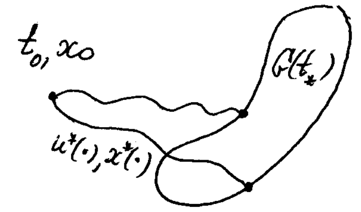
Принцип максимума Понтрягина для движений нелинейной системы, ведущих на границу множества достижимости

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

$u \in P$

$u^*(\cdot)$ — кусочно-непрерывное справа управление



$x^*(t; t_0, x_0, u^*(\cdot))$ — соответствующее движение, кратко $x^*(t)$.

Теорема. Пусть $x^*(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда $\exists\, l^* \neq 0$ такой, что при любом $t \in [t_0, t_*)$

$$\max_{p \in P} l^{*T} X(t_*, t) f(t, x^*(t), p) = l^{*T} X(t_*, t) f(t, x^*(t), u^*(t)), \qquad (1)$$

где $X(t_*, t)$ — фундаментальная матрица Коши линейной системы

$$\dot{z} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\, z \qquad (2)$$

[м.б. писать $Z(t_*, t)$ вместо $X(t_*, t)$?]

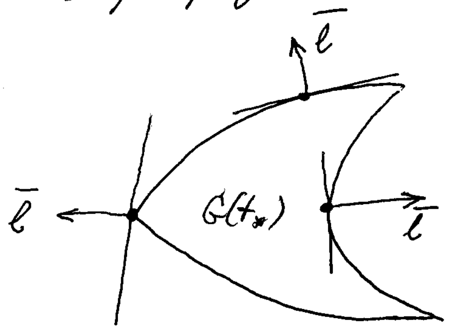
Мы докажем это утверждение, но только при некотором дополнительном предположении относительно множества $G(t_*)$. А именно, будем считать, что

$\forall\, \bar{x} \in \partial G(t_*)\ \exists\, \bar{l} \neq 0,\ r > 0$ и непрерывная функция β:

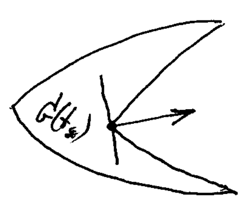
$\gamma(x-\bar{x})\to 0$ при $x\to\bar{x}$ и для $\forall x\in G(t_*)\cap O(\bar{x},r)$ выполнено неравенство

$$\bar{l}^T\cdot(x-\bar{x})\le \gamma(x-\bar{x})|x-\bar{x}|. \qquad (3)$$

Например, годится $\gamma(x-\bar{x})=|x-\bar{x}|$. Т.е. в (3) справа стоит $o(x-\bar{x})$. Символ $O(\bar{x},r)$ – шар радиуса r с центром $\bar{x}$ [Или лучше $B(\bar{x},r)$?]



Такое $G(t_*)$ подходит



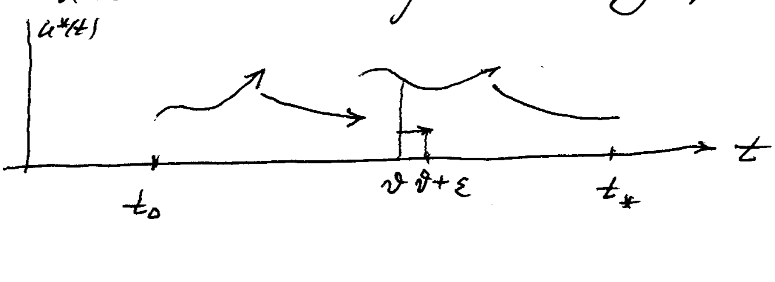
Такое нет

Следовательно, мы рассматриваем $G(t_*)$ „близкие" к выпуклым. Либо считаем, что такова точка $x^*(t_*)\in\partial G(t_*)$. [Нам потребуется выполнение (3) только для точки $\bar{x}=x^*(t_*)$].

Доказательство для общего случая есть в книге: Ли, Маркус „Основы теории оптимального управления", Наука, 1972, стр. 278–282

Доказательство при выполнении условия (3).

