

Линейные управляемые системы

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \qquad (1)$$

$$x(t) \in R^n, \quad u(t) \in P$$

P — выпуклое, замкнутое, ограниченное

$A(\cdot)$, $B(\cdot)$ — непрерывны (или кусочно-непрерывны справа)

Начнём с однородной части

$$\dot{x} = A(t)\,x \qquad (2)$$

Матрица Коши

Пусть $t \to x^{(i)}(t,\tau)$ — решение системы (2) с начальным условием $e^{(i)}$ в момент τ,

$$e^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — 1 стоит на } i\text{-ом месте.}$$

Положим

$$X(t,\tau) = \left(x^{(1)}(t,\tau),\; x^{(2)}(t,\tau),\; \dots,\; x^{(n)}(t,\tau) \right)$$

и назовём такую $n \times n$ матрицу матрицей Коши (более аккуратно — фундаментальная матрица Коши).

Матрица Коши зависит от двух моментов времени t, τ.

Свойства:

① $X(t, t) = E$

② $\dfrac{\partial X}{\partial t}(t, \tau) = A(t) X(t, \tau)$,

ибо $\dfrac{\partial x^{(i)}}{\partial t}(t, \tau) = A(t)\, x^{(i)}(t, \tau)$.

③ Если x_0 — произвольное начальное условие в момент t_0, то

$$x(t) = X(t, t_0)\, x_0$$

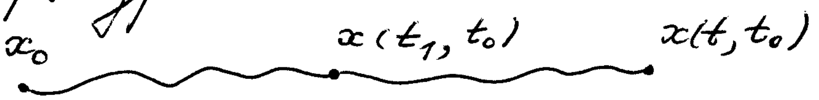
— решение системы (2) с этим условием.

Действительно,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial X}{\partial t}(t, t_0) x_0 = A(t) X(t, t_0) x_0 = A(t)\, x(t)$$

④ $X(t, t_0) = X(t, t_1) X(t_1, t_0), \quad \forall t_1, t, t_0$

Это называется полугрупповым свойством. Оно происходит из полугруппового [можно ли объяснить это слово из стандартного определения полугруппы?] свойства для решения диф. уравнения:



Имеем

$$x(t_1, t_0) = X(t_1, t_0)\, x_0, \quad x(t, t_0) = X(t, t_0)\, x_0,$$

$$x(t, t_0) = X(t, t_1)\, x(t_1, t_0) = X(t, t_1) X(t_1, t_0)\, x_0$$

Вычитая одно из другого два представления для $x(t, t_0)$, получим

$$0 = (X(t,t_0) - X(t,t_1)X(t_1,t_0))\,x_0 .$$

Поскольку это справедливо для $\forall x_0$, то $(\ldots) = 0$.

5. $X(t_0, t_1) = X^{-1}(t_1, t_0), \quad \forall t_1, t_0.$

(т.е. обратная матрица существует и равна исходной, но с „перекинутыми" аргументами)

Действительно,

$$E = X(t_0, t_0) = X(t_0, t_1)X(t_1, t_0).$$

6. $\dfrac{\partial X}{\partial \tau}(t,\tau) = -X(t,\tau)A(\tau).$

Имеем

$$X(t,\tau)\cdot X(\tau,t) = E$$

Далее

$$\frac{\partial X}{\partial \tau}(t,\tau)X(\tau,t) + X(t,\tau)\frac{\partial X}{\partial \tau}(\tau,t) = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \tau}(t,\tau) = -X(t,\tau)\cdot\frac{\partial X}{\partial \tau}(\tau,t)\cdot X^{-1}(\tau,t) =$$

$$= -X(t,\tau)A(\tau)X(\tau,t)\cdot X^{-1}(\tau,t) = -X(t,\tau)A(\tau).$$

Формула Коши

$$x(t) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

Простой проверкой убеждаемся, что это решение:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial X}{\partial t}(t,t_0)x_0 + X(t,t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial X}{\partial t}(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau =$$

$$= A(t)X(t,t_0)x_0 + B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau =$$

$$= A(t)\Big[X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau\Big] + B(t)u(t) =$$

$$= A(t)x(t) + B(t)u(t).$$

Теперь ссылаемся на теорему об единственности решения.

