Описанные на прошлом занятии постановки (формализации) дифференциальной игры за первого и второго игроков являются только лишь чёткими постановками, но не инструментом решения задач.

Будем подбираться к элементам решения.

## Стабильный мост, максимальный стабильный мост. Экстремальная стратегия

① Введём понятие стабильного моста, ориентируясь на задачу за первого игрока.

Мы записываем динамику в виде

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \ v \in Q.$$

Нам понадобится некоторое дополнительное условие на функцию $f$:

$$\max_{p \in P} \min_{q \in Q} l^T f(t, x, p, q) = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} l^T f(t, x, p, q), \quad \forall l \in R^n, x \in R^n. \qquad (1)$$

Оно называется „условием Айзекса". В Екатеринбурге его часто называют условием седловой точки в маленькой игре.

? [Доказать самим, что (1) эквивалентно

$$\min_{p \in P} \max_{q \in Q} l^T f(t, x, p, q) = \max_{q \in Q} \min_{p \in P} l^T f(t, x, p, q) \qquad (2)$$

$\forall l \in R^n, x \in R^n$.]

Условие (1) выполнено, например, если

$$f(t,x,u,v) = f^{(1)}(t,x,u) + f^{(2)}(t,x,v). \qquad (3)$$

Замкнутое множество $W$ в пространстве $t, x$ называется стабильным мостом, обрывающимся в момент $T$ на замкнутом множестве $M$, если сечение $W(T)$ совпадает с $M$ и, кроме того, выполнено следующее свойство стабильности: для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$, для любого момента $t^* \in (t_*, T]$ и для любой кусочно-непрерывной функции $v(\ )$ на $[t_*, t^*]$ со значениями в $Q$ замыкание множества достижимости $G^{(1)}(t^*; t_*, x_*, v(\cdot))$ первого игрока пересекается с сечением $W(t^*)$, т.е.

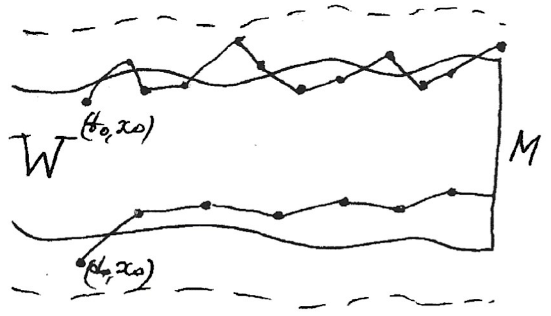
$$\mathrm{clo}\, G^{(1)}(t^*; t_*, x_*, v(\cdot)) \cap W(t^*) \neq \emptyset.$$

Показано, что в определении можно ограничиться только постоянными функциями со значениями в $Q$. [Какова идея, что получим эквивалентное определение?]

Максимальное по включению множество в пространстве $t, x$, где $t \le T$, обрывающееся в момент $T$ на $M$ и обладающее свойством стабильности, называется максимальным стабильным мостом.

Таким образом, в понятие стабильного моста заложено некоторое идеализированное по отношению к исходной задаче свойство прохода управляемой системы по мосту $W$, если первый игрок „дискриминирует" второго игрока, заставляя его показывать своё управление на некоторый промежуток времени вперёд.

(2) Можно ли при помощи управления обратной связи $V(t, x)$, применяя дискретную схему управления $\Delta^{(1)}$ удерживаться вблизи стабильного моста $W$? Ясно, что точно удерживаться нельзя. Но можно ли удерживаться в малой окрестности и в момент $T$ оказаться вблизи $M$?



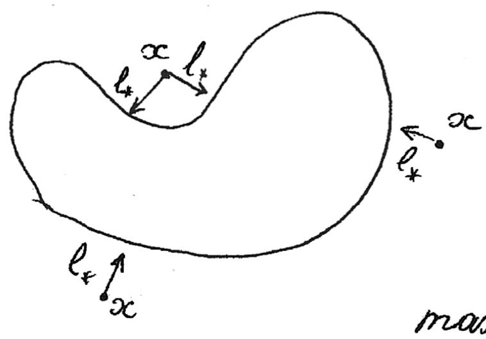

Удержание вблизи должно обеспечиваться при любом поведении второго игрока. Можно даже представить, что второй игрок пытается (в пределах своих динамических возможностей) вырваться из стабильной трубки. Первый игрок и с такими поведением второго игрока должен справляться.

