Лекция 9А. Магистр., осень 2017



На сегодняшнем занятии мы немного отступим от последовательности изложения материала, зафиксированной в выложенных лекциях. Это связано с необходимостью введения и разъяснения понятий, которые используются в домашнем задании, выдаваемом сегодня. Такие понятия в курсе лекций излагаются в рассказе о численном построении максимальных стабильных мостов в линейных по динамике дифференциальных играх. Таким образом, мы просто выносим соответствующие понятия за рамки лекций о численном построении.

1. Прогнозируемое на момент окончания положение линейной системы. Понижение порядка фазовой переменной.

(1) Считаем, что момент окончания $T$ игры зафиксирован. Управляемая система линейная:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v,\ u \in P,\ v \in Q,\ x \in R^n. \quad (1)$$

Пусть результат процесса управления, подсчитываемый в момент $T$, зависит лишь от значений $m$ выделенных координат вектора $x(T)$, т.е. терминальная функция платы $\varphi$ зависит только от выделенных координат. Или все по постановке задачи задано терминальное множество $M$ в полном пространстве $R^n$ и оно является цилиндрическим по всем координатам, за исключением выделенных $m$ координат. Это означает, что по существу оно определяется своим сечением в пространстве выделенных координат.

Обозначим через $y(t)$ прогноз на момент $T$ вектора выделенных координат, если в текущий момент $T$ мы имеем фазовое состояние $x(t)$. Прогноз осуществляется следующим образом. Зануляем на промежутке $[t, T]$ управляющие воздействия первого и второго игроков, следим за "свободным" движением системы из начальной точки $x(t)$ и доводим его до момента $T$. Получаем вектор $x(T) = x(T; t, x(t), u=0, v=0)$. Имеем

$$y(t) = \underline{X}^*(T, t)\, x(t).$$

Здесь $\underline{X}^*(T, t)$ — подматрица фундаментальной матрицы Коши $X(T, t)$, соответствующей матрице $A(t)$ в системе (1).

Вычислим производную функции $t \to y(t)$ по $t$:

$$\dot y(t) = \frac{d}{dt}\left(X^*(T,t)\,x(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}X^*(T,t)\right)x(t) + X^*(T,t)\,\dot x(t) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}X(T,t)\right)^* x(t) + X^*(T,t)\,\dot x(t) =$$

$$= \left(-X(T,t)A(t)\right)^* x(t) + X^*(T,t)A(t)x(t) +$$

$$+ X^*(T,t)B(t)u + X^*(T,t)C(t)v =$$

$$= -X^*(T,t)A(t)x(t) + X^*(T,t)A(t)x(t) +$$

$$+ X^*(T,t)B(t)u + X^*(T,t)C(t)v$$

Таким образом,

$$\dot y(t) = X^*(T,t)B(t)u + X^*(T,t)C(t)v, \quad u \in P, \ v \in Q \qquad (2).$$

Берём (2) в качестве <u>нового</u> описания динамики. Это описание, конечно, не эквивалентно исходному описанию (1), ибо $X^*(T,t)$ при $m<n$ – это подматрица матрицы $X(T,t)$. Но если в системах (1) и (2), начиная с момента $t$, действовали одинаковые управления, то в момент $T$ получим состояния $x(T)$ и $y(T)$, где $y(T) = X^*(T,T)\,x(T)$. Т.е. по выделенным

координатам имеем совпадение.

Именно так объясняют (естественно, это не строгое математическое утверждение), почему мы можем при исследовании линейных дифференциальных игр с фиксированным моментом окончания работать не с системой (1), а с системой (2). При этом, если в системе (1) начальное состояние $x(t_0)$, то для системы (2) берём $y(t_0) = X^*(T,t_0)\,x(t_0)$.

(2) Запишем систему (2) в виде

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P,\ v \in Q \qquad (3)$$

$$D(t) = X^*(T,t)B(t), \quad E(t) = X^*(T,t)C(t).$$

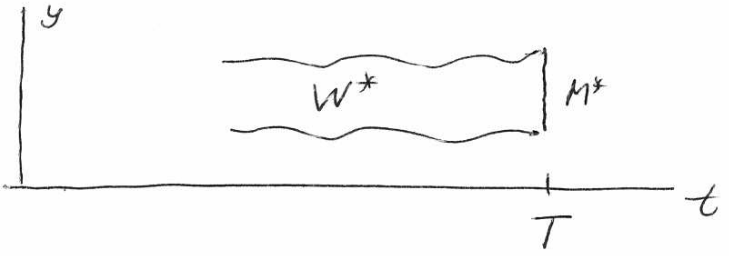
Система (3) привлекательна тем, что:

1) в ней нет фазовой переменной в правой части,

2) её размерность равна $m$.

