Кооперативные игры и оптимум по Парето

(1) Пусть есть N игроков и у каждого свой функционал

$$J_i = \int_0^T \{x^T Q_i x(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)\} dt + x^T(T) Q_{T,i} x(T), \quad i=\overline{1,N}. \tag{6.0.1}$$

Движение подчиняется системе

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 u_1 + \ldots + B_N u_N, \quad x(0) = x_0. \tag{6.0.2}$$

Пусть определены допустимые способы управления игроков (например, программные управления или линейные управления по принципу обратной связи). Но что понимать под оптимальным решением? Другой (или даже связанный с этим) вопрос: в процессе принятия решения игроки договариваются между собой или действуют независимо?

(2) Очень популярным является понятие оптимума по Pareto.

Набор стратегий (или просто управлений) $\hat{\gamma}$ называется оптимальным по Парето, если для любого допустимого набора γ не может быть выполнена совокупность неравенств

$$J_i(\gamma) \le J_i(\hat{\gamma}), \quad i=\overline{1,N},$$

где по крайней одно неравенство строгое.

Конечно, это определение записано для случая, когда индивидуально каждый игрок стремится уменьшить свой показатель.

Для случая двух игроков, когда точку $(J_1(\gamma), J_2(\gamma))$ изображаем на плоскости, скользящий по границе третий квадрант не должен содержать других точек из допустимого множества X векторных значений показателей,

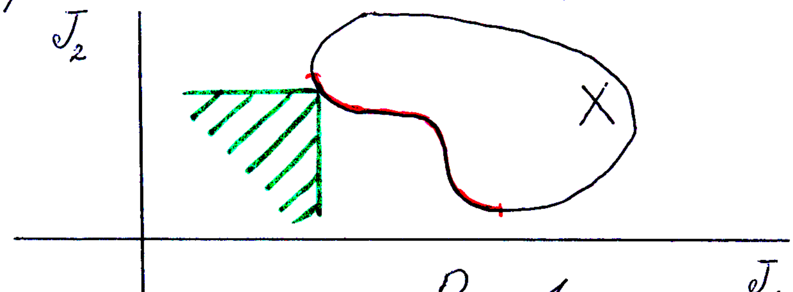


Рис. 1.

кроме точки вершины квадранта. На рисунке совокупность точек в X оптимальных по Парето (Парето фронт) отмечена красным цветом.

③ В инженерной практике часто берут скалярную с коэффициентами $\alpha_i > 0$ свёртку критериев J_i:

$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\gamma)$. При этом можно наложить условие $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$. Предположим, что $\hat{\gamma} \in \arg\min_{\gamma \in \Gamma} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\gamma)\right)$ [здесь Γ – совокупность допустимых стратегий].

Тогда $\hat{\gamma}$ – Парето оптимальная стратегия (Лемма 6.1). Доказательство очень простое (стр. 231). От противного. Пусть $\exists \bar{\gamma}$:

$J_i(\bar{\gamma}) \leq J_i(\hat{\gamma})$, $i = \overline{1, N}$, причём хотя бы одно неравенство строгое. Но тогда

$\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\bar{y}) < \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i J_i(\tilde{y})$, что противоречит тому, что $\tilde{y}$ доставляет min именно при этих коэффициентах α_i [используем, что $\alpha_i > 0$]

В инженерной практике коэффициенты α_i выбирают эмпирически. Потом берут min по y при выбранных коэффициентах. Доказанное выше означает, что получают точку оптимальную по Парето. Но оптимальных по Парето точек может быть много. Хотелось бы "посмотреть" их все и из каких-то дополнительных соображений выбрать одну. Возникает вопрос: все ли оптимальные по Парето точки образуются путем скалярной свертки? Ответ — нет. Но в частном случае предположений о выпуклости — да.

4) Пусть $A = \{\alpha_i \geq 0, i = \overline{1,N}, \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1\}$

Это доказали выше

Теорема 6.4 Пусть $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,N}$, $\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$. Если $\hat{y} \in \Gamma$ такое, что $\hat{y} \in \arg\min\limits_{y \in \Gamma} \{\sum \alpha_i J_i(y)\}$. Тогда $\hat{y}$ — оптимум по Парето. Если

Γ_i и J_i выпуклые для всех $i=\overline{1,N}$ тогда для каждой Парето оптимальной $\hat{\gamma}$ существует $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)$ такое, что $\hat{\gamma}\in\arg\min\limits_{\gamma\in\Gamma}\{\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i J_i(\gamma)\}$.