Пусть для наглядности управляемая система имеет вид (3):

$$\dot{x} = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v), \quad u \in P,\ v \in Q.$$

Тогда естественным является попытка сконструировать управление обратной связи первого игрока следующим образом.

Если $(t, x) \in W(t)$, то положим $U(t, x)$ произвольным вектором $P$. Если $(t, x) \notin W(t)$, то $U(t, x)$ выбирается из условия экстремального сдвига на множество $W(t)$: направляем вектор $l_*$ из точки $x$ на ближайшую к ней точку $x_* \in W(t)$,




Формульная запись

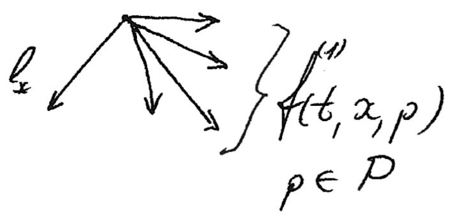
$$\max_{p \in P} l_*^T(t, x) f^{(1)}(t, x, p) = l_*^T(t, x) f(t, x, U(t, x)).$$

[Напоминает экстремальное соотношение, которое было в принципе максимума Понтрягина?].

Оказалось, что так выбираемое управление действительно обеспечивает удержание. Это было изобретено Н.Н. Красовским и описано в книге Красовский Н. Н., Субботин А. И. „Позиционные дифференциальные игры".

Прицеливающий вектор не обязательно единственный. Это не страшно (хотя потеря единственности всегда несёт что-то не совсем хорошее, так же и здесь).

Итак, выбираемое управление обеспечивает максимальную проекцию векторов $f^{(1)}(t,x,p)$ на направление $l_*(t,x)$.




В целом, вектор скорости системы зависит и от действий второго игрока. В случае, когда $f(t,x,u,v) = f^{(1)}(t,x,u) + f^{(2)}(t,x,v)$, экстремальный вектор первого игрока определяется только через $f^{(1)}$. В общем случае следует работать с вычислением

$$\max_{p\in P}\min_{q\in Q} f(t,x,p,q)$$

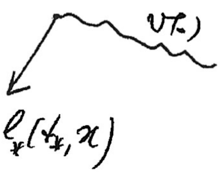
и в качестве $U(t,x)$ брать экстремальный элемент из $P$, на котором достигается max.

3 Это было описание здоровой общей идеи. Но как пояснить, что она приводит к желаемому

результату удержания вблизи стабильного моста? Как использовать, что наш мост обладает свойством стабильности?

Помимо точки $x$ мы рассматриваем ближайшую к ней точку $x_*(t) \in W(t)$. Положим $l_*(t, x) = (x^*(t) - x)$. [Важно лишь направление ненулевого вектора $l_*(t, x)$].

Мысленно задержим момент времени $t_*$. Рассмотрим промежуток времени вперёд длины $\delta$. Из точки $x$ найдём движение в силу выбранного экстремального постоянного управления $U(t_*, x) = u^*$ и некоторого кусочно-непрерывного управления $v(\cdot)$ со значениями в $Q$. Т.е. кусок движения, выходящего из $x$, зависит от $v(\cdot)$. Первый игрок влиять на выбор $v(\cdot)$ не может.




Имеем $x^*(t_*) \in W(t_*)$. Из условия стабильности мы по любому $v(\cdot)$ можем построить $u(\cdot)$, сохраняющее движение на $W(t)$. [Используем первый вариант определения стабильности]

Мысленно задержим некоторое $v(\cdot)$. По этому $v(\cdot)$ подберём $u(\cdot)$ так, чтобы движение $x_{ст}(\cdot)$ из точки $x^*(t_*)$ в силу $u(\cdot), v(\cdot)$ на промежутке

$[t_*, t_* + \delta)$ шло по сечениям $W(t)$ (или, по крайней мере, в момент $t_* + \delta$ получили бы, что $x_{3t}(t_* + \delta)$ находилась сколь угодно близко от $W(t_* + \delta)$).

