Предварительные понятия о необходимых и достаточных условиях для функции цены в дифференциальных играх и об обобщённых решениях УЧП первого порядка

① Теорема А.И. Субботина о производных по направлению в дифференциальных играх

Как правило, функция цены игры в дифференциальных играх не является дифференцируемой. В процессе развития теории дифференциальных игр возникли строгие определения, что такое цена игры и для различных классов дифференциальных игр были доказаны теоремы существования и единственности функции цены. Мы, например, в своём курсе при изучении дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания и непрерывной функцией платы использовали теорему об альтернативе; она, в свою очередь, опиралась на результаты, где применялось свойство стабильности. Функция цены игры являлась непрерывной, но о её дифференцируемости ничего не говорилось. Отсутствие дифференцируемости было главным препятствием к применению УЧП первого порядка (классическая теория) к дифференциальным играм. Мы говорили об этом, разбирая в предыдущих лекциях классический метод характеристик Коши.

А. И. Субботин долгое время пытался модернизировать понятие стабильности, чтобы в новых терминах говорить об УЧП первого порядка.

Напомним классическое УЧП первого порядка, соответствующее игре с фиксированным моментом окончания и непрерывной терминальной функцией платы:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,x) + \min_{u\in P}\max_{v\in Q} \frac{\partial S}{\partial x}(t,x)\cdot f(t,x,u,v) = 0, \quad S(T,x)=\psi(x) \qquad (1),$$

здесь $f(t,x,u,v)$ – правая часть динамики управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u,v), \quad u\in P, \quad v\in Q. \qquad (2)$$

В предположении выполнения условия седловой точки в маленькой игре вместо $\min\limits_{u\in P}\max\limits_{v\in Q}\ldots$ можно писать $\max\limits_{v\in Q}\min\limits_{u\in P}\ldots$.

Прежде всего, что понимать под решением (1), если функция цены Γ не является дифференцируемой?

А.И. Субботин начал рассматривать более слабое понятие производной по направлению. Такие производные, в отличие от стандартной дифференцируемости, обычно есть для функции цены.

Под производной $\frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)}$ по направлению $(1,f)$ понимаем величину

$$\frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)} = \lim_{\delta\to 0,\, \delta>0} \frac{\Gamma(t+\delta, x+\delta\cdot f)-\Gamma(t,x)}{\delta}.$$

Здесь 1 есть скорость изменения времени, а f — скорость изменения фазовой переменной x в силу (2).

Теорема. В игре с фиксированным моментом окончания T и терминальной функцией платы φ функция Γ, удовлетворяющая краевому условию $\Gamma(t,x)=\varphi(x)$, является функцией цены игры тогда и только тогда, когда при всех $(t,x)\in(-\infty,T)\times R^n$ выполнены неравенства

$$\sup_{v\in Q}\inf_{f\in F(t,x,v)} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)} \le 0, \quad \inf_{u\in P}\sup_{f\in F(t,x,u)} \frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial(1,f)} \ge 0 \quad (3)$$

Здесь

$F(t,x,v) = \mathrm{co}\{F(t,x,u,v) : \in P\}$, $F(t,x,u) = \mathrm{co}\{F(t,x,u,v) : v\in Q\}$.

Таким образом, необходимые и достаточные условия существования функции цены имеют вид двух неравенств, а не одного соотношения в виде равенства, как это было в классической теории уравнений Гамильтона - Якоби. Содержательно, левое неравенство в (3) означает выполнение свойства стабильности при дискриминации второго игрока первым, а правое, наоборот, первого вторым. Свойства стабильности рассматриваются теперь с учётом значения функции Г. В точках непрерывной дифференцируемости функции Г неравенства (3) обращаются в равенства.

Итак, при подходе к УЧП первого порядка со "стороны" дифференциальных игр главная мысль состоит в рассмотрении двух неравенств, соответствующих стабильности (ещё говорят и "слабой инвариантности") исследуемой функции с точки зрения каждого из двух игроков.

(2) Минимаксные решения УЧП первого порядка

Подход А.И. Субботина к решению УЧП первого порядка стали называть минимаксным (так стал он называть сам, ибо все идеи шли из дифференциальных игр).

Помимо свойства стабильности перед глазами у А.И. был классический метод характеристик. Можно ли его как-то модернизировать, отказавшись от дифференцируемости?