① Игольчатая вариация управления



Берём произвольный момент $\vartheta \in [t_0, t_*)$. Мысленно его фиксируем. Рассматриваем промежуток $[\vartheta, \vartheta+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ мало. В дальнейшем будем устремлять ε к нулю. На $[\vartheta, \vartheta+\varepsilon)$ полагаем $u(t) = p \in P$. Значение p тоже мысленно фиксируем.

Новое управление

$$u(t) = \begin{cases} u^*(t), & t \in [t_0, \vartheta), \\ p, & t \in [\vartheta, \vartheta+\varepsilon), \\ u^*(t), & t \in [\vartheta+\varepsilon, t_*] \end{cases}$$

Отмеченное изменение управления $u^*(\cdot)$ называют игольчатой вариацией. К чему приведёт изменение управляющего воздействия на малом промежутке $[\vartheta, \vartheta+\varepsilon)$?

(2) Рассмотрим на $[\vartheta+\varepsilon, t_*]$ два движения. Одно — $x^*(\cdot)$, оно в момент $\vartheta+\varepsilon$ выходит из точки $x^*(\vartheta+\varepsilon)$. Второе выходит из некоторой точки y, зависящей от p, ε. Описание y конкретизируем потом.

Обозначим новое движение через $S(t; \vartheta+\varepsilon, y, u^*(\cdot))$. Пишем большую букву, чтобы бросалось в глаза. Движение $t \to S(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x, u^*(t)),$$

выходящее в момент $\vartheta+\varepsilon$ из y.

③ Из курса дифференциальных уравнений знаем, что производная

$$L^*(t) = \frac{\partial S}{\partial y}(t;\ \vartheta+\varepsilon,\ x^*(\vartheta+\varepsilon),\ u^*(\cdot))$$

существует и, как функция от t, удовлетворяет уравнению

$$\dot{L} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\, L. \qquad (4)$$

[Аккуратно, на какую теорему надо сослаться?]

Поскольку $S(\vartheta+\varepsilon;\ \vartheta+\varepsilon,\ y,\ u^*(\cdot)) = y$, то $S^*(\vartheta+\varepsilon) = E$. Стало быть, начальным условием для матричного уравнения (4) является единичная матрица.

Уравнение (4) называют уравнением в вариациях. По столбцам его можно рассматривать как обычное линейное дифференциальное уравнение:

$$\left(\ldots\overset{i}{\Big|}\ldots\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\ldots\overset{i}{\Big|}\ldots\right),$$

$$\dot{L}_i = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\, L_i.$$

④ Пусть $X(t_*, t)$ — фундаментальная матрица Коши для уравнения (4). Тогда

$$L^*(t_*) = X(t_*, \vartheta+\varepsilon)\, E.$$

Следовательно,

$$S(t_*) = x^*(t_*) + L^*(t_*)(y - x^*(\vartheta+\varepsilon)) + \underbrace{\xi(y - x^*(\vartheta+\varepsilon))\,|y - x^*(\vartheta+\varepsilon)|}_{o(y - x^*(\vartheta+\varepsilon))}.$$

Здесь $S(t_*) = S(t_*;\ \vartheta+\varepsilon,\ y,\ u^*(\cdot))$

Итак, мы применили теорему о дифференцируемости решения по начальным данным.

5) Теперь вместо y подставим $x(\vartheta+\varepsilon)$, вместо $S(t_*)$ возьмём $x(t_*)$. Получим

$$x(t_*) = x^*(t_*) + L^*(t_*)(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)) + o(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)) \tag{5}$$

Распишем $x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)$:

$$x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon) = f(\vartheta, x^*(\vartheta), p)\varepsilon + \alpha_1(\varepsilon)|\varepsilon| - f(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))\varepsilon - \alpha_2(\varepsilon)|\varepsilon| =$$
$$= (f(\vartheta, x^*(\vartheta), p) - f(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta)))\varepsilon + \underbrace{\alpha(\varepsilon)|\varepsilon|}_{o(\varepsilon)} \tag{6}$$

Представим также

$$X(t_*, \vartheta+\varepsilon) = X(t_*, \vartheta) + \beta(\varepsilon),$$

где $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ [Т.е. используем непрерывность матрицы Коши по второму аргументу. Но у нас есть даже дифференцируемость?]

