Лекция 9 не была закончена. Поэтому вначале идёт окончание, начиная со стр. 8.

В координатах пониженной размерности имеем дело с системой

$$\dot{y} = X^*(T,t)B(t)u + X^*(T,t)C(t)v,$$
$$y \in R^m, \quad u \in P, \; v \in Q.$$

Если ввести обозначения

$$D(t) = X^*(T,t)B(t), \quad E(t) = X^*(T,t)C(t),$$

получим

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P, \; v \in Q. \qquad (11)$$

Вместо того, чтобы строить максимальный стабильный мост, обрывающийся на M в момент T, и строить его в пространстве t, x, мы делаем построения для системы (11) в пространстве t, y; такой мост обрывается в момент T на множестве M^*.

Движения системы (1) и системы (11) связаны соотношением

$$y(t) = X^*(T,t)x(t).$$

В момент T имеем $y(T)$ – вектор из выделенных координат вектора $x(T)$. Поэтому, если $x(T) \in M$, то $y(T) \in M^*$, и наоборот

Сейчас мы говорили о построении максимальных стабильных мостов: мосты, построенные в пространствах t, x и t, y, эквивалентны. На самом деле, эквивалентны и две задачи: одна в пространстве t, x для системы (1) с приведением на M в момент T, другая — в пространстве t, y для системы (11) с приведением на M^* в момент T.

Система (11) очень удобна для численных построений:
1) фазовая переменная y не входит в правую часть системы,
2) размерность y часто намного меньше, чем размерность x.

<u>Идеология численного построения максимального стабильного моста для системы (11).</u>

Выбираем разбиение оси t слева от T. Шаг Δ разбиения можно взять постоянным, а можно и переменным. С идеологической точки зрения это непринципиально.

(1) На каждом промежутке $[t_{i+1}, t_i)$ динамику системы (11) „замораживаем":

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}(t_{i+1}), \quad E(t) = E(t_{i+1}), \quad t \in [t_{i+1}, t_i).$$

Получаем кусочно-постоянную динамику

$$\dot y = D(t_{i+1})u + E(t_{i+1})v, \qquad t \in [t_{i+1}, t_i)$$

Возникающее движение непрерывно склеиваем в моменты t_i.

Пусть зафиксирована функция $u(\cdot)$ на $[t_{i+1}, t_i]$.

Имеем

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t_{i+1})u(s)ds = D(t_{i+1})\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s)ds$$

При выпуклом P

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s)ds = p\cdot(t_{i+1}-t_i) \text{ при некотором } p\in P,$$

Значит, учитывая все возможные $u(\cdot)$:

$$\bigcup_{u(\cdot)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t_{i+1})u(s)ds = D(t_{i+1})\cdot P\cdot(t_{i+1}-t_i).$$

При выпуклом Q

$$\int_{t_{i+1}}^{t_i} E(t_{i+1})v(s)ds = E(t_{i+1})q\cdot(t_{i+1}-t_i) \text{ при некотором } q\in Q.$$

Поэтому в рамках аппроксимирующей динамики на очередном шаге попятной процедуры имеем дело с операциями

Символы аппроксимирующей динамики

$$\tilde{M}_{y,i} + (t_{i+1} - t_i)D(t_{i+1})P + (t_{i+1} - t_i)E(t_{i+1})q = \tilde{G}_y^{(1)}(t_{i+1}; t_i, M_{y,i}, q) \qquad (12)$$

$$\bigcap_{q \in Q} \tilde{G}_y^{(1)}(t_{i+1}; t_i, M_{y,i}, q) \qquad (13)$$

Это операции алгебраической суммы (её ещё называют суммой Минковского) и пересечения. Но операция пересечения очень специфическая: мы пересекаем „одинаковые" множества, сдвинутые относительно друг друга. Вектор сдвига берётся из множества $(t_{i+1} - t_i)E(t_{i+1})q$, $q \in Q$. Множество, которое сдвигается при помощи q, есть алгебраическая сумма $\tilde{M}_{y,i} + (t_{i+1} - t_i)D(t_{i+1})P$.

Разность Минковского (геометрическая разность)

1 В нейтральных обозначениях операцию пересечения в (12), (13) запишем в виде

$$\bigcap_{b \in B} (A - b) =: A \overset{*}{-} B. \qquad (1)$$

Эквивалентное определение

$$A \overset{*}{-} B =: \{x \in R^n : x + B \subset A\}. \qquad (2)$$

Здесь мы используем x, n как неформальное обозначения.

