Необходимые условия для УЧП (7) через систему характеристик

Пусть $x \to u(x)$ является решением (7) (лекция 13), причём функция $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема. Выведем необходимые условия в виде уравнений характеристик. Заодно поясним, как до них можно было догадаться.

Мы следуем книге А.А. Меликяна. Единственное отличие — будем употреблять матричные обозначения для производных и будем матрицы-строки, матрицы-столбцы и т.д.

Рассмотрим поле векторов F_p в виде соотношения

$$\dot{x} = F_p^T(x, u(x), p(x)), \quad x \in D \qquad (10)$$

Здесь F_p — производная скалярной функции $F(x, u(x), p(x))$ по векторному третьему аргументу. Она представляет собой матрицу-строку. Мы помимо параметра $s \in R^{n-1}$ (лекция 14) сейчас введём параметр $t \in R$

и $\dot{x}$ — это $\frac{dx}{dt}(t)$.

Для производной $\dot{p}(t)$ вдоль $\dot{x}(t)$ получаем

$$\frac{dp}{dt}(x(t)) = \frac{dp}{dx}(x(t))\cdot\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{dp}{dx}(x(t))}_{\text{матрица } n\times n}\cdot \underbrace{F_p^T(x(t),u(x(t)),p(x(t)))}_{\text{столбец длины } n} \quad (11)$$

Матрица $\frac{dp}{dx}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial p_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial p_2}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial p_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial p_n}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial p_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

По предположению $p(x)$ — это градиент функции $x \to u(x)$, а сама функция имеет вторые производные. Поэтому $\frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial u^2}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i}$, т.е. матрица $\frac{dp}{dx}(x(t))$ — симметрическая. Следовательно,

$$\dot{p}(t) = \frac{dp}{dx}(x(t))\cdot F_p^T(x(t),u(x(t)),p(x(t))) = \left(F_p(\ )\frac{dp}{dx}^T(x(t))\right)^T =$$

$$= \left(\underbrace{F_p(\ )\cdot\frac{dp}{dx}(x(t))}_{\text{строка}}\right)^T \quad (12)$$

столбец.

Продифференцируем исходное соотношение (7) по x. Получим

$$F_x + F_u \cdot p^T + F_p \cdot \frac{dp}{dx} = 0 \qquad (13)$$

строка строка строка матрица $n \times n$

Из (12) и (13) имеем

$$\dot p(t) = -F_x^T - pF_u \qquad (14)$$

столбец столбец

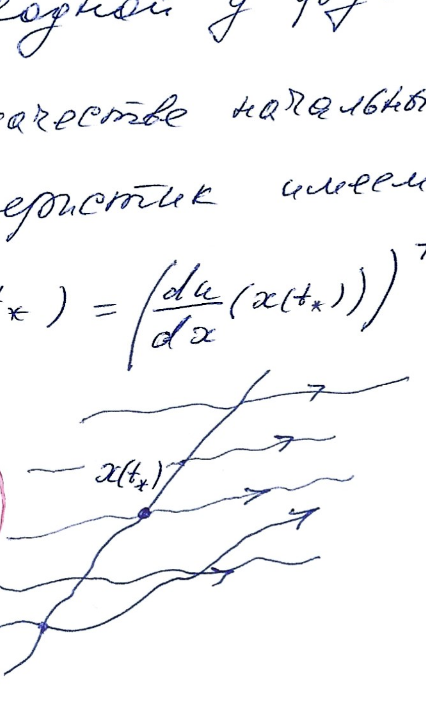
Далее

$$\dot u = \frac{du}{dx} \cdot \dot x(t) = p^T \cdot \dot x(t) = \langle p, F_p \rangle \qquad (15)$$

Система (10), (14), (15) и есть система характеристик, которая на прошлой лекции была обозначена (9). При выводе (14) мы использовали наличие второй производной у функции $x \to u(x)$.

В качестве начальных условий для системы характеристик имеем $x(t_*) \in M$, $u(t_*) = u(x(t_*))$ и $p(t_*) = \left(\frac{du}{dx}(x(t_*))\right)^T$.

Как ведут себя, $t \to x(t)$ (пересекаются ли они), не знаем!!



Параметр s задаёт точку на M, параметр t — движение характеристики. Характеристикам считаем тройку $\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \\ p(t) \end{pmatrix}$. Но часто под характеристикой подразумевают только $t \to x(t)$.