[Формулировка теоремы 6.4 дана на стр. 234, доказательство предшествует формулировке]

Вопрос Попробовать "осмыслить" вторую часть теоремы. Положить $i=1,2$ и $J_i(\gamma)=\gamma_i$. Тогда в предположении о выпуклости возникает такая картинка

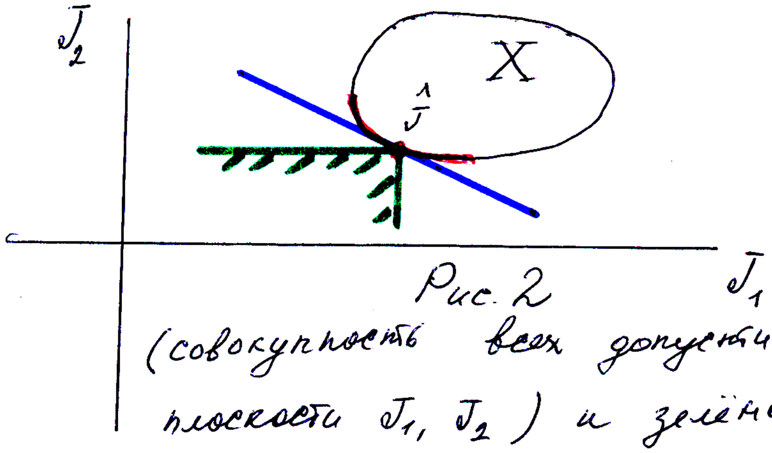


Рис. 2

Красным отмечен Парето фронт. Для любой его точки выпуклые множества X (совокупность всех допустимых точек на плоскости J_1, J_2) и зелёное множество (совокупность точек, доминирующих точку $\hat{J}$ в смысле min) разделяются синей прямой.

Эту прямую опишем соотношением

$$\hat{\alpha}^T J=\hat{\alpha}^T\hat{J}. \tag{1}$$

Коэффициенты $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$ трактуем как координаты вектора нормали к прямой (1). Из вида зеленого множества заключаем, что $\hat{\alpha}_1\geq 0$, $\hat{\alpha}_2\geq 0$ (нормаль направим в полуплоскость, где лежит X). Стало быть, при переходе от $\hat{J}$ к произвольной точке J из X функция $J\to\hat{\alpha}^T J$ не убывает. От вектора требуется только направление. Поэтому ограничимся нормалями с компонентами $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, для которых $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

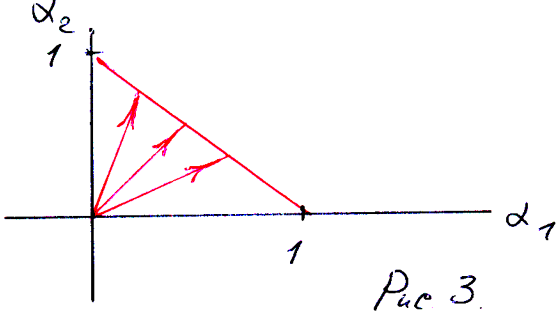


Рис 3.

? Осмыслив примерно в таком стиле вторую часть теоремы, разобрать её формальное доказательство на стр. 233.

Убедиться, что при отсутствии выпуклости X (рис. 1) приведённая схема рассуждений не проходит.

? Вопрос. В первой части теоремы 6.4 (лемма 6.1) требуется, что все $\alpha_i \in (0, 1)$. Можно ли придумать контрпример к усилению этого утверждения, когда все $\alpha_i \in [0, 1]$? Ясно, что доказательство на стр. 231 для этого случая не проходит. Но, может быть, можно сделать другое?

Подходит ли такой контрпример?