Пусть $x(\cdot)$ – движение, которое идёт из точки $x(t_*)$ в силу постоянного управления $u^*$ и мысленно заделенного $v(\cdot)$.

Каково расстояние $r(\delta) = |x_{3t}(t_* + \delta) - x(t_* + \delta)|$? Ведь именно оно оценивает расстояние от $x(t_* + \delta)$ до сечения $W(t_* + \delta)$.

(4) Нас устроила бы (равномерная по $v(\cdot), x, x^*(t_*)$) оценка

$$r(\delta) = |x - x^*(t_*)| + \delta \cdot \eta(\delta), \qquad (4)$$

где $\eta(\delta) \to const$ при $\delta \to 0$ и не зависит от $v(\cdot)$.

Почему?

Пусть шаг дискретной схемы постоянен (для простоты) и равен $\Delta$. Пусть в начальный момент отклонение $\xi$. Тогда

$$r(t_0 + \Delta) \leq \xi + \Delta \cdot \eta(\Delta).$$

В момент $t_0 + 2\Delta$ имеем

$$z(t_0+2\Delta) \le z(t_0+\Delta) + \Delta\cdot\eta(\Delta) =$$
$$= \xi + 2\Delta\cdot\eta(\Delta).$$

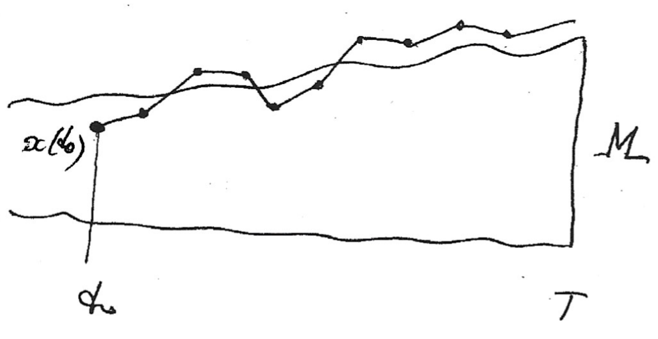
Время до конца от момента $t_0$ есть $T-t_0$.

Количество целых дискретов есть $\left[\frac{T-t_0}{\Delta}\right]$.
Если бы дискреты точно укладывались в промежуток $\Delta$, то имели бы число дискретов
$N=\frac{T-t_0}{\Delta}$. Получили бы оценку

$$z(T) = \xi + N\cdot\Delta\cdot\eta(\Delta) = \xi + \frac{(T-t_0)}{\Delta}\cdot\Delta\cdot\eta(\Delta) =$$
$$= \xi + (T-t_0)\cdot\eta(\Delta). \qquad (5)$$

Поскольку $\eta(\Delta)$ мало́ при малых $\Delta$, то при малом $\Delta$ мы удаляемся от сечения $W(t)$ лишь на величину, немного превышающую $\xi$.

Осталось только аккуратно применить эту идею к движению, которое начинается в точке $x(t_0)\in W(t_0)$.



[Попробовать самим „вытащить" соответствующее доказательство оценки (4) и итоговая оценка вида (5) из текста статьи Ганебного С. А., Кумкова С. И., Пацко В. С. из журнала ПММ, 2009, № 4. Там рассмотрена система с динамикой

$$\dot{x} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P, \; v \in Q \; ].$$

(5) Для случая произвольной динамики вида

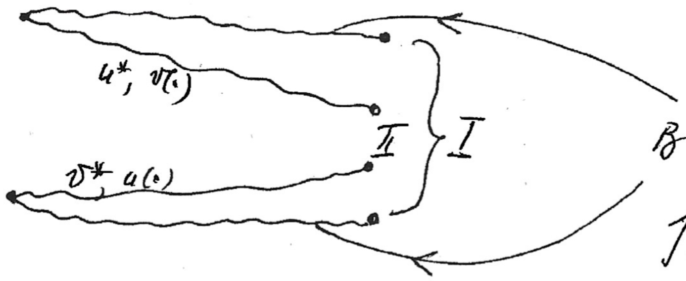
$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \; v \in Q$$

экстремальная стратегия и оценки, с ней связанные, составляют центральную часть книги „Позиционные дифференциальные игры". Используется второй вариант определения стабильности: более слабый, когда первому игроку требуется „парировать" только постоянные управления второго со значениями в $Q$.