Выпуклость множества достижимости

$$G(t;t_0,x_0) = \bigcup_{u(\cdot)} x(t;t_0,x_0,u(\cdot)).$$

Пусть x^* и $\hat{x}$ – две точки из $G(t;t_0,x_0)$:

$$x^* = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u^*(\tau)\,d\tau,$$

$$\hat{x} = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)\hat{u}(\tau)\,d\tau.$$

Возьмём точку

$$x^{(\lambda)} = \lambda x^* + (1-\lambda)\hat{x}, \quad \lambda \in [0,1]$$

на отрезке, соединяющем x^* и $\hat{x}$.

Положим

$$u^{(\lambda)}(t) = \lambda u^*(t) + (1-\lambda)\hat{u}(t).$$

Тогда

$$X(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)u^{(\lambda)}(\tau)\,d\tau =$$

$$= X(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)B(\tau)\left(\lambda u^*(\tau)+(1-\lambda)\hat{u}(\tau)\right)d\tau=$$

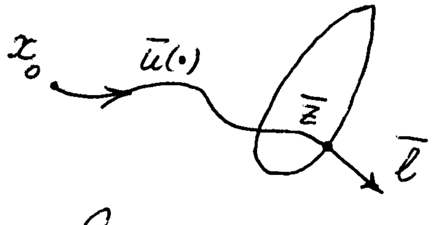
$$=X(t,t_0)(\lambda x_0+(1-\lambda)x_0)+\ldots = \lambda x^*+(1-\lambda)\hat{x} = x^{(\lambda)}.$$

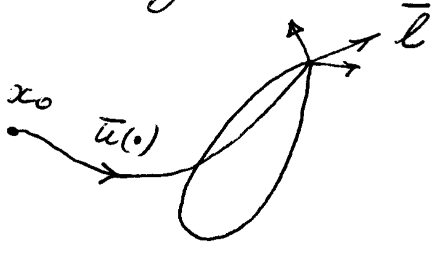
Экстремальность управлений, ведущих на границу множества достижимости

$\dot{x} = A(t)x+B(t)u$ — укороченная запись (1).

$$G(t_*)=\bigcup_{u(\cdot)} x(t;t_0,x_0,u(\cdot)) = X(t_*,t_0)x_0+\bigcup_{u(\cdot)}\int_{t_0}^{t_*}X(t_*,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

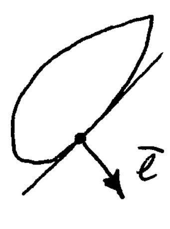
Пусть $\bar{z}\in\partial G(t_*)$, $\bar{u}(\cdot)\to\bar{z}$ и $\bar{l}$ — вектор внешней нормали к выпуклому множеству $G(t_*)$ в точке $\bar{z}$:

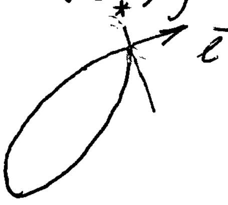




Имеем

$$\langle \bar{l},\bar{z}\rangle = \max\{\langle \bar{l}, z\rangle : z\in G(t_*)\} \qquad (3)$$





Получаем

$$\langle \bar{l}, \bar{z} \rangle = \bar{l}^T \bar{z} = \bar{l}^T \Big(X(t_*, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_*} X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau \Big) =$$

$$= \bar{l}^T X(t_*, t_0) x_0 + \bar{l}^T \int_{t_0}^{t_*} X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau =$$

$$= \bar{l}^T X(t_*, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau \quad (4)$$

Это левая часть (3). Распишем правую:

$$\max_{z \in G(t_*)} \bar{l}^T z = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \bar{l}^T \Big(X(t_*, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_*} X(t_*, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \Big) =$$

$$= \bar{l}^T X(t_*, t_0) x_0 + \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (5)$$

Из (4), (5) имеем

$$\int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Теперь [и это самое главное]

$$\max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_*} \max_{p \in P} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) p \, d\tau \quad (6)$$

$\leq$ – очевидно

$\geq$ – доказать самим.

