

Домашняя работа 2

24 декабря 2021

Распределение заданий:

Студент	Задача					
	1	2	3	4	5	6
Крайнова Ангелина Денисовна	a	a	d	a	d	c
Семёнов Василий Игоревич	c	b	c	b	c	d

Задача 1 (2 балла)

Рассматривается игра на *единичном квадрате* $M = \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$. Функция выигрыша $H(x, y)$ определена ниже. Игрок, выбирающий x , максимизирует H , а игрок, выбирающий y , наоборот, минимизирует H . Проверить, имеет ли игра седловую точку и найти её, если она существует.

(Задачи взяты из книги А. И. Благодатских, Н. Н. Петров «Сборник задач и упражнений по теории игр», необходимые определения можно посмотреть на стр. 43, 44, 53.)

- a) (задача 2.1, стр. 56) $H(x, y) = xy - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$.
b) (задача 2.4, стр. 57) $H(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$.
c) (задача 2.5, стр. 57)

$$H(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & \text{если } x > y, \\ 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{y^2}, & \text{если } x < y. \end{cases}$$

- d) (задача 2.10, стр. 58) $H(x, y) = xy + x + y$.

Этот вариант следует решать для *открытого* единичного квадрата $M^\circ = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$.

Задача 2 (2 балла)

Рассматриваются множества $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$. Доказать справедливость приведённых соотношений содержащих операцию геометрической разности « $\dot{-}$ ».

(Задачи взяты из книги *Н. Н. Петров* «Введение в выпуклый анализ», необходимые определения можно посмотреть на стр. 108.)

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) (теорема 12.2, пункт 1, стр. 109) | $(A \dot{-} C) + B \subset (A + B) \dot{-} C.$ |
| b) (теорема 12.2, пункт 2, стр. 109) | $(A \dot{-} B) \subset (A + C) \dot{-} (B + C).$ |
| c) (теорема 12.2, пункт 3, стр. 109) | $A \subset (A + B) \dot{-} B.$ |
| d) (теорема 12.2, пункт 4, стр. 109) | $(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B + C).$ |

Задача 3 (2 балла)

Рассматриваются множества $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$. Символ $D_r(x)$ обозначает замкнутый шар радиуса r в евклидовой метрике с центром в точке x .

(Задачи взяты из книги *Н. Н. Петров* «Введение в выпуклый анализ», необходимые определения можно посмотреть на стр. 108.)

- a) (12.1, стр. 114)

Верно ли, что если A, B и C — ограниченные замкнутые множества, такие что $A + B = A + C$, то $B = C$?

- b) (12.3, стр. 114)

Пусть A — выпуклое множество, $\alpha \geq \beta \geq 0$. Доказать, что $\alpha A \dot{-} \beta A = (\alpha - \beta)A$.

- c) (12.7, стр. 114)

Вычислить $A \dot{-} B$, где $A = D_{\sqrt{2}}(0)$, $B = \{(x, y): x \in [-1, 1], y = 0\}$.

- d) (12.8, стр. 115)

Вычислить $A \dot{-} B$, где $A = D_R(0)$, $B = \{(x, y): |x| \leq \alpha, |y| \leq \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$.

Задача 4 (3 балла)

Динамика:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u - v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 0.5.\end{aligned}$$

Построить максимальный стабильный мост для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания T и терминальным множеством M .

- a) $M = \{(x_1, x_2): x_1 \in [-1, 1]\}$.
- b) $M = \{(x_1, x_2): x_1 = 0\}$.
- c) $M = \{(x_1, x_2): |x_2| \leq 1\}$.
- d) $M = \{(x_1, x_2): x_1 \in [-2, -1] \cup [1, 2]\}$.

Задача 5 (4 балла)

Динамика:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u + v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 2.\end{aligned}$$

Построить максимальный стабильный мост для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания T и терминальным множеством M . Ответить, на каком промежутке времени существует мост?

- a) $M = \{(x_1, x_2): x_1 \in [-1, 1]\}$.
- b) $M = \{(x_1, x_2): x_1 = 0\}$.
- c) $M = \{(x_1, x_2): |x_2| \leq 1\}$.
- d) $M = \{(x_1, x_2): x_1 \in [-2, -1] \cup [1, 2]\}$.

Задача 6 (5 баллов)

Динамика:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + v, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1.\end{aligned}$$

Построить максимальный стабильный мост для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания T и терминальным множеством M . Ответить, на каком промежутке времени существует мост?

- a) $M = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 1\}$.
- b) $M = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 0.5\}$.
- c) $M = \{(x_1, x_2): |x_2| \leq 2\}$.
- d) $M = \{(x_1, x_2): x_1 \in [-2, -1] \cup [1, 2]\}$.