

На прошлом занятии говорили о максимальных стабильных мостах и об экстремальной стратегии.

Эта стратегия усиливается при достаточно малом разбиении дискретной схемы управления весь путь возможного движения вблизи моста, если начальная позиция принадлежит ему.

Полезно иметь алгоритмы построения максимальных стабильных мостов.

Максимальные стабильные мосты в играх с линейной динамикой. Точная конструкция

Линейная динамика:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v \quad (1)$$

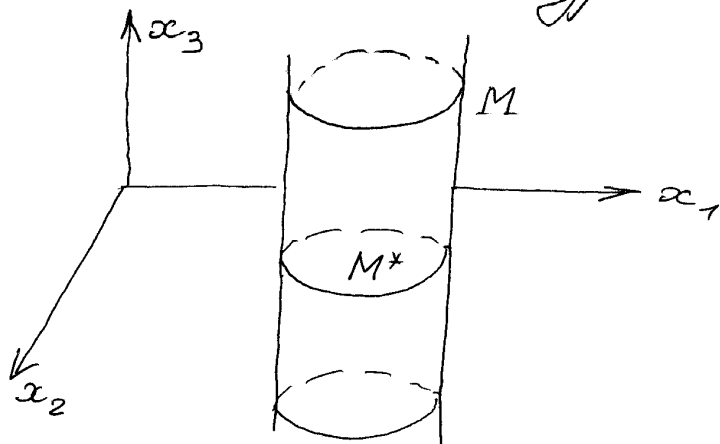
$$x \in \mathbb{R}^n, u \in P, v \in Q.$$

Пусть задан момент окончания T и задано терминальное множество M .

Требуется построить максимальный стабильный мост, обрывающийся в момент T на M .

Очень часто (в практических задачах) терминальное множество M полностью задается некоторым множеством M^* в подпространстве вложенности $m \leq n$ координат фазового

вектора. То остальные координаты
множества M цилиндрические.



На рисунке
цилиндричность
по третьему
координате.

① Запишем формулу для совокупности
точек x , из которых можно перейти на
 M в момент T при заданном моменте $t_1 \leq T$
и оговоренном на $[t_1, T]$ кусочно-непрерывном
управлении $v(\cdot)$ со значениями в Q :

$$G^{(1)}(t_1; T, M, v(\cdot)) = \quad (2)$$

$$= X(t_1, T)M + \bigcup_{u(\cdot)} \int_T^{t_1} X(t_1, s) B(s) u(s) ds + \int_T^{t_1} X(t_1, s) K(s) v(s) ds$$

Здесь $X(t, s)$ — фундаментальная матрица
Колли, соответствующая матрице $A(s)$. Объедине-
ние справа берётся по всем кусочно-непрерывным
функциям $u(\cdot)$ со значениями в P .

[Показать аналогично, что $G^{(1)}(t_1; T, M, v(\cdot))$ даёт
искомое множество]

Пересечение по всем $v(\cdot)$

$$F^{(n)}(t_1; T, M) = \bigcap_{v(\cdot)} G^{(n)}(t_1; T, M, v(\cdot)) \quad (3)$$

Множество $F^{(n)}(t_1; T, M)$ таково, что любой элемент принадлежит n -мощности, соответствующей мощности t_1 .

Отсюда следует, что $F^{(n)}(t_1; T, M)$ есть множество в полном пространстве размерности n .

② Обозначим через X^* матрицу, составленную из n строк матрицы X , номера которых совпадают с номерами координат, в которых задано множество M^* .

Умножим $G^{(n)}(t_1; T, M, v(\cdot))$ слева на $X^*(T, t_1)$, перейдя тем самым от состояний $x(t_1)$ к состояниям $y(t_1) = X^*(T, t_1)x(t_1)$:

$$\begin{aligned} X^*(T, t_1) \cdot G^{(n)}(t_1; T, M, v(\cdot)) &= \\ &= X^*(T, t_1) \left\{ X(t_1, T)M + U \int_{u(\cdot)T}^{t_1} X(t_1, s)B(s)u(s)ds + \int_T^{t_1} X(t_1, s)C(s)v(s)ds \right\} = \\ &= \underbrace{X^*(T, T)M}_{M^*} + U \int_{u(\cdot)T}^{t_1} X^*(T, s)B(s)u(s)ds + \int_T^{t_1} X^*(T, s)C(s)v(s)ds \end{aligned} \quad (4)$$

[Аккуратно проверить, что $X^*(T, t_1)X(t_1, T) = X^*(T, T)$ и т.д.]

