Наложение трубок вектограмм и множества уровня, близкого к критическому . . . . .	26
1.11	Эллиптические ограничения на управления игроков в случае медленного преследователя . . . . .	28
1.12	Общий вид множества уровня функции цены с узкой шейкой	29
1.13	Увеличенный фрагмент узкой шейки . . . . .	29
1.14	Общий вид трубок вектограмм игроков . . . . .	31
1.15	Сечения трубок вектограмм для некоторых моментов времени	31
1.16	Группы $t$ -сечений множества уровня, близкого к критическому для некоторых промежутков обратного времени . . . . .	32
1.17	Сокращение размера $t$ -сечения по вертикали вследствие сжатия по горизонтали . . . . .	33

1.18	Множество уровня с узкой шейкой и множество уровня, просчитанное для меньшего значения $c$ . . . . .	34
1.19	Множество уровня с узкой шейкой и множество уровня, просчитанное для большего значения $c$ . . . . .	34
1.20	Пример 1. Эллиптические вектограммы игроков . . . . .	38
1.21	Пример 1. Конечный во времени максимальный стабильный мост . . . . .	38
1.22	Пример 1. Максимальный стабильный мост с узкой шейкой	39
1.23	Пример 1. Увеличенный фрагмент шейки . . . . .	39
1.24	Пример 1. Максимальный стабильный мост для значения параметра $c$ , большего критического . . . . .	39
1.25	Пример 2. Вектограммы игроков . . . . .	41
1.26	Пример 2. Вектограммы игроков. Трубка вектограмм второго игрока сделана прозрачной . . . . .	41
1.27	Пример 2. Общий вид максимального стабильного моста с двумя узкими шейками . . . . .	42
1.28	Пример 2. Вид первой узкой шейки максимального стабильного моста . . . . .	42
1.29	Пример 3. Общий вид трубок вектограмм . . . . .	43
1.30	Пример 3. а) Общий вид максимального стабильного моста с тремя узкими шейками; б) Крупный план наиболее узкой из трех имеющихся шеек . . . . .	44
1.31	Пример 3. Общий вид максимального стабильного моста с наложенными на него трубками вектограмм игроков . . . . .	45
2.1	Примеры вычисления геометрической разности . . . . .	46
2.2	Сумма геометрической разности и множества-вычитаемого для примеров на рис. 2.1 . . . . .	47
2.3	Иллюстрация к определению опорной функции: а) опорная гиперплоскость; б) опорное полупространство . . . . .	50
2.4	Конус линейности опорной функции . . . . .	50
2.5	Иллюстрация к доказательству леммы 2.3.2 . . . . .	52
2.6	Иллюстрация к лемме 2.3.3 . . . . .	54

2.7	Область исправления функции $g$ в лемме 2.4.2 . . . . .	59
2.8	К доказательству выпуклости функции $h_i$ в лемме 2.4.2 . . . . .	60
2.9	Графики функций $f$ (а), $-g$ (б) и $-\text{conv } g$ (в) . . . . .	61
2.10	Сечения графиков $\text{conv } f = f$ (а), $-\text{conv } g$ (б) и $\text{conv } f - \text{conv } g$ (в) . . . . .	62
2.11	Контрпример к сохранению полной выметаемости после геометрической разности в случае множеств размерности три или выше . . . . .	64
3.1	Типы сингулярностей: а) переключение с покиданием; б) переключение без покидания; в) рассеивающая поверхность; г) универсальная/фокальная поверхность; д) эквивокальная поверхность . . . . .	73
3.2	Схема фрагмента границы максимального стабильного моста с пучком оптимальных движений . . . . .	74
3.3	Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи линии переключения с покиданием за первого игрока . . . . .	77
3.4	Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи линии переключения без покидания за первого игрока . . . . .	78
3.5	Схема оптимальных движений в прямом времени аппроксимирующей игры (1.4) вблизи рассеивающей линии . . . . .	79
3.6	а) схема появления эквивокального ребра в аппроксимирующей игре (1.4); б) подробная схема поведения оптимальных движений в прямом времени вблизи эквивокального ребра . . . . .	80
3.7	Общий вид максимального стабильного моста и сингулярных линий на нем в игре (3.1): а) с функцией платы $\varphi_1$ ; б) с функцией платы $\varphi_2$ . . . . .	83
3.8	Поведение пучков оптимальных движений вблизи линий переключения первого игрока . . . . .	85
3.9	Три максимальных стабильных моста для игры (3.2) . . . . .	86
3.10	Общий вид максимального стабильного моста и сингулярных линий на нем в игре (3.2) . . . . .	87

