

Доклад С.С.Кумкова
на заседании диссертационного совета К 212.286.01
23 мая 2007 г.

Кумков Сергей Сергеевич

**Особенности множеств уровня функции
цены в линейных дифференциальных играх**

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических
наук В.С.Пацко

Екатеринбург – 2007

Слайд 1

Линейные дифференциальные игры

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v,$$
$$t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^n,$$
$$u \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q,$$
$$\varphi(z_i(T), z_j(T))$$

$\mathcal{V}(t, z)$ – функция цены

$$\mathcal{W}_c = \{(t, z) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n : \mathcal{V}(t, z) \leq c\}$$

Слайд 2

(Слайд 1.) Уважаемый председатель! Уважаемые члены ученого совета! Уважаемые присутствующие! Хочу сделать краткий доклад по содержанию диссертации «Особенности множеств уровня функции цены в линейных дифференциальных играх».

(Слайд 2.) Объектом изучения являются дифференциальные игры с динамикой, линейной по фазовой переменной и по управлениям игроков. Игра функционирует на конечном промежутке времени. Ограничения на управления игроков геометрические — выпуклые компактные множества в своих конечномерных пространствах. Функция платы терминальная, непрерывная, квазивыпуклая и зависит от двух компонент фазового вектора в момент окончания. Квазивыпуклой называем функцию, все множества уровня которой являются выпуклыми множествами. Интерес представляет построение функции цены игры, то есть, функции, которая сопоставляет каждой позиции (t, z) в пространстве игры оптимальный гарантированный результат игроков. Он совпадает за первого и второго игроков, поскольку выполняется условие седловой точки. Функция цены может быть задана, в частности, в виде набора своих множеств уровня.

Эквивалентная игра

3

$$\xi(t) = X_{i,j}(T,t)z(t),$$

$$\dot{\xi} = D(t)u + E(t)v,$$

$$t \in [t_0, T], \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

$$D(t) = X_{i,j}(T,t)B(t),$$

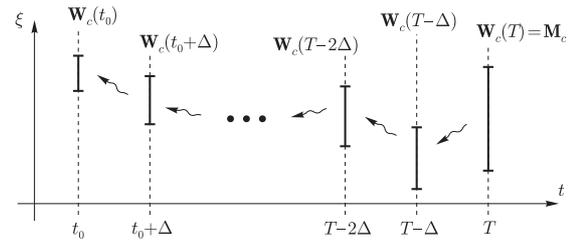
$$E(t) = X_{i,j}(T,t)C(t),$$

$$\varphi(\xi_1(T), \xi_2(T))$$

Слайд 3

Построение множеств уровня функции цены Попятная процедура

4



Алгоритм – В.С.Пацко (публикация 1984 г.)

Сходимость, оценки – Н.Д.Боткин (публикация 1982 г.)

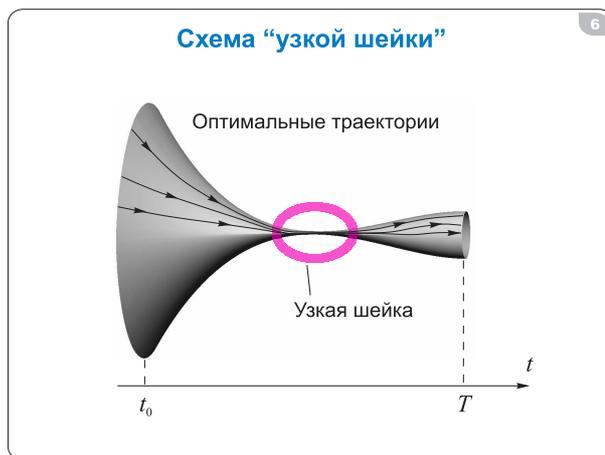
Слайд 4

(Слайд 3.) С помощью известной замены координат, осуществляемой при помощи матрицы, составленной из двух строк фундаментальной матрицы Коши, соответствующих целевым компонентам фазового вектора, переходим к новой переменной ξ , имеющей размерность 2, что упрощает исследование. Кроме того, в правой части новой динамики нет фазовой переменной. Промежуток игры, ограничения на управления игроков и функция платы остаются теми же. Только функция платы теперь зависит от компонент нового фазового вектора ξ .

(Слайд 4.) В начале 1980-х годов для такой игры в рабочей группе моего научного руководителя Валерия Семеновича Пацко был разработан численный алгоритм построения множеств уровня функции цены. Он оформлен в виде попятной процедуры. В момент окончания T мы задаемся терминальным множеством или множеством уровня функции платы и при помощи некоторой многошаговой процедуры производим пересчет этого многогранника или, вернее, многоугольника, поскольку пространство ξ двумерно. Пересчет производится либо до момента t_0 начала игры, либо до момента, когда очередное сечение становится пустым. Детальное описание этого алгоритма приведено в статье Е.А.Исаковой, Г.В.Логуновой, В.С.Пацко в сборнике Института математики и механики 1984 года. Доказательство сходимости и оценки скорости сходимости обсуждаются в статье Н.Д.Боткина 1982 года.



