Линейная задача оптимального управления с фиксированным моментом окончания и терминальной выпуклой функцией платы

① Мы знаем, что множество достижимости $G(t_*)$ в фиксированный момент t_* для линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad u \in P, \quad x \in R^n \quad (1)$$

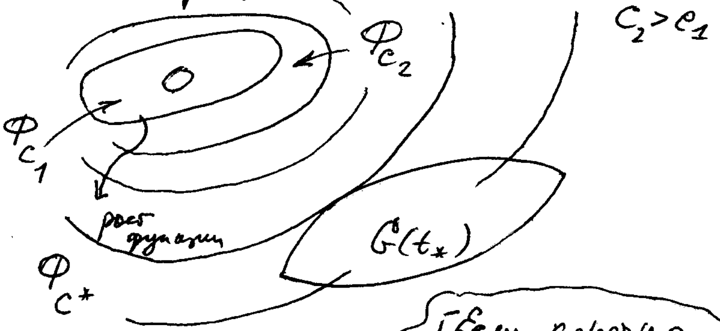
является выпуклым. Дополнительно будем предполагать его замкнутым (в рассматриваемом классе кусочно-непрерывных судьбы допустимых управлений $u(\cdot)$).

Пусть задана функция платы $x \Rightarrow \varphi(x)$, $x \in R^n$. Минимизировать её в момент t_* – это значит найти $\min\limits_{x \in G(t_*)} \varphi(x)$. Поскольку $G(t_*)$ выпукло, то естественно предположить, что φ – выпуклая функция. Здесь можно ожидать более хорошие результаты по сравнению со случаем, когда φ – функция общего вида.

Итак, пусть φ — выпуклая функция. Тогда её множества Лебега (множества уровня) выпуклые:

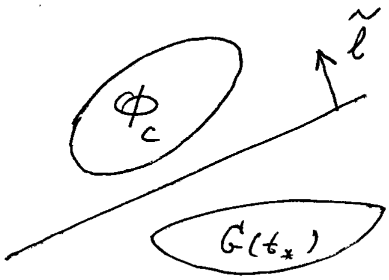
$$\Phi_c = \{x : \varphi(x) \le c\}.$$

Можем дать следующую геометрическую интерпретацию оптимального результата φ^*:



[Если, конечно, такие c, при которых есть разделение, $\exists$]

φ^* есть наименьшее значение c, при котором множества Φ_c и $G(t_*)$ пересекаются. Можно сказать и так: φ^* есть наибольшее значение c, когда множества Φ_c и $G(t_*)$ можно разделить



Строгое разделение:

$$\exists\, \tilde{l} : \max_{x \in G(t_*)} \tilde{l}^T x < \min_{z \in \Phi_c} \tilde{l}^T z$$

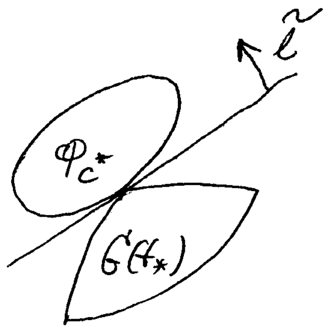
или

$$\exists\, \tilde{l} : \max_{x \in G(t_*)} \tilde{l}^T x - \min_{z \in \Phi_c} \tilde{l}^T z < 0$$

Последнее можно записать так:

$$\min_{|l|=1} \{ \max_{x \in G(t_*)} l^T x - \min_{z \in \Phi_c} l^T z \} < 0.$$

Рассмотрим теперь нестрогое разделение:



$$\min_{|l|=1} \Big\{ \max_{x \in G(t_*)} l^T x - \min_{z \in \Phi_{c^*}} l^T z \Big\} = 0 \qquad (2)$$

Если мы ещё увеличим c, то

$$\min_{|l|=1} \{ \dots \} > 0.$$

Итак, пусть $\exists\, c$, при котором множества Φ_c и $G(t_*)$ не пересекаются. Тогда $\varphi^* = c^*$, где c^* удовлетворяет (2).

Введём символ опорной функции $\rho(l, A) = \sup\limits_{x \in A} l^T x$.

Перепишем (2):

$$\min_{|l|=1} \{ \rho(l, G(t_*)) + \rho(-l, \Phi_{c^*}) \} = 0 \qquad (3)$$

Эффективность (3) зависит от умения вычислять опорные функции.