Полученное множество $X^*(T, t_1) \cdot G^{(1)}(t_1; T, M, v(\cdot))$ обозначим через $G_y^{(1)}(t_1; T, M^*, v(\cdot))$.

Видим, что $G_y^{(1)}(t_1; T, M^*, v(\cdot))$ есть множество достижимости за первого изхода для системы

$$\dot{y} = X^*(T, t)B(t)u + X^*(T, t)C(t)v$$

$$u \in R^m, u \in P, v \in Q, T, M^* \quad (5)$$

в момент t_1 при произвольном управлении $v(\cdot)$. Множество достижимости построено от множества M^* , взятого в момент T .

Перейдем к пересечению по $v(\cdot)$:

$$F_y^{(1)}(t_1; T, M^*) = \bigcap_{v(\cdot)} G_y^{(1)}(t_1; T, M^*, v(\cdot)). \quad (6)$$

Рассмотрим преобразование $y(t) = X^*(T, t)x(t)$. Динамика $y(t)$ описывается соотношением (5).

[Проверить сами].

Поскольку $y(t)$ — прогноз на момент T выделенных m координат вектора $x(t)$ для "свободной" динамики системы (1). При $t = T$ имеем

$$y(T) = X^*(T, T)x(T) = x^*(T),$$

где $x^*(T)$ — вектор из R^m , состоящий из m выделенных координат вектора $x(T)$.

③ Мы имеем похожие формулы (3) и (6).

Покажем, что

$$F_y^{(n)}(t_1; T, M^*) = X^*(T, t_1) F^{(n)}(t_1; T, M) \quad (7)$$

3.1 Докажем включение

$$F_y^{(n)}(t_1; T, M^*) \subset X^*(T, t_1) F^{(n)}(t_1; T, M) \quad (8)$$

Рассмотрим произвольную точку $y(t_1) \in F_y^{(n)}(t_1; T, M^*)$.
 Пусть $x(t_1)$ таково, что $y(t_1) = X^*(T, t_1) x(t_1)$. Тогда,
 что $x(t_1) \in F^{(n)}(t_1; T, M)$. Это и будет означать (8).

Из включения $y(t_1) \in F_y^{(n)}(t_1; T, M^*)$ следует, что $\forall \bar{u}(\cdot) \in \bar{U}(\cdot)$:

$$y(T) = y(t_1) + \int_{t_1}^T X^*(T, s) B(s) \bar{u}(s) ds + \int_{t_1}^T X^*(T, s) C(s) \bar{v}(s) ds \in M^* \quad (9)$$

Пусть

$$x(T) = X(T, t_1) x(t_1) + \int_{t_1}^T X(T, s) B(s) \bar{u}(s) ds + \int_{t_1}^T X(T, s) C(s) \bar{v}(s) ds \quad (10)$$

Умножим (10) слева на $X^*(T, T)$. Тогда, что

$$X^*(T, T) \cdot X(T, s) = X^*(T, s), \text{ поскольку}$$

$$X^*(T, T) x(T) = X^*(T, t_1) x(t_1) + \int_{t_1}^T X^*(T, s) B(s) \bar{u}(s) ds + \int_{t_1}^T X^*(T, s) C(s) \bar{v}(s) ds$$

Сократим $y(t_1) = X^*(T, t_1) x(t_1)$, из (9) имеем

$$y(T) = X^*(T, T) x(T) \in M^* \Rightarrow x(T) \in M, \text{ т.е.}$$

$$x(t_1) \in F^{(n)}(t_1; T, M).$$

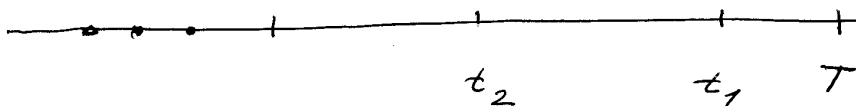
3.2 Вложение

$$F_y^{(1)}(t_1; T, M^*) \supset X^*(T, t_1) F^{(1)}(t_1; T, M)$$

показать самим.