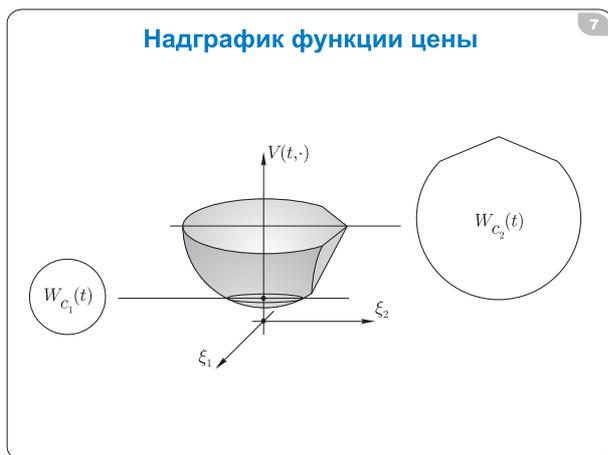
Слайд 5



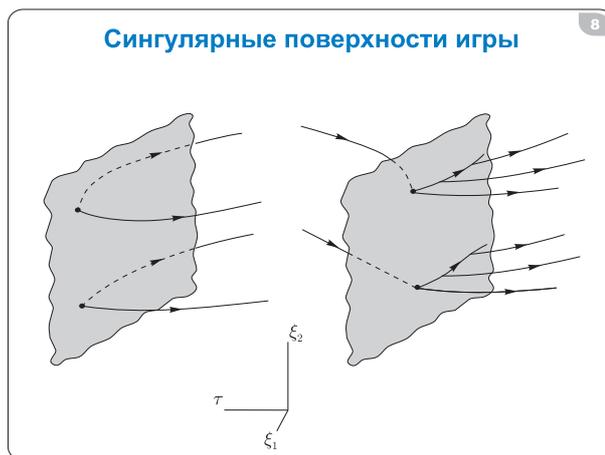
Слайд 6

(Слайд 5.) В целом, эта процедура выдает набор многоугольников, которые приближают соответствующие временные сечения множества уровня функции цены. Множество уровня в данной задаче совпадает с максимальным стабильным мостом, обрывающимся на соответствующем терминальном множестве. В терминах Московской школы это — трубка альтернированного интеграла. В западной литературе употребляется термин «ядро выживаемости».

(Слайд 6.) Интерес представляет изучение различных особенностей множеств уровня функции цены. Первый тип особенностей — так называемые «узкие шейки». Это ситуации, когда радиус временного сечения множества уровня мал или же вообще происходит вырождение сечения в отрезок или точку. В таких областях сосредоточены наиболее трудные особенности решения дифференциальной игры.



Слайд 7



Слайд 8

(Слайд 7.) Вторая глава связана с изучением взаимоотношения формы сечений различных множеств уровня функции цены.

(Слайд 8.) Третья глава представляет результаты по алгоритмам численного построения сингулярных поверхностей, то есть, поверхностей, на которых функция цены игры, а вслед за ней и оптимальные движения системы

имеют те или иные особенности. Если мы говорим о функции, то это разного рода недифференцируемости; если же имеются в виду движения, то это могут быть расщепления, слияния, изломы. Эти элементы затрудняют решение игры, и их изучение помогает как при получении теоретических результатов, так и при разработке численных алгоритмов.

Структура диссертации

Введение
 Список обозначений

1. «Узкие шейки» в линейных дифференциальных играх
2. Уровневое выметание функции цены
3. Численное построение сингулярных поверхностей

Литература
 Список иллюстраций

127 страниц; 77 иллюстраций;
 список литературы – 88 названий; 16 собственных работ

Слайд 9

1. «Узкие шейки» в линейных дифференциальных играх

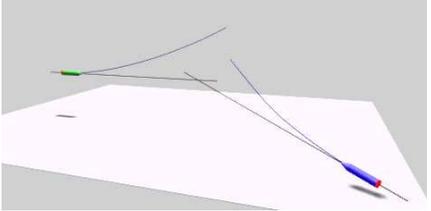
- 1.1. Линейные дифференциальные игры
- 1.2. Построение множеств уровня функции цены
- 1.3. Задача воздушного перехвата
- 1.4. Обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина

Слайд 10

(Слайд 9.) Работа открывается введением и списком используемых обозначений. Далее следуют три главы, каждая из которых посвящена своему типу особенностей. Диссертация завершается списками литературы и иллюстраций. Всего 127 страниц, 77 иллюстраций. Список литературы включает 88 названий, в том числе 16 работ автора.

(Слайд 10.) Первая глава обсуждает феномен узких шеек. Первые два раздела содержат постановку задачи и детальное описание алгоритма численного построения множеств уровня. Этот алгоритм в какой-то мере является основой всей работы. Следующие два раздела содержат примеры дифференциальных игр, где возникают узкие шейки, и обсуждение этого явления.

1.3. Задача воздушного перехвата
Постановка

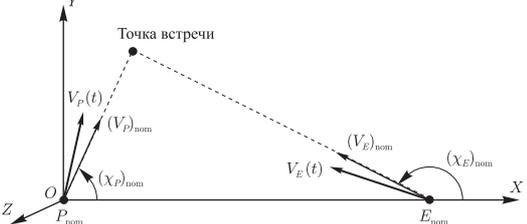


1. Shinar J., Medinah M., Biton M. *Singular Surfaces in a Linear Pursuit-Evasion Game with Elliptical Vectograms* // JOTA, Vol.43, No.3, 1984, pp.431–458.

2. Shinar J., Zarkh M. *Pursuit of a Faster Evader – a Linear Game with Elliptical Vectograms* // Proceedings of the 7th International Symposium on Dynamic Games, Yokosuka, Japan, 1996, pp.855–868.

Слайд 11

1.3. Задача воздушного перехвата
Формализация



$\ddot{x} = F,$ $t \in [0, T],$ $x, y \in \mathbb{R}^2,$ $u \in P,$ $v \in Q,$
 $\dot{F} = -(F - u)/\tau_P,$ $\varphi(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|.$
 $\dot{y} = v$

Слайд 12

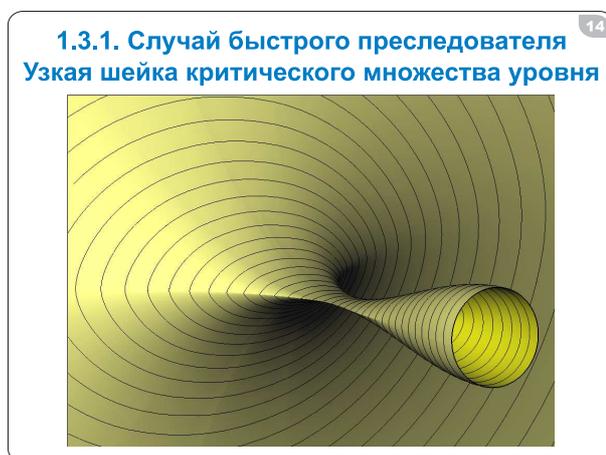
(Слайд 11.) Первая задача — задача воздушного перехвата — взята из работ израильского математика Джозефа Шинара. Задача следующая: имеются два воздушных объекта, сближающихся на высоких скоростях. При этом

они могут незначительным образом корректировать направление движения. Поэтому объекты называются слабоманеврирующими. Цель преследователя — минимизировать промах в момент расхождения объектов; убегающий, наоборот, этот промах максимизирует.