2 Рассмотрим самый простой случай функции φ, когда $\varphi(x) = |x|$.

Тогда Φ_c – шар с центром в нуле радиуса c.

Имеем $\rho(-l, \Phi_c) = \|c$. Поэтому (3) перепишется в виде

$$\min_{|l|=1} \{\rho(l, G(t_*)) + c^*\} = 0 \Rightarrow$$

$$c^* = -\min_{|l|=1} \max_{x\in G(t_*)} l^T x = \max_{|l|=1} \{-\max_{x\in G(t_*)} l^T x\} =$$

$$= \max_{|l|=1} \{-l^T X(t_*, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_*} \max_{p\in P} l^T X(t_*,\tau)B(\tau)p\,d\tau\}$$

Это и есть окончательная формула для случая $\varphi(x) = |x|$:

$$\varphi^* = c^* = \max_{|l|=1} \{-l^T X(t_*, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_*} \max_{p\in P} l^T X(t_*,\tau)B(\tau)p\,d\tau\} \qquad (4)$$

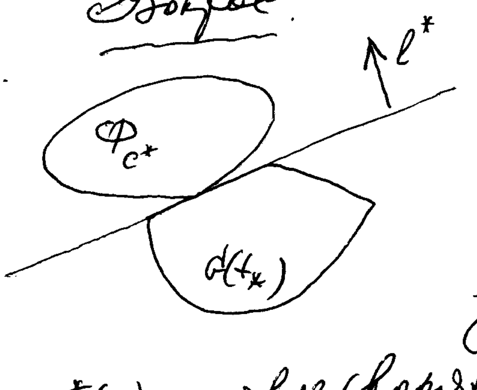
<u>Утв.</u> Пусть $\varphi(x) = |x|$ и $0 \notin G(t_*)$. Тогда φ^* вычисляется по формуле (4).

<u>Вопрос.</u> А если $0 \in G(t_*)$? Ведь тогда очевидно, что $\varphi^* = 0$. Формально к перебору по $|l| = 1$ можно в (4) добавить $l = 0$.

Смотрим (4). Из лекции (2) получаем, что оптимальное управление $u^*(\cdot)$ удовлетворяет условию максимума на векторе l^*, при котором достигается max по $|l|=1$. [При этом l^* происходит разделение $G(t_*)$ и Φ_{c^*}]. Если $0 \in \operatorname{int} G(t_*)$, то в модернизированной формуле (4) max берем по $|l|=1$, $l=0$. Он реализуется на $l=0$. Для характеризации $u^*(\cdot)$ это ничего не даёт.

(3) Возвращаемся к общему случаю выпуклой функции φ. Предположим, что из (3) мы нашли c^*. Одновременно мы нашли и экстремальное значение l^*. Тогда $u^*(\cdot)$ удовлетворяет условию максимума на этом l^*.

Вопрос.



Если на $G(t_*)$ есть „площадка" на векторе l_*, то выделяемое условием максимума управление не является единственным. [Разные управления $u^*(\cdot)$ удовлетворяют условию максимума на векторе l^*, но ведут в разные точки площадки] Если $G(t_*)$ строго выпуклое, то площадки нет. ~~В~~ В целом в этом случае мы получим Н. и Д. условия не только для подсчёта оптимального результата φ^*, но и для оптимального управления $u^*(\cdot)$. [Структура утверждения о н. и д. условии для оптимального $u^*(\cdot)$: Пусть $u^*(\cdot)$ оптимально в задаче ... Тогда оно удовлетворяет условию максимума на векторе ℓ^*, который .... Наоборот, пусть $u^*(\cdot)$ — управление, которое удовлетворяет условию максимума на векторе ℓ^*. Тогда оно оптимально]. Именно поэтому говорят, что принцип максимума является необх. и дост. условием для линейных задач терминального управления с выпуклой функцией платы. Но это „жаргон" и нужны аккуратные формулировки.

Вопрос Аналогично пункту ② выписать формулы для случая $\varphi(x) = (x - \bar{x})$, где $\bar{x}$ — заданная точка.