Замечание. Поскольку при $m < n$ матрица $X^*(T, t_1)$ не является квадратной, то мы не имеем взаимно-однозначного соответствия между точками множества $F_y^{(1)}(t_1; T, M^*)$ и $F^{(1)}(t_1; T, M)$.
 При $m = n$ такое соответствие есть.

- ④ Рассмотрим предельное как кривая из конечной процедуры построения максимального стабильного множества.



Сделаем ещё один шаг, теперь от t_1 до t_2 .

Обозначим для краткости $M_1 = F^{(1)}(t_1; T, M)$
 и $M_{y,1} = X^*(T, t_1) M$.

Имеем

$$F^{(1)}(t_2; t_1, M_1) = \bigcap_{\sigma(\cdot)} G^{(1)}(t_2; t_1, M_1, \sigma(\cdot))$$

В терминах системы (5) аксиоматическое множество будет

$$F_y^{(1)}(t_2; t_1, M_{y,1}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_y^{(1)}(t_2; t_1, M_{y,1}, n)$$

[Здесь $G_y^{(1)}$ строим при помощи системы (5)].

Сохраняется ли соотношение

$$F_y^{(1)}(t_2; t_1, M_{y,1}) = X^*(T, t_2) F^{(1)}(t_2; t_1, M_1)?$$

Да. [Доказать по самим]

Таким образом, попытку процедуру можно делать как в системе (1), так и в системе (5).

В силу соотношений

$$F_y^{(1)}(t_{i+1}; t_i, M_{y,i}) = X^*(T, t_{i+1}) F(t_{i+1}; t_i, M_i)$$

и соотношений

$$M^* = X^*(T, T) M$$

это эквивалентно. В связи с тем, что систему (5) можно считать эквивалентной (по отношению к системе (1) и терминальному множеству M^*).

В системе (5) попытку процедуру делать тоже.

⑤ Работаем с системой (5). Запишем её в виде

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P, v \in Q \quad (11)$$

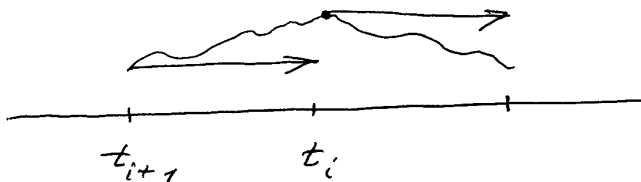
$$D(t) = X^*(T, t)B(t), \quad E(t) = X^*(T, t)C(t).$$

Выбираем разбиение оси t слева от момента T .

Можно брать разбиение с постоянным шагом Δ , можно с переменным.

На каждом промежутке $[t_{i+1}, t_i]$ зададим систему (5) «замороженную»:

$$D(t) = D(t_{i+1}), \quad E(t) = E(t_{i+1}), \quad t \in [t_{i+1}, t_i]$$



Получаем в целом кусочно-постоянную динамику

$$\dot{y} = D(t_{i+1})u + E(t_{i+1})v, \quad t \in [t_{i+1}, t_i]$$

[Замораживать лучше не по краешкам точек, а по средине в момент $(t_i - t_{i+1})/2 + t_{i+1}$?]

На каждом промежутке это даёт нам «простое» движение.

⑥ Статус

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t_{i+1}) u(s) ds = D(t_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds.$$

Статус P

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} u(s) ds = p \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad p \in P$$

Затем

$$\bigcup_{u(\cdot)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} D(t_{i+1}) u(s) ds = D(t_{i+1}) \cdot P \cdot (t_{i+1} - t_i).$$

Статус Q

$$\int_{t_{i+1}}^{t_i} E(t_{i+1}) v(s) ds = E(t_{i+1}) q \cdot (t_{i+1} - t_i), \quad q \in Q$$

Итак, на первом шаге можно получить

$$M_{y,i} + (t_{i+1} - t_i) D(t_{i+1}) P + (t_{i+1} - t_i) E(t_{i+1}) q =$$

$$= \tilde{G}_y^{(1)}(t_{i+1}; t_i, M_{y,i}, q)$$

(12)

аппроксимация

$$\bigcap_{q \in Q} \tilde{G}_y^{(1)}(t_{i+1}; t_i, M_{y,i}, q)$$

(13)

Это операции алгебраических сумм и пересечения. Но операция пересечения отнюдь не коммутативна: на пересечении "артикулов" множества, связанных относительно группы. Вектор связи будет из множества $(t_{i+1} - t_i) E(t_{i+1}) q$, $q \in Q$.