

Переходим к некооперативным линейно-квадратичным играм программного управления (глава 7). Постараемся формулировать утверждения максимально похожие на те, что были для задач управления в лекции 2.

① Функционалы и динамика

$$J_i(u_1, \dots, u_N) = \int_0^T \left\{ x^T(t) Q_i x(t) + \sum_{j=1}^N u_j^T(t) R_{ij} u_j(t) \right\} dt + x^T(T) Q_{iT} x(T) \quad i = \overline{1, N} \quad (7.02)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 u_1(t) + \dots + B_N u_N(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.01).$$

Все матрицы в (7.02) симметричные, R_{ii} — положительно-определённые для $i = \overline{1, N}$.

Видим, что это есть обобщение функционала (5.1.2) и динамики (5.1.1).

Допустимыми считаем программное управление $u_i(\cdot)$.

② Равновесие по Нэшу

Равновесием называется набор $(u_1^*, \dots, u_N^*)$ программных управлений, для которого

$$J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i^*, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*)$$

при любом управлении u_i . Т.е. если игрок i отклоняется от предписанного в наборе управления u_i^* , значение его функционала (если бы игрок использовал предписанное управление) может быть больше (т.е. для него хуже).

Встаёт вопрос о развитии теории, связанное с существованием и характером равновесия по Нэшу управлений.

Понятие равновесия было введено Нэшем в самом начале 50-х годов. Оно обобщает обычное понятие оптимальности для задач с одним игроком. Какие уравнения Риккати появятся в новой постановке. Какую структуру будут иметь равновесные программные управления?

Чтобы не загромождать изложение, результаты в книге формулируются для случая двух игроков.

В главе 5 основная теорема 5.1 о необходимых и достаточных условиях существования оптимального управления (стр. 178). Достаточное условие « $\Leftarrow$ опт» опирается на предположение о существовании на $[0, T]$ решения уравнения Риккати с конечным условием в момент T . Аналогом такого достаточного условия является теорема 7.2 (стр. 270-271).

③ Теорема о достаточных условиях равновесия по Нэшу и о виде равновесных программных управлений.

Предположим, что

$$\begin{aligned} 1. \text{ Два связанных матричных уравнения Риккати} \\ \dot{P}_1 = -A^T P_1 - P_1 A - Q_1 + P_1 S_1 P_1 + P_1 S_2 P_2, \quad P_1(T) = Q_{1T}, \\ \dot{P}_2 = -A^T P_2 - P_2 A - Q_2 + P_2 S_2 P_2 + P_2 S_1 P_1, \quad P_2(T) = Q_{2T} \end{aligned} \quad (1)$$

имеют решение P_i , $i=1,2$, на $[0, T]$;
 2. Два матричных дифференциальных уравнения Риккати

$$\dot{K}_i(t) = -A^T K_i(t) - K_i(t)A + K_i(t)S_i K_i(t) - Q_i, \quad K_i(T) = Q_{iT}, \quad i=1,2 \quad (2)$$

имеют симметричное решение $K_i(\cdot)$ на $[0, T]$.

Тогда линейно квадратичная игра имеет единственное равновесие по Нэшу для любого начального состояния. Более того, равновесные управления даются формулой

$$u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T P_i(t) \Phi(t, 0) x_0, \quad i=1,2. \quad (3)$$

Здесь $\Phi(t, 0)$ — фундаментальная матрица Коши уравнений

$$\dot{\Phi}(t, 0) = (A - S_1 P_1 - S_2 P_2) \Phi(t, 0), \quad \Phi(0, 0) = I. \quad (4)$$

В формулах (1), (2), (4) матрица $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$.

Обсуждение

Видим, что уравнение Риккати (2) совпадает с тем, что было в задаче управления. Для $i=1,2$ уравнения развязаны. То уравнения (1) независимые (последние слагаемые) и их в задаче

и их ранжирование не было. Точнее, если есть почти один игрок, то оба уравнения в (1) переходят в уравнения Риккати (2), т.е. ничего нового не дают. Но именно через $P_i(t)$ определяется соотношение для равновесного управления $u_i^*(t)$. В случае одного игрока $P_i(t) = K_i(t)$ и соотношение (3) переходит в набор соотношений (5.2.5). Уравнение для функциональной матрицы (4) естественно переходит в то соотношение, что было для ввода управления в теореме 5.1.