(Слайд 12.) После линеаризации динамики получаем следующую геометрию сближения. Разностное продольное движение является равномерным, им можно пренебречь и рассматривать только разностное боковое движение. Динамика бокового движения у обоих объектов линейная; она записана на слайде. Ее можно перевести в канонический вид, который был приведен на первых слайдах. Функцией платы является величина бокового отклонения объектов в зафиксированный момент номинальной встречи. С математической точки зрения принципиально разными являются случаи быстрого и медленного преследователя, то есть, когда скорость преследователя больше и, соответственно, меньше скорости убегающего.



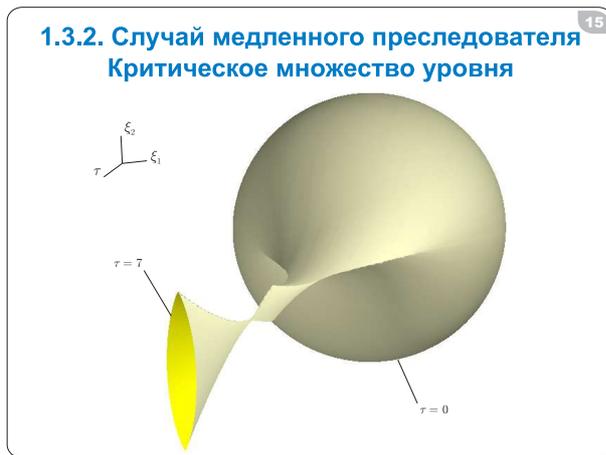
Слайд 13



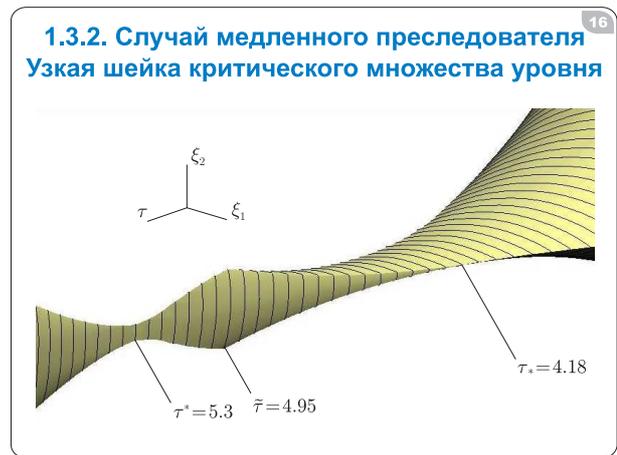
Слайд 14

(Слайд 13.) В случае быстрого преследователя при любых параметрах задачи обязательно возникает множество уровня функции цены с узкой шейкой.

(Слайд 14.) На этом слайде изображен крупный план типичной узкой шейки. Видно, что сначала в обратном времени происходит сжатие сечений, которое затем сменяется расширением.



Слайд 15



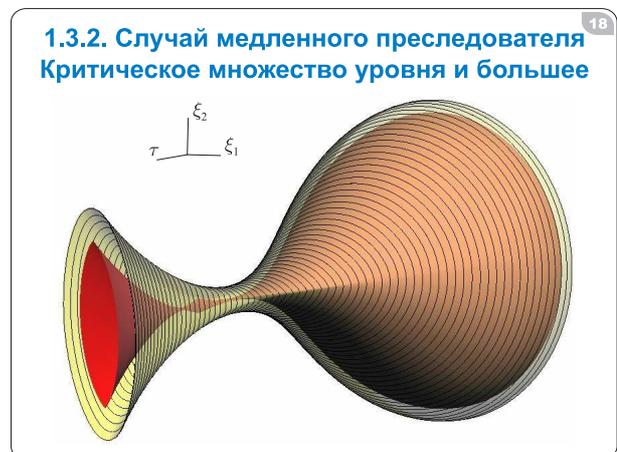
Слайд 16

(Слайд 15.) В случае медленного преследователя узкая шейка имеет значительно более сложную структуру.

(Слайд 16.) На этом слайде приведен крупный план узкой шейки для некоторого набора параметров. Имеются два узких места, а кроме того, меняется ориентация вытянутости сечений множества уровня. Эти иллюстрации получены на основе результатов численного счета, проводившегося при помощи программ, разработанных мною на основе идей упоминавшегося алгоритма. Сами картинки получены при помощи программного обеспечения, разработанного в рабочей группе Владимира Лазаревича Авербуха.



Слайд 17



Слайд 18

(Слайд 17.) Если мы чуть-чуть уменьшим уровень платы, множество уровня оборвется, станет конечным по времени и тем самым упростит свою структуру.

(Слайд 18.) Если же немного увеличим уровень платы, множество уровня также упростит свою структуру. Район утоньшения будет устроен значительно проще, граница множества здесь будет гладкой. Это лишний раз подтверждает, что именно здесь, в районе узкой шейки сосредоточены трудности решения дифференциальной игры.

1.3.2. Случай медленного преследователя
Трубки вектограмм

трубка вектограмм второго игрока
трубка вектограмм первого игрока

Слайд 19

1.4. Обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = u,$$

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} = v, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leq \rho, \quad |v| \leq \sigma.$$

Понтрягин Л.С. *О некоторых дифференциальных играх* // Докл. АН СССР, Т.156, № 4, 1964, С.738–741.

$$x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = u,$$

$$y^{(s)} + b_{s-1}y^{(s-1)} + \dots + b_1\dot{y} + b_0y = v,$$

$$t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

$$\varphi(x(T), y(T)) = |x(T) - y(T)|.$$

Слайд 20

(Слайд 19.) Прогноз и исследование развития сечений множеств уровня можно делать на основе рассмотрения трубок вектограмм игроков (то есть, множеств возможных вкладов каждого игрока в скорость системы), развернутых во времени. Можно выделить промежутки полного преимущества того или иного игрока (участки, на которых вектограмма одного игрока полностью охватывает вектограмму другого), а также участки, где ни один из игроков не имеет полного преимущества.