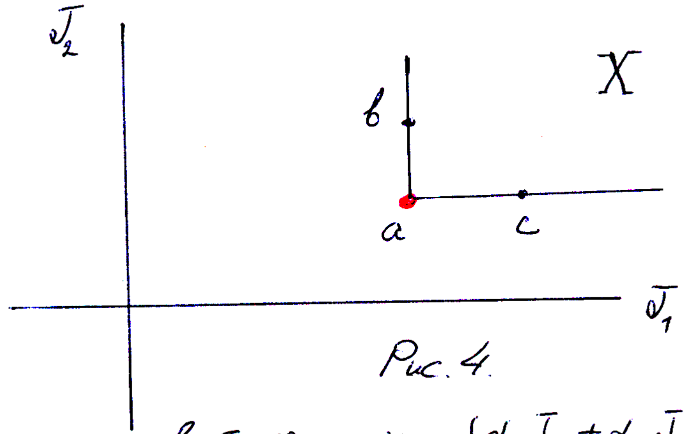


Рис. 4.

Здесь Парето фронт состоит из одной точки a. Но для всех точек b на вертикальной части границы

$b \in \arg\min\limits_{J \in X} \{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2\}$ для $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. Но если $b \neq a$, то она не является Парето оптимальной. Аналогично для точек c на горизонтальной части границы X.

(5) Подчеркнём, что Парето оптимальные стратегии — это кооперативные стратегии: выбор какой-либо Парето оптимальной точки — это результат договорённости между игроками. Теорема 6.4 позволяет, работая со скалярной сверткой критериев, находить все Парето оптимальные точки: зафиксировав набор α_i, $i = \overline{1,N}$, $\alpha \in A$, находим $J^*(\alpha)$, ему соответствующее. Надо только осторожно относиться к найденным $J^*(\alpha)$ в случае, когда среди α_i есть нулевые: среди найденных $J^*(\alpha)$ могут не быть Парето оптимальные. Но если все $\alpha_i > 0$, беспокоиться не о чем. Конечно, это только

при выполнении предположения о выпуклости, которое есть в теореме 6.4.

Исследование Парето фронта – это обширная область в линейно-квадратичных играх. Для обеспечения свойства выпуклости дополнительно предполагается, что при любом $i=\overline{1,N}$ матрица $Q_i \geq 0$. [Как это показать?]

?

Вопрос. На поясняющем рис 2 выпуклым изображено множество X, т.е. множество всех исходов на плоскости J_1, J_2. В то же время в теореме 6.4 говорится лишь о выпуклости множеств Γ_i и J_i для каждого $i=\overline{1,N}$. В чём дело?

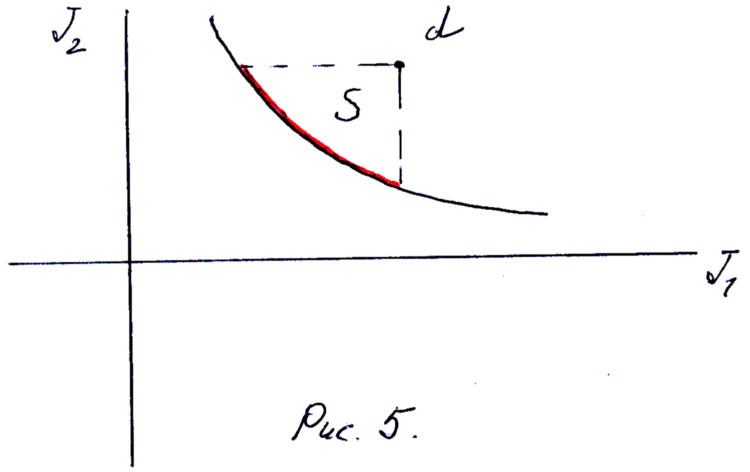
?

(6) Какая из оптимальных по Парето точек лучше? (выбор с использованием дополнительных признаков)

Типично, что оптимальных по Парето точек много. Можно ввести дополнительные признаки, какую точку выбирать.

В книге описываются три подхода. В целом тематика инициирована работами Nash, выполненными в начале 50 годов прошлого века.

В каждом из трёх подходов выделяется точка d в пространстве исходов (threatpoint), координаты которой дают каждому игроку значение функционала, которое он получает, если не участвует в общем соглашении. Для него это некоторое большое значение (каждый из игроков стремится минимизировать функционал. Задание точки d вырезает некоторое множество оптимальных по Парето исходов (показано красным на рис. 5)



Опирающееся на него множество обозначим через S (feasible set).

Рис. 5.

