Кратко познакомимся с утверждениями, связанными с равновесием по Нэшу в случае, когда верхний предел интеграла платы равен ∞. В книге это стр. 283–295.

1 Постановка задачи

В качестве критерия для каждого игрока (считаем, что их два) берётся предел

$$\lim_{T\to\infty} J_i(x_0, u_1, u_2, T), \qquad (7.4.1)$$

где $J_i = \int_0^T \{x^T(t) Q_i x(t) + u_i^T(t) R_i u_i(t)\} dt.$

Поскольку предполагается, что при $T \to \infty$ состояние $x(T) \to 0$, то терминальный член $x^T(T) Q_{iT} x(T)$ не пишется. Хотя разговоры о том, что оба игрока заинтересованы в пределе $x(T) \to 0$, не очень понятны. Скорее причина в том, что теория разработана только для этого случая.

Перекрестный член $u_j^T(t) R_{ij} u_j(t)$ (входящие управления j-го игрока, $j \neq i$) опущен, ибо при исследовании равновесия по Нэшу мы считаем, что j-ый игрок придерживается предписанного управления, а отклоняется только i-ый. Поэтому интеграл от управления j-го игрока идёт как добавка $c_j(T)$ в функционале i-го игрока. Отмечается, что она не играет существенной роли.

Динамика, как и раньше, подчинена уравнению

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \qquad x(0) = x_0 \qquad (7.4.2)$$

Матрицы R_i, Q_i в функционале предполагаются симметричными, матрица R_i положительно-определённая.
Новое состоит в том, что пары матриц (A, B_i), $i = 1, 2$ предполагаются стабилизируемыми, т. е. существует $u_i(\cdot)$ такое, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.
При этом $u_2(t) \equiv 0$ [так?]

Есть тонкости в задании множеств допустимых управлений, но мы на это (пока, при первом знакомстве) не обращаем внимание, стр. 283–284. В целом, допустимые управления программные.

2 Основной результат – теорема 7.13 (аналог т. 7.2)

1. Предположим, что алгебраические уравнения Риккати

$$0 = A^T P_1 + P_1 A + Q_1 - P_1 S_1 P_1 - P_1 S_2 P_2 \qquad (7.4.5)$$

$$0 = A^T P_2 + P_2 A + Q_2 - P_2 S_2 P_2 - P_2 S_1 P_1 \qquad (7.4.6)$$

имеют решения P_i, $i = 1, 2$, причём матрица $A - S_1 P_1 - S_2 P_2$ is stable (т.е. действительные части всех её собственных значений отрицательны)

2. Два алгебраических уравнения Риккати

$$0 = A^T K_i + K_i A - K_i S_i K_i + Q_i\,, \quad i = 1, 2, \qquad (7.4.7)$$

имеют симметричное решение K_i такое, что матрица $A - S_i K_i$ is stable.

Тогда игра (7.4.1), (7.4.2) имеет ситуацию равновесия по Нэшу в программных управлениях для любого начального состояния. Более того, для такого равновесия соответствующие программные управления имеют вид

$$u_i^*(t) = -R_i^{-1} B_i^T P_i \Phi(t,0) x_0, \quad i = 1,2 \qquad (7.4.8)$$

Здесь фундаментальная матрица $\Phi(t,0)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\Phi}(t,0) = (A - S_1 P_1 - S_2 P_2)\Phi(t,0), \quad \Phi(t,t) = I.$$

Главное отличие от теоремы 7.2 в том, что сейчас уже не говорится об единственном равновесии по Нэшу, как было в теореме 7.2, стр. 271.

! Как и раньше, $S_i = B_i R_i^{-1} B_i^T$. Обратим внимание, что правая часть матричных алгебраических уравнений (7.4.5) и (7.4.6) совпадает с правой частью дифференциальных уравнений (1) в теореме 7.2 (знак изменён, но это не имеет значения). Аналогично для матричного уравнения (7.4.7) относительно K_i.

! Очень интересным является замечание на стр. 288 о бесконечном числе ситуаций равновесия по Нэшу. Было бы полезным разобрать это.

(3) Уточнением теоремы 7.13 в отношении единственности ситуации равновесия по Нэшу является теорема 7.16, стр. 288, о необходимом и достаточном условии единственности ситуации равновесия по Нэшу в программных управлениях.

Теорема 7.16. Линейно-квадратичная игра (7.4.1), (7.4.2) имеет единственное равновесие по Нэшу в программных управлениях для каждого начального состояния тогда и только тогда, когда

1. связанные уравнения Риккати имеют строго стабилизирующее решение (strongly stabilizing solution)
2. два алгебраических уравнения Риккати (7.4.7) имеют стабилизирующее решение.

Более того, единственные управления для ситуации равновесия даются (7.4.8).

Трудность состоит в правильном понимании, что такое "strongly stabilizing solution". Определение 7.2 дано на стр. 279. Формально оно означает следующее. Решение связанных уравнений Риккати называется стабилизирующим, если действительные части всех собственных значений матрицы $A - S_1 P_1 - S_2 P_2$ отрицательны; называется strongly (сильно, строго) стабилизирующим, если оно стабилизирующее и дополнительно все собственные значения матрицы

$$\begin{bmatrix} -A^T + P_1 S_1 & P_1 S_2 \\ P_2 S_1 & -A^T + P_2 S_2 \end{bmatrix} \qquad (7.3.4)$$

имеют неотрицательные реальные части.