(Слайд 20.) Были построены собственные примеры игр, в которых существуют множества уровня, имеющие несколько узких шеек. Эти игры относятся к классу, называемому в русской литературе «обобщенный контрольный пример Понтрягина» и включающий задачи, являющиеся обобщением дифференциальной игры, которую Лев Семенович Понтрягин использовал в статье 1964 года для демонстрации своих методов решения дифференциальных игр.

1.4.1. Пример 1
Обрывающийся стабильный мост

$c = 2.45098$

Слайд 21

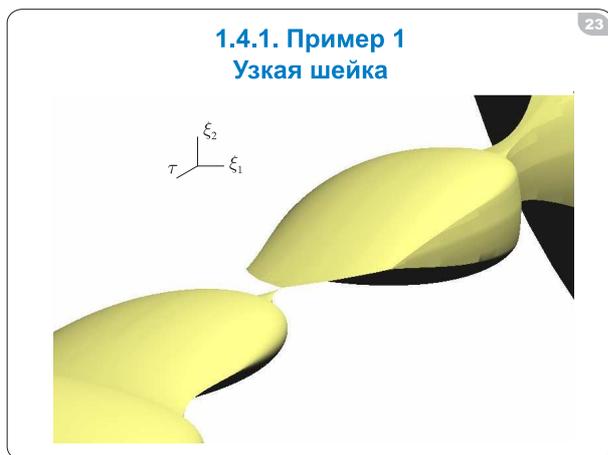
1.4.1. Пример 1
Стабильный мост с узкой шейкой

$c = 2.45100$

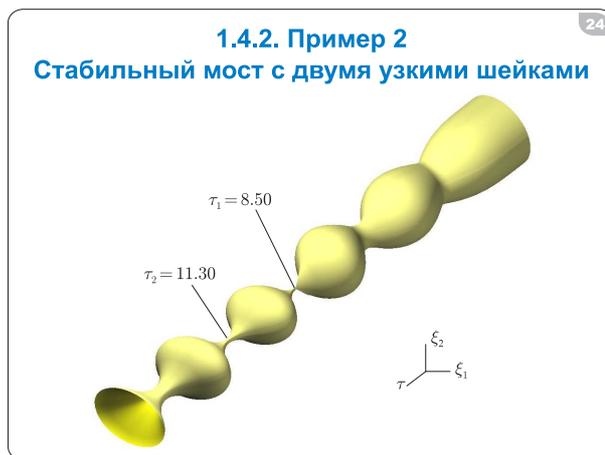
Слайд 22

(Слайд 21.) В первом примере у нас имеется некоторое конечное во времени множество уровня.

(Слайд 22.) Если мы чуть-чуть увеличим уровень платы, скачком увеличится часть множества уровня после точки обрыва и появится узкая шейка.



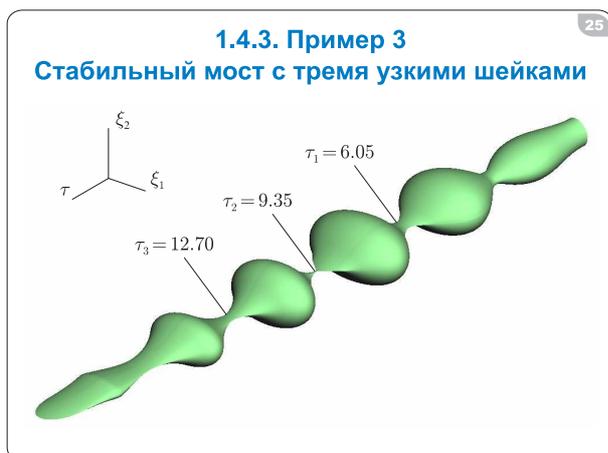
Слайд 23



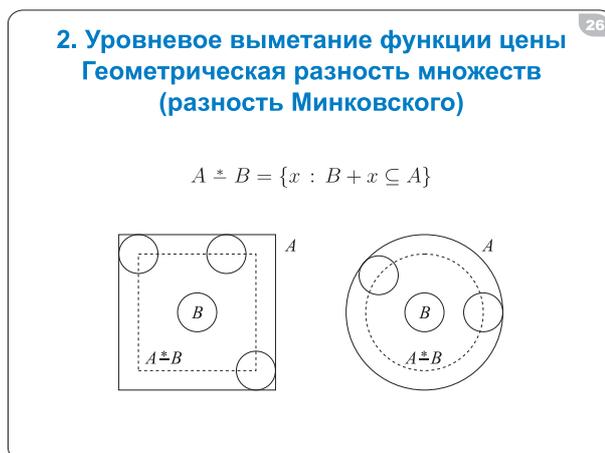
Слайд 24

(Слайд 23.) На данном слайде приведен крупный план узкой шейки. Здесь сечения множества уровня настолько малы, что даже не видны. Конечно, это численный счет, но можно утверждать, что в некотором диапазоне вблизи указанного значения платы, истинное множество уровня также обладает узкой шейкой.

(Слайд 24.) Был построен пример, в котором множество уровня имеет две узких шейки.



Слайд 25



Слайд 26

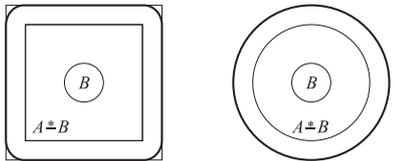
(Слайд 25.) Построен пример с тремя узкими шейками. Это в целом результаты первой главы.

(Слайд 26.) Вторая глава имеет дело с так называемым уровнем выметанием функции цены. Что это значит? В теории дифференциальных игр важной теоретико-множественной операцией является геометрическая разность, также называемая разностью Минковского. Если у нас имеются два множества, A и B , то их геометрической разностью называется совокупность элементов пространства, которые вдвигают множество B в множество A при помощи алгебраической суммы. Например, если у нас есть квадрат A и маленький кружок B , то их геометрической разностью будет квадрат с пунктирной границей. Всякий раз, когда центр круга B располагается в этом

квадрате, все множество B находится внутри квадрата A . Геометрической разностью двух кругов, большого и маленького, является также круг с радиусом, равным разности исходных радиусов.