В связи с этим естественно возникает экстремальное управление второго игрока, „отталкивающее" движение от ближайшей точки:

$$\min_{q \in Q} \max_{p \in P} l_x^T(t, x) f(t, x, p, q).$$

Оценивается расхождение двух движений: одно выходит в момент $t_*$ из точки $x(t_*)$ в силу экстремального $u^*$ и произвольного $v(\cdot)$; другое из точки $x^*(t_*)$ в силу экстремального $v^*$ и некоторого $u(\cdot)$ (такое $u(\cdot)$ в силу стабильности $W$).



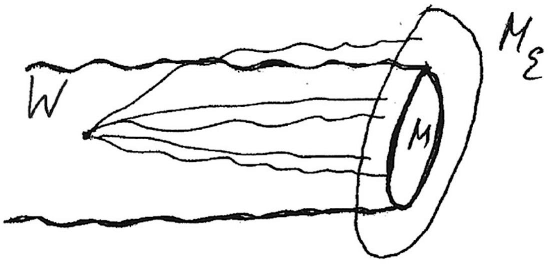

В силу $u^*, v^*$, но из разных точек.

Делается оценка II через I. В I первый и второй игроки, работая с движениями из разных начальных точек, „прицеливаются друг на друга".

(6) Экстремальная стратегия обеспечивает следующее. Пусть $W$ – стабильный мост. Экстремальная к $W$ стратегия $U$ даёт:

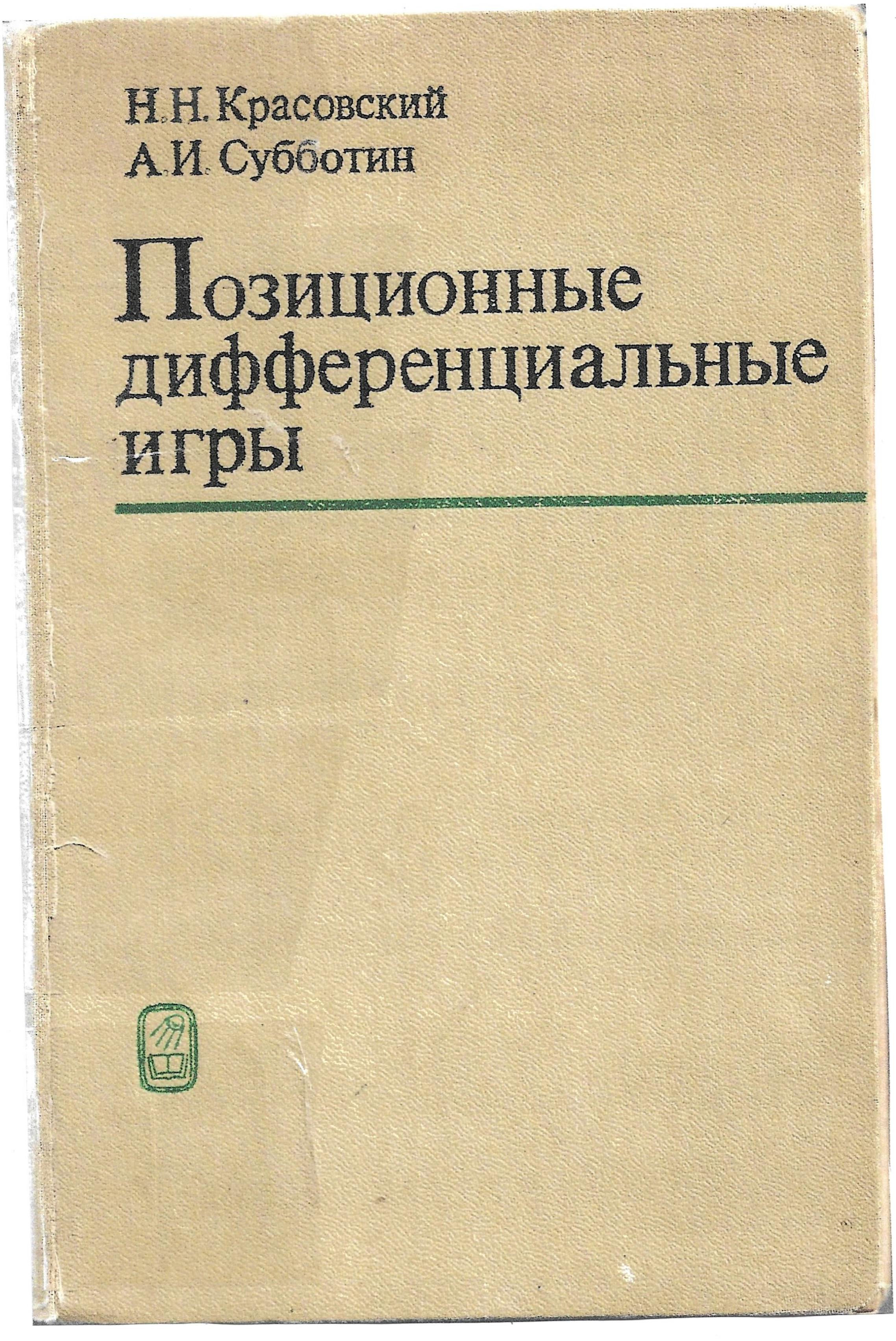
$$\forall (t_0, x_0) \in W \quad \forall \varepsilon \ \exists \delta: \forall \Delta^{(1)} (\mathrm{diam} \le \delta) \ \forall v(\cdot) \qquad (6)$$