Таким образом,

$$\int_{t_0}^{t_*} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t_*} \max_{p \in P} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) p\, d\tau$$

Отсюда [!]

$$\bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) = \max_{p} \bar{l}^T X(t_*, \tau) B(\tau) p, \quad \tau \in [t_0, t_*) \quad (7)$$

Итак:

Пусть $\bar{u}(\cdot)$ ведёт в точку $\bar{z} \in \partial G(t_*)$. Тогда для любого вектора $\bar{l}$ из конуса внешних нормалей к $G(t_*)$ в точке $\bar{z}$ выполнено (7)

Поскольку в выкладках были только переходы со знаком равенства, то мы можем вернуться от (7) к (3). И значит

Пусть $\bar{u}(\cdot)$ удовлетворяет (7). Тогда оно ведёт в некоторую точку $\bar{z} \in \partial G(t_*)$.

Следовательно, принцип максимума —

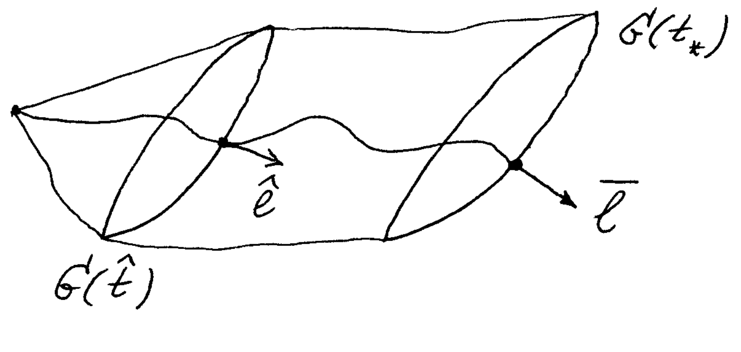
необх. и дост. условие для управлений, ведущих на границу множества достижимости.

Пусть теперь есть начальное выпуклое, замкнутое, ограниченное множество M. Тогда

$$G(t_*; t_0, M) = \bigcup_{x_0 \in M} \bigcup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} x(t_*; t_0, x_0, u(\cdot)).$$

) Сформулировать самим принцип максимума. [Отличие в том, что в выкладках помимо $\bar{u}(\cdot)$ рассматриваем $\bar{x}_0 \in M$ и доказываем, что $\bar{x}_0 \in \partial M$]

Управление, удовлетворяющее принципу максимума, ведёт движение по границе трубки множества достижимости



Обозначим краевой вектор через $\bar{\ell}$. Возьмём произвольный момент $\hat{t} \in [t_0, t_*)$. Покажем, что в момент $\hat{t}$ точка $z(\hat{t})$ движения лежит на $\partial G(\hat{t})$, причём $\hat{\ell} = (\bar{\ell}^T X(t_*, \hat{t}))^T = X^T(t_*, \hat{t})\bar{\ell}$ – вектор внешней нормали.

Имеем

$$z(\hat{t}) = X(\hat{t}, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\hat{t}} X(\hat{t}, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau,$$

$$\hat{\ell}^T z(\hat{t}) = \hat{\ell}^T X(\hat{t}, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\hat{t}} \hat{\ell}^T X(\hat{t}, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим интегральный член:

$$\int_{t_0}^{\hat{t}} \hat{\ell}^T X(\hat{t}, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{\hat{t}} \underbrace{\bar{\ell}^T X(t_*, \hat{t})}_{\hat{\ell}^T} X(\hat{t}, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{\hat{t}} \bar{\ell}^T X(t_*, \tau)B(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{\hat{t}} \max_{p\in P} \bar{\ell}^T X(t_*, \tau)B(\tau)p\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{\hat{t}} \max_{p\in P} \underbrace{\bar{\ell}^T X(t_*, \hat{t})}_{\hat{\ell}^T} X(\hat{t}, \tau)B(\tau)p\,d\tau =$$

