

Лекции и занятия в этом семестре будут по книге J. Engwerda "LQ Dynamic Optimization and Differential Games". Лекция 1 более вводная. На ней показывались главы 2-4 и давались комментарии к ним. Сейчас переходим к главе 5.

1) Линейно-квадратичная задача оптимизации.

Функционал

$$J(t_0, x_0) = \int_0^T \{ \dot{x}^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt + \dot{x}^T(T) Q_T x(T) \quad (5.2.1)$$

Мы будем придерживаться нумерации из книги.

Начальный момент t_0 полагаем нулевым.

Динамика

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (5.2.2)$$

Матрицы Q, R, Q_T считаем симметричными. Это не является принципиальным. Ранее в книге было описано приём, как от несимметричных матриц перейти к симметричным. Но матрицу R считаем положительно-определённой.

С линейно-квадратичной задачей оптимизации тесно связано матричное уравнение Риккати

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t) A + K(t) S K(t) - Q, \quad K(T) = Q_T \quad (5.2.3)$$

Здесь $S = BR^{-1}B^T$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при симметричном краевом условии $K(T) = K^T(T)$ если $K(t)$ удовлетворяет (5.2.3), то $K^T(t)$ также удовлетворяет этому уравнению. Следовательно, решение $K(t)$ уравнения (5.2.3) есть симметричная матрица.

② Самой важной теоремой в главе 5 является теорема 5.1 (стр. 178) о необходимом и достаточном условии существования решения проблемы (5.2.1), (5.2.2) для любого начального состояния x_0 . Для существования решения требуется наличие (оптимальной) функции $u^*(t)$, доставляющей минимум функционалу (5.2.1) среди управлений на $[0, T]$. [Т.е. рассматриваем программное управление]

Первая часть теоремы 5.1.

Проблема (5.2.1), (5.2.2) имеет решение для любого начального состояния x_0 тогда и только тогда, когда уравнение Риккати (5.2.3) имеет решение $K(t)$ на $[0, T]$

Вторая часть теоремы 5.1.

Если проблема (5.2.1), (5.2.2) имеет решение для любого начального состояния x_0 . Тогда

для любого x_0 такое решение (т.е. управление $u^*(t)$) единственно и имеет вид

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TK(t)x^*(t) \quad (5.2.4)$$

[Стоит ли в книге вместо $x^*(t)$ написать $x(t)$?

В книге такое управление названо "управлением в форме обратной связи". Нет вопросов?]

В форме программного управления его можно записать в виде

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TK(t)\Phi(t,0)x_0, \quad (5.2.5)$$

где $\Phi(t,0)$ - фундаментальная матрица Коши для линейного уравнения

$$\dot{x}(t) = (A - SK(t))x(t).$$

[В книге написано уравнение для фундаментальной матрицы:

$$\dot{\Phi}(t,0) = (A - SK(t))\Phi(t,0), \quad \Phi(0,0) = I.$$

Более того, оптимальное значение равно

$$J(u^*) = x_0^TK(0)x_0.$$

- ③ Достаточное условие в виде предположений о существовании решения уравнения Риккати доказывается не очень длинно. К этому доказательству подсоединяется доказательство о виде оптимального управления.

' $\Leftarrow$ part'

Доказательство. Нам дано решение $K(t)$ уравнения Риккати. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$ можно написать

$$\int_0^T \frac{d}{dt} \{ x^T(t) K(t) x(t) \} dt = x^T(T) K(T) x(T) - x^T(0) K(0) x(0).$$

Предположим, что $x(t)$ - решение уравнения (5.2.2) в силу некоторого $u(t)$, входящего из $x(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} J(0, x(0), u(\cdot)) &= \int_0^T \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt + x^T(T) Q_T x(T) = \\ &= \int_0^T \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt + x^T(T) Q_T x(T) + \\ &+ \int_0^T \frac{d}{dt} \{ x^T(t) K(t) x(t) \} dt - x^T(T) K(T) x(T) + x^T(0) K(0) x(0) = \end{aligned}$$

$$= \int_0^T \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + \frac{d}{dt} \{ x^T(t) K(t) x(t) \} \} dt + \\ + x^T(0) K(0) x(0) + x^T(T) (Q_T - K(T)) x(T).$$

Преобразуем подынтегральное выражение, раскрыв-
вая $\frac{d}{dt} \{ x^T(t) K(t) x(t) \}$:

$$x^T Q x + u^T R u + \frac{d}{dt} \{ x^T K x \} = x^T Q x + u^T R u + \dot{x}^T K x + x^T \dot{K} x + x^T K \dot{x} = \\ = x^T Q x + u^T R u + (Ax + Bu)^T K x + x^T \dot{K} x + x^T K (Ax + Bu) = \\ = x^T (Q + A^T K + K A + \dot{K}) x + u^T R u + u^T B^T K x + x^T K B u =$$

Раскрываем $\dot{K}$

$$= x^T K S K x + u^T R u + u^T B^T K x + x^T K B u =$$

Раскрываем $S = BR^{-1}B^T$

$$= x^T K B R^{-1} B^T K x + u^T R u + u^T B^T K x + x^T K B u =$$

$$= x^T K B (R^{-1} B^T K x + u) + u^T R (u + R^{-1} B^T K x) =$$

$$= (x^T K B + u^T R) (u + R^{-1} B^T K x) =$$

$$= (x^T K B R^{-1} + u^T) R (u + R^{-1} B^T K x) =$$

$$= (u + (K B R^{-1})^T x)^T R (u + R^{-1} B^T K x) =$$

$$= (u + R^{-1} B^T K x)^T R (u + R^{-1} B^T K x)$$

Возвращаемся к полной записи:

$$J(0, x(0), u(\cdot)) = \int_0^T (u(t) + R^{-1} B^T K(t) x(t))^T R (u(t) + R^{-1} B^T K(t) x(t)) dt + x^T(0) K(0) x(0).$$

Умножим сим-
метричность
 R^{-1} и K

Умножим, т.е.
 $K(T) = Q_T$

Матрица R — положительно-определённая. Поэтому минимальное значение будет, когда $u(t) = -R^{-1}B^TK(t)x(t)$. Получаем пару

$u^*(t)$, $x^*(t)$, причём

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TK(t)x^*(t).$$

Это справедливо для $\forall x(0)$ и введём из условия существования решения уравнения Риккати.

Подставим найденное управление в уравнение динамики:

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t) &= Ax^*(t) - BR^{-1}B^TK(t)x^*(t) = \\ &= (A - BR^{-1}B^TK(t))x^*(t) = \\ &= [A - SK(t)]x^*(t).\end{aligned}$$

Обозначая фундаментальную матрицу $K(t)$, соответствующую матрице $A - SK(t)$, через $\Phi(t, \tau)$, получим

$$x^*(t) = \Phi(t, 0)x(0)$$

В итоге, доказали формулу (5.2.5).

Варианты домашнего задания, выполнить и прислать до 16 марта. 19 марта — доклад на занятии. Требуется кратко изложить предложенные материалы из книги.

[1] стр. 179–180 (формулы (5.26)–(5.29)), стр. 224–225 (доказательство леммы 5.2).

[2] стр. 180–182 (лемма 5.3 с доказательством, доказательство свойства параллелограмма

2 человека для J_{inf} + дополнительного свойства для J_{inf} , требуемого в лемме 5.2, следствие 5.4)

стр. 225–226 (лемма 5.2.1 и её доказательство).

[3] стр. 182–183 (лемма 5.5 и её доказательство, следствие 5.6, окончание доказательства теоремы 5.1), стр. 184 (пример 5.1).