Линейно-квадратичные задачи с бесконечным горизонтом

(1) Подразумеваются задачи, где верхний предел интегрирования равен ∞ в записи функционала, при этом убирают терминальное слагаемое:

$$J(x_0, u) = \int_0^{\infty} \{x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)\} dt, \qquad (5.4.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \qquad (5.4.2)$$

Ясно, что здесь разрушается многое, что было в задачах, где промежуток времени был $[0, T]$. Там главную роль играло уравнение Риккати, и для его решения $K(\cdot)$ оговаривалось краевое условие $K(T)$, равное Q_T. Матрица Q_T стояла в терминальном слагаемом функционала. Если сейчас выдумывать что-то подобное, то вместо $K(T)$ что надо будет взять? В (5.4.1) можно считать $Q_T = 0$ и тогда естественно попытаться полагать $K(T=\infty) = 0$, если опять возникнет решение уравнения Риккати. Но возникнет ли?

Ещё очевидная трудность. Надо позаботиться, чтобы интеграл с ∞ в верхнем пределе был конечен в естественных случаях. В связи с этим по постановке задачи можно положить, что допустимыми являются только такие управления $u(\cdot)$, для которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Именно так и предполагается в разделе 5.4.

Здесь сразу возникает связь с задачами теории устойчивости, где накоплен громадный опыт исследования движений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Не случайно учёные, занимавшиеся теорией устойчивости, стали работать потом в области линейно-квадратичных задач управления.

В качестве допустимых для задачи (5.4.1), (5.4.2) можно рассматривать программные управления $u(\cdot)$. Такой вариант упоминается в книге на стр. 200. Но основным автор считает вариант, когда допустимыми являются управления обратной связи $u = F \cdot x$, обеспечивающие для любого x_0 стремление $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

По поводу определений. Пара (A, B) называется <u>стабилизируемой</u> (stabilizable), если для $\forall x_0$ $\exists$ кусочно-непрерывное $u(\cdot)$ такое, что $x(t) \to 0$, когда $t \to \infty$ (стр. 92).

Динамическая система $\dot{x} = Dx$ называется <u>устойчивой</u> (stable), если действительная часть каждого собственного числа матрицы D <u>отрицательна</u>.

В (5.4.2) есть A и B. Вводится совокупность матриц $\mathcal{F} = \{F \mid A + BF \text{ — устойчива}\}$. Таким образом, допустимые F берём из $\mathcal{F}$.

[На стр. 93 в Th. 3.20 устанавливается, что свойство стабилизируемости (A, B) и наличие устойчивой F — это одно и то же]

Как и ранее, в (5.4.1) матрица Q считается симметричной, а матрица R положительно-определённой. О симметричности R почему-то не сказано в начале раздела 5.4. Как обычно, полагается

$$S = BR^{-1}B^T.$$

(2) Выбрав какое-то $F \in \mathcal{F}$, получаем

$$J(x_0, F) = \int_0^\infty x^T(s)(Q + F^T R F)x(s)\,ds$$

Подставляя далее вместо $x(s)$ решение однородной системы $\dot{x}(s) = (A + BF)x(s)$ с начальным условием x_0, имеем

$$J(x_0, F) = x_0^T \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{(e^{(A+BF)s})^T (Q + F^T R F) e^{(A+BF)s}} ds}\, x_0 \quad (1)$$

$$[\, x(s) = e^{(A+BF)s} x_0 \Rightarrow x^T(s) = x_0^T (e^{(A+BF)s})^T \,].$$

Получившийся интеграл не зависит от x, представляет собой матрицу, определяемую через F. Обозначим его P. Стало быть, $J(x_0, F) = x_0^T P x_0$ – квадратичная форма от x_0. Можно попробовать вывести уравнение для P.

Продифференцируем по s подынтегральное выражение в (1) и рассмотрим интеграл от производной:

$$\int_0^\infty \frac{d}{ds}\{\underline{\qquad}\}\, ds = \overbrace{0 - (Q + F^T R F)}^{\text{разность крайних значений для } \underline{\quad}}$$

Теперь расписываем интегральное выражение слева, используя производную от $e^{\sim}$ по s. Вспоминая обозначение P, получим

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) = -(Q + F^T R F).$$

Это и есть матричное уравнение для P.

Оно называется уравнением Ляпунова. При его получении мы использовали, что $e^{(A+BF)s} \to 0$ при $s \to \infty$, т.е. наше предположение о стабилизируемости системы $\dot{x} = Ax + BFx$.

[Можно ли ещё более понятно объяснить появление уравнения Ляпунова для P?]

?

③ Теорема о необходимых и достаточных условиях решения линейно-квадратичной задачи с бесконечным горизонтом

Такая теорема сформулирована на стр. 197 и является аналогом теоремы 5.1, относящейся к конечному горизонту T. Там главным было дифференциальное уравнение Риккати с краевым условием на правом конце. Сейчас взамен возникает алгебраическое матричное уравнение Риккати

$$Q + A^T X + XA - XSX = 0 \qquad (5.4.4)$$

и его решение K такое, что матрица $A - SK$ является устойчивой, т.е. система $\dot{x} = (A - SK)x \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема 5.14. Пусть система (A, B) стабилизируема. Линейно-квадратическая проблема управления имеет минимизующее управление $\hat{F} \in \mathcal{F}$, которое годится для каждого x_0, тогда и только тогда, когда алгебраическое уравнение (5.4.4) имеет симметричное стабилизирующее решение K.

