Домашняя работа 1

5 ноября 2021

Распределение заданий:

Студент	Задача			
	1	2	3	4
Семёнов Василий Игоревич	b	a	b	c
Крайнова Ангелина Денисовна	a	d	a	b

Задача 1 (2 балла)

Для линейной управляемой системы второго порядка рассматривается задача быстродействия — перевод из точки $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$ в любую другую точку $(x_{end}, \dot{x}_{end})$.

a) Система $\ddot{x} = u\,, \quad u \in [-1, 1]\,.$
Доказать, что оптимальное управление имеет не более одного переключения.

b) Система $\ddot{x} = -x + u\,, \quad u \in [-1, 1]\,.$
Доказать, что для числа переключений N справедливо: $N \to \infty$ при $(x_{end}, \dot{x}_{end}) \to \infty$.

Задача 2 (3 балла)

Кто-то придумал для линейной системы второго порядка применить управление обратной связи u, линейно зависящее от x и его производных. Выписать фундаментальную матрицу для получающейся системы уравнений.

a)

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x + u\,, \\ u = \alpha x + \beta \dot{x}\,. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\beta \dot{x} + u\,, \\ \dot{u} = \alpha x + \gamma \dot{x}\,. \end{cases}$$

Считать $\alpha = \beta\gamma$.

c)

$$\begin{cases} \ddot{x} = x - \beta \dot{x} - u\,, \\ u = \delta \ddot{x} - \gamma \dot{x}\,. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x + u\,, \\ \dot{u} = -\beta \dot{x} + \gamma u\,. \end{cases}$$

Считать, что одно из собственных чисел характеристического уравнения равно -1.

Задача 3 (5 баллов)

Рассмотрим систему с нелинейной динамикой на отрезке времени $t \in [0, T]$

a) «Посадка на луну» (Moon Lander)

$$\begin{cases} \dot{y} = v\,, \\ \dot{v} = \frac{c\beta}{m} - g\,, \\ \dot{m} = -\beta\,, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} y \geqslant 0\,, \\ m \geqslant m_T > 0\,, \\ \beta \in [0, \bar{\beta}]\,. \end{array}$$

b) Полёт беспилотника на дальность

$$\begin{cases} \dot{x} = u\,, \\ \dot{y} = v\,, \\ \dot{u} = \frac{c\beta}{m}\cos\omega\,, \\ \dot{v} = \frac{c\beta}{m}\sin\omega - g\,, \\ \dot{m} = -\beta\,, \end{cases} \qquad \begin{array}{c} y \geqslant 0\,, \\ m \geqslant m_T > 0\,, \\ \beta \in [0, \bar{\beta}]\,, \\ \omega \in [0, 2\pi]\,. \end{array}$$

Проверить, возможно или нет выполнение условия $\beta(t) \notin \{0, \bar{\beta}\}$ везде внутри некоторого отрезка $t \in [t_1, t_2]$ для траектории системы, удовлетворяющей нелинейному принципу максимума.

Для варианта **b)** считать, что, исходя из оптимизации дальности полёта, в конечный момент движения T компоненты сопряжённого вектора $\psi_u(T) = \psi_v(T) = 0$.

Задача 4 (4 балла)

Выписать соотношения принципа максимума Понтрягина для следующих задач оптимального управления с интегро-терминальным функционалом. Отрезок времени $t \in [0, 1]$, начальная точка произвольная.

a) Система $\ddot{x} = u\,,\ u \in [-1, 1]\,.$ Задача $\int_0^1 u^2(\tau)d\tau + x^2(1) + \dot{x}^2(1) \to \min$.

b) Система $\ddot{x} = -x + u\,,\ u \in [-1, 1]\,.$ Задача $\int_0^1 u^2(\tau)d\tau + x^2(1) + \dot{x}^2(1) \to \min$.

c) Система $\dot{x} = u\,,\ u \in [-1, 1]\,.$ Задача $\int_0^1 u^2(\tau)d\tau + x^2(1) \to \min$.