Последнее очень существенно. Например, нам надо при $m = 1$ построить максимальный стабильный мост $W^*$, обрывающийся в момент $T$ на множестве $M^*$, представляющем собой отрезок.

Для этого из крайних точек отрезка выпускаем две линии:




Первый игрок старается увеличить сечения $W^*(t)$, второй – уменьшить. Поскольку в правой части (3) нет фазовой переменной, то для верхней (нижней) линии берем за первого игрока управление, которое с убыванием времени тянет вверх (вниз), за второго игрока наоборот. Вся проблема в построении максимального моста $W^*$ сводится к интегрированию двух линий (верхней и нижней) при экстремальных управлениях. Поскольку построения ведём в сторону уменьшения $t$, можно ввести обратное время $\tau = T - t$.

## 2. Линейные однотипные объекты

① Такими словами Н. Н. Красовский назвал объекты с динамикой

$$\dot{z}^{(1)} = A(t) z^{(1)} + B(t) u, \quad u \in P, \tag{4}$$

$$\dot{z}^{(2)} = A(t) z^{(2)} + B(t) v, \quad v \in Q$$

$$P = k Q, \quad k > 1.$$

Множество $Q$ считаем выпуклым. Для наглядности предположим, что $0 \in Q$.

Вводя разностные координаты $x = z^{(1)} - z^{(2)}$, получим

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u - B(t)v, \qquad (5)$$
$$u \in P = kQ, \quad v \in Q, \quad k > 1.$$

Т.е. получили <u>частный</u> случай системы (1) при $C(t) = -B(t)$.

Поскольку $B(t)u - B(t)v = B(t)(u - v)$, то

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)(u - v), \quad u \in P = kQ, \ v \in Q, \ k > 1 \qquad (6)$$

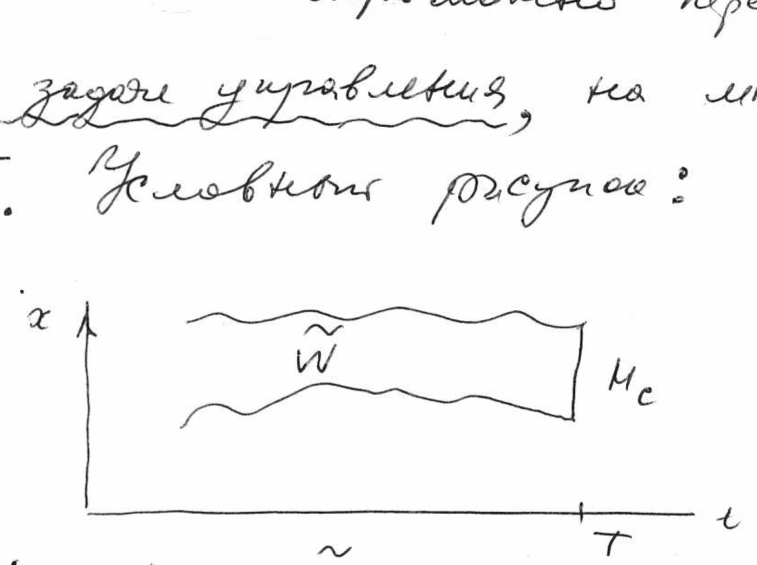
Предположим, что в фиксированный момент $T$ первого игрока интересует минимизация расстояния между $z^{(1)}(T)$ и $z^{(2)}(T)$. Стало быть, он минимизирует функцию $\varphi = \|x(T)\|$, а второй игрок максимизирует. Задав множество уровня $M_c = \{x : \|x\| \le c\}$, попытаемся построить максимальный стабильный мост, приводящий в момент $T$ на $M_c$.

Бросается в глаза, что системе (6) мы можем поставить в соответствие управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \tilde{P}, \qquad (7)$$

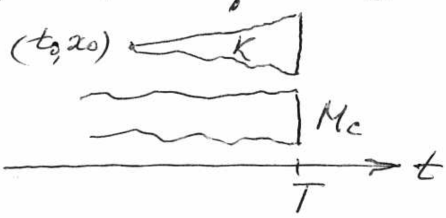
где $\tilde{P}: \tilde{P} + Q = P$. Множество $\tilde{P}$ задаёт "преимущество" первого игрока над вторым в системе (6).