2. Уровневое выметание функции цены
Полное выметание

$B + (A \dot{-} B) \subseteq A$
 $B + (A \dot{-} B) = A$ – ситуация полного выметания



$A \square B + (A \dot{-} B)$ $A = B + (A \dot{-} B)$

Слайд 27

2. Уровневое выметание функции цены
Свойство уровневого выметания

Квазивыпуклая функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условию **уровневого выметания**, если для любой пары констант $c_1 < c_2$ множество уровня M_{c_1} функции $\varphi(\cdot)$ (если оно непусто) полностью выметает множество уровня M_{c_2} .

Этому условию удовлетворяют привычные нормы в пространстве \mathbb{R}^n ; функции Минковского

Слайд 28

(Слайд 27.) Вообще говоря, если мы сложим множество–вычитаемое с геометрической разностью, то получим лишь подмножество исходного множества A , как это происходит в случае разности квадрата и круга. После сложения получаем не исходный квадрат, а квадрат со скругленными углами. Но бывают и ситуации, когда после сложения мы получаем в точности исходное множество A , как, например, в случае с кругами. Такая ситуация называется ситуацией полного выметания. Термин «полное выметание» введен в статье П.Б.Гусятникова и М.С.Никольского 1968 года.

(Слайд 28.) Под уровневым выметанием мы подразумеваем ситуацию, когда меньшее множество уровня рассматриваемой функции полностью выметает любое большее множество уровня этой функции. Свойством уровневого выметания обладают все привычные нормы в пространстве \mathbb{R}^n и функции Минковского, построенные на основе выпуклых замкнутых множеств. Наличие свойства уровневого выметания означает, что границы больших множеств уровня устроены в некотором смысле лучше, чем границы меньших множеств. У маленького круга граница хорошая, гладкая, у квадрата внешнего — плохая, с углами. Полного выметания нет. С кругами ситуация более хорошая.

2. Уровневое выметание функции цены Альтернированные суммы

29

$$W_c(t_i) = (W_c(t_{i+1}) + \Delta \cdot \mathcal{P}(t_i)) * \Delta \cdot \mathcal{Q}(t_i)$$

Нужно доказать сохранение полного выметания

1. при алгебраической сумме (**Лемма 2.5.1.**);
2. при геометрической разности (**Лемма 2.5.2.**);
3. при предельном переходе, когда $\Delta \rightarrow 0$ (**Лемма 2.5.3.**).

Лемма 2.5.1. Пусть множество A полностью выметается множеством B . Тогда для любого множества P имеем, что множество $A+P$ полностью выметается множеством $B+P$.

Слайд 29

2. Уровневое выметание функции цены Основная лемма

30

Лемма 2.4.2. Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными и положительно-однородными. Пусть $\text{conv } f, \text{conv } g$ — собственные функции и функция $h = f - g$ выпукла. Тогда разность $\text{conv } f - \text{conv } g$ выпукла.

Слайд 30

(Слайд 29.) Во второй главе доказан следующий факт. Если функция платы эквивалентной игры с двумерным фазовым вектором обладает свойством уровневого выметания (то есть, меньшие множества уровня полностью выметают большие), то этим же свойством обладает и сужение функции цены игры на любой момент времени. А именно, если мы возьмем систему множеств уровня функции цены, рассечем их в какой-то момент времени, то сечения меньших множеств уровня будут полностью выметать сечения больших. Это означает, что граница больших множеств уровня устроена лучше, глаже — в том смысле, что изломы меньше или даже их вообще нет.

Процедура пересчета предыдущего в обратном времени сечения в следующее, которая упоминалась ранее, заключается в вычислении соотношения, показанного на слайде. Здесь $W(t)$ — сечение множества уровня W в момент t , $\mathcal{P}(t)$ и $\mathcal{Q}(t)$ — вектограммы игроков в момент t , Δ — шаг сетки по времени. Стало быть, чтобы доказать наследование свойства полного выметания, нужно доказать его сохранение при алгебраической сумме, при геометрической разности и при предельном переходе, когда шаг дискретной схемы по времени стремится к нулю. Сохранение свойства, например, при алгебраической сумме — это утверждение, которое выглядит следующим образом: имеются два множества A и B , B полностью выметает A . Тогда для любого множества P имеем, что алгебраическая сумма множеств B и P полностью выметает алгебраическую сумму множеств A и P .

Утверждения об алгебраической сумме и предельном переходе имеют достаточно общий характер и верны в широком классе множеств и пространств. А вот утверждение о геометрической разности — это достаточно частное утверждение, и оно имеет место лишь для множеств на плоскости. Нарушение его в случае множеств большей размерности показано соответствующим контрпримером.

(Слайд 30.) В процессе доказательства теоремы о наследовании свойства уровневого выметания был сформулирован и обоснован ряд утверждений,

имеющих отношение к выпуклому анализу. Наиболее интересным из таких фактов является следующий. Пусть имеются две непрерывные положительно однородные функции на плоскости такие, что их выпуклые оболочки являются собственными функциями и их разность выпукла. Тогда разность их выпуклых оболочек также выпукла. Указанный факт тоже верен лишь для положительно однородных функций на плоскости. Для обобщений построены соответствующие контрпримеры. Поскольку операция геометрической разности двух множеств может быть записана на языке опорных функций, то описанная лемма обосновывает доказательство сохранения полного выметания при геометрической разности.

2. Уровневое выметание функции цены

Основная теорема

31

Теорема. Пусть функция платы $\varphi(\cdot)$ дифференциальной игры (1.3) такова, что для любых двух констант $c_1 < c_2$ ее множество уровня M_{c_1} (если оно непусто) полностью выметает множество уровня M_{c_2} .