$$x(T; t_0, x_0, U, \Delta^{(1)}, v(\cdot)) \in M_\varepsilon .$$




Т.е. весь пучок приводится в $\varepsilon$-окрестность $M$.

Сейчас приведём копии страниц из книги Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, где получена аккуратная локальная оценка для экстремальной стратегии, гарантирующая малое отклонение в момент $T$ равномерно по всем $v(\cdot)$ и всем начальным позициям из ограниченного множества.



Лекция 8, магистр., осень 2021

105



чить предельно большой возможный сдвиг вдоль ломаной Эйлера $x_\Delta[t]$ снова в направлении к сечению $W(t_*)$ множества $W$ при самом упорном сопротивлении $u = u[t_*] \in P$ этому со стороны противника — первого игрока.

**§ 14. Оценка.** В этом параграфе будет выведена одна оценка, которая будет использована в следующем параграфе при доказательстве барьерных свойств стратегий $U^e \div u^e(t, x)$ и $V^e \div v^e(t, x)$, экстремальных соответственно к $u$-стабильному или $v$-стабильному мосту $W$.

Рассмотрим два движения $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$ $(t \geqslant t_*)$. Первое движение пусть удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}^{(1)}[t] = f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]), \tag{14.1}$$

где $v[t] \in Q$ — какая-то интегрируемая по Лебегу реализация управления второго игрока.

Второе движение пусть удовлетворяет уравнению в контингенциях вида (11.2), т. е. уравнению

$$\dot{x}^{(2)}(t) \in \mathcal{F}_u(t, x^{(2)}(t), v^*). \tag{14.2}$$

Предполагается, что эти движения удовлетворяют некоторым начальным условиям $x^{(1)}[t_*] = x_*^{(1)}$, $x^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)}$, а постоянные векторы $u^* \in P$ и $v^* \in Q$ выбраны из условий

$$\max_{v \in Q} s'_* f(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s'_* f(t_*, x_*^{(1)}, u, v), \tag{14.3}$$

$$\min_{u \in P} s'_* f(t_*, x_*^{(1)}, u, v^*) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'_* f(t_*, x_*^{(1)}, u, v), \tag{14.4}$$

где $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$.