Следует подчеркнуть также, что сформулированные условия обеспечивают уникальность равновесного набора.

Примечание. Теорема 7.2 в отличие от теоремы 5.1 даёт только достаточное условие существования равновесных управлений.

Указательство теоремы 7.2 опирается на теорему 7.1 и последующие замечания. Все взгляды логически замкнуты. Поэтому доказательство не рассматриваем.

④ В лекции 4 рассматривалось представление комплексного матричного уравнения Риккати через два матричных линейных уравнения. Аналогичное деление сейчас для матричных уравнений (1), т.е. для $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Представление $P_1(t)$ и $P_2(t)$ через решения матричных уравнений

Следствие 7.3 (сир. 271). Связанная система матричных уравнений Риккати для P_1 и P_2 на $[0, T]$ имеет решение тогда и только тогда, когда система матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{U}(t) \\ \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} U(t) \\ V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (7.2.10)$$

с краевыми условиями

$$\begin{bmatrix} U(T) \\ V_1(T) \\ V_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{I} \\ Q_{1T} \\ Q_{2T} \end{bmatrix}$$

имеет решение на $[0, T]$, причем $U(t)$ имеет обратную.

Более того, если (7.2.10) даёт решение $(U(\cdot), V_1(\cdot), V_2(\cdot))$ с невырожденной $U(t)$, то $P_i(t) = V_i(t) \cdot U^{-1}(t)$, $i=1, 2$. В (7.2.10) матрица

M имеет вид

$$M = \begin{bmatrix} A & -S_1 & -S_2 \\ -Q_1 & -A^T & 0 \\ -Q_2 & 0 & -A^T \end{bmatrix}.$$

В задаче управления вместо матрицы M была матрица $\begin{bmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ (5.3.2). Аналогом следствия 7.3 была теорема

⑤ Антагонистические игра двух лиц.

Если мы возьмем два игрока и одну и ту же функционал для них, но только один игрок минимизирует, а второй максимизирует, то получим игру, которую называют антагонистической. Но можно рассмотреть и две. Будем для первого игрока задать функционал $J_1(u_1, u_2)$, а он заинтересован в его минимизации. Функционал $J_2(u_1, u_2)$ возьмем в виде $J_2(u_1, u_2) = -J_1(u_1, u_2)$. Второй игрок также заинтересован в минимизации функционала $J_2(u_1, u_2)$. Конечно, это означает, что максимизирует функционал $J_1(u_1, u_2)$. Сумма $J_1(u_1, u_2) + J_2(u_1, u_2)$ равна нулю. Поэтому говорить об игре с нулевой суммой.

Итак,

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

$$J_1(u_1, u_2) = \int_0^T \{x^T(t) Q x(t) + u_1^T(t) R_1 u_1(t) - u_2^T(t) R_2 u_2(t)\} dt + x^T(T) Q_T x(T) \quad (6)$$

Здесь в функционале перед управлением второго игрока стоит знак "минус". Так обстоит дело, чтобы обратиться сдерживательным образом: второй игрок максимизирует функционал (6), но не в своих "бесконечно больших" управлениях. Далее положим

$$J_2(u_1, u_2) = -J_1(u_1, u_2) \quad (7)$$

Теперь оба игрока заинтересованы в минимизации своих функционалов. В качестве показателя равновесия берём равновесие по Нэшу.

Как и ранее, матрицы Q , Q_T и R_i , $i=1,2$, считаем симметричными; кроме того, матрицы R_i , $i=1,2$, положительно-определёнными.