Вместо (5) получим

$$x(t_*) - x^*(t_*) = L^*(t_*)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) + o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) =$$

$$= \big(X(t_*,\vartheta) + \beta(\varepsilon)\big)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) + o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) =$$

$$= X(t_*,\vartheta)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) + \beta(\varepsilon)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) +$$

$$+ o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big).$$

Здесь $\beta(\varepsilon)$ - матрица, $x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)$ - вектор - столбец, $o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big)$ - вектор - столбец. Представим

$$\beta(\varepsilon)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) = \beta(\varepsilon)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big)\frac{|x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)|}{|x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)|} =$$

$$= \beta(\varepsilon)\frac{\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big)}{|x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)|} \cdot |x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)| = o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big).$$

Таким образом,

$$x(t_*) - x^*(t_*) = X(t_*,\vartheta)\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) + o\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big) \quad (7)$$

Подставляем в (7) вектор $\big(x(\vartheta+\varepsilon) - x^*(\vartheta+\varepsilon)\big)$ из (6):

$$x(t_*) - x^*(t_*) = X(t_*,\vartheta)\big(f(\vartheta, x^*(\vartheta), p) - f(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))\big)\varepsilon +$$

$$+ X(t_*,\vartheta)\cdot\alpha(\varepsilon)|\varepsilon| + \underbrace{o\Big(\big(f(\vartheta, x^*(\vartheta), p) - f(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))\big)\varepsilon + \alpha(\varepsilon)|\varepsilon|\Big)}_{\to\, o(\varepsilon)}$$

[Сделать аккуратно]

Итак,

$$x(t_*) - x^*(t_*) = X(t_*, \vartheta)\big(f(\vartheta, x^*(\vartheta), p) - f(\vartheta, x^*(\vartheta), u^*(\vartheta))\big)\varepsilon + o(\varepsilon) \qquad (8)$$

⑥ Теперь вспомним наше предположение (3): для точки $x^*(t_*)$ $\exists\, l^* \neq 0$ такой, что

$$l^{*T}(x(t_*) - x^*(t_*)) \le \gamma(x(t_*) - x^*(t_*))\,|x(t_*) - x^*(t_*)|,$$

т.е.

$$l^{*T}(x(t_*) - x^*(t_*)) + o(x(t_*) - x^*(t_*)) \le 0 \qquad (9)$$

Подставляем в (9) $x(t_*) - x^*(t_*)$ из (8). Имеем

$$l^{*T} X(t_*, \vartheta)\big(f(\ldots, p) - f(\ldots, u^*(\vartheta))\big)\varepsilon + o(\varepsilon) \le 0$$

[Доказать аккуратно]

После деления на ε и перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$, а также заменяя символ ϑ на t, получим

$$l^{*T} X(t_*, t) f(t, x^*(t), p) \le l^{*T} X(t_*, t) f(t, x^*(t), u^*(t)),$$
$$t \in [t_0, t_*).$$

Замечание. Замкнутость P нигде не использовали. Мы только предполагали, что $x^*(t_*) \in \partial G(t_*)$ и для $x^*(t_*)$ выполнено (3).

Окончательная формулировка принципа максимума для движений нелинейных систем, ведущих на границу множества достижимости.

Как и в случае исходной линейной динамики, введём функцию

$$\psi^{*T}(t) = \ell^{*T} X(t_*, t).$$

Тогда

$$\frac{d\psi^{*T}}{dt}(t) = \ell^{*T}\frac{\partial X}{\partial t}(t_*, t) = \ell^{*T}\left(-X(t_*, t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right) =$$

$$= -\psi^{*T}(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)).$$

Или

$$\frac{d\psi^*}{dt}(t) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right)^T \psi^*(t).$$

Т.е. $\psi^*(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot\psi = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)\right)^T \psi$$

с краевым условием $\psi(t_*) = \ell^*$.

Окончательная формулировка:

Пусть $u^*(\cdot)$ такое, что $x^*(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда существует <u>ненулевое</u> решение $\psi^*(\cdot)$ системы

$$\dot\psi = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)\right)^T \psi$$

такое, что

$$\max_{p\in P} \psi^{*T}(t) f(t, x^*(t), p) = \psi^{*T}(t) f(t, x^*(t), u^*(t))$$

$$t \in [t_0, t_*)$$