

- ① В теории управления важным является понятие управляемости (полной управляемости). Система обладает таким свойством, если её при помощи некоторого программного управления $u(\cdot)$ можно перевести из любого начального состояния $x(t_1)$ в момент t_1 в любое заданное состояние $x(t_2)$ в момент t_2 . [Управление $u(\cdot)$, конечно, зависит от $t_1, x(t_1)$ и от $t_2, x(t_2)$]. Отсюда какое-либо "геометрическое" ограничение на $u(t)$ не устанавливается. В случае линейной системы с постоянными матрицами A, B свойство управляемости определяется именно этими матрицами и записывается в виде: матрица $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ имеет ранг n , где n - размерность фазового вектора.

На стр. 186-189 книги Т. Енгверда сформулировано несколько утверждений, упрощающих доказательство основной теоремы 5.1 при наличии свойства управляемости. Упрощения связаны с доказательством импликации $\Rightarrow$ в формулировке теоремы 5.1. Сама теорема при этом не усиливается. Основным упрощающим утверждением, связанным с импликацией $\Rightarrow$ в т. 5.1, является теорема 5.8, стр. 186.

По сути теорема 5.1, где требуется полная управляемость, рассматриваются утверждения с "уравновесной" управляемостью (управляемостью на подпространствах)

Также уточняем формулировку теоремы 5.1
ее происхождение, но пропускаем этот материал.

② Матричное уравнение Риккати как следствие двух линейных матричных уравнений

В теории линейно-квадратного регуля оптимальное управление имеет уравнение Риккати (5.2.3):

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t)A + K(t)S K(t) - Q, \quad K(T) = Q_T.$$

где $S = B R^{-1} B^T$. Здесь матрицы Q, Q_T, R - симметричны, а R еще и положительно-определенна. Эти матрицы берутся из функционала (5.2.1):

$$J = \int_0^T \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt + x^T(T) Q_T x(T).$$

Удобнее всего увидеть то, что в соответствие (5.2.3) можно поставить систему

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U(T) \\ V(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix}, \quad (5.3.3)$$

где $\bar{U}(\cdot)$ - невырожденная матрица. Тогда
этом все решение (5.2.3) получается из (5.3.3)
и наоборот.

Это в несколько более общем виде сформулировано в Теореме 5.12 и в кунском виде в следствии 5.13 на стр. 194. Разберём доказательство.

1) Пусть $U(\cdot), V(\cdot)$ удовлетворяют (5.3.3) и $U(t)$ при любом $t \in [0, T]$ имеет обратную матрицу $U^{-1}(t)$. Тогда $U(t)U^{-1}(t) = I$. Дифференцируем это соотношение по t :

$$\dot{U}(t)U^{-1}(t) + U(t)\frac{d}{dt}\{U^{-1}(t)\} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\{U^{-1}(t)\} = -U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t).$$

Зададим $K(t)$ в виде $K(t) = V(t)U^{-1}(t)$. Дифференцируем

$$\dot{K}(t) = \dot{V}(t)U^{-1}(t) - V(t)U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t) \stackrel{(5.3.3)}{=} =$$

$$= (-Q U(t) - A^T V(t))U^{-1}(t) -$$

$$- V(t)U^{-1}(t)(A U(t) - S V(t))U^{-1}(t) =$$

$$= -Q - A^T K(t) - K(t)A + K(t)S K(t)$$

Таким образом, введенное нами $K(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати. Удовлетворяется и требуемое краевое условие $K(T) = V(T)U^{-1}(T) = Q_T$.

2) Пусть, наоборот, дано решение $K(\cdot)$ уравнения Риккати с краевым условием $K(T) = Q_T$.

Формально введем функцию (матрицу) $U(\cdot)$ как решение матричного уравнения

$$\dot{U}(t) = (A - SK(t))U(t), \quad U(T) = I.$$

Зададим $V(t)$ в виде $V(t) = K(t)U(t)$. Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - SK(t))U(t) \\ K(t)\dot{U}(t) + \dot{K}(t)U(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} AU(t) - SV(t) \\ (-Q - A^TK(t) - K(t)A + K(t)SK(t))U(t) + K(t)(A - SK(t))U(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} AU(t) - SV(t) \\ -QU(t) - A^TK(t)U(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$$

Таким образом, введенные $U(\cdot)$, $V(\cdot)$ (они определены через $K(\cdot)$), удовлетворяют (5.3.3) и краевые условия для них $\begin{pmatrix} U(T) \\ V(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ Q_T \end{pmatrix}$, т.е. те, которые надо.

Функция максимума Столбункина для линейно-квадратичных задач.