[Показать, что определения (1), (2) эквивалентны]

Из определения (2) понятно употребление слова „разность".

Видно, что

$$(A \overset{*}{-} B) + B \subset A.$$

Но бывает, что

$$(A \overset{*}{-} B) + B = A \qquad (3)$$

Если есть (3), то это называют ситуацией „полного выметания".

2) Пусть верхний индекс $'$ означает множество, дополнительное к данному до всего пространства: $K' = R^n \setminus K$.

Используя соотношение двойственности между операциями пересечения множеств и объединения дополнительных к ним, имеем

$$\bigcap_{b \in B} C_b = \left(\bigcup_{b \in B} C_b' \right)' \qquad (4)$$

Здесь C_b – множество, зависящее от параметра b.

Для нашего случая положим $C_b = \mathcal{A} - b$. Тогда

$C_b' = (\mathcal{A} - b)' = \mathcal{A}' - b$ [доказать самим].

Применяя (4), получим

$$\bigcap_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A} - b) = \Big(\bigcup_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A}' - b) \Big)' = (\mathcal{A}' - \mathcal{B})',$$

т.е.

$$\bigcap_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A} - b) = (\mathcal{A}' - \mathcal{B})' \qquad (5)$$

Таким образом, если мы умеем делать операцию алгебраической суммы, то работая с дополнениями, сможем построить и геометрическую разность.

③ В задаче с двумя догоняющими и одним убегающим ограничение Q – ограничение P – прямоугольник, ограничение Q – отрезок. На каждом шаге попятной процедуры вычисляем алгебраическую сумму

$$\tilde{M}_{y,i} + (t_{i+1} - t_i) \mathcal{D}(t_{i+1}) P := \mathcal{A}$$

При этом множество $\mathcal{A}$ описываем его углами.
При этом множество $\mathcal{A}$ описываем его угловыми.
Они все являются угловыми множества $\mathcal{A}$!

Множество $-\mathcal{B}$ задаём в виде $(t_{i+1}-t_i)E(t_{i+1})Q$
!

Рассматриваем алгебраическую сумму $\mathcal{A}'-\mathcal{B}$, при этом снова работаем с границей. Она не является и границей множества $(\mathcal{A}'-\mathcal{B})$!

[Рассмотреть задачу с двумя догоняющими и одним убегающим более подробно и показать, что в ней всё можно свести к сумме некоторого множества на плоскости и отрезка].

Геометрическая разность. Выпуклый случай

(1) $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B} = \bigcap\limits_{b\in\mathcal{B}} (\mathcal{A}-b)$

Если $\mathcal{A}$ выпукло, то выпукло и $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}$. Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ замкнуты, то $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}$ замкнуто. Если $\mathcal{A}$ ограничено, то $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}$ ограничено. [Помним, что возможно $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B} = \phi$].

Ниже считаем, что $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – выпуклые, замкнутые, ограниченные.

(2) Выпуклое множество $A \subset R^n$ (здесь A – нештрихованный символ) удобно описывать при помощи

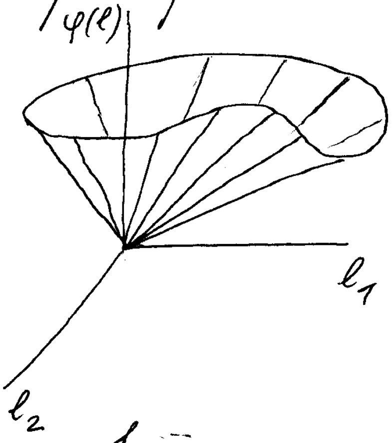
опорная функция

$$\rho(l, A) = \sup_{x \in A} \langle l, x \rangle, \quad l \in R^n.$$

Вместо $\langle l, x \rangle$ часто будем писать $l^T x$.