④ Пусть теперь функция платы φ определяется не всеми компонентами вектора x (размерность x равна n), а лишь некоторыми выделенными. Обозначим $\varphi(x_m)$. Тогда и множество достижимости строим только в подпространстве выделенных координат. Соответственно, перебираем векторы ℓ_m

из этого подпространства [l_m — обозначение вектора из выделенного подпространства].

Формула (4) изменится следующим образом:

$$\varphi^* = c^* = \max_{|l_m|=1} \left\{ -l_m^T [X(t_*,t_0)x_0]_m - \int_{t_0}^{t_*} \max_{p\in P} l_m^T [X(t_*,\tau)B(\tau)p]_m \, d\tau \right\}$$

Но $[Dz]_m = D_m z$, где D_m — подматрица D, набранная из соответствующих m строк. Поэтому

$$\varphi^* = c^* = \max_{|l_m|=1} \left\{ -l_m^T X_m(t_*,t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_*} \max_{p\in P} l_m^T X_m(t_*,\tau)B(\tau)p \, d\tau \right\} \quad (5)$$

Здесь $X_m(t_*,t_0)x_0$ имеет смысл прогноза по выделенным координатам начального вектора x_0 на момент t_* при свободном движении (т.е. при $u \equiv 0$) системы (1);

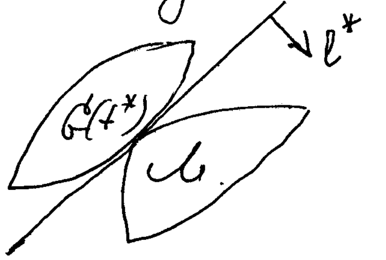
$X_m(t_*,\tau)B(\tau)p$ — прогнозируемое на момент t_* „скоростное" влияние по <u>выделенным</u> координатам, если в момент τ берётся управляющий вектор p.

<u>Вопрос</u>. Получить аналог формулы (2) (или (3)) для случая, когда φ зависит только от m компонент вектора x в момент t_*.

(5) Линейная задача быстродействия

Пусть требуется как можно скорее перевести систему (1) на выпуклое, замкнутое, ограниченное множество M.

Находим момент t^* первого соприкосновения множества достижимости $G(t)$ с M:



Повторив (2), пишем соотношение

$$\min_{|l|=1} \{ \max_{x \in G(t^*)} l^T x - \min_{z \in M} l^T z \} = 0 .$$

В начальный момент t_0 имеем (ибо $x_0 \notin M$)

$$\min_{|l|=1} \{ \max_{x \in \underbrace{G(t_0)}_{=\{x_0\}}} l^T x - \min_{z \in M} l^T z \} < 0$$

$\Rightarrow$ оптимальный момент t^* есть

$$\min_{t} : \min_{|l|=1} \{ \max_{x \in G(t)} l^T x - \min_{z \in M} l^T z \} = 0 \quad (6)$$

Возьмём M в виде точки $\bar z$. Тогда (6) перейдёт в

$$\min_t : \min_{|l|=1} \{ \max_{x\in G(t)} l^T x - l^T \bar z \} = 0 \qquad (7)$$

Чтобы иметь дело с формулами, похожими на те, что были в задаче с фиксированным моментом окончания, заменим $\min\limits_{|l|=1}$ на $\max\limits_{|l|=1}$. Для этого умножим (7) на -1:

$$\min_t : -\min_{|l|=1} \{ \max_{x\in G(t)} l^T x - l^T \bar z \} = 0$$

Получим

$$\min_t : \max_{|l|=1} \{ -\max_{x\in G(t)} l^T x + l^T \bar z \} = 0$$

Окончательно

$$\min_t : \max_{|l|=1} \{ l^T(\bar z - X(t,t_0)x_0) - \int_{t_0}^{t} \max_{p\in P} l^T X(t,\tau)B(\tau)p\,d\tau \} = 0 \qquad (8)$$

Если нас интересует перевод в заданное состояние только некоторых компонент фазового вектора, то

$$\min_t : \max_{|l_m|=1} \{ l_m^T(\bar z_m - X_m(t,t_0)x_0) - \int_{t_0}^{t} \max_{p\in P} l_m^T X_m(t,\tau)B(\tau)p\,d\tau \} = 0 \qquad (9)$$

? В заключение надо сформулировать Н. и Д. условия оптимальности.