# Лекция 16, магистранты 2022

## Применение метода характеристик к решению дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания

① Мы записывали УЧП первого порядка в виде $F(x, u, p) = 0$, $x \in R^n$, $u \in R$, $p \in R^n$, $p = \left(\frac{du}{dx}\right)^T$.

Краевое условие задавалось на гладкой поверхности размерности $n-1$, представленной параметрически: $x = \varphi(s)$, $s \in R^{n-1}$. Значение искомой функции $u$ на $M$ представлялось как $w(s) = u(\varphi(s))$. Были трудности с заданием краевого условия для $p$ на $M$. Мы записывали производную $p$ вдоль $M$: $\frac{dw}{ds}(s) = p^T \frac{d\varphi}{ds}$. Добавляли к этому соотношению связь $F(\varphi(s), w(s), p) = 0$. Получали систему (17) из лекции 14:

$$\begin{cases} F(\varphi(s), w(s), p) = 0 \\ \frac{dw}{ds}(s) - p^T \frac{d\varphi}{ds} = 0 \end{cases}, \quad \text{т.е. } J(s, p) = 0.$$

Брали некоторую пару $s^*, p^*$, удовлетворяющую ей, и пытались при помощи теоремы о неявной функции выразить $p$ через $s$ так, что $p = \psi(s)$, $p^* = \psi(s^*)$, $J(s, p(s)) = 0$ при $s$ близких к $s^*$. Стандартное требование существования $\left[\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*)\right]^{-1}$ служило условием такого локального выражения. Производная $\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*)$ имела вид (18) из лекции 14:

$$\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*) = \begin{pmatrix} F_p(\varphi(s^*), w(s^*), p^* \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s^*)\right)^T \end{pmatrix}.$$

Система характеристик Коши записывалась в виде

$$\dot{x} = F_p^T(\dots)$$
$$\dot{p} = -F_x^T(\dots) - p F_u(\dots)$$
$$\dot{u} = p^T F_p(\dots)$$

Здесь скобка $(\dots)$ есть $(x(t,s), u(t,s), p(t,s))$. Дифференцирование слева осуществлялось по $t$, а $s$ — параметр начального условия $x(0,s), p(0,s), u(0,s)$.

Далее говорилось о существовании области, содержащей точку $x(s^*)$ в пространстве $x$, через каждую точку которой проходит лишь одна $x$-характеристика. Тем самым $x$ и $(t,s)$ связывались взаимно-однозначным соответствием. Это позволило сконструировать функции $u(x) = U(t,s)$, $p(x) = P(t,s)$, удовлетворяющие УЧП.

2 Посмотрим, во что превращается описанная схема, когда мы рассматриваем дифферен-

циальную игру

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \ v \in Q \qquad (1)$$

с фиксированным моментом окончания $T$ и функцией платы, подсчитываемой в этот момент. Прежде всего, нам надо избавиться от путаницы в обозначениях. Оставляя привычными обозначения в записи динамики системы (1), сменим обозначения в записи УЧП:

$$F\left(z, V(z), \frac{dV}{dz}(z)\right) = 0.$$

Здесь $V(z)$ от "value" – значение функции цены в точке $z$, и пусть $z = \binom{x}{t}$, где $t$ – время. Тогда получим

$$F(\underbrace{t, x}_{\text{вместо } z}, \ V(t,x), \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}(t,x)}_{\text{вместо } \frac{dV}{dz}(z)}) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение типа Гамильтона – Якоби из лекции 13 имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \frac{\partial V}{\partial x}^T(t,x) \cdot f(t,x,u,v) = 0,$$

Учитывая наше предположение о седловой точке в маленькой игре и подставляя экстремальные значения внешних экстремумов в $\min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} \ldots =$

$= \max\limits_{v \in Q} \min\limits_{u \in P} \ldots$, получим

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial V}{\partial x}^T(t,x)\cdot f(t,x,u^*(t,x),v^*(t,x)) = 0. \quad (3)$$

Это очень частный случай исследованного нами УЧП: производные от $V$ по $t$ и по $x$ входят специфически, в левой части нет значения $V$ искомой функции.

Пусть

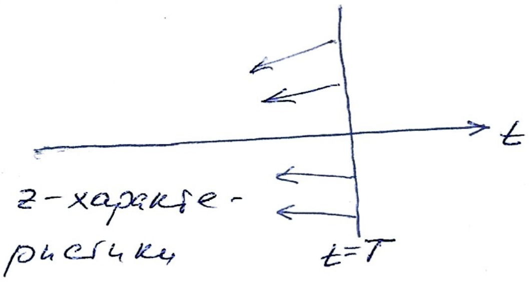
$$H(t,x,\frac{\partial V}{\partial x}) = \frac{\partial V}{\partial x}^T \cdot f(t,x,u^*,v^*)$$

– "минимаксный урезанный гамильтониан". Минимаксный – потому, что перед этим проделали операцию $\min\limits_{u\in P}\max\limits_{v\in Q}$, урезанный – потому, что мы раньше обозначали словом гамильтониан всю левую часть в (2). Тогда УЧП имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t,x,\frac{\partial V}{\partial x}) = 0. \quad (4)$$

Подгоняя под старую формулировку, говорим, что надо найти гладкую функцию $V$, которая удовлетворяет (3) (или (4)) и удовлетворяет краевому условию в момент $T$. В качестве краевого условия берём значение $V(T,x)$, которое считаем заданным по постановке задачи. Если мы хотим применить метод характеристик, то надо позаботиться о нужной гладкости левой части в (3) (или в левой части (4)). Это не является тривиальным.

С другой стороны, есть облегчение в записи краевого условия и в проверке условия регулярности. А именно, сейчас терминальная поверхность — это гиперплоскость $\left\{\binom{x}{t} : t = T\right\}$ и компонента $t$ будет идти влево от $T$. Надо лишь позаботиться, чтобы отход соответствующей z-характеристики был "под ненулевым углом" от этой гиперплоскости. Проверку




условия регулярности $\left[\frac{\partial J}{\partial p}(s^*, p^*)\right]^{-1}$ можно сделать формально. При этом учитываем, что мы можем взять $s = x$, а $p$ имеет $n+1$ скалярных компонент, причём последняя из них соответствует $\frac{\partial V}{\partial t}$, а $n$ первых — производной $\frac{\partial V}{\partial x}$.

③ Уравнения характеристик примут вид

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_{1-n}}(\ ) = f(t, x, u^*(t,x), v^*(t,x))$$

$\dot{t} = 1$ ← это уравнение выкидывается

$$\dot{p}_{1-n} = -\frac{\partial H}{\partial x}(\ )$$

$$\dot{p}_{n+1} = -\frac{\partial H}{\partial t}(\ )$$

$$\dot{v} = p_{1-n}^T \cdot H_{p_{1-n}}(\ ) + p_{n+1} \cdot \underbrace{H_{p_{n+1}}(\ )}_{=0}$$

( ) есть $(t, x, p_{1-n})$.

При этом $t$ идёт в сторону уменьшения от $T$.

Но это использование характеристик лишь при "небольшом" отходе от T. Дальше начинаются сложности, о которых говорилось уже раньше.

Далее в лекции идёт показ картинок из книги А.А. Мелихова и из диссертации С.С. Кулькова.