Таким образом, $u^*$ есть минимаксный вектор для маленькой игры (12.1) в позиции $\{t_*, x_*^{(1)}\}$ при $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$, а $v^*$ — максиминный вектор для маленькой игры (12.2) в позиции $\{t_*, x_*^{(1)}\}$ также при $s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$.

Обозначим через $\rho(t)$ расстояние между точками $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$, т. е.

$$\rho(t) = \| x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t) \|. \tag{14.5}$$

Справедлива следующая оценка:

$$\rho^2(t_* + \delta) \leqslant \rho^2(t_*)(1 + \beta\delta) + \varphi(\delta) \cdot \delta \qquad (0 \leqslant \delta \leqslant T), \tag{14.6}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0, \tag{14.7}$$

равномерная для всех позиций $\{t_*, x_*^{(1)}\}$ и $\{t_*, x_*^{(2)}\}$ из каждой наперед выбранной ограниченной области $G$ пространства $\{t, x\}$.

Лекция 8, магистр., осень 2021

10В



Докажем оценку (14.6). Решения уравнений (14.1), (14.2) — движения $x^{(1)}[t]$ и $x^{(2)}(t)$ — являются абсолютно непрерывными функциями. Поэтому при почти всех $t \geqslant t_*$ функция $\rho^2(t)$ (14.5) имеет производную, которая определяется по известной формуле дифференцирования сложной функции ([28*], стр. 226):

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2(x^{(1)}[t] - x^{(2)}(t))'(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)), \tag{14.8}$$

где

$$f^{(1)}[t] = \dot{x}^{(1)}[t] = f(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t])$$
$$f^{(2)}(t) = \dot{x}^{(2)}(t) \in \mathcal{F}_u(t, x^{(2)}(t), v^*).$$

В ограниченной области, содержащей рассматриваемые движения, справедливы оценки

$$\|f^{(1)}[t]\| \leqslant \varkappa, \quad \|f^{(2)}(t)\| \leqslant \varkappa,$$
$$\|x^{(1)}[t] - x_*^{(1)}\| \leqslant \varkappa(t - t_*), \quad \|x^{(2)}(t) - x_*^{(2)}\| \leqslant \varkappa(t - t_*),$$

где $\varkappa$ — некоторое достаточно большое число. Поэтому соотношение (14.8) можно преобразовать к следующему неравенству:

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2s_*'(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)) + 8\varkappa^2(t - t_*) \quad (s_* = x_*^{(1)} - x_*^{(2)}). \tag{14.9}$$

Оценим величину

$$\xi = s_*'(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)). \tag{14.10}$$

По теореме Каратеодори ([8*], стр. 783) вектор $f^{(2)}(t)$, который содержится в выпуклой оболочке $\mathcal{F}_u(t, x^{(2)}(t), v^*) = \mathrm{co}[f : f = f(t, x^{(2)}(t), u, v^*), u \in P]$, можно представить в виде

$$f^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t, x^{(2)}(t), u_t^{(i)}, v^*),$$
$$\alpha_t^{(i)} \geqslant 0, \quad u_t^{(i)} \in P, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} = 1. \tag{14.11}$$

Учитывая, что вектор-функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по $t$ и липшицева по $x$ соотношение (14.11) можно переписать следующим образом:

$$f^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t_*, x_*^{(1)}, u_t^{(i)}, v^*) + \Delta f^{(2)}(t),$$
$$\|\Delta f^{(2)}(t)\| \leqslant \varphi^*(t - t_*) + \lambda \|s_*\|. \tag{14.12}$$

Здесь $\lambda$ — постоянная Липшица по $x$ функции $f$ в рассматриваемой области, $\varphi^*(\delta)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi^*(\delta) = 0. \tag{14.13}$$

Лекция 8, магистр., осень 2021 10Г



Поскольку вектор $f^{(1)}[t]$ также можно представить в виде

$$f^{(1)}[t] = f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u^*,\ v[t]) + \Delta f^{(1)}[t],$$
$$\|\Delta f^{(1)}[t]\| \leqslant \varphi^*(t - t_*), \tag{14.14}$$