Найдём максимальное множество $\tilde{W}$ в пространстве $(t, x)$, из любой точки которого можно перевести систему (7), как в задаче управления, на множество $M_c$ в момент $T$. Условный рисунок:




Пусть $(t_0, x_0) \in \tilde{W}$. Тогда есть управление $\tilde{u}(\cdot)$, осуществляющее перевод, и есть соответствующее движение $\tilde{x}(\cdot)$. Поскольку $\tilde{P} + Q = P$, то $\forall\, \tilde{u} \in \tilde{P}$, $\forall\, v \in Q$ $\exists\, u \in P: \tilde{u} + v = u$. Поэтому, дискриминируя второго игрока (т.е. по известному текущему $v(t)$) первый игрок в системе (6) задаёт своё текущее управление $u(t)$ в виде $u(t) = \tilde{u}(t) + v(t)$, и система (6) идёт по "стабильной дорожке" $\tilde{x}(\cdot)$.

Возьмём теперь $x_0 \notin \tilde{W}(t_0)$. Тогда в рамках задачи управления системой (7) не существует программного управления $\tilde{u}(\cdot)$, которое приводит в момент $T$ на $M_c$. Следовательно, весь пучок $K$, порождаемый программными управлениями системы (7) из начальной позиции $(t_0, x_0)$, в момент $T$ уклоняется от $M_c$.




[Наши рассуждения носят, конечно, содержательный характер, ибо мы не доказываем замкнутость пучка. Её и нет в классе кусочно-непрерывных допустимых программных управлений.]

Вновь воспользуемся соотношением $\tilde{P} + Q = P$. Получим, что $\forall u \in P \ \exists \tilde{u}, v : \tilde{u} + v = u$. Или $u - v = \tilde{u} \in \tilde{P}$, т.е. по $\forall u \ \exists v : u - v \in \tilde{P}$. Следовательно, первый игрок в системе (6) не может выбрать своё управление обратной связи так, чтобы вывести движение из пучка $K$, исходящего из $(t_0, x_0)$ и порождённого задачей управления с динамикой (7). Таким образом, "множество разрешимости" для первого игрока в системе (6) при целевом множестве $M_c$ полностью определяется соответствующей задачей управления для системы (7): $W = \tilde{W}$.

② Разумеется, естественными и очень важными являются задачи с однотипными объектами, где функция платы зависит лишь от некоторых координат вектора $x$ в момент окончания $T$. Здесь множество $M_c^*$ будем брать в подпространстве только этих координат.

Задачи с линейными однотипными объектами и вообще задачи с линейной динамикой исследованы в книге Н. Н. Красовского "Игровые задачи о встрече движений", 1970.

Геометрическая разность (разность Минковского)

В 1967 г. Л. С. Понтрягин опубликовал в ДАН СССР статью "Линейные дифференциальные игры. I", в которой он указал общий приём задания преимущества первого игрока над вторым для задач с линейной динамикой. Было рассмотрено понятие геометрической разности двух множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B} = \{ x \in R^n : x + \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}. \qquad (8)$$

Т.е. $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}$ – это максимальное множество, элементы которого транслируют вносят $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$.

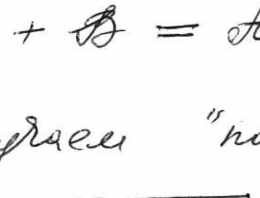
Из (8) имеем

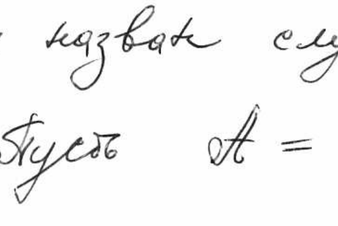
$$(\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}) + \mathcal{B} \subset \mathcal{A}.$$

Частный случай, когда

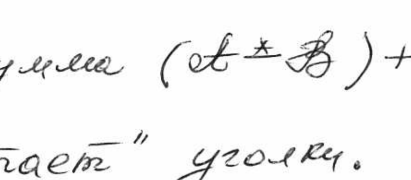
$$(\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}) + \mathcal{B} = \mathcal{A} \qquad (9)$$

был назван случаем "полного выметания".