Мы для УЧП

$$F(x, u, p) = 0 \qquad (4)$$

систему характеристик в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (лекция 13) записывали в виде

$$\dot{x} = F_p^T, \quad \dot{u} = \langle p, F_p^T \rangle, \quad \dot{p} = -F_x^T - pF_u \qquad (5)$$

Решениями этой системы были функции $t \to x(t)$, $t \to u(t)$, $t \to p(t)$. При этом прежде всего доказывалось, что вдоль характеристик выполнено соотношение $F(x(t), u(t), p(t)) = 0$ (Лекция 15, стр. 6. Там решения были обозначены $X(t,s)$, $U(t,s)$, $P(t,s)$). В связи с этим добавим в соотношение $\dot{u} = \langle p, F_p^T \rangle$ слагаемое

$F(x(t), u(t), p(t))$, т.е.

$$\dot{u} = \underset{\langle p, F_p^T \rangle}{\underset{\shortparallel}{F_p \cdot p}} - F(x, u, p) = \langle \underset{\underset{F_p^T}{\shortparallel}}{\dot{x}}, p \rangle - F(x, u, p). \ (5).$$

Теперь $\dot{u}$ трактуется как разность проекции $\dot{x}$ на p от $F(x, u, p)$.

Определение. Скалярная функция $x \to u^*(x)$ называется минимаксным решением УЧП (4) в области G переменной x, если выполнено следующее условие: для любой точки $(x_0, u^*(x_0))$ на графике $\{(x, u^*(x)) : x \in G\}$ функции u^* и любого вектора $p \in R^n$ существуют число $\bar{t} > 0$ и липшицева функция $(x(\cdot), u(\cdot)) : [0, \bar{t}] \to G \times R$ такие, что $(x(0), u(0)) = (x_0, u^*(x_0))$, $u(t) = u^*(x(t))$ для всех $t \in [0, \bar{t}]$ и п. в. на $[0, \bar{t}]$ выполнено

$$\dot{u}(t) = \langle \dot{x}(t), p \rangle - F(x(t), u(t), p) \qquad (6).$$

Мы в этом определении видим подбор $u(t)$ по p так, что решение (6) идёт по графику функции $x \to u^*(x)$.

[Приведённое определение взято (с изменением обозначений) со стр. 20 книги А. И. Субботина "Обобщённые решения уравнений в частных производных первого порядка."]

Используя (6), А. И. Субботин по-другому записал характеристики Коши, ибо уравнение для $\dot{p}$ теперь (при отсутствии даже непрерывной зависимости $t \to p(t)$) теряет смысл. Он изменил также и первое уравнение.

③ Понятие о вязкостном решении УЧП.

Практически в те же годы (начало 80-х) было введено понятие вязкостного решения в работах Lions P.L., Crandall M.G. и их соавторов. Дадим определение.

Непрерывная функция u с краевым условием на множестве M называется вязкостным решением терминальной задачи для УЧП (4), если

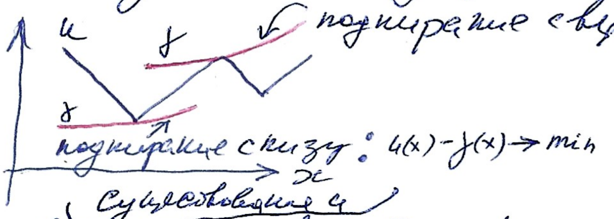
1) она удовлетворяет краевому условию на M

2) для любой гладкой тест-функции $\varphi(x)$ такой, что локальный минимум (максимум) разности $u(x) - \varphi(x)$ достигается в некоторой точке x^0, справедливо неравенство

$$F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \leq 0 \quad \left(F(x^0, u(x^0), \varphi_x(x^0)) \geq 0\right)$$

[Определение взято со стр. 78 книги А.А. Меликяна].

Видим, что здесь, как и в первоначальных подходах А.И. Субботина, в определении решения содержатся два неравенства. Тестовые функции задают возможные варианты градиентов. Тестовые функции подпирают "истинную" негладкую функцию снизу или сверху:



Установлены существование и единственность минимаксного

А.И. Субботин доказал эквивалентность минимаксного и вязкостного решений для широкого класса УЧП.