Тогда соответствующие множества уровня W_{c_1} и W_{c_2} функции цены $V(\cdot)$ игры (1.3) обладают следующим свойством: для каждого момента $t_* \in [t_0, T]$ такого, что сечение меньшего множества уровня $W_{c_1}(t_*)$ непусто, сечение $W_{c_1}(t_*)$ полностью выметает сечение $W_{c_2}(t_*)$ большего множества уровня.

Слайд 31

3. Численное построение сингулярных поверхностей

32

3.1. Оптимальные движения

3.2. Типы сингулярных поверхностей

3.3. Игры со скалярными управлениями

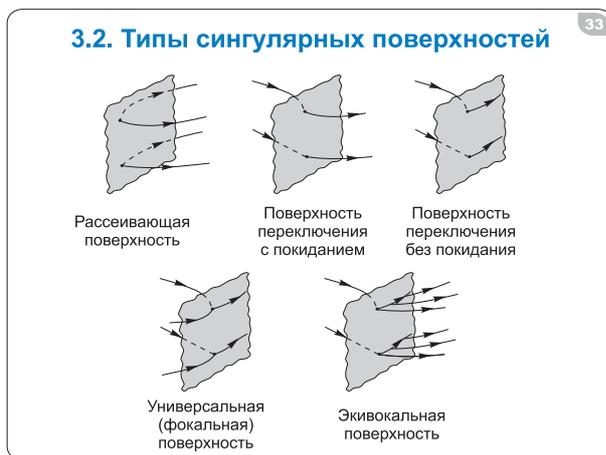
3.4. Игры с не скалярными управлениями

R.Isaacs, 1951-54; "Differential games", 1965
 J.V.Breakwell, J.Lewin, A.W.Merz, J.G.Olsder, J.Shinar
 P.Bernhard
 А.А.Меликян, Л.В.Камнева

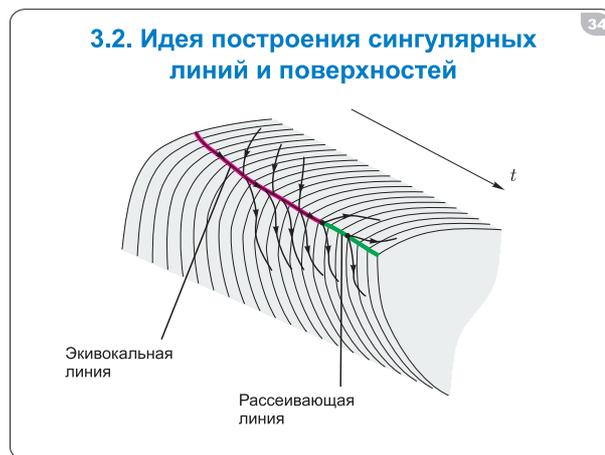
Слайд 32

(Слайд 31.) На этом слайде приведена теорема, которая является основным результатом второй главы.

(Слайд 32.) Третья глава посвящена алгоритмам численного глобального построения сингулярных поверхностей. Сингулярные поверхности были введены Руфусом Айзексом еще в первых его отчетах в корпорации Rand Corporation в начале 1950-х годов, а позже описаны в его книге «Дифференциальные игры», изданной на английском языке в 1965 году и переведенной на русский в 1967 году. В работах Бреквелла, Левина, Мерца, Олсдера, Шинара и их учеников изучалось строение сингулярных поверхностей в конкретных задачах. В работах французского математика Пьера Бернара и Арика Артавазовича Меликяна (Институт проблем механики РАН, Москва) содержатся необходимые условия возникновения сингулярных поверхностей тех или иных типов. Сингулярные поверхности изучались также в работе Людмилы Валерьевны Камневой.



Слайд 33



Слайд 34

(Слайд 33.) Классификация Айзекса сингулярных поверхностей базируется на рассмотрении поведения оптимальных движений системы. Например, если из каждой точки на поверхности выходят два движения по разные стороны этой поверхности и никаких движений на эту поверхность не приходит, то такая поверхность называется рассеивающей. Изломы движений дают поверхности переключения, слияние — универсальные или фокальные поверхности. Самый сложный случай — экивокальная поверхность: движение приходит на такую поверхность, далее идет по ней, в каждый момент расщепляясь и порождая пучок движений.

(Слайд 34.) В целом, принятая в диссертации идеология построения сингулярных поверхностей следующая. В процессе построения очередного множества уровня функции цены на границе очередного сечения выделяются точки, которые определяются как сингулярные. Эти точки классифицируются и затем соединяются в линии, идущие по границе множества уровня. Линии, снятые с системы множеств уровня, объединяются в сингулярные поверхности.

3.3.1. Игры со скалярными управлениями 35

Классификация сингулярностей

Число нормалей	Метки	Дополнительное условие	Выделяемый объект	Подусловие	Тип сингулярности
1	NP		Ребро		Переключение за 1-го
2	FS, FS	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Вершина	В конусе не содержится нормаль $n_P(t_i)$	Рассеивание за 2-го
				В конусе содержится нормаль $n_P(t_i)$	Рассеивание за обоих
2	$FS, FS + NP$	Нормаль $n_Q(t_i)$ внутри конуса	Ребро, связанное с нормалью $n_P(t_i)$		Экивокальность

Слайд 35

3.3.2. Пример 1. 36

«Материальная точка на прямой»

$$\dot{x}_1 = x_2 + v, \quad \dot{x}_2 = u,$$

$$t \in [0, 5], \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1,$$

$$\varphi_1(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Слайд 36

(Слайд 35.) Для игр со скалярными управлениями игроков поиск и классификация сингулярностей заключаются в присваивании различных меток

нормалям многоугольников, участвующих в построении очередного сечения. Эти метки проводятся сквозь процесс построения, после чего анализируются. Алгоритм изложен в виде таблицы.

(Слайд 36.) Просчитано значительное количество примеров. Один из них — «точка на прямой». Счет производился для двух видов функции платы.