На стр. 279-283 есть утверждения, связывающие понятие strongly stabilizing с другими понятиями и матрицами. Но это надо изучать отдельно. Жалко, что нет какого-либо качественного пояснения, что это такое. В примере 7.7 на стр. 288 рассмотрена задача с двумя видами динамики. В одной из динамик strongly stabilizing есть (стр. 288): $\dot{x}(t) = -2x(t) + u_1(t) + u_2(t)$,

$$J_1 = \int_0^\infty \{x^2(t) + u_1^2(t)\}dt, \quad J_2 = \int_0^\infty \{4x^2(t) + u_2^2(t)\}dt,$$

в другой (стр. 289) нет: $\dot{x}(t) = 2x(t) + u_1(t) + u_2(t)$, функционалы те же. Во втором случае нет единственности ситуации равновесия по Нэшу. Более того, таких равновесий ∞.

Второе условие в теореме 7.16 требует наличие стабилизирующего решения у уравнения Риккати

$$0 = A^T K_i + K_i A - K_i S_i K_i + Q_i \qquad (7.4.7)$$

Это означает (пояснение на стр. 279 верх), что решение K_i симметрично и матрица $A - S_i K_i$ стабильна. Т.е. это совпадает с условием 2 в теореме 7.13.

④ Рассмотрим утверждение об антагонистической игре с бесконечным горизонтом (стр. 290–291).

Динамика

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t), \quad x(0) = x_0 \qquad (7.4.13)$$

Функционал для первого игрока

$$J_1(u_1, u_2) = \int_0^\infty \{ x^T(t) Q x(t) + u_1^T(t) R_1 u_1(t) - u_2^T(t) R_2 u_2(t) \} dt \qquad (7.4.14)$$

Для второго игрока

$$J_2(u_1, u_2) = -J_1(u_1, u_2).$$

Матрицы Q и R_i, $i = 1,2$, симметричны. Кроме того, матрицы R_i положительно-определённые.

Справедливы утверждения.

1. Для каждого начального состояния x_0 существует ситуация равновесия по Нэшу, реализуемая в виде синтеза по обратной связи тогда и только тогда, когда

a) связанные алгебраические уравнения Риккати

$$A^T P_1 + P_1 A + Q - P_1 S_1 P_1 - P_1 S_2 P_2 = 0 \qquad (7.4.15)$$

$$A^T P_2 + P_2 A - Q - P_2 S_2 P_2 - P_2 S_1 P_1 = 0 \qquad (7.4.16)$$

имеют решения P_i, $i = 1,2$, такие что матрица $A - S_1 P_1 - S_2 P_2$ стабильна и

в) два алгебраических уравнения Риккати

$$A^T K_1 + K_1 A - K_1 S_1 K_1 + Q = 0 \qquad (7.4.17)$$

$$A^T K_2 + K_2 A - K_2 S_2 K_2 - Q = 0 \qquad (7.4.18)$$

имеют симметр. решения K_i такие, что $A - S_i K_i$ стабильна.

Более того, соответствующее равновесие реализуется на

$$u_1^*(t) = -R_1^{-1} B_1^T P_1 x(t), \quad u_2^*(t) = -R_2^{-1} B_2^T P_2 x(t),$$

где $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = (A - S_1 P_1 - S_2 P_2) x(t), \quad x(0) = x_0.$$

2. Единственная ситуация равновесия по Нэшу реализуется тогда и только тогда, когда пара связанных алгебраических уравнений Риккати (7.4.15) и (7.4.16) имеет strongly stabilizing решение и две алгебраических уравнения Риккати (7.4.17) и (7.4.18) имеют симметричное stabilizing решение. Соответствующая ситуация равновесия реализуется как в пункте 1.

Уточнение этого утверждения, когда матрица A является стабильной (все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части), содержится в предложении 7.20. Сформулируем его.

Дополнительно к условиям 7.17 предположим, что матрица A стабильна. Тогда игра имеет для каждого начального состояния единственное равновесие по Нэшу в программных управлениях тогда и только тогда, когда выполнены условия

1. Алгебраическое уравнение Риккати

$$A^T P + PA + Q - P(S_1 - S_2)P = 0$$

имеет такое симметричное решение, что $A - (S_1 - S_2)P$ стабильна.

2. Два алгебраических уравнения Риккати (7.4.17) и (7.4.18) имеют такое симметричное решение, что матрица $A - S_i K_i$ стабильна.

Более того, соответствующее равновесие реализуется на управлениях

$$u_1^*(t) = -R_1^{-1} B_1^T P x(t), \quad u_2^*(t) = R_2^{-1} B_2^T P x(t),$$

где $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = (A - (S_1 - S_2)P)\, x(t), \quad x(0) = x_0.$$

Цена игры при этом $J_1 = x_0^T P x_0$, $J_2 = -J_1$.

Дальнейшее уточнение содержится в предложении 7.21, где предполагается, что A является стабильной и матрица Q положительно-определенная. Тогда единственное равновесие по Нэшу существует тогда и только тогда, когда алгебраические уравнения Риккати

$$A^T P + PA + Q - P(S_1 - S_2)P = 0$$

$$A^T K + KA + K S_2 K + Q = 0$$

имеют решения $\bar{P}$ и $\bar{K}$ такие, что $A - (S_1 - S_2)\bar{P}$ и $A + S_2 \bar{K}$ являются стабильными. Движение $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) = (A - (S_1 - S_2)\bar{P})\, x(t); \quad x(0) = x_0.$$

Цена игры имеет вид $J_1 = x_0^T \bar{P} x_0$, $J_2 = -J_1$