Если лин.-кв. задача имеет решение, тогда оно единственно и задаётся $\hat{F} = -R^{-1}B^T K$, т.е.

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T K\, x(t) \qquad (5.4.5).$$

Таким образом, структурно оптимальное управление в форме обратной связи задаётся, как в Th. 5.1.

Вопрос. В теореме 5.14 говорится о симметричном решении уравнения Риккати. Говорит ли это о том, что могут быть несимметричные решения, но они нас не интересуют?

Доказательство в сторону $\Leftarrow$ (т.е. есть решение уравнения Риккати, получаем решение лин.кв.задачи) в идеологическом плане копирует доказательство $\Leftarrow$ в теореме 5.1. Разобрать это доказательство самим. Доказательство $\Rightarrow$ идеологически другое.

Вопрос. Есть алгебраическое уравнение Ляпунова и уравнение (алгебраическое) Риккати. Как они связаны?

④ В начале лекции было сказано, что в качестве допустимых можно брать и программные управления. На стр. 200 приведено утверждение на эту тему.

Вопрос Посмотреть это утверждение. Вытекает ли из него, что оптимальное значение функционала для постановок в классе линейных управлений обратной связи и в классе программных управлений совпадают?

?

⑤ Естественным является вопрос о переходе к пределу при $T \to \infty$ от лин. кв. задач с конечным T к задачам, где $T = \infty$. При этом считаем, что в задаче с конечным горизонтом $Q_T = 0$. Об этом говорится на стр. 201 и далее на стр. 209–210. В частности, если $Q_T = 0$, то сходится ли решение $K(0)$ дифференциального уравнения Риккати (5.2.3) к какому-то решению алгебраического уравнения Риккати (5.4.4)?

⑥ Рассмотрим простой пример, показывающий, что связь задач с конечным и бесконечным горизонтами есть не всегда.

Пример 5.6, стр. 203–204.

1) Пусть $J = \int_0^T u^2(t)dt$

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x \in R^1$$

Поскольку $x(t)$ не входит в функционал, то очевидно, что оптимальное $u(t) \equiv 0$.

Выпишем дифференциальное уравнение Риккати.
В нашем случае $A = 1$, $B = 1$, $R = 1$, $Q = 0$, $Q_T = 0$.
Поэтому

$$\dot{K}(t) = -A^T K(t) - K(t) A + K(t) \underbrace{S}_{BR^{-1}B} K(t) - Q =$$

$$= -1 \cdot K - K \cdot 1 + K^2 - 0 = -2K(t) + K^2(t), \quad K(T) = 0.$$

Решением такого дифференциального уравнения является $K(t) \equiv 0$. Поэтому по теории также получаем, что в задаче с конечным горизонтом

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T \underbrace{K(t)}_{=0} x(t) = 0.$$

2) Рассмотрим теперь $J = \int_0^\infty u^2(t)dt$.
Соответствующее уравнение (алгебраическое) Риккати

$$Q + A^T X + XA - XSX = 0$$

имеет вид

$$1 \cdot X + X \cdot 1 - X^2 = 0 \qquad (X \text{ - скалярное})$$

У него два решения $X_1 = 0$, $X_2 = 2$.

Мы должны выбрать такое решение K, чтобы система $\dot{x} = (A - SK)x$ была устойчивой.

Берём $X = 0$, т.е. $K = 0$. Получаем

$\dot{x} = (1 - 1\cdot 0)x = 1\cdot x$.

Не подходит

Берём $X = 2$, т.е $K = 2$. Получаем

$\dot{x} = (1 - 1\cdot 2)x = -x$

Подходит. Тогда по теореме 5.14 соответствующее $u^*(t) = -R^{-1}B^T K x(t) = -2x(t)$. В задаче с бесконечным горизонтом и требованием, что $x(t) \to 0$ мы должны выбрать именно такую $u^* = -2x$ обратную связь. Мы не получаем перехода от задачи с конечным горизонтом к задаче с бесконечным горизонтом.

3) Изменим динамику:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0$$

Показатель оставим старым. Тогда $A = -1$ и уравнение Риккати (дифференциальное) будет

$$\dot{K}(t) = 2K(t) + K^2(t), \quad K(T) = 0.$$

Здесь только одно решение $K(t) \equiv 0$.
Поэтому в проблеме с конечным горизонтом получим, как и в первом примере, $u^*(t) = 0$.

В задаче с бесконечным горизонтом алгебраическое уравнение Риккати сейчас будет

$$-2X - X^2 = 0$$

или

$$2X + X^2 = 0$$

Решение одно: $X = 0$. Проверяем $\dot{x} = (A - SK)x = (-1-0)x = -x$ при $K = X = 0$. Устойчивость есть. Соответствующее $u^*(t) = 0$. Задача с конечным горизонтом при $T \to \infty$ переходит в задачу с бесконечным горизонтом.