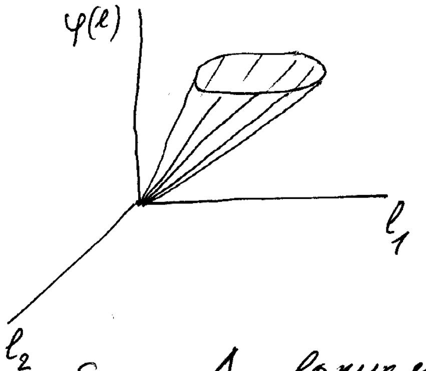
Свойства опорной функции: положительно-однородная и выпуклая

„Положительно-однородная" функция $l \Rightarrow \varphi(l)$: $\varphi(kl) = k\varphi(l)$, $k \geq 0$. Надграфиком положительно-однородной функции является конус в пространстве $R^n \times R$ с вершиной в нуле.



Здесь показана отсечка на некотором уровне. Обычно берут уровень $\varphi = 1$.

Выпуклость опорной функции легко доказывается непосредственно [и очень наглядно]: имеем $l \Rightarrow l^T x$ – линейная функция [x – фиксировано] $\Rightarrow$ её надграфик – полупространство в $R^n \times R \Rightarrow$ надграфик функции $l \rightarrow \sup_{x \in A} l^T x$ есть пересечение полупространств – выпуклый конус с вершиной в нуле.



Если A — выпуклое, замкнутое множество, и мы храним его опорную функцию $l \to \rho(l, A)$, то можем восстановить A через пересечение полупространств

$$\Pi(l, A) = \{x \in R^n : l^T x \le \rho(l, x)\}:$$

$$A = \bigcap_{l \in R^n} \Pi(l, A)$$

[Попробовать доказать сами].

Вид полупространства $\Pi(l, A)$ не зависит от длины вектора l, а зависит только от его направления. Поэтому можно хранить значения опорной функции на векторах удобной длины, например, единичной.

Если A — многогранное множество, то его опорная функция является кусочно-линейной.

Выпуклый многоугольник на плоскости можно хранить в виде списка нормалей и значения опорной функции на этих нормалях. Нормали удобно хранить, упорядочив их направлением обхода.

Ещё одно полезное свойство опорной функции:

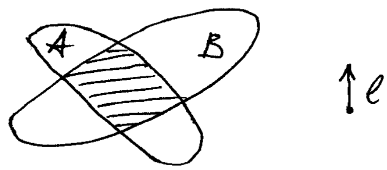
$$\rho(l, A+B) = \rho(l, A) + \rho(l, B).$$

(3) Предположим, что нужно описать пересечение двух выпуклых, замкнутых, ограниченных множеств A и B. Каждое из них описывается своей опорной функцией. Как найти опорную функцию пересечения $A \cap B$?

Первая мысль:

$$\rho(l, A \cap B) \overset{?}{=} \min\{\rho(l, A), \rho(l, B)\}$$

Но очевидно, что это неверно. [Например, на векторе l, направленном вверх].



На самом деле для вычисления опорной функции $\rho(\cdot, A \cap B)$ следует составить функцию

$$\eta(l) = \min\{\rho(l, A), \rho(l, B)\}$$

и затем взять её выпуклую оболочку:

$$\rho(l, A \cap B) = (\mathrm{co}\,\eta(\cdot))(l).$$

[Поискать этот факт в книгах. Можно попробовать посмотреть Рокафеллар „Выпуклый анализ".

Таким образом, операция взятия пересечения связана с построением выпуклой оболочки (в случае выпуклых исходных множеств).

(4) Вернёмся к геометрической разности множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B} = \bigcap_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A} - b)$.

У нас здесь тоже операция пересечения, но только „одинаковых" множеств, смещённых относительно друг друга сносом на вектор $b \in \mathcal{B}$.

Пусть $C_b = \mathcal{A} - b$. Тогда

$$\min_{b \in \mathcal{B}} \rho(l, C_b) = \min_{b \in \mathcal{B}} \rho(l, \mathcal{A} - b) = \min_{b \in \mathcal{B}} [\rho(l, \mathcal{A}) - l^T b] =$$

$$= \rho(l, \mathcal{A}) + \min_{b \in \mathcal{B}} (-l^T b) = \rho(l, \mathcal{A}) - \max_{b \in \mathcal{B}} l^T b =$$

$$= \rho(l, \mathcal{A}) - \rho(l, \mathcal{B})$$

Итак, для построения геометрической разности множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ мы находим разность опорных функций

$$\eta(l) = \rho(l, \mathcal{A}) - \rho(l, \mathcal{B})$$

и берём выпуклую оболочку функции $\eta(\cdot)$.