$$= \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \hat{\ell}^T \int_{t_0}^{\hat{t}} X(\hat{t}, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \Longrightarrow$$

$$\hat{\ell}^T z(\hat{t}) = \hat{\ell}^T X(\hat{t}, t_0)x_0 + \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \hat{\ell}^T \int_{t_0}^{\hat{t}} X(\hat{t}, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow$$

$$\hat{l}^T z(\hat{t}) = \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \langle \hat{l}, z(\hat{t}; t_0, x_0, u(\cdot)) \rangle,$$

т. е. точка на границе.

Если начальное выпуклое, замкнутое, ограниченное множество M отлично от точки, то можно сформулировать аналогичный результат о движении по границе.

Прицеливающий вектор в принципе максимума

Положим

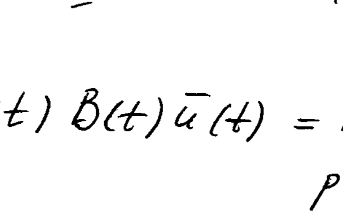
$$\bar{\psi}(t) = X^T(t_*, t)\,\bar{l}$$

[Вместо τ начали писать t]

Соотношение максимума запишется в виде

$$\bar{\psi}^T(t) B(t) \bar{u}(t) = \max_{p\in P} \bar{\psi}^T(t) B(t) p, \quad t \in [t_0, t_*) \quad (8)$$

Вектор $\bar{\psi}(t)$ можно назвать прицеливающим



Принцип максимума Л. С. Понтрягина

$$\bar\psi(t) = X^T(t_*, t)\,\bar l$$

$$\dot{\bar\psi}(t) = -\left(X^T(t_*, t)A(t)\right)^T \bar l = -A^T(t)X(t_*, t)\bar l =$$

$$= -A^T(t)\,\bar\psi(t).$$

Следовательно, вектор-функция $t \to \bar\psi(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\dot\psi = -A^T(t)\psi \qquad (9)$$

с краевым условием $\psi(t_*) = \bar l$.

Новая формулировка: управление $\bar u(\cdot)$, ведущее в точку на $\partial G(t_*)$ с вектором внешней нормали $\bar l$, удовлетворяет условию максимума

$$\bar\psi^T(t)B(t)\bar u(t) = \max_{p \in P} \bar\psi(t)B(t)p, \quad t \in [t_0, t_*) \qquad (10)$$

где $\bar\psi(\cdot)$ – решение системы (9) с краевым условием $\bar l$ в момент t_*.

Наоборот: если выполнено условие максимума (4) при некоторой функции $\bar\psi(\cdot)$, удовлетворяющая (3), то управление $\bar{u}(\cdot)$ ведёт в точку на $\mathcal{X}(t_*)$, для которой вектор внешней нормали равен $\bar{\ell}$.

Наиболее популярные примеры

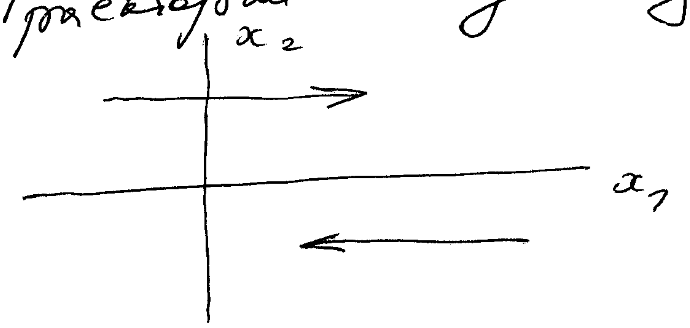
1) Материальная точка на прямой:

$$\ddot{y} = u, \quad |u| \le \mu.$$

Обозначим $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le \mu. \end{cases}$$

Траектории свободного движения:



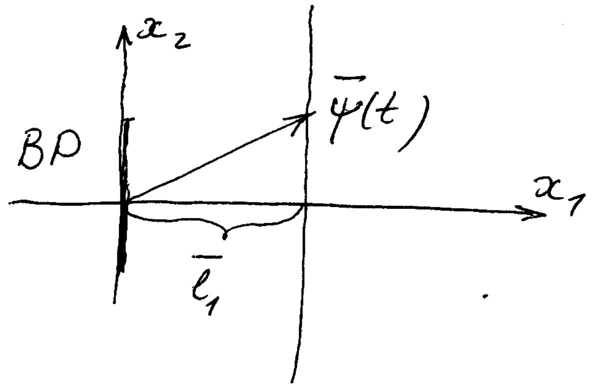
В векторной форме

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Коши:

$$X(t_*, t) = \begin{pmatrix} 1 & t_* - t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar\psi(t) = X^T(t_*,t)\,\bar l = \begin{pmatrix}1 & 0\\ t_*-t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar l_1\\ \bar l_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar l_1\\ \bar l_1(t_*-t)+\bar l_2\end{pmatrix}$$



$$\bar u(t) = \begin{cases} \mu, & \text{если } \bar\psi_2(t) > 0\\ -\mu, & \text{если } \bar\psi_2(t) < 0\\ ?, & \text{если } \bar\psi_2(t) = 0.\end{cases}$$

В этом примере $\bar\psi_2(t)=0$ только в изолированные моменты времени, причём моментов прохода через нуль не более одного. Поэтому значение $\bar u(t)$ берём из условия непрерывности справа. Управление, удовлетворяющее условию максимума, имеет не более одного переключения.

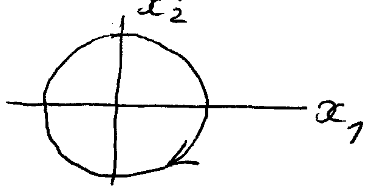
Итак, $\bar u(t) = \mu\,\mathrm{sign}\{\bar l_1(t_*-t)+\bar l_2\}$.

Попробовать самим получить описание границы множества достижимости.

2) Управляемый осциллятор:

$$\dot x_1 = x_2$$
$$\dot x_2 = -x_1 + u, \quad |u| \le \mu.$$

Траектории свободного движения — окружности



При записи системы в матричной форме получим

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Матрица Коши

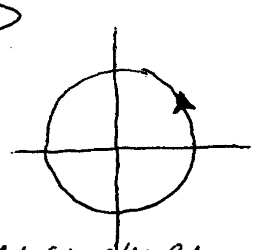
$$X(t_*,t)=\begin{pmatrix}\cos(t_*-t) & \sin(t_*-t)\\ -\sin(t_*-t) & \cos(t_*-t)\end{pmatrix}$$

$$\bar\psi(t)=X^T(t_*,t)\,\bar l,$$

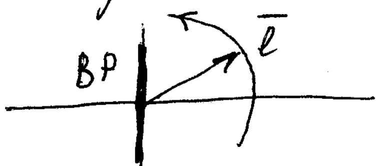
$$X^T(t_*,t)=\begin{pmatrix}\cos(t_*-t) & -\sin(t_*-t)\\ \sin(t_*-t) & \cos(t_*-t)\end{pmatrix}$$

Заметим, что $X(t_*,t)X^T(t_*,t)=E \Rightarrow$

$$X^T(t_*,t)=X^{-1}(t_*,t)=X(t,t_*)$$



Итак, $\bar\psi(t)$ — вектор, вращающийся с уменьшением t против часовой стрелки.



знак $\bar u(t)$ зависит от $\psi_2(t)$:

$$\bar u(t)=\mu\,\mathrm{sign}\,\bar\psi_2(t)=\mu\,\mathrm{sign}\{\sin(t_*-t)\bar l_1+\cos(t_*-t)\bar l_2\}$$

? Можно ли продвинуться в описании границы $G(t_*)$?