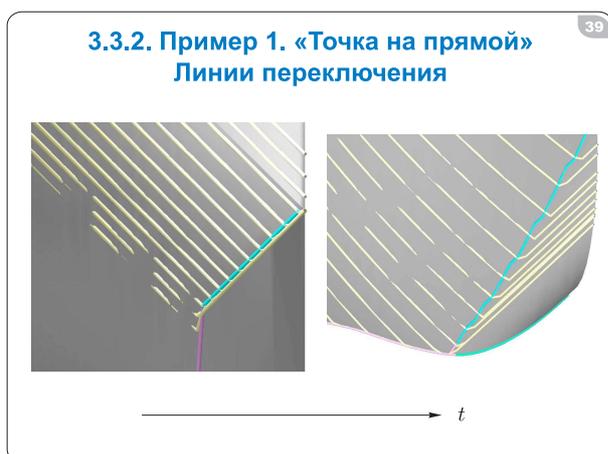
Слайд 37



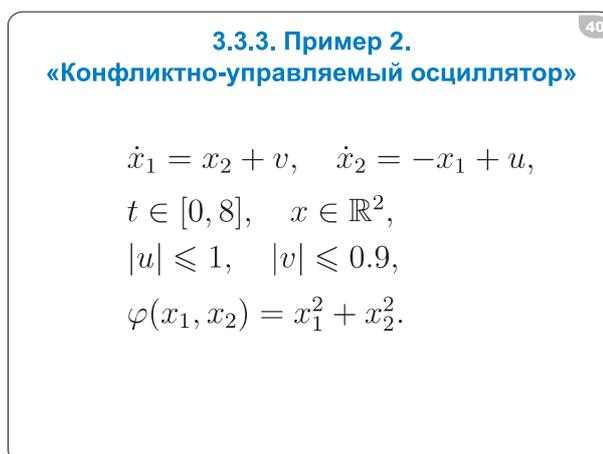
Слайд 38

(Слайд 37.) Показан вид максимального стабильного моста (множества уровня функции цены) для одной из функций платы. Изображена система сингулярных линий на этом мосту. Голубым цветом обозначены линии переключения за первого игрока (цифра 1), зеленым — рассеивающие линии (цифра 2), фиолетовым — экивокальные (цифра 3).

(Слайд 38.) Мост для другой функции платы. Обозначения сингулярных линий те же, что и на предыдущем слайде.



Слайд 39



Слайд 40

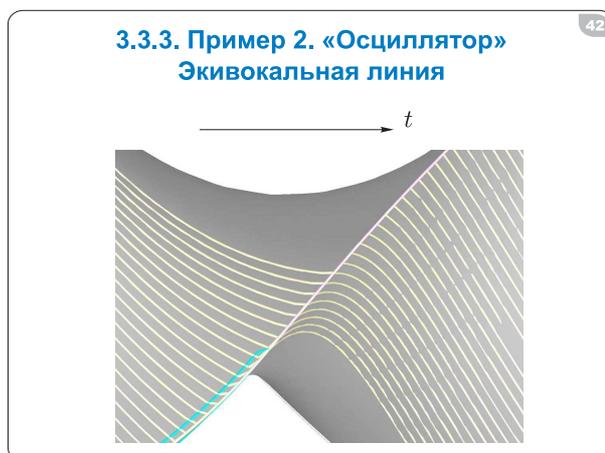
(Слайд 39.) На этом слайде приведены фрагменты границы множества уровня вблизи линий переключения, полученные при помощи программы моделирования пучков оптимальных движений на основе сингулярных поверхностей. На левом рисунке имеем линию переключения без покидания: движения (желтые линии) приходят на нее, сливаются и в дальнейшем идут по этой линии. На правом рисунке показана линия переключения с покида-

нием.

(Слайд 40.) Для задачи «конфликтно управляемый осциллятор» тоже были просчитаны сингулярные линии и поверхности.



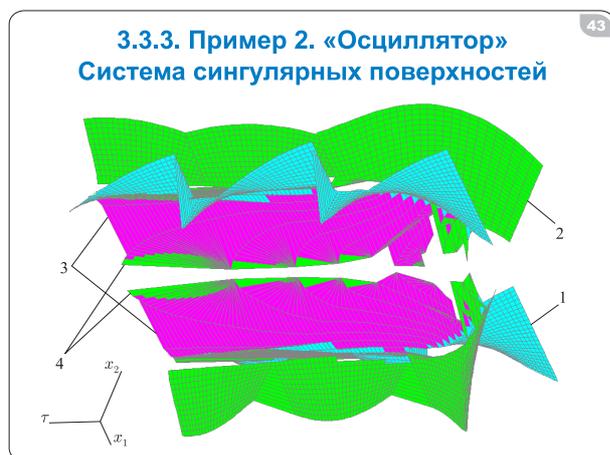
Слайд 41



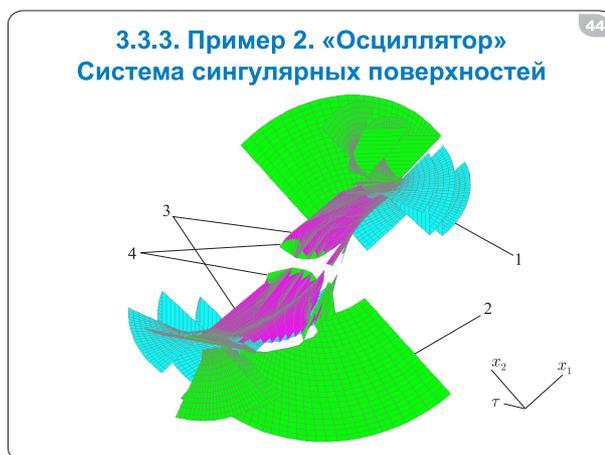
Слайд 42

(Слайд 41.) Приведен общий вид стабильного моста для этой задачи с системой сингулярных линий на его границе. В начале попятного времени мост развивается так же, как и для материальной точки, потом наступают отличия, вызванные различием динамик.

(Слайд 42.) На этом слайде можно видеть поведение оптимальных движений вблизи экивокальной линии: движения приходят, сливаются. Суммарное движение идет по самой линии, выпуская на другую сторону пучок движений.



