Книга Engwerda. Теорема 5.1. Разбор утверждения: пусть LQCP имеет решение для каждого начального состояния x_0, тогда уравнение Риккати имеет симметричное решение на $[0, T]$ (стр. 178).

В отличие от утверждения "уравнение Риккати $\Rightarrow$ LQCP решение для $\forall x_0$", которое доказывается легко, сформулированное утверждение доказывается весьма сложно (стр. 179–183 + стр. 224–226).

Мы обсудим некоторые понятия и непонятные места.

① На стр. 180 вводится понятие "parallelogram identity": функция V удовлетворяет такому свойству, если

$$V(x+y)+V(x-y)=2\{V(x)+V(y)\} \text{ для всех } x, y.$$

?? Как объяснить название свойства?

1) Если положим $x=y=0$, то

$$V(0)+V(0)=2\{V(0)+V(0)\}=4V(0)$$

$$\Rightarrow V(0)=0$$

2) $x=y$

$$V(2x)+\underbrace{V(0)}_{=0}=2\{V(x)+V(x)\}=4V(x)$$

$$\Rightarrow V(2x)=4V(x)$$

3) $x=0$, y

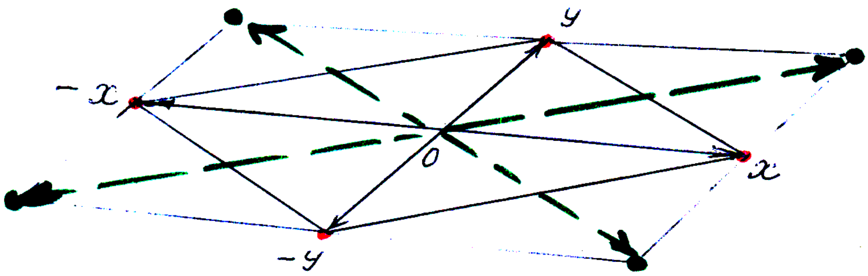
$$V(y)+V(-y)=2V(y)$$

$$\Rightarrow V(-y)=V(y)$$

Опираясь на 3), имеем

$$V(x+y)+V(x-y)=\{V(x)+V(y)\}+\{V(x)+V(-y)\}$$

Справа — значения V в четырёх вершинах параллелограмма. Сумма этих значений равна сумме значений в двух соседних вершинах объемлющего параллелограмма



Но этого мало (?), чтобы объяснить название. Не используем свойство 2), например.

② Доказательство леммы 5.3 о том, что

$$J^{inf}(t,\lambda x_0)=\lambda^2 J^{inf}(t,x_0),$$

очень простое (стр. 180–181). Оно использует только формулу Коши и вид функционала (5.2.6).

③ По доказательству свойства параллелограмма для $J^{inf}(t,x_0(t))$ на стр. 181 есть только одно замечание: символ V используется не в том смысле, что в определении (5.2.8). Но он особо и не нужен.

Свойство параллелограмма отражено в предельном равенстве 4 и 7 строк формульных выкладок.

Доказательство использует лемму 5.2.1 из приложения.

Её доказательство на стр. 225–226 опирается только на формулу Коши. Немного сложно "держать в голове" вводимые обозначения на стр. 226.

④ Для того, чтобы применить лемму 5.2 к $J^{inf}(t, x_0)$, надо доказать, что функция

$$\lambda \to W(\lambda x, y) = J^{inf}(t, \lambda x + y) - J^{inf}(t, \lambda x - y)$$

непрерывна по λ при $\lambda = 0$. Вместо этого доказывается на стр. 181–182, что $J^{inf}(t, x_0)$ непрерывна по x_0.

? Вероятно это так, но почему?

Доказательство непрерывности $J^{inf}(t, x_0)$ по x_0 заканчивается на стр. 182 формулой, где в правой части стоит $e^{A(T-t)}\Delta x$. Откуда такая правая часть?

Вроде бы должно быть выражение, аналогичное правой части в последней формуле на стр. 181, только надо вместо $w(s)$ взять движение, выходящее из точки x_0 в силу управления $u^*_{x_0+\Delta x}$, при этом не забыть скобки в подынтегральном выражении для $\int_t^T$. Получим выражение, из которого вынесется множитель Δx. Т.е. всё в итоге будет доказано.

(5) Окончание доказательства теоремы 5.1' ⇒ part' на стр. 183 красивое и понятное. В конце описка: вместо $t_2 > t_1$ должно быть $t_2 < t_1$.

(6) Corollary 5.7, стр. 183. В первом следствии здесь вместо $u^*(s) = K(s)\,x^*(s)$, видимо, должно быть $u^*(s) = -R^{-1}B^T K(s)\,x(s)$.

(7) Example 5.1. Не проставлены скобки в первой и предпоследней формулах в подынтегральном выражении. Но, похоже, это во многих местах книги и, может быть, сознательно. После формулы (5.2.16) вместо $T < \pi$ надо $T < \frac{\pi}{2}$.

Доказательство для фактов этого примера надо смотреть в журнальных статьях, на которые идут ссылки.

Далее в нашем курсе мы рассмотрим уточнение теоремы 5.1 для случая, когда линейная управляемая система является "управляемой" (ограничение на матрицы A, B). Кроме того, рассмотрим представление решения нелинейного уравнения Риккати в виде решения двух связанных линейных уравнений. Затем посмотрим принцип максимума Понтрягина для линейно-квадратичных задач.