1) Подход Нэша. Выбрав некоторую точку $J \in S$ с компонентами J_i, $i=\overline{1,N}$, вычисляем произведение $\prod_{i=1}^{N}(d_i - J_i)$ и останавливаемся на точке, для которой это произведение (площадь для случая двух игроков) максимально. Если d выбрана так, что S "опирается" на множество оптимальных по Парето точек, то "наилучшая" в смысле произведения точка J^* является оптимальной по Парето. Обозначим её $N(S, d)$

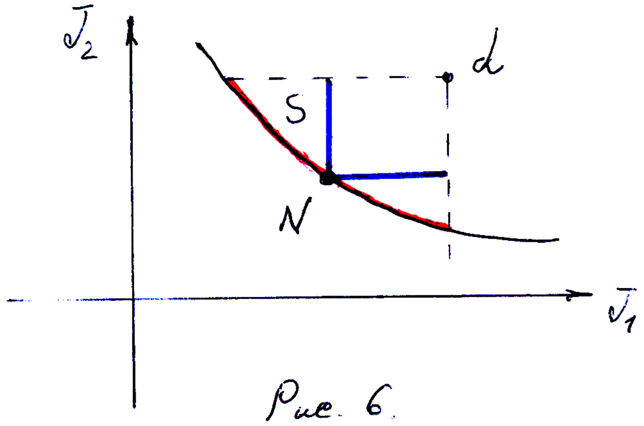
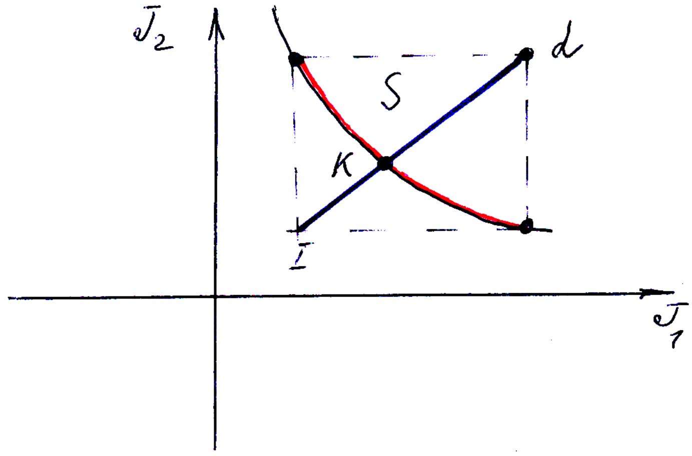


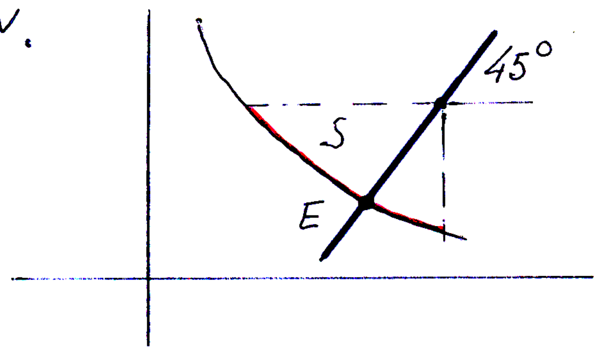
Рис. 6.

2) Подход Kalai–Smorodinsky. Находится точка I (ideal point), составленная из минимально возможных компонент для каждого игрока (если другие игроки действуют наиболее доброжелательно к нему). В целом



точка I допустимой не является. Далее соединяем отрезком I с d и находим пересечение с Парето фронтом. Получаем точку $K(S, d)$.

3). Уравновешанное решение. Это такая точка фронта (попадающего в S), что для её компонент $E_i(S,d)$ выполняется равенство $d_i - E_i(S,d) = d_j - E_j(S,d)$, $i, j = \overline{1, N}$.



$E(S, d)$ – egalitarian solution.

Очень важно, что указанные три варианта выбора из точек Парето фронта (мы дали их геометрическую интерпретацию) подвергнуты широкому обсуждению с экономической точки зрения. Nash предложил систему математических аксиом, которой удовлетворяет предложенное им решение. Разработаны численные алгоритмы нахождения перечисленных решений.

Главный вопрос по лекции 6. Как выпуклость множества допустимых исходов на плоскости J_1, J_2 можно получить из предположения о выпуклости множеств управляемых исходов J_1 и J_2. В связи с этим было бы полезным посмотреть пример 6.1 на стр. 235-238.