Применяем к рассматриваемой зада формулировке ранее в этой лекции результаты. Как и ранее, $S_1 = B_1 R_1^{-1} B_1^T$, $S_2 = B_2 R_2^{-1} B_2^T$. Для стандартных уравнений Риккати тогда, как обычно:

$$\dot{K}_1(t) = -A^T K_1(t) - K_1(t) A + K_1(t) S_1 K_1(t) - Q, \quad K_1(T) = Q_T \quad (7.2.12)$$

$$\dot{K}_2(t) = -A^T K_2(t) - K_2(t) A + K_2(t) S_2 K_2(t) + Q, \quad K_2(T) = -Q_T \quad (7.2.13)$$

Оптимизируем эти уравнения, что они имеют решение на $[0, T]$, при этом симметричные.

Для связанных уравнений Риккати:

$$\dot{P}_1(t) = -A^T P_1(t) - P_1(t) A - Q + P_1(t) S_1 P_1(t) + P_1(t) S_2 P_2(t), \quad P_1(T) = Q_T \quad (7.2.14)$$

$$\dot{P}_2(t) = -A^T P_2(t) - P_2(t) A + Q + P_2(t) S_2 P_2(t) + P_2(t) S_1 P_1(t), \quad P_2(T) = -Q_T \quad (7.2.15)$$

Согласно теореме 7.2 предполагаем, что эти уравнения имеют решения на $[0, T]$.

Скелуєвєє (7.2.14) и (7.2.15), полуєєм уравнение для $(P_1 + P_2)(t)$:

$$\frac{d(P_1 + P_2)}{dt}(t) = -A^T(P_1 + P_2)(t) - (P_1 + P_2)(t)A + (P_1 + P_2)(S_1 P_1(t) + S_2 P_2(t)),$$

$$(P_1 + P_2)(T) = 0 \quad (8)$$

Очевидно, что $(P_1 + P_2)(t) \equiv 0$ єєєє решение такого уравнения. Тогда $P_1(t) = -P_2(t)$. Но используем единственность, как сказано в книге? Представим $P_2(t) = -P_1(t)$ в (7.2.14):

$$\begin{aligned} \dot{P}_1(t) &= -A^T P_1(t) - P_1(t)A - Q + P_1(t)S_1 P_1(t) - P_1(t)S_2 P_1(t) = \\ &= -A^T P_1(t) - P_1(t)A - Q + P_1(t)(S_1 - S_2)P_1(t), \quad P_1(T) = Q. \end{aligned}$$

Т. е. $P_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}(t) = -A^T P - PA - Q + P(S_1 - S_2)P, \quad P(T) = Q \quad (7.2.11)$$

Но для $P_2(t) = -P_1(t)$ этого уже не происходит? Какая тогда логика дальше? Если (7.2.14) и (7.2.15) имеют симметричные решения $P_1(t)$ и $P_2(t)$, то условие т. 7.2 выполнено. Кроме того, мы установили, что $P_2(t) = -P_1(t)$. Теперь $P_1(t)$ удовлетворяет (7.2.11). Следовательно, высшего (7.2.14) можно написать (7.2.11). Но откуда следует, что (7.2.15) имеет решение? В утверждении 7.6 (стр. 277) требуется, чтобы решение было только у (7.2.11). Либо это можно вывести из того, что есть решение у (7.2.11) и у (8)?

Наконец, из теоремы 7.2 получим

$$u_1^*(t) = -R_1^{-1} B_1^T \underline{P_1(t)} \Phi(t, 0) x_0 = -R_1^{-1} B_1^T \underline{P(t)} \Phi(t, 0) x_0,$$

$$\begin{aligned} u_2^*(t) &= -R_2^{-1} B_2^T \underline{P_2(t)} \Phi(t, 0) x_0 = +R_2^{-1} B_2^T \underline{P_1(t)} \Phi(t, 0) x_0 = \\ &= R_2^{-1} B_2^T \underline{P(t)} \Phi(t, 0) x_0, \end{aligned}$$

где $\Phi(t, 0)$ — фундаментальная матрица Коши
для уравнения

$$\dot{\Phi}(t, 0) = (A - (S_1 - S_2) P(t)) \Phi(t, 0), \quad \Phi(\tau, \tau) = I.$$



Итак, теперь следует решить у (7.2.15), что мы
получили только с (7.2.11) в результате 7.6 (стр. 277)