Далее нас будут интересовать достаточные условия для конструирования функций $x \to u(x)$, $x \to p(x)$ так, чтобы $p(x) = \left(\frac{du}{dx}(x)\right)^T$ и удовлетворялось уравнение (7). При этом будем опираться на систему характеристик. Прежде разберёмся с начальными условиями для неё.

Начальные условия для системы характеристик

Начальные условия задаём на M. Многообразие M задано параметрически: $x = \varphi(s)$, где φ — непрерывно дифференцируемая взаимнооднозначная функция. Значение u определяется через $x(s)$ в виде $u(x(s)) = w(s)$. Хуже с $p(x(s))$.

Ясно, что должно удовлетворяться (7):

$$F\quad, w(s), p(\varphi(s))) = 0. \qquad (16)$$

Имеем $w(s) = u(x(s))$. Поэтому

$$\frac{dw}{ds}(s) = \frac{du}{dx}(\varphi(s)) \cdot \frac{d\varphi}{ds}(s) \qquad \xrightarrow{n-1} = \xrightarrow{n}$$

Мы либо считаем, что $p(\varphi(s)) = \left(\frac{du}{dx}(\varphi(s))\right)^T$ нам задано, причём удовлетворяется (16) [это была бы самостоятельная постановка], либо будем искать p из системы

$$\begin{cases} F(\varphi(s), w(s), p) = 0 \\ \dfrac{dw}{ds}(s) - p^T \dfrac{d\varphi}{ds} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

[это другая постановка]. Мы будем придерживаться второй постановки. Обозначим (17) через $J(s, p) = 0$. Мы хотим выразить p как функцию от s вблизи некоторых s^*, p^*. Для этого по теореме о неявной функции потребуем существование $\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*)$ и наличие обратного к ней. Мы тем самым подгоняем под стандартную теорему о существовании дифференцируемой неявной функции. Имеем

$$\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*) = \begin{pmatrix} F_p(\varphi(s^*), w(s^*), p^*) \\ \left(\dfrac{d\varphi}{ds}(s^*)\right)^T \end{pmatrix} \tag{18}$$

Чтобы получить (18) из (17) лучше вторую строку в (17) переписать в виде $\left(\frac{dw}{ds}(s)\right)^T - \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^T p = 0$.

~~В~~ (18) получаем

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}(s^*, p^*) = \begin{pmatrix} F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots, F_{p_n} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_1} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_{n-1}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_{n-1}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Требуем: определитель этой матрицы отличен от нуля. Возникающую неявную функцию от s обозначим $\psi(s)$.

Теперь начальные условия для системы характеристик возьмём в виде

$x = \varphi(s)$, $u = \vartheta(s)$, $p = \psi(s)$, $s \in$ малой окрестности s^*, для которой $\varphi(s^*) = x^*$, $\vartheta(s^*) = u^*$. Имеем $p^* = \psi(s^*)$.

Поскольку строки матрицы (19) линейно независимы при $s = s^*$, то вектор F_p не является касательным к многообразию M в точке $x^* = \varphi(s^*)$. Это повлечёт за собой, что x-характеристики, выпускаемые при s близких к s^* не пересекаются при t близких к начальному. Далее начальное t_* полагаем $t_* = 0$.

Мы предполагаем, что $F \in C^2$. Предположим также, что $\varphi \in C^2$ и $\vartheta \in C^2$. Получим $\varphi \in C$.

!!

Построение дважды непрерывно дифференцируемого решения уравнения (7) при помощи характеристик

Обозначим решение системы характеристик через $X(s,t)$, $U(s,t)$, $P(s,t)$. Окрестности по s и t считаем малыми. Обозначим их G и $|t| \leq t_0$.

Поскольку x-характеристики выходят под углом от M, то в малой окрестности s,t можно говорить о взаимно однозначном соответствии

$$x = X(s,t).$$

Т.е. мы можем восстанавливать (s,t) по x в малой окрестности точки x^*. Пусть для краткости $\xi = \binom{s}{t}$. Тогда $x = X(\xi)$. Матрица $\frac{dX}{d\xi}(\xi^*)$, где $\xi^* = \binom{s^*}{t^*} = \binom{s^*}{0}$, совпадает с матрицей (19) [проверить]. Следовательно, она имеет обратную. Находим $s = S(x)$, $t = T(x)$. Составляем

$$u(x) = U(S(x), T(x)), \quad p(x) = P(S(x), T(x)).$$

Далее покажем, что 1) эти функции удовлетворяют (7) в малой окрестности x^*, 2). $p(x)$ является градиентом $u(x)$.