Пусть $\mathcal{A} =$ , $\mathcal{B} = \bigcirc$. Предположим, что $O \in \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}$ есть




Здесь сумма $(\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B}) + \mathcal{B}$ "не выметает" уголки. Если в качестве $\mathcal{A}$ возьмём уменьшенное множество, такое выметание будет:




Через некоторое время после опубликования статьи Л.С. Понтрягина оказалось, что рассмотренное им понятие известно в математике и называется "разностью Минковского". Оно описано в книге Г. Хадвигер. Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии. 1966. Соответствующие страницы этой книги выложены по адресу материалов для магистрантов. В домашнем задании есть упражнения из пособия Н.Н. Петрова "Введение в выпуклый анализ", Ижевск, 2009. Геометрическая разность описана также в книге Половинкин, Балашов "Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа, Физматлит, 2004.

Известно эквивалентное определение геометрической разности:

$$\mathcal{A} \overset{*}{-} \mathcal{B} = \bigcap_{b \in \mathcal{B}} (\mathcal{A} - b).$$

Доказательство эквивалентности нетрудное.

Как при помощи геометрической разности Л.С. Понтрягин стал задавать преимущество первого игрока над вторым?

Мы знаем, что для игр с фиксированным моментом окончания удобно приводить линейную динамику к виду

$$\dot{y} = D(t)u + E(t)v, \quad u \in P, \; v \in Q.$$

Предположим, что $D(t)P \overset{*}{-} E(t)Q \neq \varnothing$ при $\forall t$. Тогда геометрическую разность можно принять за описание преимущества первого игрока над вторым. При этом $D(t)P = X^*(T,t)B(t)P$, $E(t)Q = X^*(T,t)C(t)Q$.

## 4. Минимакс и максимин

① В теории игр стандартными являются операции inf sup и sup inf. Пусть имеем произвольную скалярную функцию $(a,b) \Rightarrow f(a,b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда всегда

$$\sup_{b \in B} \inf_{a \in A} f(a,b) \le \inf_{a \in A} \sup_{b \in B} f(a,b). \qquad (10)$$

В самом деле, имеем

$$\underbrace{\inf_{a \in A} f(a,b)}_{\text{функция от } b} \le f(a,b), \quad \forall a \in A,\ b \in B$$

$$\Rightarrow \sup_{b \in B} \left(\inf_{a \in A} f(a,b)\right) \le \underbrace{\sup_{b \in B} f(a,b)}_{\text{функция от } a}, \quad \forall a \in A.$$

$$\Rightarrow \sup_{b \in B} \left(\inf_{a \in A} f(a,b)\right) \le \inf_{a \in A}\left(\sup_{b \in B} f(a,b)\right).$$

Противоположное к (10) неравенство выполнено далеко не всегда. На этот счёт есть соответствующие результаты.

② Неравенство седловой точки. Говорят, что функция $f : (a,b) \to f(a,b)$, $a \in A$, $b \in B$, имеет седловую точку, если $\exists$ такие $\hat{a} \in A$, $\hat{b} \in B$, что

$$\gamma(\hat a, b) \le \gamma(\hat a, \hat b) \le \gamma(a, \hat b), \ \forall a\in A,\ b\in B \quad (11).$$

На <u>содержательном</u> уровне надо запомнить, что наличие седловой точки (т.е. неравенство (11)) влечёт за собой равенство $\sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A}\gamma(a,b)=\inf\limits_{a\in A}\sup\limits_{b\in B}\gamma(a,b)$ (т.е. равенство (10)) и наоборот. Но <u>строгая</u> формулировка такая.

Пусть скалярная функция $\gamma$ и множества $A, B$ таковы, что <u>внешние</u> экстремумы в выражениях $\sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A}\gamma(a,b)$ и $\inf\limits_{a\in A}\sup\gamma(a,b)$ <u>достигаются</u>. Обозначим соответствующие множества экстремальных элементов через $\hat B$ и $\hat A$. Пусть есть (10). Тогда $\forall$ пара $\hat a\in\hat A$, $\hat b\in\hat B$ реализует (11).

Наоборот. Пусть для скалярной функции $\gamma$ и множеств $A, B$ есть неравенство седловой точки (11) при некоторых $\hat a\in A$ и $\hat b\in B$. Тогда выполнено равенство (10). Более того, элемент $\hat b$ доставляет внешний sup, а элемент $\hat a$ — внешний inf в (10).

Большое число упражнений на $\inf\limits_{a\in A}\sup\limits_{b\in B}\gamma(a,b)$ и $\sup\limits_{b\in B}\inf\limits_{a\in A}\gamma(a,b)$ имеется в пособии А. И. Благодатских, Н.Н. Петрова "Сборник задач и упражнений по теории игр", изд-во "Лань", 2014.