то для величины (14.10) получаем оценку

$$s'_*(f^{(1)}[t] - f^{(2)}(t)) \leqslant s'_*[f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u^*,\ v[t]) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u_t^{(i)},\ v^*)] + 2\|s_*\|\varphi^*(t - t_*) + \lambda\|s_*\|^2. \tag{14.15}$$

Замечаем теперь, что по определению векторов $u^*$ (14.3) и $v^*$ (14.4) в силу предполагаемого нами условия (12.4) имеем неравенства

$$s'_* f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u^*,\ v[t]) \leqslant s'_* f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u_t^{(i)},\ v^*) \tag{14.16}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1).$$

Умножая эти неравенства на неотрицательные числа $\alpha_t^{(i)}$ и суммируя их по $i$, получаем

$$s'_*\left[f(t_*,\ x_*^{(1)},\ u^*,\ v[t]) - \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_t^{(i)} f(t,\ x_*^{(1)},\ u_t^{(i)},\ v^*)\right] \leqslant 0. \tag{14.17}$$

Таким образом, из оценок (14.17), (14.15), (14.9) имеем неравенство

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} \leqslant 2\lambda\|s_*\|^2 + 4\|s_*\|\varphi^*(t - t^*) + 8(t - t_*)\varkappa^2. \tag{14.18}$$

Учитывая, что $\|s_*\|^2 = \rho^2(t_*)$, а функция $\varphi^*(t - t_*)$ удовлетворяет условию (14.13), интегрированием неравенства (14.18) получаем теперь нужную оценку (14.6), где, стало быть, $\beta = 2\lambda$.

Переменив местами буквы $u$ и $v$, получим снова оценку (14.6), но теперь уже для пары движений

$$\dot{x}^{(1)}[t] = f(t,\ x^{(1)}[t],\ u[t],\ v^*), \quad x^{(1)}[t_*] = x_*^{(1)},$$
$$\dot{x}^{(2)}(t) \in \mathscr{F}_v(t,\ x^{(2)}(t),\ u^*), \quad x^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)}.$$

При этом векторы $u^*$ и $v^*$ снова выбираются как минимаксный и максиминный векторы для маленькой игры (12.1), (12.2) в позиции $\{t_*,\ x_*^{(1)}\}$, но теперь уже при выборе вектора $s_* = x_*^{(2)} - x_*^{(1)}$.

**§ 15. Экстремальный барьер.** В этом параграфе мы покажем, что стратегия $U^e \div u^e(t, x)$, экстремальная к $u$-стабильному замкнутому множеству $W$, сохраняет на $W$ позицию $\{t,\ x[t]\}$ для всякого начавшегося на нем движения $x[t,\ t_0,\ x_0,\ U^e]$ вплоть до

## Отталкивающая стратегия второго игрока. Утверждение об альтернативе (схема)

Пусть теперь W – максимальный стабильный мост, обрывающийся на M в момент T. Предположим, что $(t_0, x_0) \notin W(t_0)$. Тогда найдутся стратегия V второго игрока и дискретная схема $\Delta^{(2)}$ с достаточно малым diam, при помощи которых второй игрок уклоняет движения от попадания в малую окрестность M [Очевидно ли такое утверждение?]. Аккуратно:

$$\exists V, \delta, \varepsilon : \forall \Delta^{(2)} (\mathrm{diam} \le \delta), \forall u(\cdot) \qquad (7)$$
$$x(T; t_0, x_0, V, \Delta^{(2)}, u(\cdot)) \in R^n \setminus M_\varepsilon$$

Теперь возьмём произвольное $(t_0, x_0)$. Тогда для нее либо

1) $\exists U$ такое, что выполнено (6) [т.е. приведение в малую окрестность M]

либо

2) $\exists V$ такое, что выполнено (7) [т.е. уклонение от попадания в малую окрестность M]

Такое утверждение называется *утверждением об альтернативе*. Мы здесь дали лишь формулировку. Аккуратное доказательство в книге Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (стр. 68–70).