Слайд 43



Слайд 44

(Слайд 43.) Следующая картинка показывает систему сингулярных поверхностей для этого примера. Как и раньше, голубым цветом обозначены поверхности переключения за первого игрока, зеленым — рассеивающие поверхности, фиолетовым — экивокальные поверхности.

(Слайд 44.) Вид поверхностей с другой точки зрения.

3.3.5. Сравнение с аналитическими результатами

45

Пацко В.С., Тарасова С.И. Дифференциальная игра сближения второго порядка / Исследования задач минимаксного управления, Ред. А.И.Субботин, В.С.Пацко, Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985, С.29–47.

$$\dot{x}_1 = x_2 + v, \quad \dot{x}_2 = u,$$

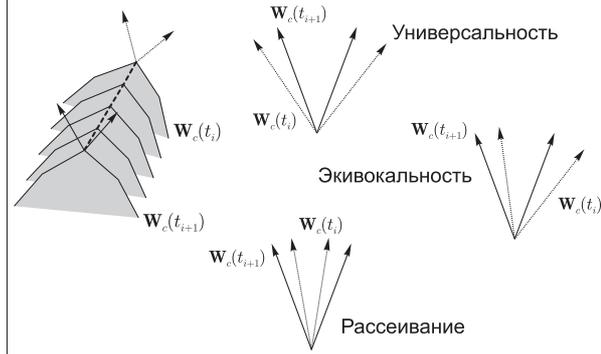
$$|u| \leq 1, \quad |v| \leq 1,$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1|, & \text{если } x_2 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Слайд 45

3.4.1. Игры с нескаллярными управлениями Идея построения сингулярных точек

46



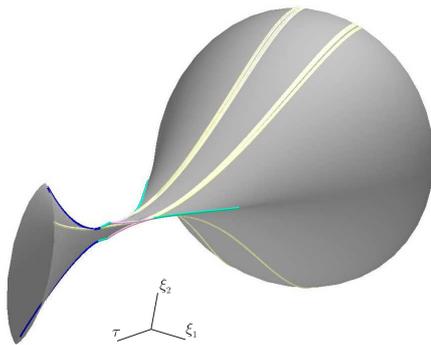
Слайд 46

(Слайд 45.) К сожалению, на данный момент алгоритмы построения сингулярных поверхностей аккуратно не обоснованы и рассматриваются как эвристические. В процессе тестирования проводился счет примеров, исследованных теоретически. Было получено хорошее совпадение теоретических и численных результатов.

(Слайд 46.) Для нескаллярного случая поиск сингулярных точек основан на поиске точек «негладкости» границы сечений множеств уровня. Поскольку сечения являются многоугольниками, то под точкой негладкости понимается вершина, угол при которой отличается от развернутого больше, чем на некоторый порог. Классификация сингулярностей опирается на рассмотрении динамики развития конуса внешних нормалей при вершинах негладкости.

3.4.2. Пример 1: задача воздушного перехвата Общий вид моста с сингулярными линиями

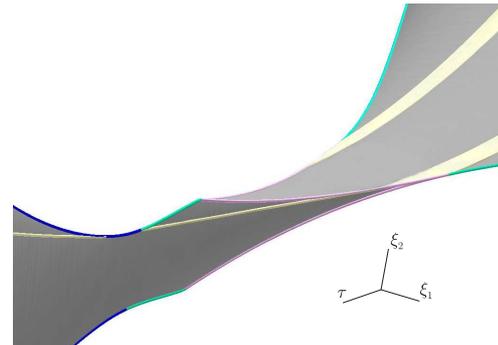
47



Слайд 47

3.4.2. Пример 1: задача воздушного перехвата Крупный план узкой шейки

48



Слайд 48

(Слайд 47.) При помощи разработанных алгоритмов был произведен счет ряда примеров, в том числе, задачи воздушного перехвата, которая рассматривалась в первой главе. Для этой задачи в работах Джозефа Шинара и его сотрудников структура сингулярных линий и поверхностей исследована аналитическим способом. Результаты численных построений дали хорошее совпадение.

(Слайд 48.) Здесь приведена структура сингулярных поверхностей и пуч-

КОВ ОПТИМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВБЛИЗИ УЗКОЙ ШЕЙКИ.

Результаты диссертации

49

- 1) исследование численными методами феномена узких шеек множеств уровня функции цены в линеаризованной задаче воздушного перехвата, а также в линейных дифференциальных играх типа "обобщенный контрольный пример Л.С.Понтрягина";
- 2) формулировка и доказательство теоремы о свойстве уровня выметания функции цены;
- 3) разработка алгоритмов автоматического глобального построения сингулярных поверхностей для двух классов линейных дифференциальных игр.

Слайд 49

Основные публикации

50

1. Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С. Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. – 2006. – Т.70. – Вып. 5. – С. 753-770.
2. Кумков С.С., Пацко В.С. Максимальные стабильные мосты в контрольном примере Л.С.Понтрягина // Вестник Удмуртского Университета (Математика, Механика), Ижевск. – 2000. – № 1. – С. 92-103.
3. Kumkov S.S., Patsko V.S. Construction of Singular Surfaces in Linear Differential Games // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 6. – Altman E., Pourtallier O. (Eds.). – Birkhauser, Boston, 2001. – pp. 185-202.
4. Kumkov S.S., Patsko V.S., Shinar J. On level sets with "narrow throats" in linear differential games // International Game Theory Review. – 2005. – Vol. 7. – No. 3, September. – pp. 285-312.
5. Kumkov S.S., Patsko V.S. Level Sweeping of the Value Function in Linear Differential Games // Annals of the International Society on Dynamic Games, Vol.8. – Haurie A., Raghavan T.E.S. (Eds.). – Birkhauser, Boston, 2006. – pp. 23-37.

Слайд 50

(Слайд 49.) В целом, на защиту выносятся три результата: исследование феномена узких шеек, теорема о наследовании свойства уровня выметания и разработка алгоритмов построения сингулярных поверхностей.

(Слайд 50.) Как говорилось, имеется 16 публикаций по теме диссертации, в том числе одна в ведущем научном издании. На данном слайде приведены пять основных публикаций.

Спасибо за внимание.