3.11	Поведение пучка оптимальных движений вблизи эквивокальной линии . . . . .	88
3.12	Два вида системы сингулярных поверхностей для игры (3.2): 1 — поверхность переключения за первого игрока; 2 — рассеивающая поверхность за второго игрока; 3 — эквивокальная поверхность; 4 — рассеивающая поверхность за обоих игроков	89
3.13	Общий вид типичного моста для игры (3.3) . . . . .	91
3.14	Изменение структуры сингулярных поверхностей в игре (3.3) при сближении отрезков $P$ и $Q$ в случае сильного первого игрока . . . . .	92
3.15	Изменение структуры сингулярных поверхностей в игре (3.3) при сближении отрезков $P$ и $Q$ в случае слабого первого игрока	92
3.16	Ситуация первого игрока, слабого к моменту исчезания горизонтальных площадок: схема конструирования нового сечения при дискретных построениях с уменьшением вертикального размера . . . . .	95
3.17	Ситуация первого игрока, сильного к моменту исчезания горизонтальных площадок: схема конструирования нового сечения при дискретных построениях с увеличением вертикального размера . . . . .	95
3.18	Проекция на плоскость исходных координат $x_1, x_2$ эквивокальных линий, снятых с множеств уровня, соответствующих значениям платы, близким к критическому . . . . .	96
3.19	Численно просчитанная система сингулярных линий для игры (3.4) . . . . .	97
3.20	Проекция эквивокальных линий на плоскость $x_1, x_2$ . . . . .	97
3.21	Фрагмент рис. 3.20 . . . . .	98
3.22	Фрагмент границы моста для игры (3.2) около скачка рассеивающей линии . . . . .	99
3.23	Поведение оптимальных движений вблизи сингулярной линии, обусловленной вторым игроком. Моделирование пучка оптимальных движений проводилось в предположении, что это рассеивающая линия . . . . .	99
3.24	Терминальное множество для игры (3.5) . . . . .	101

- 3.25 Оптимальное движение, выходящее в обратном времени из точки  $A$ , и точка приложения вектограммы второго игрока . 101
- 3.26 Схема структуры сингулярных поверхностей в случае, когда функция платы удовлетворяет условию уровня выметания 103
- 3.27 Ситуации «микрорасщепления» (а) и «микрослияния» (б) в аппроксимирующей игре с нескаллярными управлениями . . 105
- 3.28 Основная идея алгоритма выявления и классификации сингулярностей — обнаружение точек «негладкости» на границе сечений максимальных стабильных мостов и анализ динамики развития конуса внешних нормалей вдоль линий негладкости . . . . . 106
- 3.29 Максимальный стабильный мост, близкий к критическому, для случая медленного преследователя в задаче воздушного перехвата. На границе моста нанесены сингулярные линии и оптимальные движения . . . . . 109
- 3.30 Сингулярные линии и пучки оптимальных движений в районе узкой шейки . . . . . 109
- 3.31 Максимальный стабильный мост, близкий к критическому, для игры типа «обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина». На границе моста нанесены сингулярные линии и оптимальные движения . . . . . 111
- 3.32 Строение сингулярных линий и пучков оптимальных движений в районе узкой «шейки» . . . . . 111
- 3.33 Увеличенный фрагмент рис. 3.31, вид сверху на утоньшение моста, расположенное в прямом времени после узкой шейки. Прохождение оптимального движения «мимо» сингулярных линий . . . . . 111
- 3.34 Поведение пучка оптимальных движений, попавшего на экивокальную линию . . . . . 112
- 3.35 Увеличенный фрагмент рис. 3.34 . . . . . 112