Сформулируем ПМП для поставленной задачи. Ответ интересен вопрос — связано ли как-то уравнение Риккати (его решение с сопряженной системой)

будем использовать прямой из 1 измерения обозначения.

Ради удобства перед функционалом 5.1.2 поставим коэффициент $\frac{1}{2}$. Он не влияет на вид оптимального управления, но сделает вкладки функции максимум более приятными.

1) Введем функцию Гамильтона

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2}(x^T Q x + u^T R u) + \lambda^T (Ax + Bu) \quad (1)$$

Здесь λ - вектор-состояния. Тогда для начальной точки x_0 и оптимального программного управления $u^*(\cdot)$ существует движение $\lambda^*(\cdot)$

сопряженной системы такое, что

$$\max_u H(x^*(t), u, \lambda^*(t)) = H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)). \quad (2)$$

Движение $x^*(\cdot)$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T (x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)), \quad (3)$$

движение $\lambda^*(\cdot)$ сопряженной системы - соотношение

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T (x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)). \quad (4)$$

с краевыми условиями $\lambda^*(T) = -\text{grad} \frac{1}{2} x^*(T)^T Q_T x^*(T)$.

2) Конкретизируем уравнение для $\lambda^*(\cdot)$.

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^{*T} Q x^*) \right)^T - (\lambda^{*T} A)^T$$

$$\text{Имеем } \frac{\partial}{\partial x} x^{*T} Q x^* = 2 x^{*T} Q.$$

[Доказательство. Обозначим первые компоненты в $x^T Q x$ через z^T . Это вектор-строка.

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (x^T Q x) &= \frac{\partial}{\partial z} (\overbrace{z^T Q x}^{\text{скалярное произведение}}) + \frac{\partial}{\partial x} (z^T Q x) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} ((Qx)^T z) + x^T Q = (Qx)^T + x^T Q = \\ &= 2 x^T Q \end{aligned}$$

Используем, что Q — симметричная матрица

Таким образом,

$$\dot{\lambda}^*(t) = -Q x^*(t) - A^T \lambda^*(t). \quad (5)$$

Краевое условие

$$\begin{aligned} \underline{\lambda^*(T)} &= -\text{grad} \left(\frac{1}{2} x^{*T}(T) Q_T x^*(T) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{*T}(T) Q_T x^*(T) \right)^T = \\ &= -\frac{1}{2} (2 x^{*T}(T) Q_T)^T = -\underline{Q_T x^*(T)}. \end{aligned}$$

3) Из условия максимума (2) латентное оптимальное управление. У нас нет геометрических ограничений. Поэтому просто проинтерпретируем H по x и приравняем производную к нулю.

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = \frac{1}{2} 2 u^*(t) R + \lambda^{*T}(t) B =$$

$$= u^{*T}(t) R + \lambda^{*T}(t) B = 0$$

$$\Rightarrow u^{*T}(t) = -\lambda^{*T}(t) B R^{-1}$$

$$u^*(t) = -(\lambda^{*T}(t) B R^{-1})^T = -(R^{-1})^T B^T \lambda^*(t) = \quad (6)$$

$$= -R^{-1} B^T \lambda^*(t).$$

Подставляем (6) в (3):

$$\dot{x}^*(t) = A x^*(t) - \underbrace{B R^{-1} B^T}_{S} \lambda^*(t) = A x^*(t) - S \lambda^*(t) \quad (7)$$

Начальное условие x_0 .

4) Объединим (5) и (7):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

с краевыми условиями

$$\begin{bmatrix} x^*(T) \\ \lambda^*(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -Q_T x^*(T) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) с точностью до знака в краевом условии для $\lambda^*(T)$ совпадают с формулами на с. 195 книги, которые приведены без доказательства.

Отличие объясняется тем, что в книге использована "пронцип минимума", а не "максимума".

Соответственно, краевое условие для сокращённых переменных идёт с другим знаком.

При решении книги возникают вопросы, где $\lambda(t)$ — строка, а где столбец.

5) Сравнивая (5.3.3) с (8)-(9), видно, что форма уравнений (5.3.3) и (8) — одна и та же. Но (5.3.3) — это матричное уравнение, а (8) — обыкновенное. Краевые условия для $V(t)$ и $\lambda(t)$ отличаются знаком, но этому легко объяснить. Для $V(t)'$ и $x(0)$ краевые условия не похожи, и не только потому, что $V(t)$ — это условие на правом конце, а $x(0)$ — на левом; они равны по смыслу.

Вопрос. Что означает совпадение форм уравнений (5.3.3) и (8)? Можно ли как-то показать, что из этого следует?